PROGRAM LINIER

1

Obyektif

1. **Memahami bentuk dari Program Linier**
2. **Memahami permasalahan dan membuat mode matematik**
3. **Mengerti tujuan dan kendala dalam Riset Operasi**

Linier Programming adalah Suatu model umum yang dapat digunakan dalam pemecahan masalah pengalokasian sumber-sumber yang terbatas secara optimal

George B. Dantzig, diakui secara umum sebagai pioneer dalam bidang Program Linier.

Ada dua macam fungasi dalam Linear Programming yaitu :

1. Fungsi Tujuan
2. Fungsi Batasan

Fungsi Tujuan adalah fungsi yang menggambarkan tujuan/sasaran di dalam Linear programming yang berkaitan dengan pengaturan secara optimal sember daya-sumber daya untuk memperoleh keuntungan maksimum.

Fungsi batasan/kendala adalah merupakan bentuk penyajian secara matematis batasan-batasan kapasitas yang tersedia yang akan dialokasi secara optimal

Bentuk Umum Model Program Linier

Optimumkan

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

Dengan batasan :

$\sum a_{ij} \; x_j \geq \leq b_i$, , *untuk i= 1,2,3……m*

$X_j \; \geq 0$, *untuk j = 1,2,3…….n*

Atau dapat ditulis secara lengkap sebagai berikut ;

Optimumkan

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots .. + C_nX_n$$

Dengan batasan

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots .. + a_{1n}x_n \geq \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots .. + a_{2n}x_n \geq \leq b_2$

-

-

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots .. + a_{mn}x_n \geq \leq b_1$

$x_1 x_2 x_{3 \ldots \ldots} x_n \;\; \geq 0$

Keterangan :

Z = Fungsi tujuan yang dicari nilai optimalnya (maksimal, minimal)
Cj = Kenaikan Nilai Z apabila ada pertambahan tingkat kegiatan Xj dengan satu satuan unit atau sumbangan setiap satuan keluaran kegiatan j terhadap Z

n = Macam kegiatan yang menggunakan sumber atau fasilitas yangtersedia
m = Macam batasab sumber atau fasilitas yang tersedia
Xj = Tingkat kegiatan ke j
aij = Banyaknya sumber i yang diperlukan untuk menghasilkan setiap unit keluaran kegiatan j
bi = Kapasitas sumber i yang tersedia untuk dialokasikan kesetiap unit kegiatan

Asumsi dasar dalam Linear Programming yaitu

- Proportionality
- Additivity
- Divisibility
- Deterministic

ASUMSI PROPORTIONALITY

Naik turunnya nilai Z dan penggunaan sumber yang tersedia akan berubah secara sebanding dengan perubahan tingkat kegiatan.

ASUMSI ADDITIVITY

Kenaikan dari nilai Z yang diakibatkan oleh kenaikan suatu kegiatan dapat ditambahkan tanpa mempengaruhi bagian nilai Z yang diperoleh dari kegiatan lain.

ASUMSI DIVISIBILITY

Output yang dihasilkan oleh setiap kegiatan dapat berupa bilangan pecahan, sama halnya dengan nilai Z

ASUMSI DETERMINISTIC (*Certainty)*

Semua parameter yang terdapat dalam Linear Programming dapat diperkirakan dengan pasti.

Metode GRAFIK merupakan salah satu teknik pemecahan model program linier yang hanya memuat dua variable keputusan.

METODE SIMPLEKS

2

Obyektif

1. **Memahami cara menyelesaikan permasalahan menggunakan solusi grafik**
2. **Mengetahui fungsi kendala dan fungsi tujuan**

Untuk menggunakan Metode Simpleks dalam masalah Program Linier maka perlu dipahami bagaimana mengubah suatu bentuk program linier menjadi bentuk standarnya, karena bentuk standar yang digunakan dalam metode simpleks.

Beberapa aturan/bentuk program linier baku/standar :

1. Semua batasan / kendala adalah persamaan (dengan nilai sisi kanan yang non negatif)
2. Semua variabel keputusan adalah non negative
3. Fungsi tujuan dapat berupa maksimisasi dan minimasi

Karena semua kendala harus berbentuk persamaan maka jika ada kendala yang berbentuk pertidaksamaan harus dikonversikan menjadi persamaan dengan memasukan variabel semu slack atau surplus.

KENDALA

Sebuah batasan yang bertanda lebih besar atau sama dengan (≥) atau lebih kecil atau sama dengan (≤) dapat dikonversikan menjadi sama dengan (=)

dengan mengurangkan variabel surplus (menambahkan variabel slack) terhadap sisi kiri batasan tersebut.

Sebuah batasan dengan sisi kanan berharga negatif dapat diubah menjadi positif dengan mengalikan negatif satu.

METODE DAN TABEL SIMPLEKS

Langkah-langkah penyelesaian permasalahan Program Linier menggunakan Metode Simpleks :

a. Dimulai pada suatu titik pojok yang layak biasanya titik asal (yang disebut sebagai solusi awal)
b. Bergerak dari satu titik pojok layak ke titik pojok layak lain yang berdekatan. Pergerakan ini akan menghasilkan nilai fungsi tujuan yang lebih baik(meningkat untuk masalah maksimisasi dan menurun untuk masalah minimisasi). Jika solusi yang lebih baik telah diperoleh, prosedur simpleks dengan sendirinya akan menghilangkan semua solusi-solusi lain yang kurang baik.
c. Proses ini diulang-ulanng sampai suatu solusi yang lebih baik tak dapat ditemukan. Proses simpleks kemudian berhenti dan solusi optimum diperoleh.

