PROGRAMA DE ASESORÍAS PARA LA PRESENTACIÓN DE EXAMEN ÚNICO DE INGRESO A BACHILLERATO.
TEMARIO DE MATEMÁTICAS.

GUIA DE ESTUDIO.

Índice. Matemática.

1. Aritmética.
2. Álgebra.
3. Geometría.
4. Trigonometría.
5. Probabilidad y Estadística.

Índice. Habilidad Matemática.

1. Sucesiones Numéricas
2. Series Espaciales.
3. Imaginación espacial.
4. Razonamiento Matemático.

INDICE

MATEMÁTICAS

1. Significado y uso de los números.

La **Aritmética** es la rama de las Matemáticas que estudia las operaciones, relaciones y propiedades que existen entre los números.

El significado y uso de los números varía dependiendo el contexto y son tan indispensables que nuestra sociedad no sería la misma si ellos no existieran.

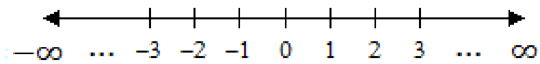
¿Has pensado que pasaría si no hubiera los números?

Los Números Enteros

Los Números Enteros son el conjunto que se forma con los números positivos, negativos y el cero, es decir:

$$\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \infty\}$$

Al ubicarlos en la recta numérica, los Números Enteros se distribuyen de la siguiente forma:



Observa que:

- El cero no es ni positivo, ni negativo, es el neutro aditivo, no tiene signo.
- A todos los números negativos les antecede el signo menos y de esta forma se distinguen de los positivos.
- Los números positivos pueden o no llevar el signo " + "
- El símbolo "∞" (infinito o indeterminación), no es un número, es sólo un indicativo de que los números se extienden indefinidamente
- A la izquierda del cero los números negativos se extienden hasta menos infinito y a la derecha lo hacen hasta el infinito.
- Todo número positivo es mayor que cero y que cualquier número negativo.
- ¿El cero es mayor que cualquier número negativo?
- Todo número tiene su **simétrico**, es decir, su representante tanto en positivos como en negativos. Por ejemplo: -4 y 4 son simétricos el uno al otro.
- ¿Quién es el simétrico del cero?
- Al multiplicarlo cualquier número por -1 obtienes su simétrico.
- De lo dicho en el punto anterior se desprende que:

  $$-3 = (-1)(3)$$

  Lo mismo pasa para cualquier número negativo.

¿Si te dijeran que en la mañana la temperatura fue de tres grados bajo cero, como se escribiría esto, en números negativos? ¿En dónde más has visto números negativos?

1.1. Operaciones Básicas.

Para realizar una **suma** o una **resta** de dos Números Enteros, ubica primero el signo de los números que vas a operar, pues estos determinan la operación que vas a realizar, sólo hay de dos sopas, que los signos de los dos números sean iguales o que sean diferentes, de esta forma:

- **Si los signos son iguales**. Debes sumarlos (independientemente del signo que tengan) y al resultado se le deja el mismo signo.

  Ejemplos:
  a) $-5 - 7 = -12$

b) $+4+5=+9$

En otras palabras, si los dos números son negativos, el resultado es negativo y si los dos números son positivos, el resultado también es positivo.

- **Si los signos son diferentes**. Debes restarlos (independientemente de que signo tenga el número más grande) y al resultado se le deja el signo del número que tenga mayor valor.

  Ejemplos:
  a) $-8+6=-2$
  b) $4-12=-8$
  c) $-5+14=9$
  d) $15-12=3$

Ten cuidado con los paréntesis, pues si aparecen debes cuidarte de hacer las operaciones con los signos, antes de efectuar la suma o resta de los números, por ejemplo, si necesitas calcular la operación:

$$(8)+(-3)=¿?$$

Debes recordar las **leyes de los signos**:

Multiplicación	**División**
$(+)(+)=+$	$(+)\div(+)=+$
$(-)(-)=+$	$(-)\div(-)=+$
$(+)(-)=-$	$(+)\div(-)=-$
$(-)(+)=-$	$(-)\div(+)=-$

Observa que los resultados tanto para la multiplicación como para la división son iguales, así que con aprenderte las primeras basta.

