



PROBLEMI DI FISICA

LA DINAMICA

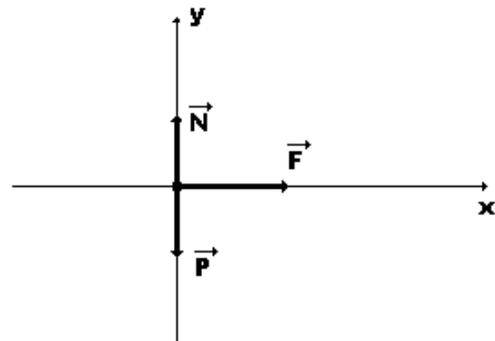
PROBLEMA N. 1

Un corpo di massa $m = 240 \text{ kg}$ viene spostato con una forza costante $F = 130 \text{ N}$ su una superficie priva di attrito per un tratto $s = 2,3 \text{ m}$. Supponendo che il corpo inizialmente è in condizione di riposo, calcolare la velocità finale ed il tempo che impiega per percorrere il tratto s .

SOLUZIONE



Diagramma delle forze



Dalla seconda legge della dinamica ricaviamo l'accelerazione:

$$F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{130}{240} = 0,54 \text{ m/s}^2$$

Poiché si tratta di un moto uniformemente accelerato, applichiamo le relative leggi:

$$\begin{cases} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v_f = v_0 + a t \end{cases} \text{ poiché } v_0 = 0 \text{ e } s_0 = 0 \text{ le relazioni diventano: } \begin{cases} s = \frac{1}{2} a t^2 \\ v_f = a t \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di due equazioni in due incognite, t e v_f , le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 2,9 \text{ s} \\ v = a \cdot \sqrt{\frac{2s}{a}} = 1,58 \text{ m/s} \end{cases}$$

PROBLEMA N. 2

Un corpo di massa $M = 2 \text{ kg}$ si muove con velocità $V = 3 \text{ m/s}$. Una forza diretta in senso opposto al moto arresta il corpo dopo un tempo $t = 1 \text{ s}$. Calcolare:

- L'intensità della forza applicata
- Lo spazio percorso dall'istante in cui viene applicata la forza

SOLUZIONE

- Applichiamo il 2° principio della dinamica per calcolare la forza che arresta il corpo:

$$F = M \cdot a = 2 \cdot 3 = -6\text{N}$$

$$\text{dove } a = \frac{V_F - V_I}{t} = \frac{-3}{1} = -3\text{m/s}^2$$

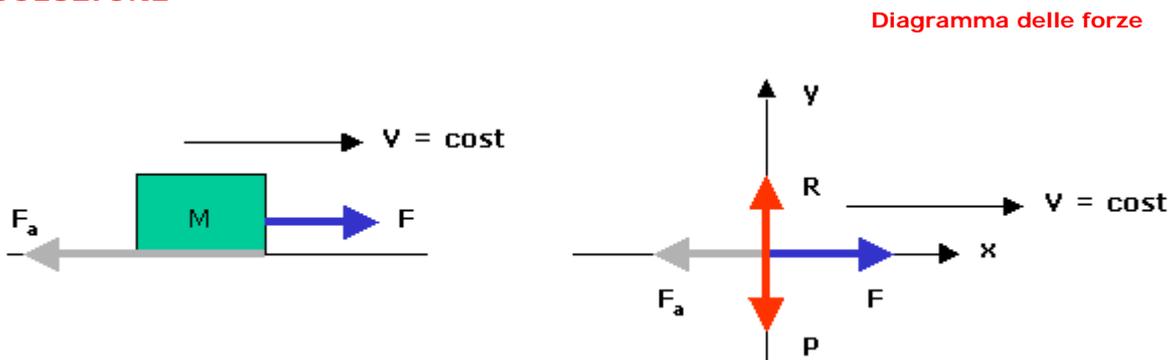
La forza è negativa in quanto si oppone al moto fino ad arrestarlo.

- Poiché si tratta di un moto uniformemente decelerato, lo spazio percorso nel tempo $t = 1\text{ s}$ è dato da:

$$s = V_I \cdot t - \frac{1}{2}at^2 = 3 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1^2 = 1,5\text{m}$$

PROBLEMA N. 3

Un corpo di massa $M = 10 \text{ kg}$ è in moto su un piano orizzontale che presenta un coefficiente di attrito $\mu = 0,2$. Se all'istante t tale corpo possiede una velocità di 10 m/s , quanto vale l'intensità della forza che dobbiamo applicare da quell'istante in poi perché il corpo continui a muoversi di moto rettilineo uniforme?

SOLUZIONE

Il quesito del problema trova la risposta nel:

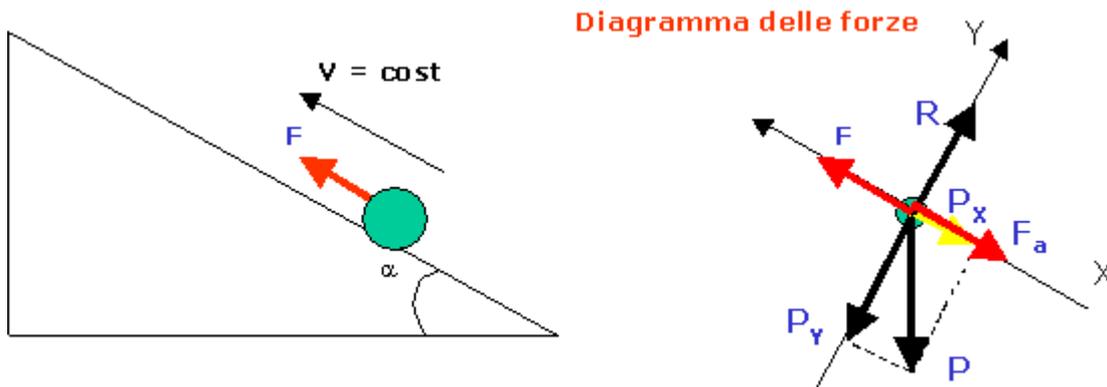
1° principio della dinamica

$$V = \text{cost} \Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F - F_a = 0 \Rightarrow F = F_a = \mu \cdot R = \mu \cdot M \cdot g = 0,2 \cdot 10 \cdot 9,8 = 19,6\text{N}$$

PROBLEMA N. 4

Un corpo di massa $M = 2 \text{ kg}$ viene lanciato verso l'alto lungo un piano inclinato $\alpha = 30^\circ$ e con coefficiente di attrito $\mu = 0,4$. Determinare la forza che bisogna applicare al corpo affinché il moto lungo il piano inclinato sia uniforme

SOLUZIONE



Il quesito del problema trova la risposta nel:

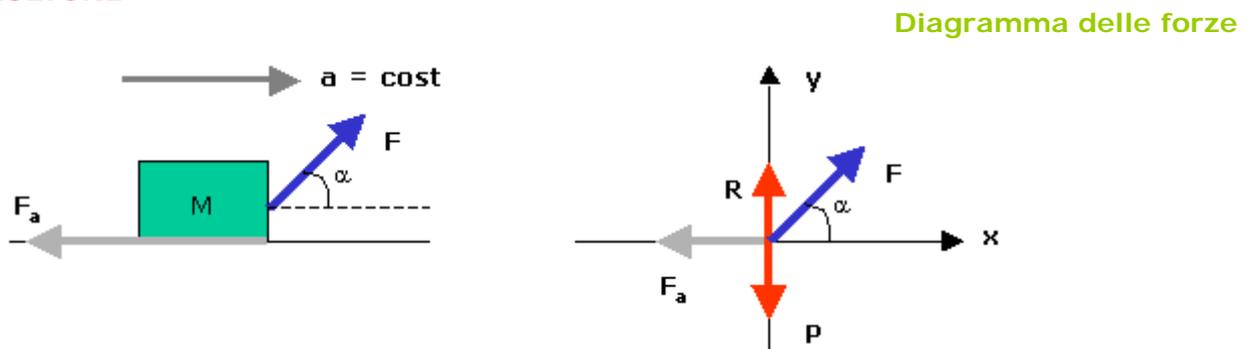
1° principio della dinamica

$$v = \text{cost} \Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F - F_a - P_x = 0 \Rightarrow F = F_a + P_x = \mu \cdot P_y + P_x = \mu \cdot P \cdot \cos \alpha + P \cdot \sin \alpha = P \cdot (\mu \cdot \cos \alpha + \sin \alpha) = Mg \cdot (\mu \cdot \cos \alpha + \sin \alpha) = 2 \cdot 9,8 \cdot (0,4 \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ) = 16,6 \text{ N}$$

PROBLEMA N. 5

Il coefficiente di attrito tra un corpo di massa $M = 20 \text{ kg}$ ed il pavimento è $\mu = 0,2$. Calcolare l'accelerazione impressa al corpo da una forza di 100 N inclinata di 60° rispetto all'orizzontale, e la reazione vincolare.

