Problemas resueltos

La distribución binomial

7.1 Evalúe

a) $5!$ *c*) $\binom{8}{3}$ *e*) $\binom{4}{4}$

b) $\dfrac{6!}{2!\,4!}$ *d*) $\binom{7}{5}$ *f*) $\binom{4}{0}$

SOLUCIÓN

a) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) $\dfrac{6!}{2!\,4!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1)(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \dfrac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$

c) $\binom{8}{3} = \dfrac{8!}{3!\,(8-3)!} = \dfrac{8!}{3!\,5!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1)(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$

d) $\binom{7}{5} = \dfrac{7!}{5!\,2!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)(2 \cdot 1)} = \dfrac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$

e) $\binom{4}{4} = \dfrac{4!}{4!\,0!} = 1$ ya que, por definición, $0! = 1$

f) $\binom{4}{0} = \dfrac{4!}{0!\,4!} = 1$

7.2 Suponga que 15% de la población es zurda. Determine la probabilidad de que en un grupo de 50 individuos haya *a*) a lo sumo 10 zurdos, *b*) al menos 5 zurdos, *c*) entre 3 y 6 zurdos inclusive y *d*) exactamente 5 zurdos. Utilice Minitab para resolverlo.

SOLUCIÓN

a) El resultado de Minitab se muestra a continuación: El comando `cdf 10;` con el subcomando binomial `n = 50` y `p = .15` da la probabilidad requerida. La probabilidad de que a lo sumo sean 10 zurdos en un grupo de 50 es 0.8801.

```
MTB > cdf 10;
SUBC> binomial n = 50 p = .15.
```

Cumulative Distribution Function

```
Binomial with n = 50 and p = 0.150000
      x       P( X <= x)
   10.0         0.8801
```

b) A continuación se muestra el resultado de Minitab. El complemento del evento **al menos 5 zurdos** es el evento **a lo sumo 4 zurdos**. Usando el hecho de que P (evento) $= 1 - P$ (complemento del evento), se tiene $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0.1121 = 0.8879$.

```
MTB > cdf 4;
SUBC> binomial n = 50 p = .15.
```

Cumulative Distribution Function

```
Binomial with n = 50 and p = 0.150000
      x        P( X <= x)
    4.00         0.1121
```

c) A continuación se muestra el resultado de Minitab. $P(3 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 2) = 0.3613 - 0.0142 = 0.3471$.

```
MTB > cdf 6;
SUBC> binomial n = 50 p = .15.
```

Cumulative Distribution Function

```
Binomial with n = 50 and p = 0.150000
      x        P( X <= x)
    6.00         0.3613
```

```
MTB > cdf 2;
SUBC> binomial n = 50 p = .15.
```

Cumulative Distribution Function

```
Binomial with n = 50 and p = 0.150000
      x        P( X <= x)
    2.00         0.0142
```

d) A continuación se muestra el resultado de Minitab. De éste, se puede ver que $P(X = 5) = 0.1072$.

```
MTB > pdf 5;
SUBC> binomial n = 50 p = .15.
```

Probability Density Function

```
Binomial with n = 50 and p = 0.150000
      x        P( X = x)
    5.00         0.1072
```

7.3 Calcule la probabilidad de que en 5 lanzamientos de un dado, se obtenga un 3: *a*) ninguna vez, *b*) una vez, *c*) dos veces, *d*) tres veces, *e*) cuatro veces y *f*) cinco veces.

SOLUCIÓN

La probabilidad de obtener 3 en un lanzamiento $= p = \frac{1}{6}$, y la probabilidad de obtener ningún 3 en un lanzamiento $= q = 1 - p = \frac{5}{6}$; por lo tanto,

a) $\Pr\{3 \text{ ocurre } 0 \text{ veces}\} = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5 = (1)(1)\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3\,125}{7\,776}$

b) $\Pr\{3 \text{ ocurre una vez}\} = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4 = (5)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{3\,125}{7\,776}$

c) $\Pr\{3 \text{ ocurre dos veces}\} = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = (10)\left(\frac{1}{36}\right)\left(\frac{125}{216}\right) = \frac{625}{3\,888}$

d) $\Pr\{3 \text{ ocurre tres veces}\} = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = (10)\left(\frac{1}{216}\right)\left(\frac{25}{36}\right) = \frac{625}{3\,888}$

e) $\Pr\{3 \text{ ocurre cuatro veces}\} = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^1 = (5)\left(\frac{1}{1\,296}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{25}{7\,776}$

f) $\Pr\{3 \text{ ocurre cinco veces}\} = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^0 = (1)\left(\frac{1}{7\,776}\right)(1) = \frac{1}{7\,776}$

Nótese que estas probabilidades representan los términos de la expansión binomial

$$\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)^5 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right) + \binom{5}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \binom{5}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \binom{5}{4}\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^4 + \left(\frac{1}{6}\right)^5 = 1$$

7.4 Escriba la expansión binomial de *a*) $(q+p)^4$ y *b*) $(q+p)^6$.

SOLUCIÓN

a) $$(q+p)^4 = q^4 + \binom{4}{1}q^3p + \binom{4}{2}q^2p^2 + \binom{4}{3}qp^3 + p^4$$
$$= q^4 + 4q^3p + 6q^2p^2 + 4qp^3 + p^4$$

b) $$(q+p)^6 = q^6 + \binom{6}{1}q^5p + \binom{6}{2}q^4p^2 + \binom{6}{3}q^3p^3 + \binom{6}{4}q^2p^4 + \binom{6}{5}qp^5 + p^6$$
$$= q^6 + 6q^5p + 15q^4p^2 + 20q^3p^3 + 15q^2p^4 + 6qp^5 + p^6$$

Los coeficientes 1, 4, 6, 4, 1 y 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 se denominan *coeficientes binomiales*, correspondientes a $N = 4$ y $N = 6$, respectivamente. Al escribir estos coeficientes para $N = 0, 1, 2, 3, \ldots$, como se muestra en el siguiente orden numérico, se obtiene un arreglo llamado *triángulo de Pascal*. Nótese que el primero y último números de cada renglón son 1 y que se puede obtener cualquier otro número al sumar los dos números ubicados a su derecha e izquierda, en el renglón anterior.