Al aplicar las leyes de los signos podemos disminuir la cantidad de signos que tenemos en una ecuación, por ejemplo:

$$(8)+(-3)=8-3=5$$

Al aplicar las leyes de los signos, resulta que $(+)(-)=-$ y siendo números con signos diferentes se restan y se deja el signo del número que tiene el mayor valor, que este caso es el 8.

Ejercicio.
Calcule la operación:
$(8-17)+(-3-2)=$

Para realizar una **multiplicación** o una **división** de dos Números Enteros, también se aplican las leyes de los signos y se realizan las operaciones con los números (recuerda que a los números también se les llama coeficientes).

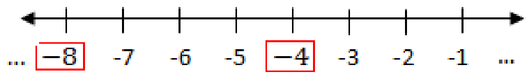
Ejemplos:
$(-8)(+11)=-88$
$(6-7)(-5)=5$
Ejercicio.
Calcule la operación:
$(-3-8)(2+6)=$

Relaciones de Orden

Al igual que con los números naturales, aquí también puedes comparar un número con otro y de acuerdo a su orden, puedes decir si uno es menor, mayor o igual que otro. Si tienes dos números y quieres saber cuál es el menor, puedes ubicarlos en la recta numérica y el número que este más a la izquierda será el menor.

Por ejemplo.

$-8 < -4$, pues al ubicarlos en la recta numérica, -8 está más a la izquierda que -4



A continuación unas sugerencias que te pueden ayudar:

- El cero es menor que cualquier número positivo
- El cero es mayor que cualquier número negativo
- Si los dos números son negativos, entre más grande es el simétrico, menor es el número.

Por ejemplo:

$-43 < -1$,

Pues al revisar los simétricos de $-43\ y -1$, resulta que $43 > 1$ Es decir, la relación sería justo al revés de cómo se da con los números positivos.

1.2. Resolución de problemas con operaciones básicas.

Compare los siguientes números y escriba los signos $<, >, o =$ según corresponda.

$(8-2)+5-2$ ___ 10

30 ___ $(7+4)$ ___ $3-2$

$(25+5)-10$___ 3 ___ $(7-3)+3-5$

$(9-2)$ ___ $2+3$ ___ 3 ___$(9+1)-8$

$-63+(-4)$ $\square$ $-54+(-21)$

$5-(-7)$ $\square$ $5+(-7)$

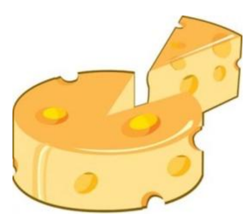
$10-32$ $\square$ $45-23$

$-(-12)+11$ $\square$ $12+11$

$1-(-3)$ $\square$ $3-(-1)$

$(-3)+1$ $\square$ $3+1$

Números fraccionarios y decimales



El conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) secompone de todos los números de la forma $\frac{p}{q}$ donde p y q son números enteros y q es diferente de cero.

Todas las fracciones que tú has estudiado en cursos anteriores son números racionales, pero no es la única interpretación que se puede hacer de dicho conjunto, las razones de semejanza, las proporciones y los porcentajes, también son formas de interpretar a los números racionales

Todo número racional se compone de un numerador y un denominador.

Numerador

$$\frac{3}{4}$$

Denominador

En fracciones el **denominador** indica las partes en que se divide el entero y el **numerador** indica las partes que se toman del total.

Las fracciones a su vez, las suelen dividir en fracciones propias, impropias y mixtas.

Propias	Impropias	Mixtas
Su valor es menor que la unidad. **Ejemplos**: $\frac{1}{4}, -\frac{11}{45}$ y $\frac{1}{2}$ El denominador siempre es más grande que el numerador.	Su valor es mayor que la unidad. **Ejemplos:** $\frac{2}{1}, -\frac{4}{2}$ y $\frac{3}{2}$ El numerador siempre es más grande que el denominador.	Se forman de un entero y una fracción propia. **Ejemplos:** $3\frac{1}{2}, -5\frac{1}{10}$ y $1\frac{1}{3}$ El numerador nunca es más grande que el denominador.