SOLUZIONE



Il problema viene risolto applicando il secondo principio della dinamica, tenendo conto che si tratta di una equazione vettoriale:

$$\sum \vec{F} = M \cdot \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = M \cdot \vec{a} \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x - F_a = M \cdot a \\ R + F_y - P = 0 \end{cases}$$

Il sistema così ottenuto contiene le due incognite del problema, l'accelerazione a e la reazione vincolare R . Risolto dà le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} R = P - F_y = Mg - F \cdot \sin \alpha = 20 \cdot 9,8 - 100 \cdot \sin 60^\circ = 109 \text{ N} \\ a = \frac{F_x - F_a}{M} = \frac{F \cdot \cos \alpha - \mu \cdot R}{M} = \frac{100 \cdot \cos 60^\circ - 0,2 \cdot 109}{20} = 1,5 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

PROBLEMA N. 6

Un'automobile avente la massa $M = 1600 \text{ kg}$ percorre 80 m , prima di fermarsi, con una forza frenante costante pari a 6250 N . Calcolare:

1. La velocità dell'automobile all'istante in cui inizia la frenata
2. Il tempo impiegato per fermarsi

SOLUZIONE

Innanzitutto calcoliamo la decelerazione, attraverso il 2° principio della dinamica, subito dalla macchina durante la frenata:

$$\vec{F} = M \cdot \vec{a} \Rightarrow a = \frac{F}{M} = \frac{6250}{1600} = -3,9 \text{ m/s}^2$$

Poiché si tratta di un moto uniformemente decelerato, applichiamo le rispettive leggi per rispondere ai quesiti del problema

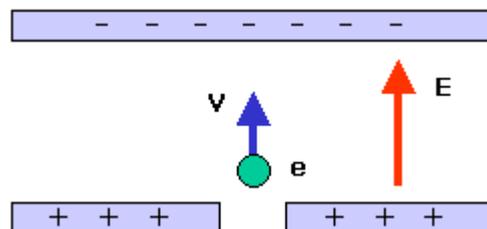
$$1. \begin{cases} S = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \\ v_0 = a t \end{cases} \Rightarrow S = a t^2 - \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow 2S = 2a t^2 - a t^2 \Rightarrow 2S = a t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2S}{a} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80}{3,9}} = 6,4 \text{ s}$$

$$2. v_0 = 3,9 \cdot 6,4 = 25 \text{ m/s} = 90 \text{ km/h}$$

PROBLEMA N. 7

Un elettrone viene sparato tra due piastre cariche con una velocità $V = 2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Il campo elettrico tra le due piastre ostacola il moto dell'elettrone con una forza $F = 4,8 \cdot 10^{-17} \text{ N}$. Sapendo che la massa dell'elettrone è $m = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$, calcolare la distanza percorsa prima di essere arrestato dalla forza elettrica.

SOLUZIONE



Innanzitutto calcoliamo la decelerazione subita dall'elettrone, attraverso il 2° principio della dinamica:

$$\vec{F} = M \cdot \vec{a} \Rightarrow a = \frac{F}{M} = \frac{4,8 \cdot 10^{-17}}{0,91 \cdot 10^{-30}} = -5,3 \cdot 10^{13} \text{ m/s}^2$$

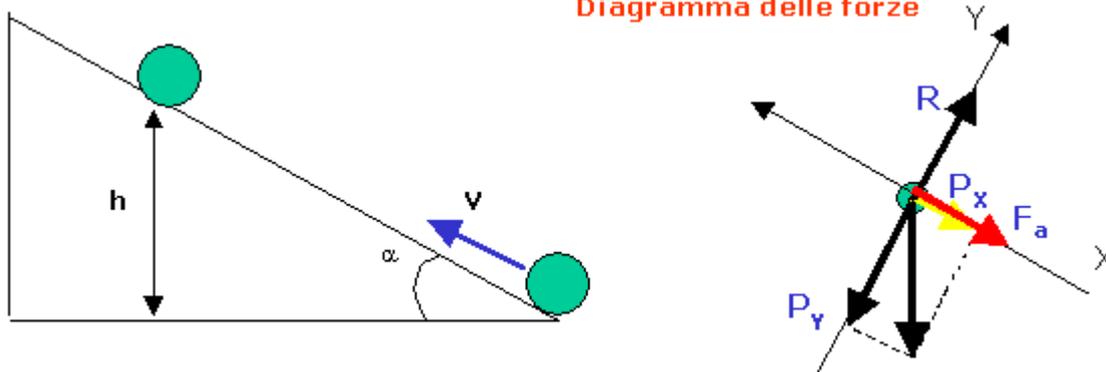
Poiché si tratta di un moto uniformemente decelerato, applichiamo le rispettive leggi per rispondere ai quesiti del problema:

$$\begin{cases} t = \frac{V_0}{a} = \frac{2 \cdot 10^6}{5,3 \cdot 10^{13}} = 0,4 \cdot 10^{-7} \text{ s} \\ S = V_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = 2 \cdot 10^6 \cdot 0,4 \cdot 10^{-7} - \frac{1}{2} \cdot 5,3 \cdot 10^{13} \cdot (0,4 \cdot 10^{-7})^2 = 0,04 \text{ m} = 4 \text{ cm} \end{cases}$$

PROBLEMA N. 8

Un copro di massa M viene lanciato lungo un piano inclinato ($\alpha = 30^\circ$) con velocità $V = 10$ m/s. Se l'attrito tra corpo e piano è $\mu = 0,2$, determinare a quale altezza h , rispetto all'orizzontale, si ferma il corpo.

SOLUZIONE



Innanzitutto calcoliamo la decelerazione, attraverso il 2° principio della dinamica, subita dal corpo durante il moto lungo il piano inclinato:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = M \cdot \vec{a} &\Rightarrow -F_a - P_x = M \cdot a \Rightarrow a = \frac{-F_a - P_x}{M} = \frac{-\mu \cdot P_y - P_x}{M} = \frac{-\mu \cdot P \cdot \cos \alpha - P \cdot \sin \alpha}{M} = \frac{P \cdot (-\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}{M} = \\ &= \frac{Mg \cdot (-\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}{M} = 9,8 \cdot (0,2 \cdot \cos 30^\circ - \sin 30^\circ) = -6,6 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Poiché si tratta di un moto uniformemente decelerato, applichiamo le rispettive leggi per calcolare lo spazio percorso:

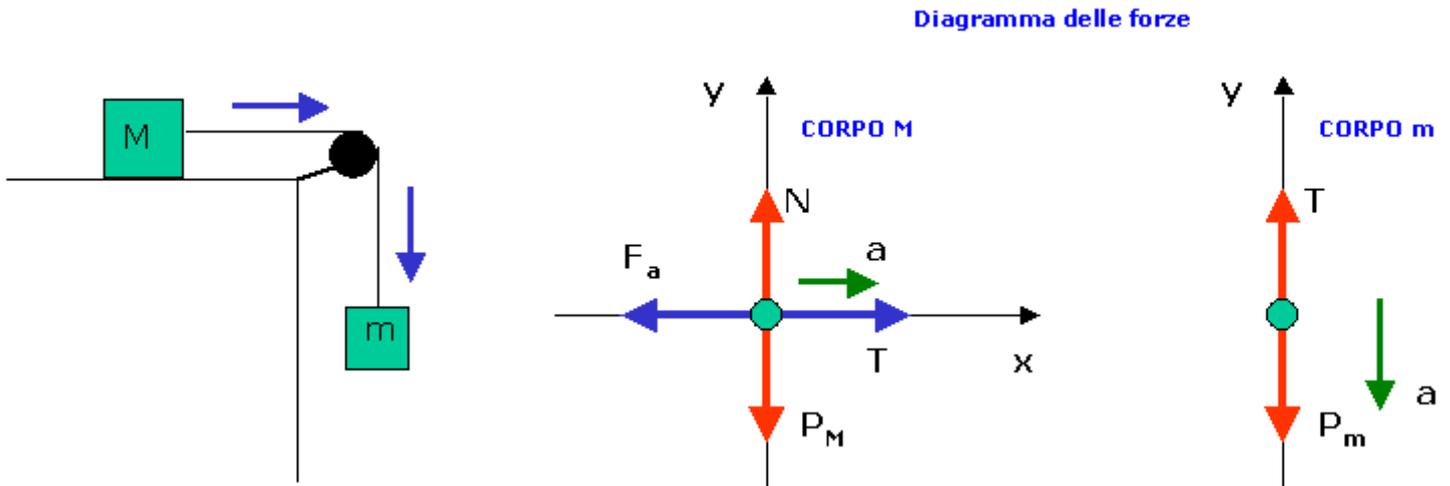
$$\begin{cases} t = \frac{V_0}{a} = \frac{10}{6,6} = 1,5 \text{ s} \\ S = V_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = 10 \cdot 1,5 - \frac{1}{2} \cdot 6,6 \cdot 1,5^2 = 7,6 \text{ m} \end{cases}$$

Da considerazioni di carattere trigonometrico calcoliamo l'altezza h alla quale il corpo si ferma:

$$h = S \cdot \sin \alpha = 7,6 \cdot \sin 30^\circ = 3,8 \text{ m}$$

PROBLEMA N. 9

Una massa $M = 3,3\text{kg}$ si muove su un piano con un coefficiente d'attrito $\mu = 0,3$, secondo la direzione indicata in figura, sotto l'azione di una massa $m = 2,1\text{kg}$. Nell'ipotesi che la fune sia priva di massa e che la carrucola non introduce nessun attrito, calcolare l'accelerazione e la tensione della corda.