Langkah-langkah perhitungan dalam algoritma simpleks adalah :

a. Berdasarkan bentuk baku, tentukan solusi awal(*initial basic feasible solution)* dengan menetapkan *n-m* variabel non basis sama dengan nol. Dimana n jumlah variabel dan m banyaknya kendala.
b. Pilihlah sebuah *entering variable* diantara yang sedang menjadi variabel nonbasis, yang jika dinaikan diatas nol, dapat memperbaiki nilai fungsi tujuan. Jika tidak ada, berhenti, berarti solusi sudah optimal. Jika tidak , menuju kelangkah 3
c. Pilih sebuah *leaving variable* diantara yang sedang menjadi variabel basis yang harus menjadi non basis(nilainya menjadi nol) ketika entering variabel menjadi variabel basis.

d. Tentukan solusi yang baru dengan membuat entering variable dan leaving variable menjadi non basis. Kembali ke langkah b.

Optimality Condition metode simpleks menyatakan bahwa dalam kasus maksimisasi, jika semua variabel non basis memiliki koefisien non negative dalam persamaan Z , maka solusi telah optimum. Jika tidak, variabel non basis dengan koefisien negatif terbesar dipilih sebagai entering variabel.

Penerapan *optimality condition* pada table simpleks awal, menyarankan memilih X1 sebagai entering variable. Kemudian leaving variable harus salah satu dari variable basis S1,S2 atau S3. Penentuan leaving variable dilakukan dengan menggunakan *feasibility condition* yang menyatakan bahwa untuk masalah maksimisasi atau minimisasi, leaving variable adalah variabel basis yang memiliki rasio terkecil antara sisi kanan persamaan kendala dengan koefisien bersangkutan positif pada entering variabel.

Rasio yang didefinisikan diatas leaving variable dapat ditentukan langsung dari table simpleks. Pertama coret semua elemen nol atau negatif pada persamaan kendala dibawah entering variabel. Kemudian, tidak termasuk persamaan tujuan, buat rasio antara sisi kanan persamaan dengan elemen yang tidak dicoret dibawah entering variable. Leaving variable adalah variabel basis yang memiliki rasio terkecil. Kolom pada entering variabel dinamakan entering column dan baris yang berhubungan dengan leaving variable dinamakan *Pivot equation.* Elemen pada perpotongan entering column dan pivot equation dinamakan *Pivot element.* Dalam tabel pivot element ditunjukan dengan tanda kurung.

New Basic Solution ditentukan dengan menerapkan Metode Gauss Jordan melalui dua jenis perhitungan :

a. Jenis 1(persamaan pivot) elemen persamaan Pivot tabel baru

$$= \frac{\text{elemen pers.pivot tbl.lama}}{\text{elemen pivot}}$$

b. Jenis 2 (semua persamaan yang lain termasuk persamaan Z)

$$\begin{matrix}\text{Elemen persamaan} \\ \text{table baru}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Elemen persamaan} \\ \text{table lama}\end{matrix} - \begin{bmatrix}\text{elemen} & \text{Elemen} \\ \text{entering} & \text{Xpers.pivot} \\ \text{column} & \text{tbl baru}\end{bmatrix}$$

Perlu diingat bahwa elemen-elemen pada persamaan Z dapat juga diperoleh melalui *inner product rule* .

Perhitungan jenis 1 membuat pivot elemen sama dengan 1 pada pivot equation yang baru, sementara perhitungan jenis 2 membuat koefisien yang lain pada entering column sama dengan nol.

Tabel Simpleks awal dalam bentuk simbol

		C_j	C_1	C_2	…	C_n	0	0	…	0
		K	X1	X2	…	Xn	S1	S2	…	Sm
Variabel dasar	Tujuan	q								
S1	0	b1	a11	a12	…	a1n	1	0	…	0
S2	0	b2	a21	a22	…	a2n	0	1	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
Sm	0	bm	Am1	am2	…	amn	0	0	…	1
	Zj	0	0	0	…	0	0	0	…	1
		Cj-Zj	C1	C2	…	Cn	0	0	…	0

Istilah Variabel slack dan surplus adalah berbeda dimana slack ditambahkan dan mencerminkan sumber daya yang tak terpakai, sementara surplus dikurangkan dan menunjukan suatu kelebihan diatas keperluannya, tapi keduanya diberi notasi yang sama yaitu S.

Menggunakan Artificial Variable

Artificial Variable ini ditambahkan pada sisi kiri setiap persamaan yang tidak memiliki variabel basis. Untuk dapat mencapai artificial variable ini menjadi nol secepat mungkin maka kita bisa menggunakan salah satu cara dari dua cara yang tersedia yaitu Teknik M atau Metode Penalty atau cara ke dua yaitu Teknik Dua tahap

Kasus khusus yang dapat terjadi dalam metode simpleks :

1. Solusi Optimum
2. Solusi tak terbatas
3. Solusi tak layak
4. Degenarasi

DUALITAS

3

Obyektif

1. **Memahami penyelesaian permasalahan dual**
2. **Mengerti Interpretasi Ekonomi permasalahan dual**

Istilah dualitas menunjuk pada kenyataan bahwa setiap Program Linier terdiri atas dua bentuk yaitu *primal* dan *dual*.