Resulta muy útil saber que el signo de una fracción se puede quedar en el denominador, en el numerador o en medio de la fracción, por ejemplo, es lo mismo:

$$-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4} = \frac{3}{-4}$$

Para convertir una fracción impropia a fracción mixta y viceversa observa los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1:
Para convertir la fracción $\frac{11}{4}$ en fracción mixta, se realiza la división:

$$4\overline{\smash{)}\,11}^{\;2}$$
$$3$$

Por lo tanto:

$$\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$$

Ejemplo 2:
Para convertir la fracción $4\frac{2}{3}$ se realiza la multiplicación:

$$4\frac{2}{3} = \frac{(4)(3)+2}{3} = \frac{14}{3}$$

Ejercicios:
1. Al convertir la fracción $\frac{8}{5}$ en fracción mixta se obtiene:

a) $1\frac{3}{5}$ b) $3\frac{3}{5}$
c) $3\frac{1}{5}$ d) $1\frac{5}{3}$

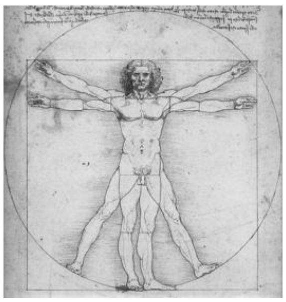
2. Al convertir la fracción $4\frac{2}{5}$ en fracción impropia, se obtiene:

a) $\frac{13}{5}$ b) $\frac{18}{5}$
c) $\frac{5}{22}$ d) $\frac{22}{5}$

3. El resultado de convertir $\frac{19}{4}$ a fracción mixta es:

a) $4\frac{9}{4}$ b) $4\frac{3}{4}$
c) $4\frac{4}{3}$ d) $4\frac{16}{3}$

1.3 Relaciones de proporcionalidad



Una razón es el cociente de dos cantidades, en el que al numerador se le llama antecedente y al denominador consecuente.

Por ejemplo:
En la razón $\frac{3}{2}$, al número 3 se le llama antecedente y al número dos consecuente.

Problema:
Si un automóvil viaja a 200km/h y un avión comercial a 800km/h. Si ambos viajan a una velocidad constante, ¿cuántas veces es más rápido el avión que el automóvil?
En este caso el antecedente es la velocidad del avión, por lo que tenemos la razón:

$$\frac{800}{200}=\frac{8}{2}$$
$$=4, es\ decir, 4\ veces\ más\ rápido$$

Ejercicio:
El coche de Juan viaja a $20\frac{m}{s}$ y el coche de Pedro recorre 150 metros en 5 segundos. Si ambos tienen rapidez constante ¿cuántas veces es más rápido el coche de Pedro que el coche de Juan?
a) $3.5\ veces$
b) $2.5\ veces$
c) $1.5\ veces$
d) $0.5\ veces$

1.4 Magnitudes proporcionales.

Dos magnitudes son proporcionales a otras dos, cuando la razón de las dos primeras es igual a la razón de las dos últimas, tomadas en su orden.

Ejemplo:
Una mezcla contiene 60 % de cemento y 40 % de arena. Si hay en la mezcla 12 kilos de arena, ¿Cuánto hay de cemento?

Respuesta: Si x es la cantidad de cemento, se debe tener:

60 % de cemento —— x kg de cemento

40 % de arena —— 12 kg de arena

Es decir:
$$\frac{60}{40}=\frac{x}{12}$$

Por lo tanto
$$x=\frac{60\times12}{40}=18$$

Ejemplo:
Juan y Pedro invierten $2800 y $1600 en un negocio, conviniendo en repartir la ganancia proporcionalmente al dinero invertido por cada uno. Si Juan gana $ 700, ¿Cuánto gana Pedro?

Respuesta: La inversión de Juan es a la de Pedro como la ganancia de Juan es a la de Pedro. Si m es la ganancia de Pedro, tenemos:

$$\frac{2800}{1600} = \frac{700}{m}$$

Es decir:

$$\frac{28}{16} = \frac{700}{m}$$

Por lo tanto:

$$m = \frac{16 \times 700}{26} = 400$$

Ejercicios:
Resuelve los siguientes ejercicios:

1. ¿Cuál es el valor de x si $x:2 = 9:6$?

a) 4 b) 2 c) 3 d) 12 e) 6

2. ¿Cuál es el valor de x si $5:50 = 1:x$?

a) 5 b) 1 c) 50 d) 10 e) 20

3. Las edades de Gonzalo y Cristian están a razón de 1:3, Si Gonzalo tiene 10 años, ¿Cuántos años tiene Cristian?
a) 40 b)30 c)25 d)18 e)20

4. En un curso hay 36 alumnos, si 24 son hombres, entonces la razón entre hombres y mujeres respectivamente es de:
a)2:3 b) 1:2 c)24:12 d)12:24 e)36:12

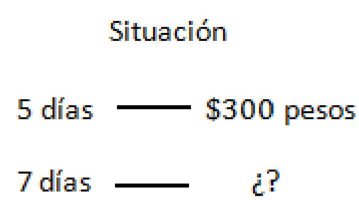
5. ¿Qué razón existe entre 5 kg y 15 kg?