SOLUZIONE

Applichiamo la seconda legge della dinamica ai due corpi, tenendo presente che l'accelerazione è la stessa per le due masse in base alle ipotesi del problema:

$$\text{CORPO } M \Rightarrow \sum \vec{F} = M \cdot \vec{a} = \begin{cases} \sum \vec{F}_x = M \cdot a \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T - F_a = M \cdot a \\ N - P_M = 0 \end{cases}$$

$$\text{CORPO } m \Rightarrow T - P_m = m \cdot a$$

Riuniamo le precedenti equazioni in un unico sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} T - F_a = M \cdot a \\ N - P_M = 0 \\ T - P_m = -m \cdot a \end{cases}$$

che risolto, darà le seguenti soluzioni:

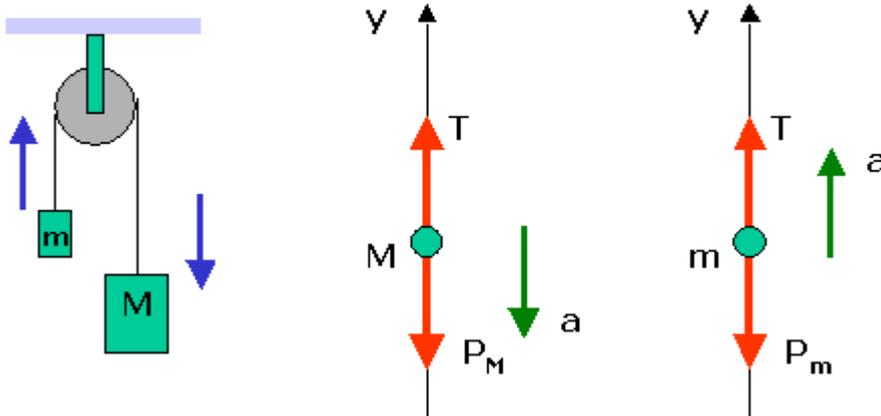
$$\begin{cases} N = P_M = M \cdot g = 3,3 \cdot 9,8 = 32,3\text{N} \\ T = M \cdot a + F_a = 3,1 \cdot 2 + 0,3 \cdot 32,3 = 15,9\text{N} \\ M \cdot a + F_a - P_m = -m \cdot a \Rightarrow 3,3a + 0,3 \cdot 32,3 - 20,6 = -2,1a \Rightarrow 5,4a = 10,9 \Rightarrow a = \frac{10,9}{5,4} = 2\text{m/s}^2 \end{cases}$$

PROBLEMA N. 10

Dato il sistema di masse in figura, calcolare la loro accelerazione e la tensione della fune, nell'ipotesi che la fune non abbia massa e la carrucola sia priva di attrito.

SOLUZIONE

Diagramma delle forze



Applichiamo la seconda legge della dinamica ai due corpi, tenendo presente che l'accelerazione è la stessa per le due masse in base alle ipotesi del problema:

$$\begin{cases} T - P_M = -M \cdot a \\ T - P_m = m \cdot a \end{cases}$$

E' un sistema di due equazioni in due incognite, che risolto dà le seguenti soluzioni:

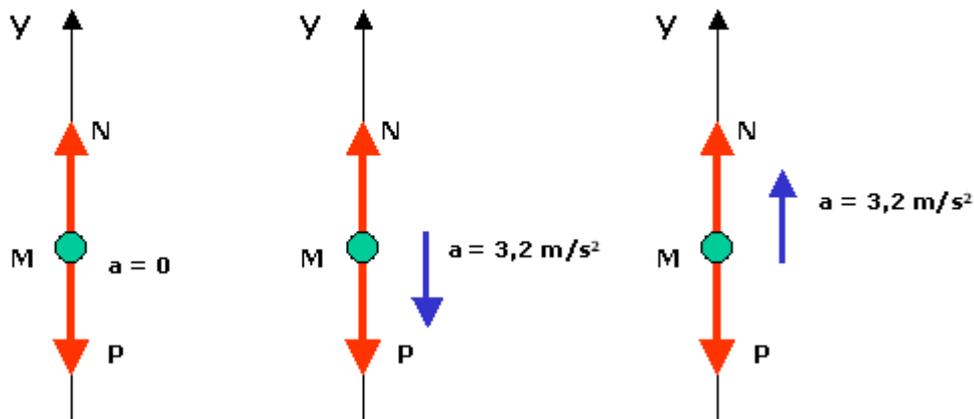
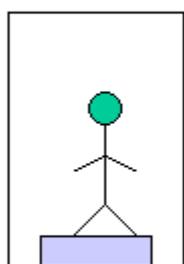
$$\begin{cases} T - Mg = -M \cdot a \Rightarrow T = Mg - Ma = 17N \\ Mg - Ma - mg = ma \Rightarrow a \cdot (M + m) = g \cdot (M - m) \Rightarrow a = \frac{M - m}{M + m} \cdot g = 3,6m/s^2 \end{cases}$$

PROBLEMA N. 11

Un passeggero di massa $m = 72.2$ kg sta su una bilancia nella cabina di un ascensore. Che cosa segna la bilancia quando l'accelerazione assume i valori dati in figura?

SOLUZIONE

Diagramma delle forze



- 1° caso: $a = 0$

$$N - Mg = 0 \Rightarrow N = Mg = 72,2 \cdot 9,8 = 708\text{N}$$

La bilancia segna il peso effettivo del passeggero

- 2° caso: $a = -3,2 \text{ m/s}^2$

$$N - Mg = -Ma \Rightarrow N = Mg - Ma = M \cdot (g - a) = 72,2 \cdot (9,8 - 3,2) = 477\text{N}$$

La bilancia segna un peso inferiore di 231 N ed il passeggero pensa di aver dimagrito 23,6 kg
($M = P/g = 231/9,8 = 23,6 \text{ kg}$)

- 3° caso: $a = 3,2 \text{ m/s}^2$

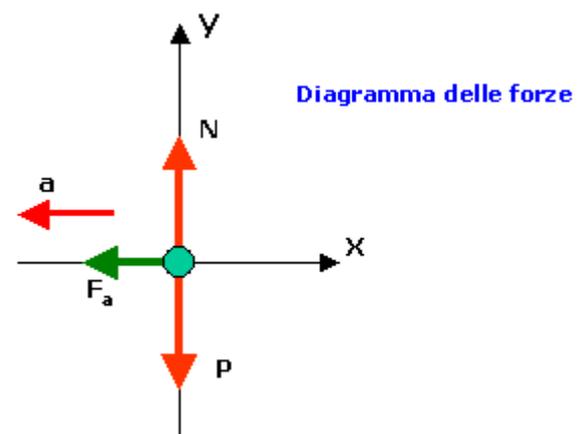
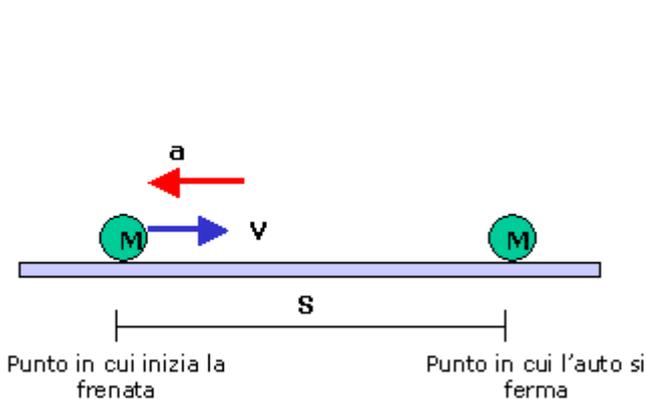
$$N - Mg = Ma \Rightarrow N = M \cdot (g + a) = 72,2 \cdot (9,8 + 3,2) = 939\text{N}$$

La bilancia segna un peso superiore di 231 N ed il passeggero pensa di aver ingrassato 23,6 kg
($M = P/g = 231/9,8 = 23,6 \text{ kg}$)

PROBLEMA N. 12

Calcolare la velocità di un'auto nell'istante in cui effettua una frenata, supponendo che la "strisciata" dei pneumatici sull'asfalto sia di 290 m ed il coefficiente di attrito dinamico $\mu_D = 0.60$