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1   6  15  20  15   6   1
```

7.5 Calcule la probabilidad de que en una familia con cuatro hijos haya *a*) al menos un niño y *b*) al menos un niño y una niña. Suponga que la probabilidad del nacimiento de un varón es de $\frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN

a) $\Pr\{1 \text{ niño}\} = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$ $\quad\Pr\{3 \text{ niños}\} = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

$\Pr\{2 \text{ niños}\} = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$ $\quad\Pr\{4 \text{ niños}\} = \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$

Entonces

$$\Pr\{\text{al menos 1 niño}\} = \Pr\{1 \text{ niño}\} + \Pr\{2 \text{ niños}\} + \Pr\{3 \text{ niños}\} + \Pr\{4 \text{ niños}\}$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

Otro método

$$\Pr\{\text{al menos 1 niño}\} = 1 - \Pr\{\text{ningún niño}\} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

b) $\Pr\{\text{al menos 1 niño y 1 niña}\} = 1 - \Pr\{\text{ningún niño}\} - \Pr\{\text{ninguna niña}\}$

$$= 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \frac{7}{8}$$

7.6 De un total de 2 000 familias con 4 hijos cada una, ¿cuántas se esperaría que tuvieran: *a*) al menos 1 niño, *b*) 2 niños, *c*) 1 o 2 niñas y *d*) ninguna niña? Véase el problema 7.5*a*).

SOLUCIÓN

a) Número esperado de familias con al menos 1 niño = 2 000($\frac{15}{16}$) = 1 875

b) Número esperado de familias con 2 niños = 2 000 · Pr{2 niños} = 2 000 ($\frac{3}{8}$) = 750

c) $\Pr\{1 \text{ o } 2 \text{ niñas}\} = \Pr\{1 \text{ niña}\} + \Pr\{2 \text{ niñas}\} = \Pr\{1 \text{ niño}\} + \Pr\{2 \text{ niños}\} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.
Número esperado de familias con una o dos niñas = 2 000($\frac{5}{8}$) = 1 250

d) Número esperado de familias sin niñas = 2 000($\frac{1}{16}$) = 125

7.7 Si 20% de las tuercas producidas por una máquina son defectuosas, determine la probabilidad de que de 4 tuercas tomadas al azar *a*) 1, *b*) 0 y *c*) a lo sumo 2 sean defectuosas.

SOLUCIÓN

La probabilidad de encontrar una tuerca defectuosa es $p = 0.2$ y la probabilidad de encontrar una no defectuosa es $q = 1 - p = 0.8$.

a) $\Pr\{1 \text{ tuerca defectuosa de } 4\} = \binom{4}{1}(0.2)^1(0.8)^3 = 0.4096$

b) $\Pr\{\text{ninguna tuerca defectuosa}\} = \binom{4}{0}(0.2)^0(0.8)^4 = 0.4096$

c) $\Pr\{2 \text{ tuercas defectuosas}\} = \binom{4}{2}(0.2)^2(0.8)^2 = 0.1536$

Entonces

Pr{encontrar a lo sumo 2 tuercas defectuosas} = Pr{ninguna tuerca defectuosa} + Pr{1 tuerca defectuosa} + Pr{2 tuercas defectuosas} = 0.4096 + 0.4096 + 0.1536 = 0.9728

7.8 La probabilidad de que un estudiante que ingresa a la universidad se gradúe es de 0.4. Encuentre la probabilidad de que de un total de 5 estudiantes *a*) ninguno, *b*) 1, *c*) al menos 1 y *d*) todos se gradúen.

SOLUCIÓN

a) $\Pr\{\text{ninguno se gradúe}\} = \binom{5}{0}(0.4)^0(0.6)^5 = 0.07776$ o aproximadamente 0.08

b) $\Pr\{1 \text{ se gradúe}\} = \binom{5}{1}(0.4)^1(0.6)^4 = 0.2592$ o aproximadamente 0.26

c) $\Pr\{\text{al menos 1 se gradúe}\} = 1 - \Pr\{\text{ninguno se gradúe}\} = 0.92224$ o aproximadamente 0.92

d) $\Pr\{\text{todos se gradúen}\} = \binom{5}{5}(0.4)^5(0.6)^0 = 0.01024$ o aproximadamente 0.01

7.9 ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 9 puntos *a*) dos veces, *b*) al menos 2 veces en 6 lanzamientos de un par de dados?

SOLUCIÓN

Cada una de las 6 maneras en que caerían en el primer dado se asociaría con cada una de las 6 maneras en que puede caer el segundo dado, por lo que hay $6 \cdot 6 = 36$ maneras en que caerían los dados. Éstas son: 1 en el primer dado y 1 en el segundo, 1 en el primero y 2 en el segundo, etcétera, simbolizados por (1, 1), (1, 2), etcétera.

De estas 36 maneras (todas igualmente probables si los dados no están cargados), la suma total de nueve ocurre en 4 casos: (3, 6), (4, 5), (5, 4) y (6, 3). Entonces, la probabilidad de obtener un total de 9 en un solo lanzamiento de un par de dados es $p = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ y la probabilidad de no obtener un total de 9 en un solo lanzamiento es $q = 1 - p = \frac{8}{9}$.

a) $\Pr\{2 \text{ nueves en 6 lanzamientos}\} = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2\left(\frac{8}{9}\right)^{6-2} = \frac{61\,440}{531\,441}$

b) Pr{al menos 2 nueves} = Pr{2 nueves} + Pr{3 nueves} + Pr{4 nueves} + Pr{5 nueves} + Pr{6 nueves}