Asumsi dasar yang digunakan adalah masalah primal program linier dinyatakan dalam bentuk standard yaitu :

Fungsi Tujuan :

$$\text{Maksimum } Z = \sum_{j=1}^{N} C_jX_j$$

Batasan-batasan

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}X_j \leq b_i \text{ untuk I} = 1,2\ldots.m$$

$$X_j \geq 0 \text{ untuk } j = 1,2,,,n$$

Pemecahan persoalan primal terlihat pada koefisien baris Z pada iterasi tabel optimal.

Koefisien Z pada nilai Optimal

Variabel	Z	X1	X2	…	Xn	S1	S2	…	Sm	q
Z	1	C1-z1	C2-Z2	…	Cn-Zn	Y1	Y2	….	Ym	Yo

Kondisi optimal adalah apabila semua koefisien pada baris terakhir (Cj – Zj) tidak ada yang berharga positif , yakni :

$Cj - Zj \leq 0$; untuk j = 1,2……….,n

$Yi \geq 0$; untuk I = 1,2………..,m

Dengan menggantikan Zj nilai-nilai Yi dapat dicari :

Fungsi Tujuan :

$$Yo = \sum_{j=1}^{M} biYi$$

Batasan-batasan

$$\sum_{j=1}^{M} aijYi \geq Cj \text{ untuk } j = 1,2\ldots.m$$

$Yj \geq 0$ untuk i = 1,2,,,n

Bentuk tersebut yang dikenal sebagaidual dari masalah primal. Sebagai konsekuensi nilai Z optimal (maksimum) pada masalah primal adalah nilai Yo minimum pada masalah dual.

Hubungan simetris Primal atau Dual

			PRIMAL					
			Koefisien				Sisi Kanan	
			X_1	X_2	…	X_n		
		Y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	$\leq b_1$	
		Y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	$\leq b_2$	Koefisien
		:	:	:	:	:	:	Fungsi
Dual	Koefisien	:	:	:	:	:	:	Tujuan
		:	:	:	:	:	:	(Minimisasi)
		Y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	$\leq b_m$	
		SisiKanan	$\geq C_1$	$\geq C_1$	…	$\geq C_n$		
			Koefisien fungsi tujuan					

Bentuk tersebut diatas menunjukan hubungan simetris antara primal dan dual, dimana bagian vertical / tegak merupakan bentuk primal, sedangkan bagian mendatar merupakan bentuk dualnya. Bila disimpulkan hubungan tersebut adalah sebagai berikut :

1. Parameter untuk batasan persoalan primal (dual) merupakan koefisien bagi persoalan dual(primal)
2. Koefisien fungsi tujuan/obyektif persoalan primal (dual) adalah sisi kanan dari persoalan dual (primal) diatas.

Bila masalah primal dibandingkan dengan masalah dual terlihat beberapa hubungan sebagai berikut :

1. Koefisien fungsi tujuan masalah primal menjadi konstan sisi kanan masalah dual. Sebaliknya, konstan sisi kanan primal menjadi koefisien fungsi tujuan dual.

2. Tanda pertidak samaan kendala dibalik
3. Tujuan diubah dari minimisasi (maksimisasi) dalam primal menjadi maksimisasi (minimisasi) dalam dual
4. Setiap kolom pada primal berhubungan dengan suatu baris atau kendala dalam dual. Sehingga banyaknya kendala dual sama dengan banyaknya variabel primal.
5. Setiap baris (kendala) pada primal berhubungan dengan suatu kolom dalam dual.Sehingga ada satu variabel dual untuk setiap kendala primal.
6. Bentuk dual dari dual adalah bentuk primal.

MASALAH PRIMAL DUAL SIMETRIK

Program Linier dikatakan berbentuk Simetrik jika semua variabel dibatasi bernilai non negative dan semua kendala berupa pertidaksamaan (dalam masalah maksimisasi pertidaksamaannya harus dalam bentuk ≤ , sementara dalam minimisasi mereka harus ≥).

Bentuk umum masalah primal dual yang simetrik adalah

Primal : Maks = Z = C1X1 + C2X2 + ….+CnXn
Syarat :a11X1 + a12X2+…+a1nXn ≤ b1
a21X1 + a22X2+…+a2nXn ≤ b2
am1x1 + am2X2+…+amnXn ≤ bm
X1,X2 …Ym ≥ 0

Dual : Min : W = b1Y1 + b2Y2 …+bmYm
Syarat : a11Y1 + a21Y2+…+am1Ym ≥ C1
a12Y1 + a22Y2+…+am2Ym ≥ C2
a1nY1 + a2nY2+…+amnYm ≥ Cn
X1,X2 ….Ym ≥ 0

Aturan umum menuliskan bentuk dual dari suatu Program Linier yang Simetrik diringkas sebagai berikut :

a. Misalkan sebuah variabel dual (non negatif) untuk setiap kendala primal.
b. Vektor baris koefisien fungsi tujuan primal diiubah menjadi vektor kolom konstan sisi kanan dual
c. Vektor kolom sisi kanan primal diubah menjadi vector baris koefisien fungsi tujuan dual
d. Transpose koefisien matrik kendala primal menjadi koefisien matriks kendala dual
e. Balik arah pertidaksamaan kendala
f. Balik arah optimisasi, ubah minimum menjadi maksimum dan sebaliknya.

