Probabilidad Condicional

Si el evento B ya ha sucedido, la probabilidad de A dada que ya sucedió B, denotado por **P(A/B)**, está dada por:

$$P\,(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ej. En una empresa hay 100 automóviles, algunos eléctrico (E), manuales (M), nuevos (N) y usados (U), como se muestra en la tabla.

	E	**M**
N	40	30
U	20	10

1) Si se elige un auto al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sea:

a) eléctrico? $\boldsymbol{P(E) = \frac{60}{100}}$ **= 0.6**

b) manual? $\boldsymbol{P(M) = \frac{40}{100}}$ **= 0.4**

c) nuevo? $\boldsymbol{P(N) = \frac{70}{100}}$ **= 0.7**

d) usado? $\boldsymbol{P(U) = \frac{30}{100}}$ **= 0.3**

2) Si se elige un auto al azar y se descubre que es nuevo. Cuál es la probabilidad de que sea:

a) **¿Eléctrico?**

$$P\,(E/N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)} = \frac{0.4}{0.7} = 0.57$$

b) ¿Manual?

$$P\,(M/N) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)} = \frac{0.3}{0.7} = 0.42$$

3) **Si se elige un auto al azar y se descubre que es eléctrico. Cuál es la probabilidad de que sea:**

a) **¿Nuevo?**

$$P\,(N/E) = \frac{P(N \cap E)}{P(E)} = \frac{0.40}{0.6} = 0.\overline{6666}$$

b) **¿Usado?**

$$P\,(U/E) = \frac{P(U \cap E)}{P(E)} = \frac{0.20}{0.6} = 0.\overline{3333}$$

Regla del producto

Del concepto de probabilidad condicional se obtiene una expresión llamada regla del producto para la probabilidad de intersección de eventos:

$$P(A \cap B) = P(A/B) * P(B)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A/B \cap C) * \ P(B/C) * \ P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A/B \cap C \cap D) * \ P(B/C \cap D) * \ P(C/D) * \ P(D)$$

Ej. Una caja contiene 6 fichas rojas, 4 blancas y 5 azules. Cual es la probabilidad de que se extraigan sucesivamente una ficha roja, luego una blanca y luego una azul si:

a) **No se repone**
b) **Sí se repone**

$$\boldsymbol{R_1,\ B_2, A_3.}$$

a) $P(A_3 \cap \ B_2 \cap \ R_1) = P(A_3/B_2 \cap R_1)\ P\,(B_2/R_1)\ P(R_1)$

$$= \left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{4}{14}\right)\left(\frac{6}{15}\right)$$

$$= 0.043$$

b) $P(A_3 \cap \ B_2 \cap \ R_1) = P(A_3/B_2 \cap R_1)\ P\,(B_2/R_1)\ P(R_1)$

$$= \left(\frac{5}{15}\right)\left(\frac{4}{15}\right)\left(\frac{6}{15}\right)$$

$$= 0.037$$

Ejercicio. Se seleccionan 2 fichas al azar sin remplazo de una urna con 4 blancas y 8 negras. Calcular la probabilidad de que:

a) **Ambas fichas sean blancas.**
b) **La segunda ficha sea blanca.**

a) $P(B_2 \cap B_1) = P(B_2/B_1)\ P(B_1) = \left(\frac{4}{12}\right)\left(\frac{3}{11}\right) = \frac{1}{11} = 0.09$

b) $P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap N_1) = 0.09 + 0.242 = 0.332$

$P(B_2 \cap N_1) = P(B_2/N_1)\ P(N_1) = \left(\frac{8}{12}\right)\left(\frac{4}{11}\right) = 0.242$

Ejercicio: Una caja contiene 20 fusibles de los cuales 5 son defectuosos. Si 3 de estos fusibles son tomados al azar en sucesión y sin remplazo:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los 3 sean defectuosos?
b) Si los dos primeros están defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que el tercero sea no defectuoso?
c) Si los dos primeros son NO defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que el tercero sea defectuoso?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos primeros sean NO defectuosos y el tercero defectuoso?