$$= \binom{6}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2\left(\frac{8}{9}\right)^4 + \binom{6}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3\left(\frac{8}{9}\right)^3 + \binom{6}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^4\left(\frac{8}{9}\right)^2 + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5\left(\frac{8}{9}\right)^1 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{9}\right)^6\left(\frac{8}{9}\right)^0$$

$$= \frac{61\,440}{531\,441} + \frac{10\,240}{531\,441} + \frac{960}{531\,441} + \frac{48}{531\,441} + \frac{1}{531\,441} = \frac{72\,689}{531\,441}$$

Otro método

Pr{al menos 2 nueves} = 1 − Pr{0 nueves} − Pr{1 nueve}

$$= 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{1}{9}\right)^0\left(\frac{8}{9}\right)^6 - \binom{6}{1}\left(\frac{1}{9}\right)^1\left(\frac{8}{9}\right)^5 = \frac{72\,689}{531\,441}$$

7.10 Evalúe *a*) $\sum_{X=0}^{N} Xp(X)$ y *b*) $\sum_{X=0}^{N} X^2p(X)$, donde $p(X) = \binom{N}{X}p^Xq^{N-X}$.

SOLUCIÓN

a) Dado que $q + p = 1$.

$$\sum_{X=0}^{N} Xp(X) = \sum_{X=1}^{N} X\frac{N!}{X!\,(N-X)!}p^Xq^{N-X} = Np\sum_{X=1}^{N}\frac{(N-1)!}{(X-1)!(N-X)!}p^{X-1}q^{N-X}$$
$$= Np(q+p)^{N-1} = Np$$

b)
$$\sum_{X=0}^{N} X^2p(X) = \sum_{X=1}^{N}\frac{N!}{X!(N-X)!}p^Xq^{N-X} = \sum_{X=1}^{N}[X(X-1)+X]\frac{N!}{X!(N-X)!}p^Xq^{N-X}$$
$$= \sum_{X=2}^{N}X(X-1)\frac{N!}{X!(N-X)!}p^Xq^{N-X} + \sum_{X=1}^{N}X\frac{N!}{X!(N-X)!}p^Xq^{N-X}$$
$$= N(N-1)p^2\sum_{X=2}^{N}\frac{(N-2)!}{(X-2)!(N-X)!}p^{X-2}q^{N-X} + Np = N(N-1)p^2(q+p)^{N-2} + Np$$
$$= N(N-1)p^2 + Np$$

Nota: Los resultados de los incisos *a*) y *b*) son las *esperanzas* de X y X^2, denotadas por $E(X)$ y $E(X^2)$, respectivamente (véase el capítulo 6).

7.11 Si una variable está distribuida de manera binomial, determine: *a*) su media μ y *b*) su varianza σ^2.

SOLUCIÓN

a) Por medio del problema 7.10*a*),

$$\mu = \text{valor esperado de la variable} = \sum_{X=0}^{N} Xp(X) = Np$$

b) Usando $\mu = Np$ y los resultados del problema 7.10,

$$\sigma^2 = \sum_{X=0}^{N}(X-\mu)^2 p(X) = \sum_{X=0}^{N}(X^2 - 2\mu X + \mu^2)p(X) = \sum_{X=0}^{N} X^2 p(X) - 2\mu \sum_{X=0}^{N} Xp(X) + \mu^2 \sum_{X=0}^{N} p(X)$$

$$= N(N-1)p^2 + Np - 2(Np)(Np) + (Np)^2(1) = Np - Np^2 = Np(1-p) = Npq$$

Se encuentra que la desviación estándar de una variable distribuida de manera binomial es $\sigma = \sqrt{Npq}$.

Otro método

Por medio del problema 6.62*b*),

$$E[(X-\bar{X})]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = N(N-1)p^2 + Np - N^2p^2 = Np - Np^2 = Npq$$

7.12 Si la probabilidad de que una tuerca sea defectuosa es de 0.1, calcule *a*) la media y *b*) la desviación estándar para la distribución de tuercas defectuosas de un total de 400 tuercas.

SOLUCIÓN

a) La media es $Np = 400(0.1) = 40$; esto es, se puede esperar que 40 tuercas estén defectuosas.

b) La varianza es $Npq = 400(0.1)(0.9) = 36$. Por lo tanto, la desviación estándar es $\sqrt{36} = 6$.

7.13 Encuentre el coeficiente momento de *a*) asimetría y *b*) curtosis de la distribución del problema 7.12.

SOLUCIÓN

a) Coeficiente momento de asimetría $= \dfrac{q-p}{\sqrt{Npq}} = \dfrac{0.9-0.1}{6} = 0.133$

Dado que es positivo, la distribución está sesgada hacia la derecha.

b) Coeficiente momento de curtosis $= 3 + \dfrac{1-6pq}{Npq} = 3 + \dfrac{1-6(0.1)(0.9)}{36} = 3.01$

La distribución es ligeramente *leptocúrtica* con respecto a la distribución normal (es decir, ligeramente más puntiaguda; véase el capítulo 5).

La distribución normal

7.14 En un examen final de matemáticas, la calificación media fue 72 y la desviación estándar 15. Determine las medidas estándar (es decir, calificaciones en unidades estándar de desviación) de los estudiantes que obtuvieron calificaciones de *a*) 60, *b*) 93 y *c*) 72.

SOLUCIÓN

a) $z = \dfrac{X-\bar{X}}{s} = \dfrac{60-72}{15} = -0.8$ *c*) $z = \dfrac{X-\bar{X}}{s} = \dfrac{72-72}{15} = 0$

b) $z = \dfrac{X-\bar{X}}{s} = \dfrac{93-72}{15} = 1.4$

7.15 Con referencia al problema 7.14, calcule las calificaciones correspondientes a las medidas estándar *a*) –1 y *b*) 1.6.

SOLUCIÓN

a) $X = \bar{X} + zs = 72 + (-1)(15) = 57$ *b*) $X = \bar{X} + zs = 72 + (1.6)(15) = 96$

7.16 Suponga que el número de juegos en que participan los beisbolistas de Ligas Mayores durante su carrera se distribuye normalmente, con una media igual a 1 500 juegos y una desviación estándar igual a 350 juegos. Utilice Minitab para resolver los siguientes problemas. *a*) ¿Qué porcentaje juega menos de 750 juegos? *b*) ¿Qué porcentaje juega más de 2 000 juegos? *c*) Calcule el percentil 90 del número de juegos en los que participa un beisbolista durante su carrera.

SOLUCIÓN

a) En el resultado del Minitab, mostrado a continuación, se puede ver que $P(X < 750) = 0.0161$ o 1.61% juega menos de 750 juegos.