SOLUZIONE



Applicando le equazioni del moto uniformemente accelerato si ottiene:

$$\begin{cases} s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \\ v_f = v_0 - a t \end{cases} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2as} \quad \text{essendo } v_f = 0$$

Il valore dell'accelerazione lo ricaviamo applicando il 2° principio della dinamica:

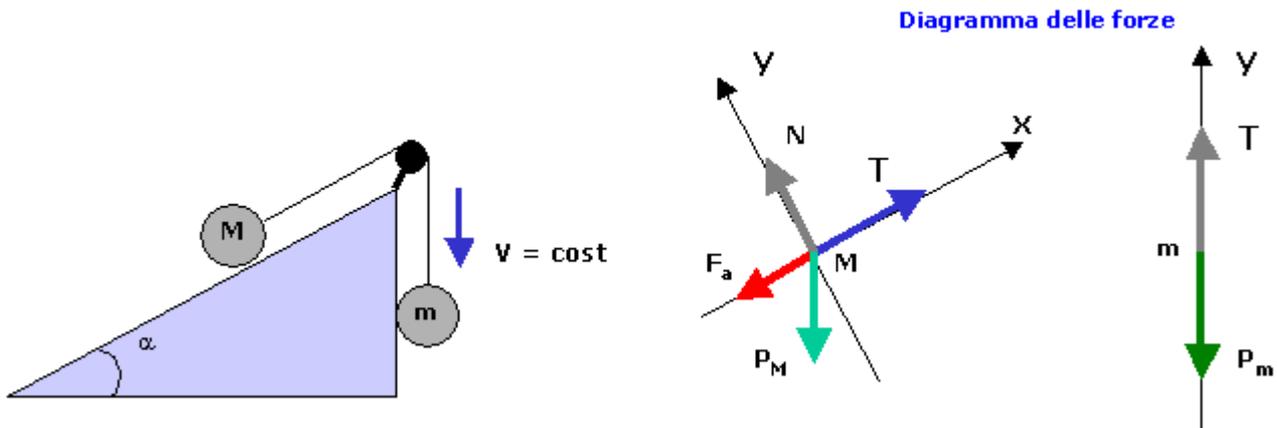
$$-F_a = -Ma \Rightarrow a = \frac{F_a}{M} = \frac{\mu_D Mg}{M} = \mu_D \cdot g$$

In definitiva:

$$v_0 = \sqrt{2\mu_D \cdot g \cdot s} = 210\text{Km/h}$$

PROBLEMA N. 13

Dato il sistema in figura ($m = 14\text{kg}$ $\alpha = 30^\circ$) calcolare il coefficiente di attrito dinamico tra la massa m ed il piano inclinato nell'ipotesi che le masse si muovano di moto uniforme.

SOLUZIONE

- 2° principio della dinamica applicato alla massa M :

$$\sum \vec{F} = M \cdot \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = M \cdot \vec{a} \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T - F_a - P_x = 0 \\ N - P_y = 0 \end{cases} \quad \text{dove } a = 0 \text{ perché } v = \text{costante}$$

- 2° principio della dinamica applicato alla massa m :

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow T - P_m = 0 \quad \text{dove } a = 0 \text{ perché } v = \text{costante}$$

Riuniamo le precedenti equazioni in un unico sistema:

$$\begin{cases} T - F_a - P_x = 0 \\ N - P_y = 0 \\ T - P_m = 0 \end{cases}$$

Sapendo che $P_x = P \cdot \sin \alpha$ e $P_y = P \cdot \cos \alpha$ il sistema ammetterà le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} T = m \cdot g = 14 \cdot 9,8 = 137\text{N} \\ F_a = T - P_x = T - Mg \sin \alpha = 137 - 14 \cdot 9,8 \cdot \sin 30^\circ = 68\text{N} \\ N = P_y = Mg \cos \alpha = 14 \cdot 9,8 \cdot \cos 30^\circ = 119\text{N} \end{cases}$$

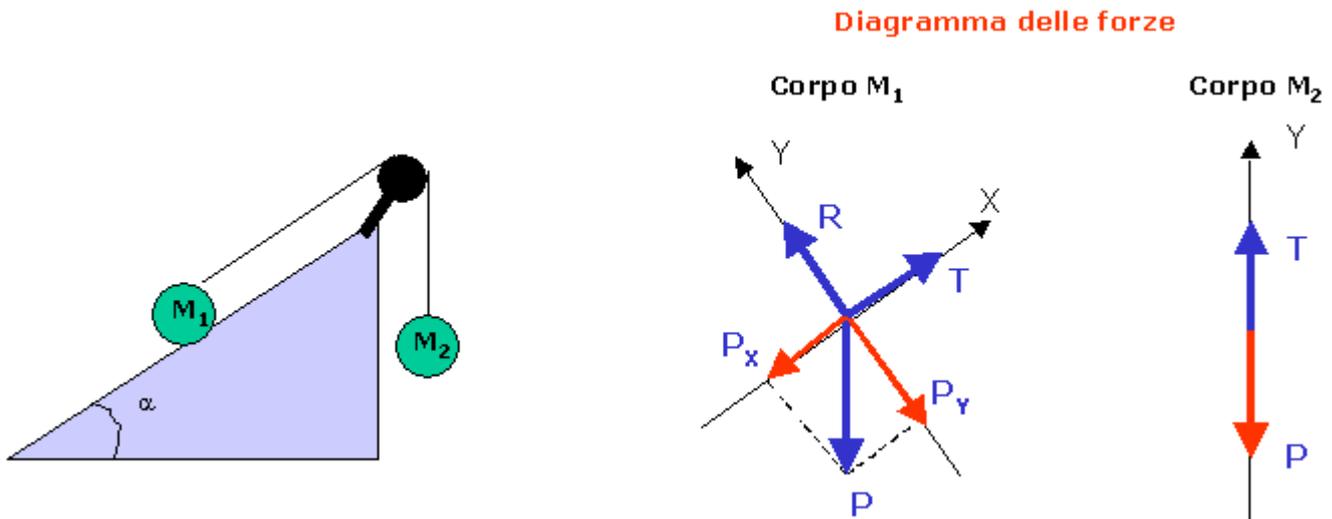
Pertanto il coefficiente di attrito dinamico sarà:

$$F_a = \mu_D N \Rightarrow \mu_D = \frac{F_a}{N} = \frac{68}{119} = 0,57$$

PROBLEMA N. 14

Dato il sistema in figura formato dalle masse $M = M_1 = M_2 = 2 \text{ kg}$ e da un piano inclinato ($\alpha = 30^\circ$) privo di attrito, determinare:

1. L'accelerazione delle masse
2. La tensione della fune, supposta inestensibile
3. La reazione vincolare del piano inclinato

SOLUZIONE

Il problema viene risolto applicando il secondo principio della dinamica a ciascuna massa e tenendo conto che sono equazioni vettoriali e come tali scomponibili lungo gli assi cartesiani. Inoltre, in base alle ipotesi del problema, l'accelerazione è la stessa per le due masse così come la tensione della fune.

$$\text{CORPO } M_1 \Rightarrow \sum \vec{F} = M \cdot \vec{a} = \begin{cases} \sum \vec{F}_x = M \cdot a \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T - P_x = M \cdot a \\ R - P_y = 0 \end{cases}$$

$$\text{CORPO } M_2 \Rightarrow \sum F_y = M \cdot a \Rightarrow T - P = -M \cdot a$$

NOTARE: Abbiamo ipotizzato che la massa M_2 si muove verso il basso, ed in base al sistema di riferimento scelto la sua accelerazione è un vettore negativo, e quindi la massa M_1 si muove verso l'alto lungo il piano inclinato, ed in base al sistema di riferimento scelto la sua accelerazione è un vettore positivo.