Weak Duality Theorem

“Nilai fungsi tujuan masalah minimisasi (dual) untuk setiap solusi yang layak selalu lebih besar atau sama dengan masalah maksimisasi (primal)nya”.

Dari Weak Duality Theorem diperoleh hasil-hasil sebagai berikut :

1. Nilai fungsi tujuan masalah maksimisasi (primal) untuk setiap solusi layak adalah batas bawah dari nilai minimum fungsi tujuan masalah dual.
2. Nilai fungsi tujuan masalah minimisasi (dual) untuk setiap solusi layak adalah batas atas dari nilai maksimum fungsi tujuan masalah primal.
3. Jika masalah primal adalah layak dan nilai tujuannya tidak terbatas maka masalah dualnya tidak memiliki suatu solusi layak
4. Jika masalah primal adalah layak dan dual tidak layak maka primal tak terbatas
5. Jika masalah dual adalah layak dan tak terbatas maka masalah primal adalah tidak layak atau

6. Jika masalah dual adalah layak dan primal tak layak maka dual adalah tak terbatas.

Complementary Slackness Theorem

Dengan kata-kata kondisi complementary slackness dapat dinyatakan sebagai berikut :

a. Jika suatu variabel primal Xj^o bernilai positif, maka kendala dual yang berhubungan akan dipenuhi sebagai suatu persamaan pada keadaan optimum (variabel slack atau surplus pada pada kendala dual = 0)
b. Jika suatu kendala primal berupa pertidaksamaan murni pada keadaan optimum (variabel slack atau surplus pada kendala primal > 0), maka variabel dual yang berhubungan Yi^o harus sama dengan nol pada keadaan optimum
c. Jika suatu variabel dual Yi^o bernilai positif, maka kendala primal yang berhubungan akan memenuhi sebagai suatu persamaan pada keadaan optimum (variabel slack atau surplus pada kendala primal = 0)
d. Jika suatu kendala dual berupa pertidaksamaan murni (variabel slack atau surplus pada kendala primal > 0), maka variabel primal yang berhubungan Xj^o harus sama dengan nol pada keadaan optimum.

MASALAH PRIMAL DUAL ASIMETRIK

Tidak semua program linier berbentuk simetrik. Untuk setiap Program Linier (simetris atau tidak simetris)bentuk dual selalu memenuhi cirri sebagai berikut :

1. Elemen Matriks kendala bentuk dual adalah transpose elemen kendala primal
2. Koefisien fungsi tujuan dual adalah vector sisi kanan primal
3. Vektor sisi kanan dual adalah koefisien fungsi tujuan primal
4. Jika primal adalah masalah maksimisasi, maka dual menjadi minimisasi dan sebaiknya.

TRANSPORTASI
NORTH WEST CORNER (NWC)

4

Obyektif

1. **Mengerti mengenai definisi Transportasi North West Coner (NWC)**
2. **Memahami penggunaan metode transportasi dan menyelesaikan masalah menggunakan metode transportasi NWC**

Masalah transportasi berhubungan dengan distribusi suatu produk tunggal dari beberapa sumber, dengan penawaran terbatas, menuju beberapa tujuan dengan permintaan tertentu , pada biaya transpor minimum. Karena hanya ada satu macam barang, suatu tempat tujuan dapat memenuhi permintaannya dari satu atau lebih sumber.

Asumsi dasar model ini adalah bahwa biaya transport pada suatu rute tertentu proporsional dengan banyaknya unit yang dikirimkan. Definisi unit yang dikirimkan sangat tergantung pada jenis produk yang diangkut, satuan penawaran dan permintaan akan barang yang diangkut harus konsisten.

Metode transportasi juga dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah dunia bisnis lainnya seperti :

- Masalah periklanan
- Pembelanjaan modal (capital financing)
- Alokasi dana untuk investasi
- Analisis lokasi
- Scheduling produksi
- Perencanaan

Kontributor pengembang teknik-teknik transportasi :

1. F.L Hitchcock (1941) "The Distribution of a product from several sources to Numerous Localities"
2. T.C Koopmans (1949) "Optimum Utilization of the transportation system"
3. G.B Dantziq (1951)

Suatu model transportasi dikatakan seimbang (*balanced program*) apabila total jumlah antara penawaran (*supply*) dan permintaan (*demand)* sama, secara matematis :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i$$

Model transportasi dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

dengan syarat :

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = S_i \quad \text{(penawaran , i = 1,2,3…..,m)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = D_j \quad \text{(penawaran ,j = 1,2,3…..,m)}$$

Semua $X_{ij} \geq 0$

TABEL TRANSPORTASI

KE / DARI		Tujuan				Penawaran (supply)
		1	**2**	…	**n**	
SUMBER	**1**	X_{11} $\boxed{C_{11}}$	X_{12} $\boxed{C_{12}}$	…	X_{1n} $\boxed{C_{1n}}$	a_1
	2	X_{21} $\boxed{C_{21}}$	X_{22} $\boxed{C_{22}}$	…..	X_{2n} $\boxed{C_{2n}}$	a_2
	….	….	….	….	…..	…..
	m	X_{m1} $\boxed{C_{m1}}$	X_{m2} $\boxed{C_{m2}}$	….	X_{mn} $\boxed{C_{mn}}$	a_m
Permintaan (Demand)		b_1	b_2	….	b_n	

KETERANGAN :

Xij = unit yang dikirim dari sumber i ke tujuan j
Cij = biaya perunit dari sumber i ke tujuan j
ai = kapasitas penawaran (supply) dari sumber i
bi = kapasitas permintaan (demand) dari tujuan j
i = 1,2…….m
j = 1,2…….n

METODE NORTH WEST CORNER (NWC)

Metode ini adalah yang paling sederhana diantara metode Aproksimasi Vogel ataupun Least Cost.