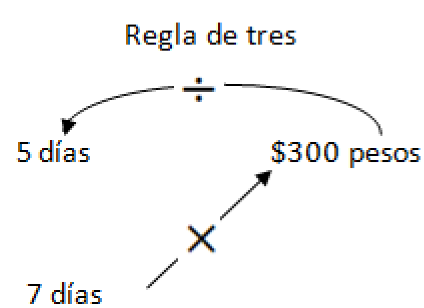
a) $\frac{1}{3}kg$ b) $\frac{1}{2}kg$ c) $\frac{2}{3}kg$ d) $\frac{1}{5}kg$ e) $\frac{3}{2}kg$

Proporcionalidad Directa e inversa

Proporción directa o regla de tres. Una proporción es directa si al aumentar o disminuir una de las cantidades, la otra también aumenta o disminuye en la misma proporción. La regla de tres se utiliza para calcular el valor de una proporción directa.

Por ejemplo:
Un obrero recibe un salario de $300 pesos por cada cinco días de trabajo. Si trabajó por 7 días ¿Cuánto dinero cobró?
Primero observamos que cinco días equivale a $300 pesos y lo que necesitamos saber es cuánto cobrará por los 7 días de trabajo.





La regla de tres consiste en multiplicar el número que queda sólo por el segundo término y al resultado dividirlo por el primer término. En este caso:

$$\frac{7 \times 300}{5} = \frac{2100}{5} = 420$$

Por lo tanto el obrero cobrará $\$420$ pesos.

Más adelante, en álgebra veremos una forma más eficiente de resolver este tipo de problemas, utilizando una variable x. Sólo tendremos que resolver la ecuación:

$$\frac{5}{7} = \frac{300}{x}$$

La regla de tres inversa se da cuando a medida que una cantidad aumenta la otra disminuye y el procedimiento para calcularla se invierte, es decir se cambia la multiplicación por la división y viceversa.

Ejercicios:

1. Una docena de computadoras se venden en $ 156, 000 pesos ¿cuál es el valor de una computadora?

2. Ana compra 5 kg de papas, si 2 kg cuestan $8, ¿Cuanto pagará Ana?
a) $20 b) $25 c)$10 d)8 e)$4

3. Si 5 pantalones cuestan $2 000 , ¿Cuanto costaran 8 pantalones?
a) $1 200 b) 1 250 c) $3 200 d) 1 500 e) 3 100

4. Si 2 personas realizan el trabajo en 5 horas, ¿Cuánto tiempo demoraran 5 personas?
a) 12.5 hrs b) 4 hrs c) 2 hrs d) 3 25 hrs e)10 hrs

5. Un artesano hace un molde de porcelana en una hora, ¿Cuanto se demoraran 3 artesanos en hacer un molde?
a) 30 min b) 40 min c) 3 hrs d) 20 min e) 5 hrs

6. Si un vehículo va a velocidad de 70 km/h se demora 3 hrs en llegar de Pachuca al DF ¿A qué velocidad debe ir para tardarse solo 2 hrs ?
a) 105 km/h b) 46.66666 km /h c) 210 km/h d)140 km/h e) 60 km/h

1.4.1 Operaciones básicas

Para sumar y restar dos fracciones, antes que nada debes ubicar los denominadores de ambas fracciones, pues de ellos depende la forma en que se van a operar, sólo hay de dos sopas, que el denominador sea igual en ambas fracciones o que los denominadores sean diferentes.