Riuniamo le precedenti equazioni in un unico sistema, ottenendo così un sistema di tre equazioni in tre incognite, che sono quelle poste come quesito dal problema:

$$\begin{cases} T - P_x = M \cdot a \\ R - P_y = 0 \\ T - P = -M \cdot a \end{cases}$$

Risolviamo il sistema con il metodo di sostituzione, ricavando l'incognita T dalla prima equazione e sostituendola nella terza equazione otteniamo il valore dell'accelerazione:

$$\begin{cases} T = P_x + M \cdot a \\ P_x + M \cdot a - P = -M \cdot a \Rightarrow 2M \cdot a = P - P_x \Rightarrow a = \frac{P - P_x}{2M} = \frac{P - P \cdot \text{sen}\alpha}{2M} = \frac{P \cdot (1 - \text{sen}\alpha)}{2M} = \frac{Mg \cdot (1 - \text{sen}\alpha)}{2M} = 2,45 \text{ m/s}^2 \\ R - P_y = 0 \end{cases}$$

A questo punto le altre incognite sono facilmente calcolabili:

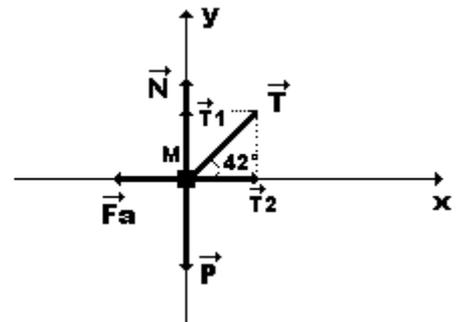
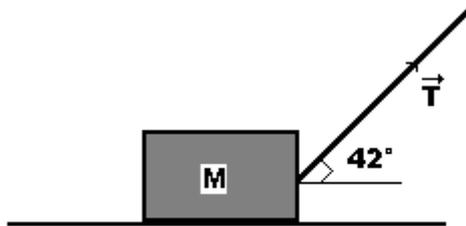
$$\begin{cases} T = P \cdot \sin\alpha + M \cdot a = Mg \cdot \sin\alpha + M \cdot a = M \cdot (g \cdot \sin\alpha + a) = 2 \cdot (9,8 \cdot \sin 30^\circ + 2,45) = 14,7\text{N} \\ a = 2,45\text{m/s}^2 \\ R = P_y = P \cdot \cos\alpha = Mg \cdot \cos\alpha = 2 \cdot 9,8 \cdot \cos 30^\circ = 17\text{N} \end{cases}$$

Conclusione: La massa M_2 si muove verso il basso perché il valore trovato, essendo positivo, è in accordo con l'ipotesi fatta.

PROBLEMA N. 15

Un corpo di massa $M = 75\text{kg}$ viene tirato, a velocità costante, con una fune inestensibile con un angolo $\alpha = 42^\circ$ rispetto alla direzione di moto. Supponendo che il coefficiente di attrito dinamico è $\mu_D = 0,1$, calcolare la tensione della fune.

SOLUZIONE



2° PRINCIPIO DELLA DINAMICA APPLICATO AL CORPO M

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = \vec{0} \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \end{cases} \quad a = 0 \text{ perché } V = \text{cost}$$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} T_2 - F_a = 0 \\ N + T_1 - P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \cdot \cos\alpha - F_a = 0 \\ N + T \cdot \sin\alpha - P = 0 \end{cases}$$

dove: $T_1 = T \cdot \sin\alpha$ $T_2 = T \cdot \cos\alpha$ $F_a = \mu_D N = \mu_D Mg$ $P = Mg$

Il sistema, così ottenuto, nelle incognite T e N , ammette le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} T = \frac{\mu_D Mg}{\cos\alpha + \mu_D \sin\alpha} = 91\text{N} \\ N = Mg - T \sin\alpha = 670\text{N} \end{cases}$$

PROBLEMA N. 16

La figura rappresenta un'automobile di massa $M = 1600\text{kg}$ che viaggia a velocità costante $v = 20\text{m/s}$ su una pista piana e circolare di raggio $R = 190\text{m}$.

- ❑ Qual è il valore minimo del coefficiente di attrito tra i pneumatici ed il terreno che impedisce alla macchina di slittare verso l'esterno?
- ❑ Se la curva è sopraelevata, a quale angolo dovrà essere inclinato il fondo stradale per garantire la tenuta di strada senza l'ausilio della forza di attrito?

SOLUZIONE

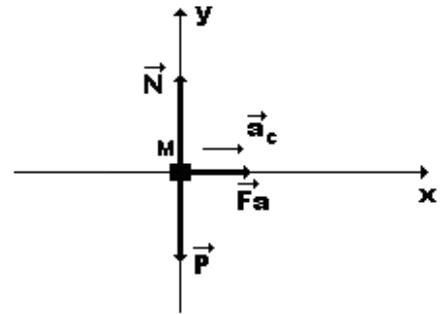
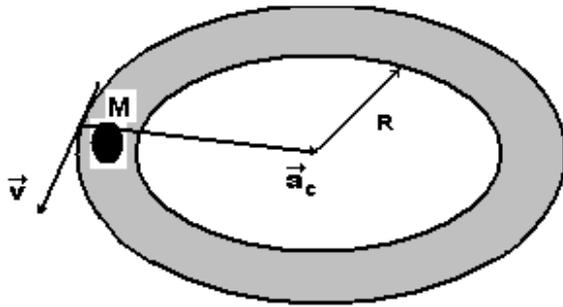
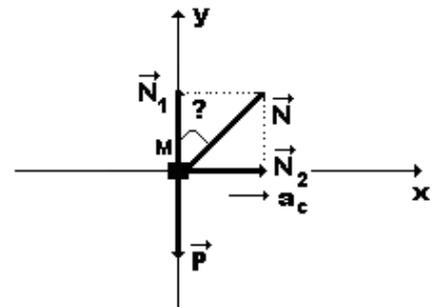
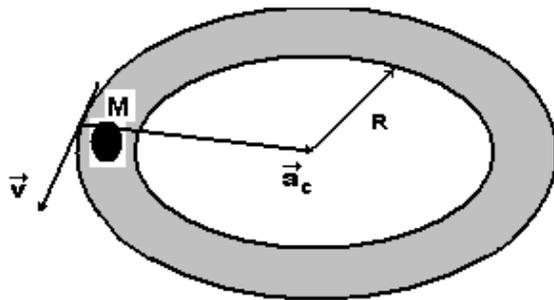


Diagramma delle forze



PRIMO CASO

2° PRINCIPIO DELLA DINAMICA APPLICATO AL CORPO M $\Rightarrow \sum \vec{F} = M \cdot a_c \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = \vec{0} \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_a = M \cdot a_c \\ N - P = 0 \end{cases}$

dove $P = Mg$ $a_c = v^2/R$ $F_a = \mu_D N = \mu_D Mg$

Pertanto:

$$\mu_D \cdot M \cdot g = M \frac{v^2}{R} \Rightarrow \mu_D = \frac{V^2}{g \cdot R} = \frac{20^2}{9,8 \cdot 190} = 0,21$$

SECONDO CASO

2° PRINCIPIO DELLA DINAMICA $\Rightarrow \sum \vec{F} = M \cdot a_c \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = \vec{0} \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_2 = M \cdot a_c \\ N_1 - P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N \cdot \text{sen} \alpha = M \cdot a_c \\ N \cdot \text{cos} \alpha = M \cdot g \end{cases}$

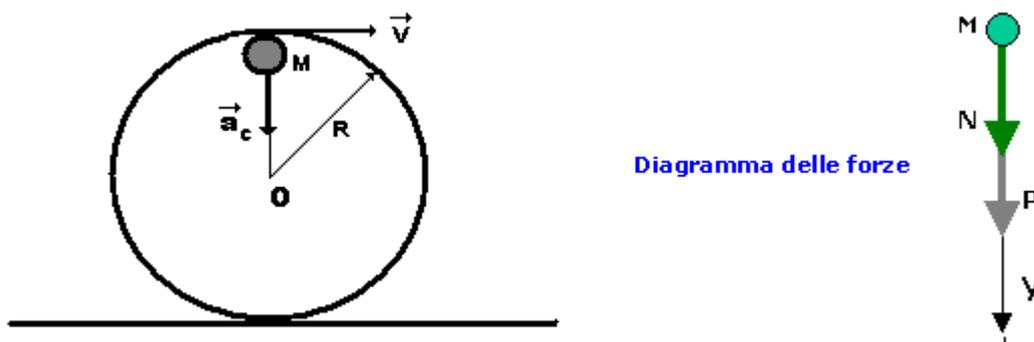
dove: $N_1 = N \cdot \text{cos} \alpha$ $N_2 = N \cdot \text{sen} \alpha$ $P = Mg$ $a_c = v^2/R$

Dividendo membro a membro le equazioni del sistema, otteniamo:

$$\frac{N \cos \alpha}{N \text{sen} \alpha} = \frac{Mg}{M a_c} \Rightarrow \text{ctg} \alpha = \frac{g}{a_c} \Rightarrow \text{tg} \alpha = \frac{a_c}{g} = \frac{V^2}{g \cdot R} = \frac{20^2}{9,8 \cdot 190} = 0,21 \Rightarrow \alpha = 12^\circ$$

PROBLEMA N.17

Un veicolo compie un giro della morte su una pista circolare, di raggio $R = 3\text{ m}$, disposta in un piano verticale. Qual è la minima velocità che il veicolo deve avere nel punto più alto della pista?