a) $P(D_3 \cap D_2 \cap D_1) = P(D_3/D_2 \cap D_1)\ P(D_2/D_1)\ P(D_1)$

$$= \left(\frac{5}{20}\right)\left(\frac{4}{19}\right)\left(\frac{3}{18}\right) = \frac{1}{114} = \mathbf{0.0087}$$

b) $P(N_3/D_2 \cap D_1)) = \frac{15}{18} = \mathbf{0.8333}$

c) $P(D_3)/(N_2 \cap N_1) = \left(\frac{5}{18}\right) = \mathbf{0.277}$

d) $P(D_3 \cap N_2 \cap N_1) = P(D_3/N_2 \cap N_1)\ P(N_2/N_1)\ P(N_1)$

$$= \left(\frac{5}{18}\right)\left(\frac{14}{19}\right)\left(\frac{15}{20}\right) = \frac{35}{228} = \mathbf{0.1535}$$

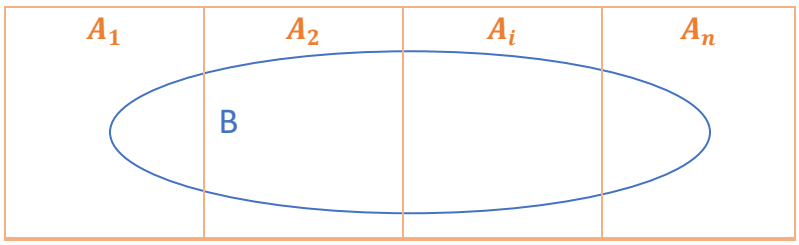
Probabilidad Total

Sean $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventos tales que:

$$\delta = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

Con $\boldsymbol{A_i \cap A_j = 0 \qquad (i \neq j)}$

Sea también B evento de δ tal que $\boldsymbol{A_i \cap B \neq 0}$



$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_i) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$$
$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$
$$P(B) = P(B/A_1)\, P(A_1) + P(B/A_2)\, P(A_2) + \cdots + P(B/A_n)\, P(A_n)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/Ai)\, P(Ai)$$

Teorema de Bayes

Para cualquier evento $B \subset \delta$ se tiene:

$$P(Ai/B) = \frac{P(B \cap Ai)}{P(B)}$$

$$P(Ai/B) = \frac{P(B/Ai)\, P(Ai)}{P(B/Ai)\, P(A_1) + P(B/Ai)\, P(A_1) + \cdots + P(B/A_n)\, P(A_n)}$$

Ej. **Una fábrica recarga sus extintores con las empresas A, B, C. El 35% los recarga con la empresa A, el 45% con la B y el 20% con la C. Se sabe que hay un porcentaje de las recargas defectuosas de las empresas A, B, C son 3%, 4%, y 6% respectivamente.**

a) **Si se selecciona un extintor recién recargado, ¿Cuál es la Probabilidad de que este defectuoso?**

Si el extintor seleccionado está mal recargado, ¿Cuál es la Probabilidad de haber sido enviado a:

b) **la empresa A?**
c) **la empresa B?**
d) **la empresa C?**

a) D: "Defectuoso"

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) \\ &= P(D/A)\,P(A) + P(D/B)\,P(B) + P(D/C)\,P(C) \\ &= (0.03)(0.35) + (0.04)(0.45) + (0.06)(0.2) \\ &= 0.0405 \end{aligned}$$

b) $P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{P(D/A)\,P(A)}{0.0405} = \frac{(0.03)*(0.35)}{0.0405}$
$= 0.2592$

c) $P(B/D) = \frac{P(D \cap B)}{P(D)} = 0.444$

d) $P(C/D) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = 0.29\overline{6}$

Ejemplo. **En cierta escuela de nivel superior 30% de los alumnos son fumadores. Se sabe que la Probabilidad de enfermarse de cáncer de pulmón es de 10% para fumadores y 1% para No fumadores.**

a) **Si un estudiante es elegido al alzar, ¿Cuál es la Probabilidad de tener Cáncer?**
b) **Si tiene Cáncer, ¿Cuál es la Probabilidad de que sea Fumador?**
c) **Si tiene Cáncer, ¿Cuál es la Probabilidad de que no fume?**

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \cap F) + P(C \cap N) \\ &= P(C/F)\;P(F) + P(C/N)\,P(N) \\ &= (0.1)(0.3) + (0.01)(0.7) \end{aligned}$$

a) $P(C) = 0.03 + 0.007 = 0.037$

$$P(F/C) = \frac{P(C \cap F)}{P(C)} = \frac{P(C/F)\,P(F)}{0.037}$$

b) $P(F/C)$=0.8108

$$P(N/C) = \frac{P(C \cap N)}{P(C)} = \frac{(0.01)(0.7)}{0.037}$$

c) $P(N/C) = 0.1891$