Suma y Resta

- **Si los denominadores son iguales**. Entonces sumas o restas, según sea el caso, los numeradores de ambas fracciones como si fueran números enteros y dejas el mismo denominador. Las formulas generales son las siguientes:

a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

b) $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$

Ejemplos:

a) $\frac{1}{4}+\frac{2}{4} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$

b) $\frac{7}{4}-\frac{5}{4} = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4}$

- **Si los denominadores son diferentes**. Debes multiplicar los denominadores para obtener un denominador común, y multiplicar los numeradores de forma cruzada y respetando los signos para realizar la operación de suma o resta, según sea el caso. Las formulas generales son las siguientes:

a) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

b) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$

Ejemplos:

a) $\frac{1}{6}+\frac{2}{9} = \frac{6(2)+1(9)}{(6)(9)} = \frac{21}{54}$

b) $\frac{6}{7}-\frac{8}{4}=\frac{6(4)-7(8)}{(7)(4)}=\frac{24-56}{28} = -\frac{32}{28}$

Si en los incisos del examen no encuentras la respuesta, recuerda simplificar las fracciones, en el inciso a) $\frac{21}{54}=\frac{7}{18}$ y en el inciso b) $-\frac{32}{28}=-\frac{16}{14}=-\frac{8}{7}$

Ejercicios:
Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{1}{9}+\frac{11}{2}$ b) $\frac{6}{12}-\frac{5}{4}$

c) $\frac{1}{12}+\frac{23}{12}$ d) $\frac{11}{18}-\frac{5}{18}$

Multiplicación y División.

Para realizar la multiplicación y la división, es mucho más fácil, sólo tienes que aplicar las siguientes reglas:

1. Para la multiplicación:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{ac}{bd}\right)$$

Observa el siguiente ejemplo:

$$\frac{5}{6}\times\frac{4}{3}=\frac{5\times4}{6\times3}=\frac{20}{18}$$

La multiplicación se hace de forma "directa"

2. Para la división:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

Observa el siguiente ejemplo:

$$\frac{10}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{(10)(5)}{(4)(2)}=\frac{50}{8}=\frac{25}{4}$$

La división se hace en forma "cruzada".

Ejercicios.
Elija la opción correcta:

1. Al multiplicar $\frac{7}{2}\times\frac{4}{3}$ obtenemos:

a) $\frac{28}{5}$ b) $\frac{21}{8}$ c) $\frac{28}{6}$ d) $\frac{21}{8}$ e) 2.6

2. Al dividir $\frac{9}{2}\div\frac{5}{4}$ obtenemos:

a) $\frac{18}{5}$ b) $\frac{38}{10}$ c) $\frac{28}{10}$ d) $\frac{45}{8}$ e) 1.47

Relaciones de orden y equivalencia

Se dice que dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes, si y sólo si, $ad = bc$.

Ejemplo:
Diga si las siguientes dos fracciones son equivalentes.
$\frac{8}{4} = \frac{16}{8}$

Solución:
Son equivalentes, ya que:

$$(8)(8) = (4)(16)$$

La comparación entre dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ sólo cumple una de las siguientes afirmaciones:

1) $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ si y sólo si $ad > bc$

2) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si y sólo si $ad < bc$, y por último:

3) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si $ad = bc$.

Ejercicios.
Compare los siguientes números y escriba los signos $<, >, o =$, según corresponda.

A) $\frac{-63}{4} \; \square \; \frac{-54}{5}$

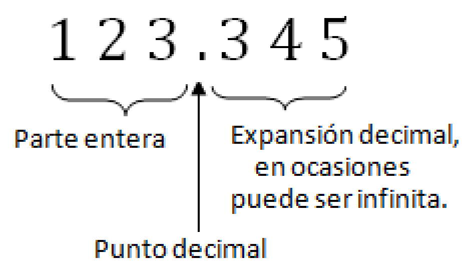
B) $\frac{21}{8} \; \square \; \frac{0}{1}$

C) $\frac{10}{11} \; \square \; \frac{23}{22}$

D) $\frac{16}{4} \; \square \; \frac{64}{16}$

Decimales

Un número decimal se conforma de una parte entera y una parte decimal, las cuales son separadas por el punto decimal.
Por ejemplo:



Cualquier fracción puede convertirse en un número decimal, pero no al revés, hay números decimales como el número π que no se pueden convertir en fracciones comunes, a este tipo de números se les conoce como números irracionales. Se caracterizan por tener una expansión decimal infinita pero además no periódica.

Para convertir una fracción común a su forma decimal, basta con hacer la división del numerador entre el denominador.