```
MTB > cdf 750;
SUBC> normal mean = 1500 sd = 350.

Cumulative Distribution Function

Normal with mean = 1500.00 and standard deviation
= 350.000
         x       P( X <= x)
  750.0000       0.0161
```

b) Del siguiente resultado de Minitab se sabe que $P(X < 2\,000) = 0.9234$. De esto, se encuentra que $P(X > 2\,000) = 1 - P(X < 2\,000) = 1 - 0.9234 = 0.0766$. Por lo tanto, 7.66% participa en más de 2 000 juegos.

```
MTB > cdf 2000;
SUBC> normal mean = 1500 sd = 350.

Cumulative Distribution Function

Normal with mean = 1500.00 and standard deviation = 350.000
         x       P( X <= x)
2.OOE+03         0.9234
```

c) El resultado de Minitab da el percentil 90 como 1.95E + 03 o 1 950 juegos.

```
MTB > invcdf. 90;
SUBC> normal mean = 1500 sd = 350.

Inverse Cumulative Distribution Function

Normal with mean = 1500.00 and standard deviation = 350.000
P( X <= x)           x
  0.9000      1.95E+03
```

7.17 Indique el área bajo la curva normal en cada uno de los siguientes casos: *a*) a *g*), que corresponden a las figuras 7-2*a*) a 7-2*g*), respectivamente. Use el apéndice II.

a) Entre $z = 0$ y $z = 1.2$

b) Entre $z = -0.68$ y $z = 0$

c) Entre $z = -0.46$ y $z = 2.21$

d) Entre $z = 0.81$ y $z = 1.94$

e) A la izquierda de $z = -0.6$

f) A la derecha de $z = -1.28$

g) A la derecha de $z = 2.05$ y a la izquierda de $z = -1.44$

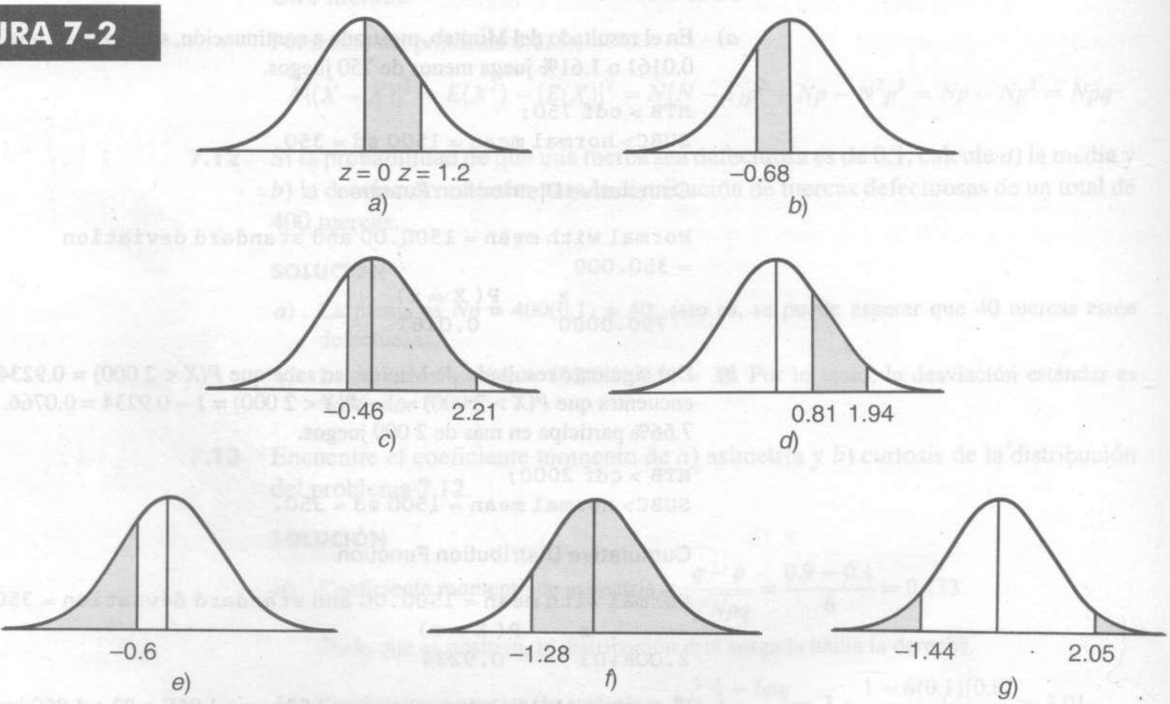
SOLUCIÓN

a) En el apéndice II se busca hacia abajo en la columna marcada con z hasta el valor 1.2; entonces se va hacia la derecha a la columna marcada con 0. El resultado, 0.3849, es el área requerida, que representa la probabilidad de que z esté entre 0 y 1.2, denotada por $\Pr\{0 \leq z \leq 1.2\}$.

b) El área que se pide es la que está entre $z = 0$ y $z = 0.68$ (por simetría). Para encontrarla, se busca hacia abajo en la columna marcada con z del apéndice II, hasta 0.6; de aquí se va a la derecha a la columna marcada con 8. El resultado, 0.2517, es el área solicitada, que representa la probabilidad de que z esté entre −0.68 y 0, denotada por $\Pr\{-0.68 \leq z \leq 0\}$.

c) Área requerida = (área entre $z = -0.46$ y $z = 0$) + (área entre $z = 0$ y $z = 2.21$)
= (área entre $z = 0$ y $z = 0.46$) + (área entre $z = 0$ y $z = 2.21$)
= 0.1772 + 0.4864 = 0.6636

FIGURA 7-2



d) Área requerida = (área entre $z = 0$ y $z = 1.94$) − (área entre $z = 0$ y $z = 0.81$)
= 0.4738 − 0.2910 = 0.1828

e) Área requerida = (área a la izquierda de $z = 0$) − (área entre $z = -0.6$ y $z = 0$)
= (área a la izquierda de $z = 0$) − (área entre $z = 0$ y $z = 0.6$)
= 0.5 − 0.2258 = 0.2742

f) Área requerida = (área entre $z = -1.28$ y $z = 0$) + (área a la derecha de $z = 0$)
= 0.3997 + 0.5 = 0.8997

g) Área requerida = área total − (área entre $z = -1.44$ y $z = 0$) − (área entre $z = 0$ y $z = 2.05$)
= 1 − 0.4251 − 0.4798 = 1 − 0.9049 = 0.0951

7.18 Determine el valor o los valores de z en cada uno de los siguientes casos, *a*) a *c*), que corresponden a las figuras 7-3*a*) a 7-3*c*), respectivamente. El término "área" se refiere al área bajo la curva normal.

a) El área entre 0 y z es 0.3770.

b) El área a la izquierda de z es 0.8621.

c) El área entre −1.5 y z es 0.0217.

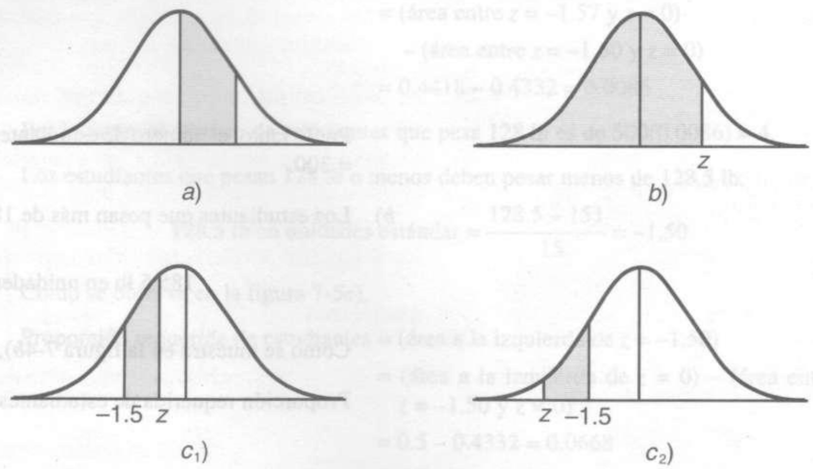
SOLUCIÓN

a) En el apéndice II el valor 0.3770 se localiza a la derecha del renglón marcado con 1.1 y bajo la columna marcada con 6; entonces, $z = 1.16$. Por simetría, $z = -1.16$ es otro valor de z, por lo que $z = \pm 1.16$.

b) Como el área es mayor que 0.5, z debe ser positivo. El área entre 0 y $z = 0.8621 - 0.5 = 0.3621$, de donde $z = 1.09$.

c) Si z fuera positiva, el área sería mayor que el área entre -1.5 y 0, que es 0.4332; por lo tanto, z debe ser negativa.

FIGURA 7-3



Caso 1 [z es negativa, pero está a la derecha de -1.5; véase la figura 7-3(c_1)]
El área entre -1.5 y z = (área entre -1.5 y 0) − (área entre 0 y z) y 0.0217 = 0.4332 − (área entre 0 y z). Así, pues, el área entre 0 y $z = 0.4332 - 0.0217 = 0.4115$, de donde $z = -1.35$.

Caso 2 [z es negativa, pero está a la izquierda de -1.5; véase figura 7-3(c_2)]
El área entre z y -1.5 = (área entre z y 0) − (área entre -1.5 y 0) y 0.0217 = (área entre 0 y z) − 0.4332. Luego, el área entre 0 y $z = 0.0217 + 0.4332 = 0.4549$ y $z = -1.694$ por interpolación lineal o, ligeramente con menos precisión, $z = -1.69$.

7.19 Encuentre las ordenadas de la curva normal en *a*) $z = 0.84$, *b*) $z = -1.27$ y *c*) $z = -0.05$.

SOLUCIÓN

a) En el apéndice II, hay que ir hacia abajo en la columna z hasta llegar al valor 0.8; después hacia la derecha, a la columna marcada con 4. La ordenada requerida es 0.2803.

b) Por simetría: (ordenada en $z = -1.27$) = (ordenada en $z = 1.27$) = 0.1781.

c) (Ordenada en $z = -0.05$) = (ordenada en $z = 0.05$) = 0.3984.

7.20 El peso medio de 500 estudiantes hombres de una universidad es de 151 libras (lb) y la desviación estándar es de 15 lb. Considerando que los pesos se distribuyen normalmente, calcule cuántos estudiantes pesan *a*) entre 120 y 155 lb y *b*) más de 185 lb.

SOLUCIÓN

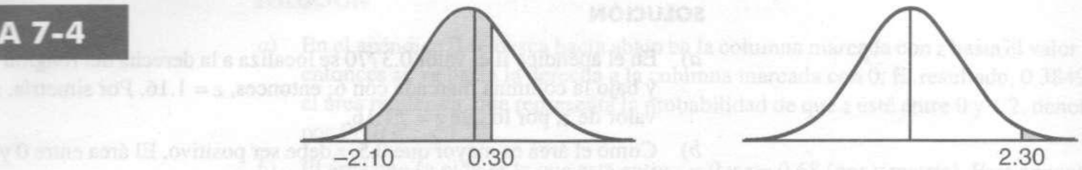
a) Los pesos registrados entre 120 y 155 lb pueden, en realidad, tener cualquier valor desde 119.5 hasta 155.5 lb, suponiendo que se redondean a la libra más cercana.