Langkah-langkahnya adalah

1. Mulai pada pojok barat laut tabel dan alokasikan sebanyak mungkin pada X11 tanpa menyimpang dari kendala penawaran atau permintaan (artinya X11 ditetapkan sama dengan yang terkecil diantara nilai S1 dan D1)
2. Ini akan menghabiskan penawaran pada sumber 1 dan atau permintaan pada tujuan 1. Akibatnya, tidak ada lagi barang yang dapat dialokasikan ke kolom atau baris yang telah dihabiskan dan kemudian baris atau kolom itu dihilangkan. Kemudian alokasikan sebanyak mungkin kekotak didekatnya pada baris atau kolom yang tak dihilangkan. Jika baik kolom maupun baris telah dihabiskan pindahlah secara diagonal kekotak berikutnya.
3. Lanjutkan dengan cara yang sama sampai semua penawaran telah dihabiskan dan keperluan permintaan telah dipenuhi.

MENENTUKAN SOLUSI OPTIMUM

Dua metode yang digunakan untuk mencari solusi optimum adalah

1. Stepping- Stone
2. Modified Distribution

Metode Stepping Stone

Metode Stepping Stone adalah proses evaluasi variabel non basis yang memungkinkan terjadinya perbaikan solusi dan kemudian mengalokasikan kembali .

Beberapa hal penting perlu disebutkan dalam kaitannya dengan penyusunan jalur stepping stone

1. Arah yang diambil, baik searah maupun berlawanan arah dengan jarum jam adalah tidak penting dalam membuat jalur tertutup
2. Hanya ada satu jalur tertutup untuk setiap kotak kosong
3. Jalur harus hanya mengikuti kotak terisi (dimana terjadi perubahan arah), kecuali pada kotak kosong yang sedang dievaluasi
4. Namun, baik kotak terisi maupun kosong dapat dilewati dalam penyusunan jalur tertutup.
5. Suatu jalur dapat melewati dirinya
6. Sebuah penambahan dan sebuah pengurangan yang sama besar harus kelihatan pada setiap baris dan kolom pada jalur itu.

Tujuan dari jalur ini adalah untuk mempertahankan kendala penawaran dan permintaan sambil dilakukan alokasi ulang barang kesuatu kotak kosong.

Metode MODI (Modified Distribution)

Solusi dengan menggunakan metode ini adalah suatu metode stepping stone yang didasarkan pada rumusan dual. Berbeda dengan stepping stone dalam hal bahwa dengan MODI tidak perlu menentukan jalur tertutup variabel non basis. Sebagai gantinya nilai-nilai Cij ditentukan secara serentak dan hanya jalur tertutup untuk entering variabel yang diidentifikasikan.Ini menghilangkan tugas yang melelahkan dari identifikasi semua jalur stepping stone.

Dalam metode MODI suatu nilai Ui dirancang untuk setiap baris i dan suatu nilai Vj, dirancang untuk setiap kolom j pada tabel transportasi. Untuk setiap variabel basis (yaitu kotak yang ditempati), Xij mengikuti hubungan seperti :

Ui + Vj = Cij

Dimana Cij adalah biaya transport per unit

Metode MODI dapat diringkas dalam langkah-langkah :

1. Tentukan nilai-nilai Ui untuk setiap baris dan nilai-nilai Vj untuk setiap kolom dengan menggunakan hubungan Cij = Ui + Vj untuk semua variabel basis dan tetapkan nilai nol untuk U1.
2. Hitung perubahan biaya, Cij, untuk setiap variabel non basis dengan menggunakan rumus Cij = Cij – Ui – Vj
3. Jika terdapat nilai Cij negatif, solusi belum optimal. Pilih variabel Xij dengan nilai Cij negatif terbesar sebagai entering variable.
4. Alokasikan barang ke entering variable Xij sesuai proses stepping stone. Kembali kelangkah 1

TRANSPORTASI
LEAST COST

5

Obyektif

1. **Mengerti mengenai definisi Transportasi Least Cost**
2. **Memahami penggunaan metode transportasi dan menyelesaikan masalah menggunakan metode transportasi Least Cost**

Masalah transportasi berhubungan dengan distribusi suatu produk tunggal dari beberapa sumber, dengan penawaran terbatas, menuju beberapa tujuan dengan permintaan tertentu , pada biaya transpor minimum. Karena hanya ada satu macam barang, suatu tempat tujuan dapat memenuhi permintaannya dari satu atau lebih sumber.

Asumsi dasar model ini adalah bahwa biaya transport pada suatu rute tertentu proporsional dengan banyaknya unit yang dikirimkan. Definisi unit yang dikirimkan sangat tergantung pada jenis produk yang diangkut, satuan penawaran dan permintaan akan barang yang diangkut harus konsisten.