Por ejemplo:

$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots$$

Los números decimales que si se pueden convertir en fracciones comunes se les llama fracciones

decimales, para convertir una fracción decimal a fracción común, se colocan los denominadores 10, 100, 1 000,…, según sea la fracción decimal, décimos, centésimos, milésimos, etc., y los numeradores se forman con la misma cantidad sin punto decimal, y por último se simplifica la fracción de ser posible.
Ejemplo:

$$0.325 = \frac{325}{1000} = \frac{65}{200} = \frac{13}{40}$$

1.4.2 Operaciones básicas de números decimales

Para sumar números decimales[1] hay que colocar la parte entera de uno de los números debajo de la parte entera del otro número y lo mismo con las partes decimales, es decir hay que ordenar los puntos decimales de cada número en una misma columna.
Por ejemplo:

```
   214.37
+   13.654
  --------
   228.024
```

Para restar números decimales se colocan de la misma forma en que lo hicimos para la suma.

Por ejemplo:

```
  137.31  ←
−  38.654
 --------
```

En este caso tenemos que agregar un cero, esto no afecta la operación porque 31 centésimas es lo mismo que 310 milésimas

Y ahora quedará:

```
  137.310  ←  ya podemos restar
−  38.654
 --------
   98.656
```

Para multiplicar dos números decimales, se realiza la multiplicación como si fueran números naturales. Luego se coloca el punto decimal en el resultado, separado tantas cifras como decimales tengan en total los dos factores.
Ejemplo:

```
      23.31   ←  2 decimales
×     13.65   ←  2 decimales
   --------
     11655
    13986
   6993
  2331
   --------
  318.1815    ←  4 decimales
```

Para la división se recorre el punto decimal del divisor hasta el final de la última cifra y en el dividendo el punto decimal se recorre esa misma cantidad de posiciones, y se prosigue con el mismo algoritmo de división, solo que ahora cuando el residuo sea menor que el divisor, se coloca el punto decimal y se siguen haciendo las cuentas.

Ejemplo.

[1] Lo siguiente sólo es para números decimales cuya expansión decimal es finita.

Dividir $141.357 \div 12.23$

Primero se recorre el punto decimal tantos lugares como cifras decimales tenga el divisor.

12.23 | 141.357 → 1223 | 14135.7

Después se realiza la división con el algoritmo normal, hasta que el residuo sea menor que el divisor:

```
            11.
1223 | 14135.7
       01905
        0682
```

Por último, se coloca el punto decimal para bajar las siguientes cifras y continuamos el proceso hasta obtener las cifras decimales que queramos.

```
            11.5
1223 | 14135.7
       01905
        0682 7
         071 2
```

Relaciones de orden y equivalencia

Dos decimales son equivalentes cuando su parte entera y su parte decimal es la misma, es decir, cuando los números son iguales. En cuanto al orden en los números decimales, se comparan utilizando el orden **lexicográfico**, es decir, se comparan de la misma manera en que buscas palabras en el diccionario: primero comparas la parte entera de los dos números, si es igual entonces comparas la primer cifra que se encuentra después del punto decimal, si son iguales te pasas a la siguiente cifra y así sucesivamente en algún momento uno de los dos números será menor que otro, de lo contrario son iguales.

Por ejemplo:

$4.49242 > 4.49241$

Ejercicios. Compare los siguientes números y escriba los signos $<, >, o =$, según corresponda:

$1.099 \quad \square \quad 1.09$

$34.36 \quad \square \quad 34.360$

$-1.099 \quad \square \quad -1.09$

1.5 Porcentajes

La expresión tanto por ciento, significa que de una cantidad dividida en 100 partes le corresponde un número determinado. El tanto por ciento se representa de la siguiente manera:

a) Mediante el símbolo %
b) Como una fracción cuyo denominador es 100 o con su valor equivalente en número decimal.

Representación del tanto por ciento como fracción. El tanto por ciento se divide entre 100 y se simplifica la fracción.

Ejemplos:

El 50% en fracción es: $\frac{50}{100} = \frac{25}{50} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0.50$

El 5% en fracción es: $\frac{5}{100} = \frac{1}{20} = 0.05$

Representación de una fracción común como porcentaje. La fracción común se multiplica por cien y se resuelve la operación, el resultado será el porcentaje.

Ejemplo:
La fracción $\frac{3}{10}$, en porcentaje es:

$$\frac{3}{10} = \frac{3}{10}(100\%) = \frac{3(100\%)}{10} = \frac{300\%}{10} = 30\%$$

Ejemplos:
1. ¿Cuál es el número cuyo 12 % es 42?