$$119.5 \text{ lb en unidades estándar} = \frac{119.5 - 151}{15} = -2.10$$

$$155.5 \text{ lb en unidades estándar} = \frac{155.5 - 151}{15} = 0.30$$

Tal como se muestra en la figura 7-4*a*),

FIGURA 7-4



a) *b)*

$$\begin{aligned}\text{Proporción de estudiantes requerida} &= (\text{área entre } z = -2.10 \text{ y } z = 0.30)\\ &= (\text{área entre } z = -2.10 \text{ y } z = 0)\\ &\quad + (\text{área entre } z = 0 \text{ y } z = 0.30)\\ &= 0.4821 + 0.1179 = 0.6000\end{aligned}$$

Por lo tanto, el número de estudiantes que pesan entre 120 y 155 lb es de 500(0.6000) = 300.

b) Los estudiantes que pesan más de 185 lb deben pesar por lo menos 185.5 lb.

$$185.5 \text{ lb en unidades estándar} = \frac{185.5 - 151}{15} = 2.30$$

Como se muestra en la figura 7-4*b*),

$$\begin{aligned}\text{Proporción requerida de estudiantes} &= (\text{área a la derecha de } z = 2.30)\\ &= (\text{área a la derecha de } z = 0) - (\text{área entre } z = 0 \text{ y } z = 2.30)\\ &= 0.5 - 0.4893 = 0.0107\end{aligned}$$

Por lo tanto, el número de estudiantes que pesan más de 185 lb es de 500(0.0107) = 5.

Si W denota el peso de un estudiante al azar, los resultados anteriores se pueden resumir en términos de probabilidad escribiendo

$$\Pr\{119.5 \leq W \leq 155.5\} = 0.6000 \qquad \text{y} \qquad \Pr\{W \geq 185.5\} = 0.0107$$

7.21 Determine cuántos de los 500 estudiantes del problema 7.20 pesan *a*) menos de 128 lb, *b*) 128 lb y *c*) menos o igual a 128 lb.

SOLUCIÓN

a) Los estudiantes que pesan menos de 128 lb deben pesar menos de 127.5 lb.

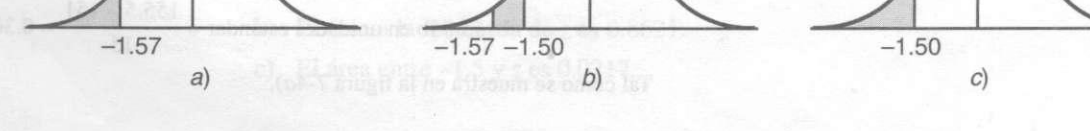
$$127.5 \text{ lb en unidades estándar} = \frac{127.5 - 151}{15} = -1.57$$

Como se muestra en la figura 7-5*a*),

$$\begin{aligned}\text{Proporción requerida de estudiantes} &= (\text{área a la izquierda de } z = -1.57)\\ &= (\text{área a la izquierda de } z = 0) - (\text{área entre } z = -1.57 \text{ y } z = 0)\\ &= 0.5 - 0.4418 = 0.0582\end{aligned}$$

Por lo tanto, el número de estudiantes que pesan menos de 128 lb es de 500(0.0582) = 29.

FIGURA 7-5



a) *b)* *c)*

b) Los estudiantes que pesan 128 lb pesan entre 127.5 y 128.5 lb.

$$127.5 \text{ lb en unidades estándar} = \frac{127.5 - 151}{15} = -1.57$$

$$128.5 \text{ lb en unidades estándar} = \frac{128.5 - 151}{15} = -1.50$$

Como se indica en la figura 7-5*b*),

Proporción requerida de estudiantes = (área entre $z = -1.57$ y $z = -1.50$)
= (área entre $z = -1.57$ y $z = 0$)
− (área entre $z = -1.50$ y $z = 0$)
= 0.4418 − 0.4332 = 0.0086

Por lo tanto, el número de estudiantes que pesa 128 lb es de 500(0.0086) = 4.

c) Los estudiantes que pesan 128 lb o menos deben pesar menos de 128.5 lb.

$$128.5 \text{ lb en unidades estándar} = \frac{128.5 - 151}{15} = -1.50$$

Como se observa en la figura 7-5*c*),

Proporción requerida de estudiantes = (área a la izquierda de $z = -1.50$)
= (área a la izquierda de $z = 0$) − (área entre $z = -1.50$ y $z = 0$)
= 0.5 − 0.4332 = 0.0668

Por lo tanto, el número de estudiantes que pesa 128 lb o menos es 500(0.0668) = 33.

Otro método [usando los incisos *a*) y *b*)]

El número de estudiantes que pesan menos o igual a 128 lb es (número de los que pesan menos de 128 lb) + (número de los que pesan 128 lb) = 29 + 4 = 33.

7.22 Las calificaciones en un examen de biología son 0, 1, 2,..., 10 puntos, dependiendo del número de respuestas correctas, de un total de 10 preguntas. La calificación media fue de 6.7 y la desviación estándar fue de 1.2. Considerando que las calificaciones están normalmente distribuidas, determine *a*) el porcentaje de estudiantes con 6 puntos, *b*) la calificación máxima de 10% más bajo de la clase y *c*) la calificación más baja de 10% más alto de la clase.

SOLUCIÓN

a) Para aplicar la distribución normal a datos discretos es necesario tratar los datos como si fueran continuos. Entonces, una calificación de 6 puntos se considera que está entre 5.5 y 6.5 puntos.

$$5.5 \text{ en unidades estándar} = \frac{5.5 - 6.7}{1.2} = -1.0$$

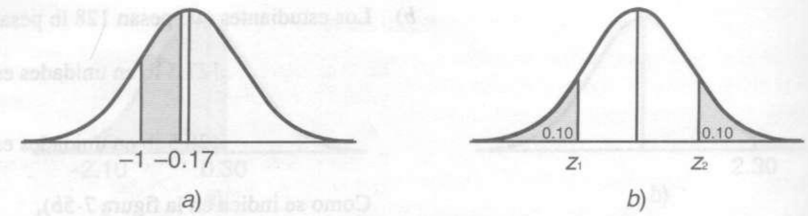
$$6.5 \text{ en unidades estándar} = \frac{6.5 - 6.7}{1.2} = -0.17$$

Como se muestra en la figura 7-6*a*)

Proporción requerida = (área entre $z = -1$ y $z = -0.17$)
= (área entre $z = -1$ y $z = 0$) − (área entre $z = -0.17$ y $z = 0$)
= 0.3413 − 0.0675 = 0.2738 = 27%

b) Sea X_1 la calificación máxima requerida y z_1 la calificación en unidades estándar. De la figura 7-6*b*), el área a la izquierda de z_1 es 10% = 0.10; por consiguiente: (área entre z_1 y 0) = 0.40 y $z_1 = -1.28$ (muy aproximado). Por lo tanto, $z_1 = (X_1 - 6.7)/1.2 = -1.28$ y $X_1 = 5.2$ o 5, redondeando al entero más cercano.

FIGURA 7-6



c) Sea X_2 la calificación más baja requerida y z_2 la calificación en unidades estándar. Del inciso *a*), por simetría, $z_2 = 1.28$. Así $(X_2 - 6.7)/1.2 = 1.28$ y $X_2 = 8.2$ u 8, redondeando al entero más cercano.

7.23 El diámetro interno medio de una muestra de 200 arandelas producidas por una máquina es de 0.502 pulgadas (pulg) y la desviación estándar es de 0.005 pulg. Debido al uso que se dará a estas arandelas, se permitirá una tolerancia máxima en el diámetro de 0.496 a 0.508 pulg, o serán consideradas defectuosas. Determine el porcentaje de arandelas defectuosas producidas por la máquina, suponiendo que los diámetros están distribuidos normalmente.