SOLUZIONE

$$2^{\circ} \text{ PRINCIPIO DELLA DINAMICA APPLICATO AL CORPO } M \Rightarrow \sum \vec{F} = M \cdot \vec{a} \Rightarrow N + P = M \cdot a_c$$

dove $P = Mg$ $a_c = v^2/R$ (accelerazione centripeta)

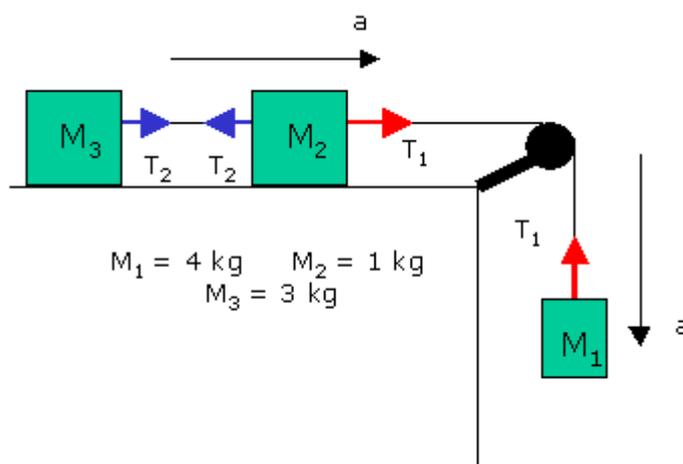
Se il veicolo è nella condizione di perdere contatto con la pista, allora $N = 0$, per cui la legge diventa:

$$P = M \cdot a_c \Rightarrow Mg = M \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{g \cdot R} = \sqrt{9,8 \cdot 3} = 5,4 \text{ m/s}$$

Per essere certi che il veicolo non perda contatto con la pista nel punto più alto, la velocità deve essere maggiore di 5.4 m/s.

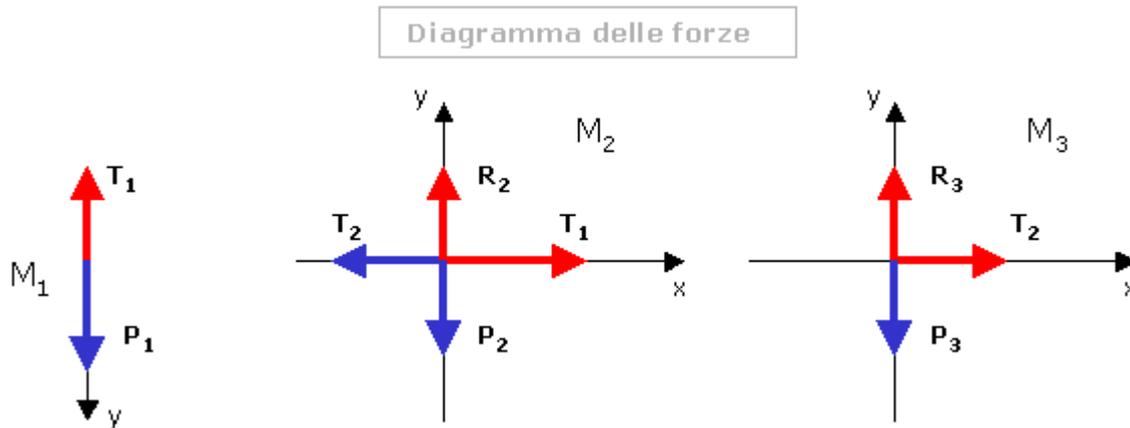
PROBLEMA N.18

Dato il sistema in figura, calcolare l'accelerazione e le tensioni delle funi.



SOLUZIONE

Disegniamo il diagramma delle forze per ciascun corpo:



Applichiamo il 2° principio della dinamica a ciascun corpo:

$$M_1 \Rightarrow P_1 - T_1 = M_1 \cdot a$$

$$M_2 \Rightarrow \begin{cases} T_1 - T_2 = M_2 \cdot a \\ R_2 - P_2 = 0 \end{cases}$$

$$M_3 \Rightarrow \begin{cases} T_2 = M_3 \cdot a \\ R_3 - P_3 = 0 \end{cases}$$

Raccogliamo in un unico sistema le equazioni utili ai fini del problema:

$$\begin{cases} P_1 - T_1 = M_1 \cdot a \\ T_1 - T_2 = M_2 \cdot a \\ T_2 = M_3 \cdot a \end{cases} \quad \text{Sommiamo membro a membro le tre equazioni:}$$

$$P_1 - T_1 + T_1 - T_2 + T_2 = (M_1 + M_2 + M_3) \cdot a$$

Dall'equazione così ottenuta calcoliamo l'accelerazione delle masse:

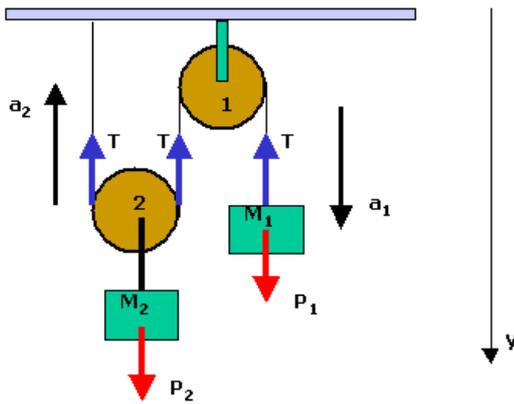
$$a = \frac{P_1}{\sum M} = \frac{M_1}{\sum M} \cdot g = \frac{4}{4+1+3} \cdot 9,8 = 4,9 \text{ m/s}^2$$

Le tensioni delle funi, di conseguenza, sono:

$$T_1 = P_1 - M_1 \cdot a = M_1 \cdot g - M_1 \cdot a = M_1 \cdot (g - a) = 4 \cdot (9,8 - 4,9) = 19,6 \text{ N}$$

$$T_2 = M_3 \cdot a = 3 \cdot 4,9 = 14,7 \text{ N}$$

PROBLEMA N.19



Dato il sistema in figura ($M_1 = 3 \text{ kg}$ e $M_2 = 4 \text{ kg}$) calcolare:

- le accelerazioni e la tensione delle funi, nell'ipotesi che la fune sia inestensibile e priva di massa e le carrucole non abbiano dimensioni e siano prive di massa;
- la condizione di equilibrio del sistema.

SOLUZIONE

IPOTESI: Sia la massa M_1 a cadere verso il basso. L'ipotesi fatta è influente ai fini della risoluzione del problema.

□ Applichiamo il 2° principio della dinamica alle due masse:

$$\begin{cases} P_1 - T = M_1 \cdot a_1 \\ -T - T + P_2 = -M_2 \cdot a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 - T = M_1 \cdot a_1 \\ 2T - P_2 = M_2 \cdot a_2 \end{cases}$$

Notiamo:

- per le ipotesi fatte sulla fune, le tensioni in gioco sono tutte uguali;
- le accelerazioni dei due corpi sono diverse; infatti se M_1 si muove di un tratto ΔL verso il basso, poiché la fune è inestensibile, tale tratto di fune dovrà essere sottratto al tratto di fune che avvolge la carrucola 2. Questo tratto sarà quindi ottenuto prelevando un tratto $\Delta L/2$ a sinistra e a destra della carrucola 2. Allora la velocità $V_1 = \Delta L / \Delta t$ di M_1 è doppia rispetto alla velocità $V_2 = \Delta L/2 \Delta t$ di M_2 e analogamente per le accelerazioni otteniamo:

$$a_1 = 2 \cdot a_2$$

Fatte queste considerazioni, risolviamo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} P_1 - T = 2M_1 \cdot a_2 \\ 2T - P_2 = M_2 \cdot a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = P_1 - 2M_1 \cdot a_2 \\ 2P_1 - 4M_1 \cdot a_2 - P_2 = M_2 \cdot a_2 \end{cases}$$

La seconda equazione del sistema contiene l'unica incognita a_2 :

$$M_2 \cdot a_2 + 4M_1 \cdot a_2 = 2P_1 - P_2 \Rightarrow$$

$$(4M_1 + M_2) \cdot a_2 = 2P_1 - P_2 \Rightarrow a_2 = \frac{2P_1 - P_2}{4M_1 + M_2} = \frac{2M_1g - M_2g}{4M_1 + M_2} = \frac{2M_1 - M_2}{4M_1 + M_2} \cdot g = \frac{2 \cdot 3 - 4}{4 \cdot 3 + 4} \cdot 9,8 = 1,23 \text{ m/s}^2$$

A questo punto è semplice calcolare a_1 e T :

$$a_1 = 2 \cdot 1,23 = 2,45 \text{ m/s}^2 \quad T = M_1 \cdot g - 2M_1 \cdot a_2 = M_1 \cdot (g - 2a_2) = 3 \cdot (9,8 - 2 \cdot 1,23) = 22 \text{ N}$$

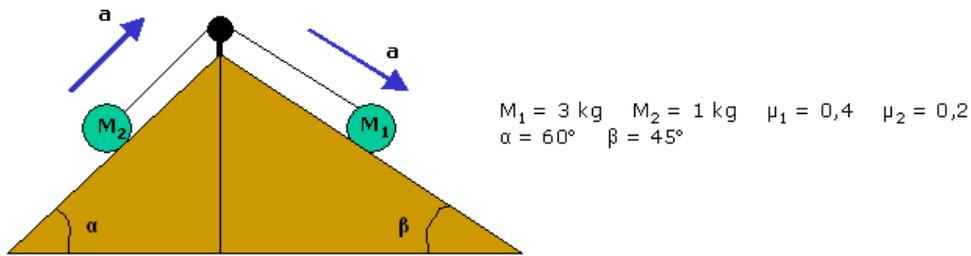
Poiché a_1 è positiva, l'ipotesi fatta è giusta, cioè M_1 cade verso il basso e M_2 si muove verso l'alto. Se a_1 fosse stata negativa, il problema sarebbe stato risolto nello stesso modo, ma avremmo concluso che M_1 si muove verso l'alto e M_2 verso il basso.