Metode transportasi juga dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah dunia bisnis lainnya seperti :

- Masalah periklanan
- Pembelanjaan modal (capital financing)
- Alokasi dana untuk investasi
- Analisis lokasi
- Scheduling produksi
- Perencanaan

Kontributor pengembang teknik-teknik transportasi :

- F.L Hitchcock (1941) "The Distribution of a product from several sources to Numerous Localities"
- T.C Koopmans (1949) "Optimum Utilization of the transportation system"
- G.B Dantziq (1951)

Suatu model transportasi dikatakan seimbang (*balanced program*) apabila total jumlah antara penawaran (*supply*) dan permintaan (*demand)* sama, secara matematis :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i$$

Model transportasi dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

dengan syarat :

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = S_i \quad \text{(penawaran , i = 1,2,3…..,m)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = D_j \quad \text{(penawaran ,j = 1,2,3…..,m)}$$

Semua $X_{ij} \geq 0$

TABEL TRANSPORTASI

KE / DARI		Tujuan 1	Tujuan 2	Tujuan …	Tujuan n	Penawaran (supply)
SUMBER	1	X_{11} C_{11}	X_{12} C_{12}	…	X_{1n} C_{1n}	a_1
	2	X_{21} C_{21}	X_{22} C_{22}	…..	X_{2n} C_{2n}	a_2
	….	….	….	….	…..	…..
	m	X_{m1} C_{m1}	X_{m2} C_{m2}	….	X_{mn} C_{mn}	a_m
Permintaan (Demand)		b_1	b_2	….	b_n	

KETERANGAN :

Xij = unit yang dikirim dari sumber i ke tujuan j
Cij = biaya perunit dari sumber i ke tujuan j
ai = kapasitas penawaran (supply) dari sumber i
bi = kapasitas permintaan (demand) dari tujuan j
i = 1,2…….m
j = 1,2…….n

METODE LEAST COST

Metode Least Cost berusaha mencapai tujuan minisasi biaya dengan alokasi sistematik kepada kotak-kotak sesuai dengan besarnya biaya transport perunit.

Prosedur Metode ini adalah :

1. Pilihlah variabel X_{ij} (kotak) dengan biaya transport (C_{ij}) terkecil dan alokasikan sebanyak mungkin. Untuk C_{ij} terkecil , X_{ij} = minimum [Si, Dj]. Ini akan menghabiskan baris i atau kolom j.
2. Dari kotal-kotak sisanya yang layak yaitu yang tidak terisi atau tidak dihilangkan), pilih nilai C_{ij} terkecil dan alokasikan sebanyak mungkin.
3. Alokasikan proses ini sampai semua penawaran dan permintaan terpenuhi.

MENENTUKAN SOLUSI OPTIMUM

Dua metode yang digunakan untuk mencari solusi optimum adalah

- Stepping- Stone
- Modified Distribution

Metode Stepping Stone

Metode Stepping Stone adalah proses evaluasi variabel non basis yang memungkinkan terjadinya perbaikan solusi dan kemudian mengalokasikan kembali .

Beberapa hal penting perlu disebutkan dalam kaitannya dengan penyusunan jalur stepping stone

1) Arah yang diambil, baik searah maupun berlawanan arah dengan jarum jam adalah tidak penting dalam membuat jalur tertutup
2) Hanya ada satu jalur tertutup untuk setiap kotak kosong
3) Jalur harus hanya mengikuti kotak terisi (dimana terjadi perubahan arah), kecuali pada kotak kosong yang sedang dievaluasi
4) Namun, baik kotak terisi maupun kosong dapat dilewati dalam penyusunan jalur tertutup.
5) Suatu jalur dapat melewati dirinya

6) Sebuah penambahan dan sebuah pengurangan yang sama besar harus kelihatan pada setiap baris dan kolom pada jalur itu.

Tujuan dari jalur ini adalah untuk mempertahankan kendala penawaran dan permintaan sambil dilakukan alokasi ulang barang kesuatu kotak kosong.

Metode MODI (Modified Distribution)

Solusi dengan menggunakan metode ini adalah suatu metode stepping stone yang didasarkan pada rumusan dual. Berbeda dengan stepping stone dalam hal bahwa dengan MODI tidak perlu menentukan jalur tertutup variabel non basis. Sebagai gantinya nilai-nilai Cij ditentukan secara serentak dan hanya jalur tertutup untuk entering variabel yang diidentifikasikan.Ini menghilangkan tugas yang melelahkan dari identifikasi semua jalur stepping stone.

Dalam metode MODI suatu nilai Ui dirancang untuk setiap baris i dan suatu nilai Vj, dirancang untuk setiap kolom j pada tabel transportasi. Untuk setiap variabel basis (yaitu kotak yang ditempati), Xij mengikuti hubungan seperti :

Ui + Vj = Cij

Dimana Cij adalah biaya transport per unit

Metode MODI dapat diringkas dalam langkah-langkah :

1) Tentukan nilai-nilai Ui untuk setiap baris dan nilai-nilai Vj untuk setiap kolom dengan menggunakan hubungan Cij = Ui + Vj untuk semua variabel basis dan tetapkan nilai nol untuk U1.
2) Hitung perubahan biaya, Cij, untuk setiap variabel non basis dengan menggunakan rumus Cij = Cij – Ui – Vj
3) Jika terdapat nilai Cij negatif, solusi belum optimal. Pilih variabel Xij dengan nilai Cij negatif terbesar sebagai entering variable.
4) Alokasikan barang ke entering variable Xij sesuai proses stepping stone. Kembali kelangkah 1