SOLUCIÓN

$$0.496 \text{ en unidades estándar} = \frac{0.496 - 0.502}{0.005} = -1.2$$

$$0.508 \text{ en unidades estándar} = \frac{0.508 - 0.502}{0.005} = 1.2$$

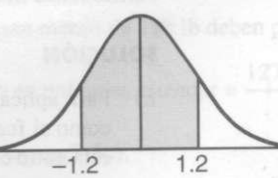
Como se ve en la figura 7-7,

$$\begin{aligned} \text{Proporción de arandelas sin defecto} &= (\text{área bajo la curva normal entre } z = -1.2 \text{ y } z = 1.2) \\ &= (\text{dos veces el área entre } z = 0 \text{ y } z = 1.2) \\ &= 2(0.3849) = 0.7698 \quad \text{o} \quad 77\% \text{ aproximadamente} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el porcentaje de arandelas defectuosas es de 100% − 77% = 23%.

Obsérvese que si se considera que el intervalo de 0.496 a 0.508 pulg representa en realidad a los diámetros de 0.4955 a 0.5085 pulg, los resultados anteriores se modifican ligeramente. Sin embargo, con dos cifras los resultados son iguales.

FIGURA 7-7



Aproximación normal a la distribución binomial

7.24 Calcule la probabilidad de obtener entre 3 y 6 caras inclusive en 10 lanzamientos de una moneda, utilizando: *a*) la distribución binomial y *b*) la aproximación normal a la distribución binomial.

SOLUCIÓN

a) $\Pr\{3 \text{ caras}\} = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{15}{128}$ $\qquad \Pr\{5 \text{ caras}\} = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{63}{256}$

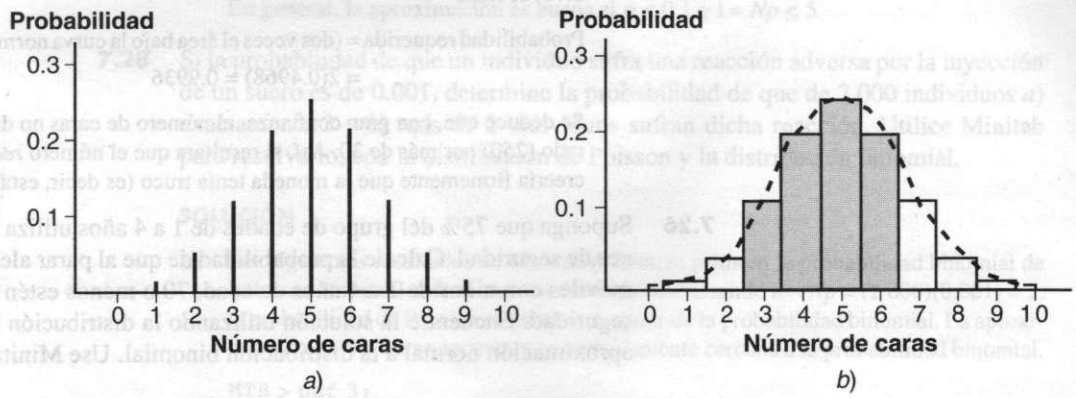
$\Pr\{4 \text{ caras}\} = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{105}{512}$ $\qquad \Pr\{6 \text{ caras}\} = \binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{105}{512}$

Por lo tanto

$$\Pr\{\text{entre 3 y 6 caras, inclusive}\} = \frac{15}{128} + \frac{105}{512} + \frac{63}{256} + \frac{105}{512} = \frac{99}{128} = 0.7734$$

b) La distribución de probabilidad para el número de caras en 10 lanzamientos de la moneda está graficado en la figura 7-8*a*) y en la figura 7-8*b*); esta última trata los datos como si fueran continuos. La probabilidad requerida es la suma de las áreas de los rectángulos sombreados en la figura 7-8*b*) y puede aproximarse por el área bajo la curva normal correspondiente, que se muestra como línea discontinua.

FIGURA 7-8



Si se consideran los datos como continuos, se deduce que de 3 a 6 caras pueden considerarse como de 2.5 a 6.5 caras. Además, la media y la varianza de la distribución binomial están dadas por $\mu = Np = 10(\frac{1}{2}) = 5$ y $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(10)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = 1.58$.

$$2.5 \text{ en unidades estándar} = \frac{2.5 - 5}{1.58} = -1.58$$

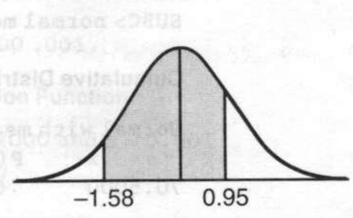
$$6.5 \text{ en unidades estándar} = \frac{6.5 - 5}{1.58} = 0.95$$

Como se muestra en la figura 7-9,

$$\begin{aligned}\text{Probabilidad requerida} &= (\text{área entre } z = -1.58 \text{ y } z = 0.95)\\ &= (\text{área entre } z = -1.58 \text{ y } z = 0) + (\text{área entre } z = 0 \text{ y } z = 0.95)\\ &= 0.4429 + 0.3289 = 0.7718\end{aligned}$$

que coincide muy bien con el valor verdadero de 0.7734 obtenido en el inciso *a*). La precisión es aún mayor para valores grandes de *N*.

FIGURA 7-9



7.25 Se lanza una moneda 500 veces. Calcule la probabilidad de que el número de caras no difiera de 250 por *a*) más de 10 y *b*) más de 30.

SOLUCIÓN

$$\mu = Np = (500)(\tfrac{1}{2}) = 250 \qquad \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(500)(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})} = 11.18$$

a) Se requiere la probabilidad de que el número de caras esté entre 240 y 260 o, considerando los datos como continuos, entre 239.5 y 260.5. Como 239.5 en unidades estándar es (239.5 − 250)/11.18 = −0.94 y 260.5 en unidades estándar es 0.94, se tiene

Probabilidad requerida = (área bajo la curva normal entre $z = -0.94$ y $z = 0.94$)
= (dos veces el área entre $z = 0$ y $z = 0.94$)
= 2(0.3264) = 0.6528

b) Se busca que la probabilidad de que el número de caras esté entre 220 y 280 o, considerando los datos como continuos, entre 219.5 y 280.5. Dado que 219.5 en unidades estándar es (219.5 − 250)/11.18 = −2.73 y 280.5 en unidades estándar es 2.73, se tiene

Probabilidad requerida = (dos veces el área bajo la curva normal entre $z = 0$ y $z = -2.73$)
= 2(0.4968) = 0.9936

Se deduce que, con gran confianza, el número de caras no diferirá del número esperado (250) por más de 30. Así, si resultara que el número *real* de caras fuera 280, se creería firmemente que la moneda tenía truco (es decir, estaba cargada).

7.26 Suponga que 75% del grupo de edades de 1 a 4 años utiliza regularmente cinturones de seguridad. Calcule la probabilidad de que al parar aleatoriamente 100 automóviles con niños de 1 a 4 años de edad, 70 o menos estén usando el cinturón de seguridad. Encuentre la solución utilizando la distribución binomial, así como la aproximación normal a la distribución binomial. Use Minitab para resolverlo.

SOLUCIÓN

Los resultados de Minitab que se presentan a continuación muestran que la probabilidad de que 70 o menos niños estén usando un cinturón de seguridad es igual a 0.1495.