□ L'equilibrio si ottiene se $a_1 = 0$ cioè:

$$a_1 = 2 \cdot \frac{2P_1 - P_2}{4M_1 + M_2} = 0 \Rightarrow 2 \cdot (2P_1 - P_2) = 0 \Rightarrow 2P_1 = P_2 \Rightarrow 2M_1g = M_2g \Rightarrow M_2 = 2M_1$$

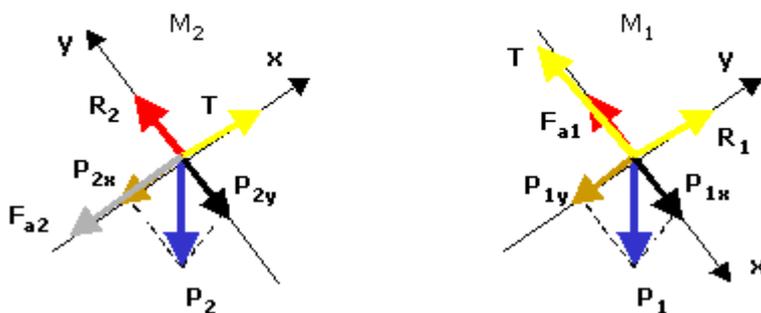
PROBLEMA N.20

Dato il sistema di masse in figura, calcolare l'accelerazione e la tensione della fune, nell'ipotesi che sia priva di massa ed inestensibile.



SOLUZIONE

Diagramma delle forze



IPOTESI: M_1 scende M_2 sale

Tenendo conto del diagramma delle forze, il 2° principio della dinamica applicato alle due masse diventa:

$$M_1 \Rightarrow \begin{cases} P_{1x} - F_{a1} - T = M_1 \cdot a \\ R_1 - P_{1y} = 0 \end{cases} \quad M_2 \Rightarrow \begin{cases} T - F_{a2} - P_{2x} = M_2 \cdot a \\ R_2 - P_{2y} = 0 \end{cases}$$

Le equazioni che servono a rispondere ai quesiti del problema sono:

$$\begin{cases} P_{1x} - F_{a1} - T = M_1 \cdot a \\ T - F_{a2} - P_{2x} = M_2 \cdot a \end{cases}$$

Risolviamo il sistema con il metodo di riduzione, per cui, sommando membro a membro le due equazioni otteniamo un'equazione in una sola incognita:

$$P_{1x} - F_{a1} - T + T - F_{a2} - P_{2x} = M_1 a + M_2 a \Rightarrow (M_1 + M_2) \cdot a = P_1 \cdot \sin\beta - \mu_1 \cdot P_1 \cdot \cos\beta - \mu_2 \cdot P_2 \cdot \cos\alpha - P_2 \cdot \sin\alpha \Rightarrow$$

$$(M_1 + M_2) \cdot a = P_1 \cdot (\sin\beta - \mu_1 \cdot \cos\beta) - P_2 \cdot (\mu_2 \cdot \cos\alpha + \sin\alpha) \Rightarrow a = \frac{P_1 \cdot (\sin\beta - \mu_1 \cdot \cos\beta) - P_2 \cdot (\mu_2 \cdot \cos\alpha + \sin\alpha)}{M_1 + M_2} =$$

$$\frac{3 \cdot 9,8 \cdot (\sin 45^\circ - 0,4 \cdot \cos 45^\circ) - 1 \cdot 9,8 \cdot (0,2 \cdot \cos 60^\circ + \sin 60^\circ)}{3 + 1} = 0,75 \text{ m/s}^2$$

Poiché l'accelerazione è positiva, l'ipotesi fatta è giusta, cioè M_1 cade verso il basso e M_2 si muove verso l'alto. Se a fosse stata negativa, il problema sarebbe stato risolto nello stesso modo, ma avremmo concluso che M_1 si muove verso l'alto e M_2 verso il basso.

Nota l'accelerazione possiamo calcolare dalla prima equazione del sistema la tensione della fune:

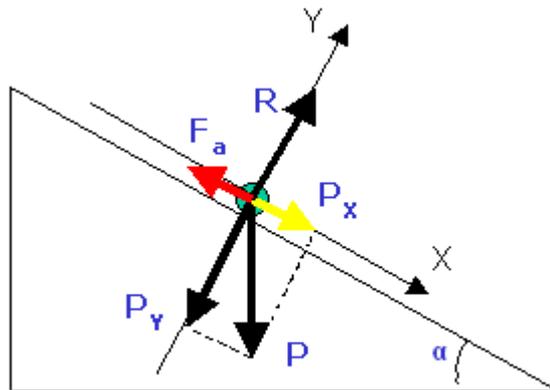
$$T = P_{1x} - F_{a1} - M_1 \cdot a = M_1 g \cdot \sin\beta - \mu_1 \cdot M_1 g \cdot \cos\beta - M_1 \cdot a = M_1 g \cdot (\sin\beta - \mu_1 \cdot \cos\beta) - M_1 \cdot a =$$

$$3 \cdot 9,8 \cdot (\sin 45^\circ - 0,4 \cdot \cos 45^\circ) - 3 \cdot 0,75 = 10,22 \text{ N}$$

PROBLEMA N.21

Un corpo di massa $M = 1\text{kg}$ sia poggiato su un piano inclinato con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0,5$ e coefficiente di attrito dinamico $\mu_D = 0,3$. Si supponga di sollevare lentamente il piano variando l'angolo α . Calcolare:

- per quale valore di α il corpo comincia a scivolare
- con quale accelerazione il corpo si muove in corrispondenza dell'angolo α

SOLUZIONE

- Un punto materiale è in equilibrio se la somma vettoriale di tutte le forze che agiscono su di esso è nulla:

CONDIZIONE DI EQUILIBRIO ➡ $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = \vec{0} \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \end{cases}$

Utilizziamo la prima equazione per calcolare l'angolo in corrispondenza del quale il corpo comincia a scivolare:

$$P_x = F_a \Rightarrow P \cdot \sin \alpha = \mu_s \cdot P \cdot \cos \alpha \Rightarrow \mu_s = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 0,5 \Rightarrow \alpha = 27^\circ$$

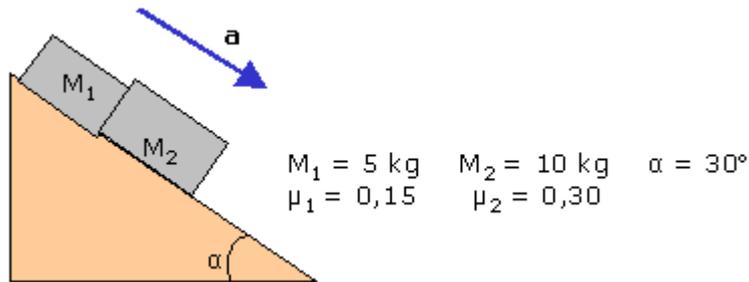
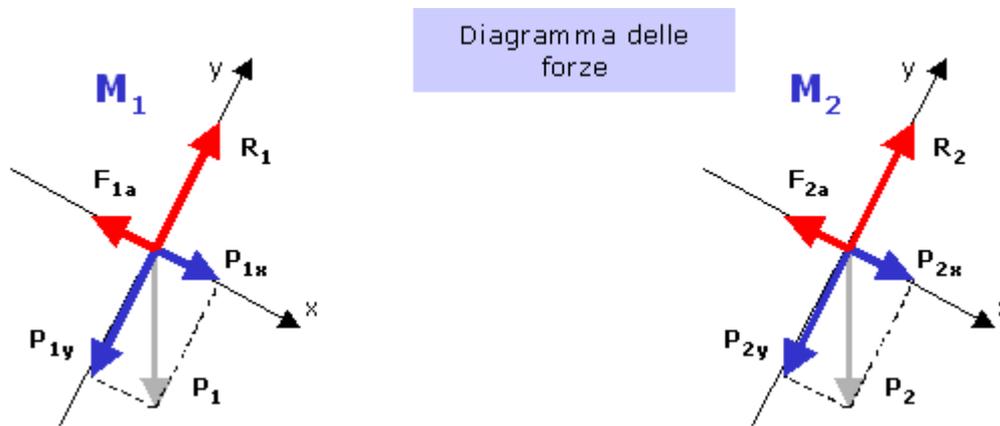
- Quando il corpo comincia a scivolare, la forza d'attrito diminuisce perché il coefficiente d'attrito diventa quello dinamico, per cui, applicando il 2° principio della dinamica, l'accelerazione si calcola come:

$$P_x - F_{aD} = M \cdot a \Rightarrow a = \frac{P_x - F_{aD}}{M} = \frac{P \cdot \sin \alpha - \mu_D \cdot P \cdot \cos \alpha}{M} = \frac{Mg \cdot (\sin \alpha - \mu_D \cdot \cos \alpha)}{M} =$$

$$9,8 \cdot (\sin 27^\circ - 0,3 \cdot \cos 27^\circ) = 1,8 \text{m/s}^2$$

PROBLEMA N.22

Calcolare l'accelerazione del sistema di masse rappresentato in figura:

**SOLUZIONE**

Applichiamo il secondo principio della dinamica alle singole masse:

$$M_1 \Rightarrow \sum \vec{F} = M_1 \cdot \vec{a} = \begin{cases} \sum \vec{F}_x = M_1 \cdot \vec{a} \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{1x} - F_{1a} = M_1 \cdot a \\ R_1 - P_{1y} = 0 \end{cases}$$

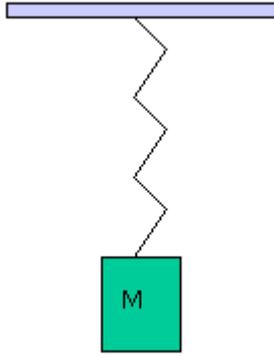
$$M_2 \Rightarrow \sum \vec{F} = M_2 \cdot \vec{a} = \begin{cases} \sum \vec{F}_x = M_2 \cdot \vec{a} \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{2x} - F_{2a} = M_2 \cdot a \\ R_2 - P_{2y} = 0 \end{cases}$$

Poiché il corpo M_2 ha una massa ed un coefficiente d'attrito maggiori rispetto al corpo M_1 , la forza d'attrito che agisce su M_2 è maggiore rispetto a quella che agisce su M_1 , per cui M_2 , frenando il moto di M_1 , fa sì che il blocco di masse si muova insieme lungo il piano inclinato. Pertanto, sommando membro a membro le prime equazioni dei due sistemi otteniamo un'unica equazione nell'incognita "a":

$$P_{1x} - F_{a1} + P_{2x} - F_{a2} = (M_1 + M_2) \cdot a \Rightarrow a = \frac{P_{1x} + P_{2x} - F_{a1} - F_{a2}}{M_1 + M_2} = \frac{P_1 \cdot \sin \alpha + P_2 \cdot \sin \alpha - \mu_1 \cdot P_{1y} - \mu_2 \cdot P_{2y}}{M_1 + M_2}$$

$$= \frac{P_1 \cdot \sin \alpha + P_2 \cdot \sin \alpha - \mu_1 \cdot P_1 \cdot \cos \alpha - \mu_2 \cdot P_2 \cdot \cos \alpha}{M_1 + M_2} = \frac{P_1 \cdot (\sin \alpha - \mu_1 \cdot \cos \alpha) + P_2 \cdot (\sin \alpha - \mu_2 \cdot \cos \alpha)}{M_1 + M_2}$$

$$= \frac{5 \cdot 9,8 \cdot (\sin 30^\circ - 0,15 \cdot \cos 30^\circ) + 10 \cdot 9,8 \cdot (\sin 30^\circ - 0,30 \cdot \cos 30^\circ)}{5 + 10} = 2,78 \text{ m/s}^2$$

PROBLEMA N.23

Calcolare il periodo di oscillazione e la pulsazione di una molla che viene allungata di 0,4 m da una massa di 1 kg.

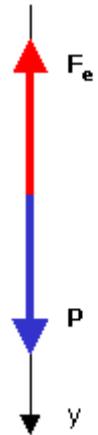
SOLUZIONE

Le forze in gioco sono la forza elastica e la forza peso, per cui applicando il 2° principio della dinamica calcoliamo la costante elastica della molla che serve per calcolare il periodo di oscillazione:

$$F_e = M \cdot a \Rightarrow -k \cdot x = M \cdot g \Rightarrow k = \frac{M \cdot g}{x} = \frac{1 \cdot 9,8}{0,4} = 24,5 \text{ N/m}$$

Pertanto:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{24,5}} = 1,3 \text{ s} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1,3} = 5 \text{ rad/s}$$

**PROBLEMA N.24**

Una strada presenta una curva di raggio $R = 100$ m. Supponendo che il coefficiente di attrito fra le ruote di un'auto e la strada sia $\mu = 0,5$, calcolare la massima velocità affinché la curva sia percorsa senza sbandare.

SOLUZIONE

La forza che permette all'auto di percorrere la curva senza sbandare è la forza centripeta, che in questo caso coincide con la forza d'attrito, per cui il 2° principio della dinamica diventa:

$$F_c = M \cdot \frac{V^2}{R} \Rightarrow \mu \cdot Mg = M \cdot \frac{V^2}{R} \Rightarrow V = \sqrt{\mu Rg} = \sqrt{0,5 \cdot 100 \cdot 9,8} = 22 \text{ m/s} = 80 \text{ km/h}$$

PROBLEMA N.25

Un corpo di massa 1 kg si muove di moto armonico con ampiezza 10 cm. Sapendo che il valore massimo dell'accelerazione è $3,94 \text{ m/s}^2$, calcolare la frequenza del moto e la forza agli estremi di oscillazione.

SOLUZIONE

Per calcolare la frequenza del moto armonico ci serve il valore della pulsazione che si calcola attraverso la formula dell'accelerazione del moto armonico:

$$a = -\omega^2 x \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a}{x}} = \sqrt{\frac{3,94}{0,1}} = 6,3 \text{ rad/s}$$

per cui:

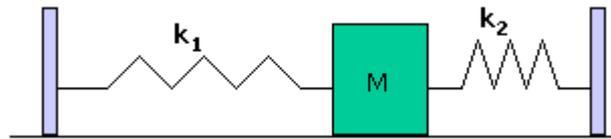
$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 1 \text{ Hz}$$

Dal 2° principio della dinamica calcoliamo la forza agli estremi di oscillazione:

$$F = M \cdot a = 1 \cdot 3,94 = 3,94 \text{ N}$$

PROBLEMA N.26

Un corpo di massa $M = 4 \text{ kg}$ oscilla sotto l'azione di due molle aventi costanti elastiche $K_1 = 200 \text{ N/m}$ e $K_2 = 150 \text{ N/m}$. Calcolare il periodo di oscillazione del sistema.

**SOLUZIONE**

Sia durante la fase di compressione che di allungamento di entrambe le molle, la massa M sarà sottoposta sempre a due forze elastiche concordi, per cui il 2° principio della dinamica diventa:

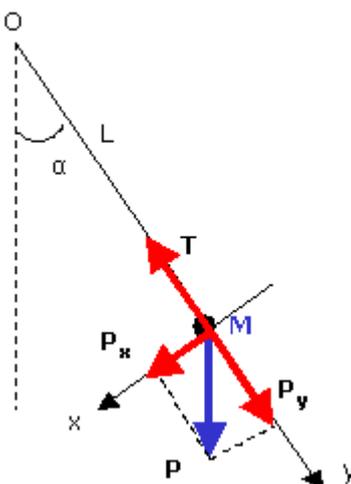
$$F_{1e} + F_{2e} = M \cdot a \Rightarrow -k_1 x - k_2 x = M \cdot a \Rightarrow -(k_1 + k_2) \cdot x = M \cdot a$$

Sapendo che $a = \omega^2 \cdot x$ abbiamo che:

$$-(k_1 + k_2) \cdot x = -M\omega^2 x \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M}}$$

per cui l'oscillazione del sistema è:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{M}{k_1 + k_2}} = \sqrt{\frac{4}{200 + 150}} = 0,67\text{s}$$

PROBLEMA N.27

Un pendolo semplice di lunghezza $L = 1 \text{ m}$ porta all'estremità una pallina di massa $M = 100 \text{ g}$. Quando il filo forma con la verticale un angolo di 45° la pallina ha un'accelerazione centripeta di 4 m/s^2 . Calcolare la velocità della pallina e la tensione del filo nella posizione considerata.

SOLUZIONE

Dalla formula dell'accelerazione centripeta calcoliamo la velocità della pallina come formula inversa:

$$a_c = \frac{V^2}{L} \Rightarrow V = \sqrt{a_c \cdot L} = \sqrt{4 \cdot 1} = 2\text{m/s}$$

Dal 2° principio della dinamica calcoliamo la tensione della fune:

$$T - P_y = M \cdot a_c \Rightarrow T = P_y + M \cdot a_c = Mg \cdot \cos \alpha + M \cdot a_c = M \cdot (g \cdot \cos \alpha + a_c) = 0,1 \cdot (9,8 \cdot \cos 45^\circ + 4) = 1,09\text{N}$$