TRANSPORTASI
APROKSIMASI VOGEL

6

Obyektif

1. **Mengerti mengenai definisi Transportasi Vogel Approximation Methods (VAM)**
2. **Memahami penggunaan metode transportasi dan menyelesaikan masalah menggunakan metode transportasi VAM**

Masalah transportasi berhubungan dengan distribusi suatu produk tunggal dari beberapa sumber, dengan penawaran terbatas, menuju beberapa tujuan dengan permintaan tertentu , pada biaya transpor minimum. Karena hanya ada satu macam barang, suatu tempat tujuan dapat memenuhi permintaannya dari satu atau lebih sumber.

Asumsi dasar model ini adalah bahwa biaya transport pada suatu rute tertentu proporsional dengan banyaknya unit yang dikirimkan. Definisi unit yang dikirimkan sangat tergantung pada jenis produk yang diangkut, satuan penawaran dan permintaan akan barang yang diangkut harus konsisten.

Metode transportasi juga dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah dunia bisnis lainnya seperti :

- Masalah periklanan
- Pembelanjaan modal (capital financing)
- Alokasi dana untuk investasi
- Analisis lokasi
- Scheduling produksi
- Perencanaan

Kontributor pengembang teknik-teknik transportasi :

- F.L Hitchcock (1941) "The Distribution of a product from several sources to Numerous Localities"
- T.C Koopmans (1949) "Optimum Utilization of the transportation system"
- G.B Dantziq (1951)

Suatu model transportasi dikatakan seimbang (*balanced program*) apabila total jumlah antara penawaran (*supply*) dan permintaan (*demand)* sama, secara matematis :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i$$

Model transportasi dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

dengan syarat :

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = S_i \quad \text{(penawaran , i = 1,2,3…..,m)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = D_j \quad \text{(penawaran ,j = 1,2,3…..,m)}$$

Semua $X_{ij} \geq 0$

TABEL TRANSPORTASI

KE / DARI		Tujuan 1	2	…	n	Penawaran (supply)
SUMBER	1	X_{11} C_{11}	X_{12} C_{12}	…	X_{1n} C_{1n}	a_1
	2	X_{21} C_{21}	X_{22} C_{22}	…..	X_{2n} C_{2n}	a_2
	….	….	….	….	…..	…..
	m	X_{m1} C_{m1}	X_{m2} C_{m2}	….	X_{mn} C_{mn}	a_m
Permintaan (Demand)		b_1	b_2	….	b_n	

KETERANGAN :

Xij = unit yang dikirim dari sumber i ke tujuan j
Cij = biaya perunit dari sumber i ke tujuan j
ai = kapasitas penawaran (supply) dari sumber i
bi = kapasitas permintaan (demand) dari tujuan j
i = 1,2…….m
j = 1,2…….n

METODE APROKSIMASI VOGEL

Aproksimasi Vogel selalu memberikan solusi awal yang lebih baik dibanding metode North West Corner dan Least Cost. Kenyataannya pada beberapa kasus, solusi awal yang diperoleh melalui VAM akan optimum. VAM melakukan alokasi dalam suatu cara yang akan meminimumkan penalty (*opportunity cost)* dalam memilih kotak yang salah untuk suatu lokasi.

Proses Aproksimasi Vogel :

1. Hitung *opportunity cost* untuk setiap baris dan kolom. *Opportunity cost* untuk setiap baris I dihitung dengan mengurangkan nilai Cij terkecil pada baris itu dari nilai Cij satu tingkat lebih besar pada baris yang sama. O*pportunity cost* kolom diperoleh dengan cara yang serupa. Biaya-biaya ini adalah penalty karena tidak memilih kotak dengan biaya minimum
2. Pilih baris atau kolom dengan *opportunity cost* terbesar (jika terdapat nilai kembar pilih secara sembarang). Alokasikan sebanyak mungkin ke kotak dengan nilai Cij minimum pada baris atau kolom yang dipilih. Untuk Cij terkecil, Xij = minimum [Si,Dj]. Artinya penalty terbesar dihindari.
3. Sesuaikan penawaran dan permintaan untuk menunjukan alokasi yang sudah dilakukan. Hilangkan semua baris dan kolom dimana penawaran dan permintaan telah dihabiskan.
4. Jika semua penawaran dan permintaan belum dipenuhi,kembali ke langkah 1 dan hitung lagi *opportunity cost* yang baru. Jika semua penawaran dan permintaan, solusi telah diperoleh.

MENENTUKAN SOLUSI OPTIMUM

Dua metode yang digunakan untuk mencari solusi optimum adalah

- Stepping- Stone
- Modified Distribution

Metode Stepping Stone

Metode Stepping Stone adalah proses evaluasi variabel non basis yang memungkinkan terjadinya perbaikan solusi dan kemudian mengalokasikan kembali .