```
MTB > cdf 70;
SUBC> binomial 100 .75.
```

Cumulative Distribution Function

```
Binomial with n - 100 and p = 0.750000
     x      P( X <= x)
70.00        0.1495
```

La solución, utilizando la aproximación normal a la distribución binomial, es la siguiente: la media de la distribución binomial es $\mu = Np = 100(0.75) = 75$ y la desviación estándar es $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{100(0.75)(0.25)} = 4.33$. Los resultados de Minitab, presentados a continuación, muestran que la aproximación normal es igual a 0.1493. La aproximación es muy cercana al valor verdadero.

```
MTB > cdf 70.5;
SUBC> normal mean = 75 sd = 4.33.
```

Cumulative Distribution Function

```
Normal with mean - 75.0000 and standard deviation = 4.33000
      x       P( X <= x)
70.5000        0.1493
```

Distribución de Poisson

7.27 Diez por ciento de las herramientas producidas en un proceso de manufactura resultan defectuosas. Calcule la probabilidad de que en una muestra de 10 herramientas elegidas al azar exactamente dos sean defectuosas, utilizando *a*) la distribución binomial y *b*) la aproximación de Poisson a la distribución binomial.

SOLUCIÓN

La probabilidad de que una herramienta resulte defectuosa es $p = 0.1$.

a) $\Pr\{2 \text{ herramientas defectuosas de } 10\} = \binom{10}{2}(0.1)^2(0.9)^8 = 0.1937 \quad \text{o } 0.19$

b) Con $\lambda = Np = 10(0.1) = 1$ y usando $e = 2.718$,

$\Pr\{2 \text{ herramientas defectuosas de } 10\} =$

$$= \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!} = \frac{(1)^2 e^{-1}}{2!} = \frac{e^{-1}}{2} = \frac{1}{2e} = 0.1839 \quad \text{o } 0.18$$

En general, la aproximación es buena si $p \leq 0.1$ y $1 = Np \leq 5$.

7.28 Si la probabilidad de que un individuo sufra una reacción adversa por la inyección de un suero es de 0.001, determine la probabilidad de que de 2 000 individuos *a)* exactamente 3 y *b)* más de 2 individuos sufran dicha reacción. Utilice Minitab para resolverlo, con la distribución de Poisson y la distribución binomial.

SOLUCIÓN

a) Los siguientes resultados de Minitab presentan primero la probabilidad binomial de que exactamente 3 sufran una reacción adversa. Usando $\lambda = Np = (2\,000)(0.001) = 2$, la probabilidad de Poisson se muestra después de la probabilidad binomial. La aproximación de Poisson se encuentra extremadamente cercana a la probabilidad binomial.

```
MTB > pdf 3;
SUBC> binomial 2000.001.

Probability Density Function

Binomial with n = 2000 and p = 0.001
  x        P( X <= x)
 3.0       0.1805
MTB > pdf 3;
SUBC> poisson 2.

Probability Density Function

Poisson with mu = 2
  x        P( X <= x)
 3.00      0.1804
```

b) La probabilidad de que más de 2 individuos sufran una reacción está dada por $1 - P(X \leq 2)$. Los siguientes resultados de Minitab muestran la probabilidad de $X \leq 2$ como 0.6767, utilizando la distribución binomial y la distribución de Poisson. La probabilidad de que más de dos individuos sufran una reacción es de $1 - 0.6767 = 0.3233$.

```
MTB > cdf 2;
SUBC> binomial 2000 .001.

Cumulative Distribution Function

Binomial with n = 2000 and p = 0.001
  x        P ( X <= x)
 2.0       0.6767
MTB > cdf 2;
SUBC> poisson 2.

Cumulative Distribution Function

Poisson with mu = 2
  x        P ( X <= x)
 2.00      0.6767
```

7.29 Una distribución de Poisson está dada por

$$p(X) = \frac{(0.72)^X e^{-0.72}}{X!}$$

Calcule *a*) $p(0)$, *b*) $p(1)$, *c*) $p(2)$ y *d*) $p(3)$.

SOLUCIÓN

a) $p(0) = \frac{(0.72)^0 e^{-0.72}}{0!} = \frac{(1)\,e^{-0.72}}{1} = e^{-0.72} = 0.4868$ usando el apéndice VIII

b) $p(1) = \frac{(0.72)^1 e^{-0.72}}{1!} = (0.72)e^{-0.72} = (0.72)(0.4868) = 0.3505$

c) $p(2) = \frac{(0.72)^2 e^{-0.72}}{2!} = \frac{(0.5184)e^{-0.72}}{2} = (0.2592)(0.4868) = 0.1262$

Otro método

$p(2) = \frac{0.72}{2}\,p(1) = (0.36)(0.3505) = 0.1262$

d) $p(3) = \frac{(0.72)^3 e^{-0.72}}{3!} = \frac{0.72}{3}\,p(2) = (0.24)(0.1262) = 0.0303$

Distribución multinomial

7.30 Una caja contiene 5 bolas rojas, 4 blancas y 3 azules. Se extrae una bola aleatoriamente, se anota su color y se regresa a la caja. Calcule la probabilidad de que de 6 bolas seleccionadas de esta manera, 3 sean rojas, 2 sean blancas y 1 sea azul.

SOLUCIÓN

Pr{roja en cualquier extracción} = $\frac{5}{12}$, Pr{blanca en cualquier extracción} = $\frac{4}{12}$ y Pr{azul en cualquier extracción} = $\frac{3}{12}$; por lo tanto

$$\Pr\{3 \text{ sean rojas, 2 sean blancas y 1 sea azul}\} = \frac{6!}{3!2!1!}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{4}{12}\right)^2\left(\frac{3}{12}\right)^1 = \frac{625}{5\,184}$$

Ajuste de datos mediante distribuciones teóricas

7.31 Ajuste una distribución binomial a los datos del problema 2.17.

SOLUCIÓN

Se tienen Pr{X caras en un lanzamiento de 5 monedas} = $p(X) = \binom{5}{X}p^X q^{5-X}$, donde p y q son las probabilidades respectivas de cara y cruz en un solo lanzamiento de una moneda. Por el problema 7.11*a*), la media del número de caras es $\mu = Np = 5p$. Para la distribución de frecuencias real (u observada), la media del número de caras es

$$\frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{(38)(0) + (144)(1) + (342)(2) + (287)(3) + (164)(4) + (25)(5)}{1\,000} = \frac{2\,470}{1\,000} = 2.47$$

Igualando la media teórica con la real, $5p = 2.47$ o $p = 0.494$. Entonces, la distribución binomial ajustada está dada por $p(X) = \binom{5}{X}(0.494)^X(0.506)^{5-X}$.

La tabla 7-4 incluye estas probabilidades, así como las frecuencias esperadas (teóricas) y las reales. El ajuste parece ser bueno. La bondad de ajuste se investiga en el problema 12.12.

Tabla 7-4

Número de caras (X)	Pr{X caras}	Frecuencia esperada	Frecuencia observada
0	0.0332	33.2 o 33	38
1	0.1619	161.9 o 162	144
2	0.3162	316.2 o 316	342
3	0.3087	308.7 o 309	287
4	0.1507	150.7 o 151	164
5	0.0294	29.4 o 29	25

7.32 Utilice papel milimétrico para determinar si la distribución de frecuencias de la tabla 2-1 puede ser aproximada de manera cercana por una distribución normal.

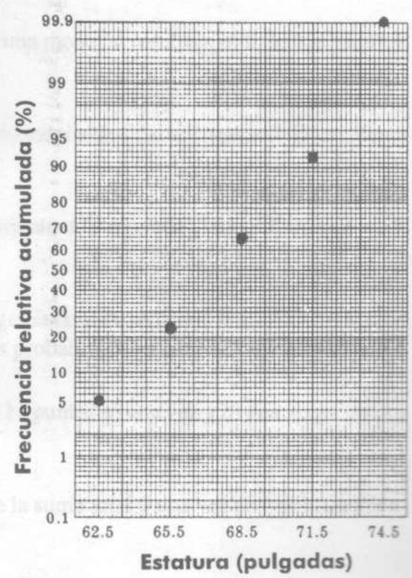
SOLUCIÓN

Primero la distribución de frecuencias se convierte en una distribución de frecuencias relativas acumuladas, como se muestra en la tabla 7-5. Después, las frecuencias relativas acumuladas, expresadas en porcentaje, se grafican contra las fronteras de clase superiores en papel milimétrico, como se indica en la figura 7-10. En la medida en que todos los puntos graficados caigan sobre una recta, se determinará la cercanía del ajuste de la distribución a una distribución normal. De lo anterior se deduce que sí hay un buen ajuste de los datos (véase el problema 7.33).

FIGURA 7-10

Tabla 7-5

Estatura (pulg)	Frecuencia relativa acumulada (%)
Menor que 62.5	5.0
Menor que 65.5	23.0 (c_1)
Menor que 68.5	65.0
Menor que 71.5	92.0
Menor que 74.5	100.0



7.33 Ajuste una curva normal a los datos de la tabla 2-1.

SOLUCIÓN

El procedimiento puede organizarse como en la tabla 7-6. Para determinar z para las fronteras de clase se utiliza $z = (X - \bar{X})/s$, donde la media $\bar{X}$ y la desviación estándar s se obtuvieron de los problemas 3.22 y 4.17, respectivamente.

En la columna 4 de la tabla 7-6, las áreas bajo la curva normal desde 0 hasta z se obtuvieron del apéndice II. De aquí, las áreas bajo la curva normal resultan de valores sucesivos de z, como se muestra en la columna 5. Éstas se obtienen restando las áreas sucesivas de la columna 4 cuando las z correspondientes tienen el mismo signo, y sumin-

Tabla 7-6

Estaturas (pulg)	Fronteras de clase (X)	z para fronteras de clase	Área bajo la curva normal de 0 hasta z	Área para cada clase	Frecuencia esperada	Frecuencia observada
	59.5	−2.72	0.4967			
60–62				0.0413	4.13 o 4	5
	62.5	−1.70	0.4554			
63–65				0.2068	20.68 o 21	18
	65.5	−0.67	0.2486			
66–68			Suma →	0.3892	38.92 o 39	42
	68.5	0.36	0.1406			
69–71				0.2771	27.71 o 28	27
	71.5	1.39	0.4177			
72–74				0.0743	7.43 o 7	8
	74.5	2.41	0.4920			

$\bar{X} = 67.45$ pulg $\qquad s = 2.92$ pulg

dolas cuando las z vienen con signos opuestos (lo que ocurre sólo una vez en la tabla). La razón de esto se aclara con un diagrama.

Multiplicando los valores de la columna 5 (que representan frecuencias relativas) por la frecuencia total N (en este caso $N = 100$) se obtienen las frecuencias esperadas, como se muestra en la columna 6. Es evidente que coinciden bien con las frecuencias reales (u observadas) de la columna 7.

Si así se desea, es posible usar la desviación estándar modificada por la corrección de Sheppard [véase el problema 4.21*a*)].

La bondad de ajuste de la distribución es considerada en el problema 12.13.

7.34 La tabla 7-7 muestra el número de días, f, de un plazo de 50 días, durante el cual ocurrieron X accidentes automovilísticos en una ciudad. Ajuste una distribución de Poisson a estos datos.

Tabla 7-7

Número de accidentes (X)	Número de días (f)
0	21
1	18
2	7
3	3
4	1
	Total 50

SOLUCIÓN

La media de accidentes es

$$\lambda = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{(21)(0) + (18)(1) + (7)(2) + (3)(3) + (1)(4)}{50} = \frac{45}{50} = 0.90$$

De acuerdo con la distribución de Poisson:

$$\Pr\{X \text{ accidentes}\} = \frac{(0.90)^X e^{-0.90}}{X!}$$

La tabla 7-8 contiene las probabilidades para 0, 1, 2, 3 y 4 accidentes, obtenidas de la distribución de Poisson, así como el número esperado o teórico de días durante los que X accidentes tuvieron lugar (obtenido al multiplicar las probabilidades respectivas por 50). Para facilitar la comparación, la columna 4 repite el número real de días de la tabla 7-7.

Obsérvese que el ajuste de la distribución de Poisson a los datos es buena.

Tabla 7-8

Número de accidentes (X)	$\Pr\{X$ accidentes$\}$	Número esperado de días	Número real de días
0	0.4066	20.33 o 20	21
1	0.3659	18.30 o 18	18
2	0.1647	8.24 o 8	7
3	0.0494	2.47 o 2	3
4	0.0111	0.56 o 1	1

Para una distribución de Poisson verdadera, está la varianza $\sigma^2 = \lambda$. Calculando la varianza de la distribución proporcionada se obtiene 0.97. Ésta coincide con el valor 0.90 para λ, por lo cual puede considerarse como mayor evidencia de lo adecuado de la distribución de Poisson para aproximarse a los datos muestrales.