Beberapa hal penting perlu disebutkan dalam kaitannya dengan penyusunan jalur stepping stone

1) Arah yang diambil, baik searah maupun berlawanan arah dengan jarum jam adalah tidak penting dalam membuat jalur tertutup
2) Hanya ada satu jalur tertutup untuk setiap kotak kosong
3) Jalur harus hanya mengikuti kotak terisi (dimana terjadi perubahan arah), kecuali pada kotak kosong yang sedang dievaluasi
4) Namun, baik kotak terisi maupun kosong dapat dilewati dalam penyusunan jalur tertutup.
5) Suatu jalur dapat melewati dirinya
6) Sebuah penambahan dan sebuah pengurangan yang sama besar harus kelihatan pada setiap baris dan kolom pada jalur itu.

Tujuan dari jalur ini adalah untuk mempertahankan kendala penawaran dan permintaan sambil dilakukan alokasi ulang barang kesuatu kotak kosong.

Metode MODI (Modified Distribution)

Solusi dengan menggunakan metode ini adalah suatu metode stepping stone yang didasarkan pada rumusan dual. Berbeda dengan stepping stone dalam hal bahwa dengan MODI tidak perlu menentukan jalur tertutup variabel non basis. Sebagai gantinya nilai-nilai Cij ditentukan secara serentak dan hanya jalur tertutup untuk entering variabel yang diidentifikasikan.Ini menghilangkan tugas yang melelahkan dari identifikasi semua jalur stepping stone.

Dalam metode MODI suatu nilai Ui dirancang untuk setiap baris i dan suatu nilai Vj, dirancang untuk setiap kolom j pada tabel transportasi. Untuk setiap variabel basis (yaitu kotak yang ditempati), Xij mengikuti hubungan seperti :

Ui + Vj = Cij

Dimana Cij adalah biaya transport per unit

Metode MODI dapat diringkas dalam langkah-langkah :

1) Tentukan nilai-nilai Ui untuk setiap baris dan nilai-nilai Vj untuk setiap kolom dengan menggunakan hubungan Cij = Ui + Vj untuk semua variabel basis dan tetapkan nilai nol untuk U1.
2) Hitung perubahan biaya, Cij, untuk setiap variabel non basis dengan menggunakan rumus Cij = Cij – Ui – Vj
3) Jika terdapat nilai Cij negatif, solusi belum optimal. Pilih variabel Xij dengan nilai Cij negatif terbesar sebagai entering variable.
4) Alokasikan barang ke entering variable Xij sesuai proses stepping stone. Kembali kelangkah 1

METODE PENUGASAN

7

Obyektif

1. **Mengerti Metode Hungarian**
2. **Memahami penggunaan model penugasan**

Metode HUNGARIAN (Hungarian Method) adalah salah satu dari beberapa teknik-teknik pemecahan yang tersedia untuk masalah-masalah penugasan, Metode ini dikembangkan oleh D.Konig (1916)

Untuk dapat menerapkan metode Hungarian ini , jumlah sumber-sumber ditugaskan harus sama persis dengan jumlah tugas yang akan diselesaikan. Selain itu setiap sumber harus ditugaskan hanya untuk satu tugas, Jadi masalah penugasan mencakup sejumlah n sumber yang mempunyai n tugas. Ada n ! (n factorial) penugasan yang mungkin dalam suatu masalah karena berpasangan satu-satu. Masalah ini dapat dijelaskan dengan mudah oleh bentuk matriks segi empat , dimana baris-barisnya menunjukan sumber-sumber dan kolomnya menunjukan tugas-tugas.

Masalah penugasan secara matematis dalam bentuk program linier adalah sebagai berikut :

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

Dengan batasan

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1$$

dan Xij ≥ 0 ($Xij = Xij^2$)

Dimana Cij adalah tetapan yang telah diketahui.

Langkah-langkah penyelesaian masalah menggunakan Metode penugasan Hungarian :

1. Mengubah matriks biaya menjadi matriks *opportunity cost* . Ini dicapai dengan memilih elemen terkecil dari setiap baris dari matriks biaya mula-mula untuk mengurangi seluruh elemen (bilangan)dalam setiap baris.
2. Reduced Cost Matrix diatas terus dikurangi untuk mendapatkan total *opportunity cost matrix*. Hal ini dapat dicapai dengan memilih elemen terkecil dari setiap kolom pada reduced cost matrix untuk mengurangi seluruh elemen dalam kolom-kolom tersebut.
3. Mencari skedul penugasan dengan suatu total *opportunity cost* nol. Untuk mencapai ini dibutuhkan 4 (empat) “independent zero” dalam matrix. Ini berarti setiap karyawan harus ditugaskan hanya untukk satu pekerjaan dengan opportunity cost nol, atau setiap pekerjaan harus dikerjakan atau diselesaikan hanya oleh satu karyawan. Prosedur praktis untuk melakukan test optimalisasi adlah dengan menarik sejumlah minimum garis horizontal/vertical untuk meliput seluruh elemen bernilai nol dalam total opportunity cost matrix. Bila jumlah garis sama dengan jumlah baris atau kolom penugasan optimal adalah feasible. Bila tidak sama maka harus direvisi.
4. Untuk merevisi total opportunity cost matrix maka pilih elemen terkecil yang belum terliput garis-garis (yaitu opportunity cost terendah)untuk mengurangi seluruh elemen yang belum terliput. Kemudian tambahkan dengan jumlah yang sama (nilai elemen terkecil) pada seluruh elemen-elemen yang mempunyai dua garis yang saling bersilangan. Masukan hasil pada matriks dan menyelesaikan matriks dengan seluruh elemen-elemen yang telah terliput tanpa perubahan. Ulangi langkah 3,