Aquí conocemos:
a) El por ciento (12% = 0.12) y
b) La parte (42).

Tenemos que calcular la base.
H = 42/0.12 = 4200/12 = 350

Comprobación:
12 % de H = 0.12 X 350= 42

2. Una persona compra al contado una computadora cuyo precio es de $ 6 400. Si le descuentan el 12 %, sobre el precio de la máquina ¿cuánto debe pagar por ella?

Solución:
Descuento = 0.12 X $ 6 400 = $ 768
Debe pagar = $ 6 400 - $ 768 = $ 5 632

El mismo problema se resuelve razonando de este modo: Si el descuento es del 12%, lo que debe pagar es el 88% (el complemento para el 100%). Por lo tanto el comprador debe pagar por la computadora:

0.88 X $ 6 400 = $ 5 632

Ejercicios:
1. Cuál es el número decimal que corresponde al 5.3%
a) 5.3
b) 0.53
c) 0.503
d) 0.053
e) 0.0053

2. ¿Qué tanto por ciento representa 300 de 1 500?
a) 25%
b) 20%
c) 30%
d) 35%
e) 40%

3. El 50% del costo de una sala es de $3000 pesos ¿Cuánto cuesta la sala?
a) $5000
b) $2000
c) $15000
d) $1500
e) $6000

4. El 12% de un celular es de $240 pesos. ¿Cuánto cuesta el celular?
a) $2400
b) $2000
c) $2200
d) $2100
e) $2300

5. Expresa en forma de fracción irreducible los siguientes porcentajes:
70% =

35% =

10% =

150%=

6. Calcula el 150% de 3 500.

7. Había ahorrado el dinero suficiente para comprarme un abrigo que costaba $\$400$ pesos. Cuando llegué a la tienda, este tenía una rebaja del 20%. ¿Cuánto tuve que pagar por él?

8. En la misma tienda me compré una bufanda, que tenía un descuento del 35%, pagando por ella $\$65$ pesos. ¿Cuánto costaba antes de la rebaja?

9. Una calculadora costaba $\$150\ pesos$, y la rebajan un 30%. ¿Cuál será su precio rebajado?

El prensado de **1.500 kg** de aceituna produjo el **36%** de su peso en aceite. Calcula la cantidad de aceite obtenida.
a) 360 kg b) 150 kg c) 520 kg d) 440 kg
e) 540 kg

10. Si hoy han faltado a clase por enfermedad el **20%** de los **30** alumnos, ¿cuántos alumnos han asistido? y ¿Cuántos alumnos han faltado?
a) 22 asistieron y 8 faltaron
b) 20 asistieron y 10 faltaron
c) 24 asistieron y 6 faltaron
d) 24 asistieron y 8 faltaron
e) 6 asistieron y 24 faltaron

11. Los embalses de agua que abastecen a una ciudad tienen una capacidad total de **400** $\boldsymbol{km^3}$, y se encuentran al **27 %** de su capacidad. ¿Cuantos $\boldsymbol{km^3}$ contienen?
a) 40 km3 b) 108 km3
c) 140 km3 d) 14.8 km3
e) 110 km3

12. En una población de **7.000** habitantes, el **80%** tiene más de ***18 años***. Averigua el número de personas mayores de 18 ***años***.
a) 87 personas b) 360 personas
c)5000 personas d)5600 personas
e) 3400 personas

13. De 500 mujeres encuestadas, 370 afirman que les gusta el fútbol. Expresa es cantidad mediante un porcentaje.
a) 80 % b) 74 % c) 50 %
d) 26 % e) 70 %

1.6 Potencias de 10 y notación científica y/o exponencial

Una potencia es el resultado de un número multiplicado por sí mismo una cierta cantidad de veces.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n veces}}$$

Al número a se le conoce como base, a la letra n se le conoce como exponente, por ejemplo: $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10$, aquí diez es la base y cuatro el exponente.

La notación científica se utiliza para expresar cantidades en función de potencias de 10 y, por lo regular, se aplica para cantidades muy grandes o muy pequeñas, el número en notación científica se conforma de un entero de una cifra y su parte decimal correspondiente.

Ejemplo.
El número 2,345, 000 se expresa en notación científica como:
a) 23.45×10^5
b) 2.345×10^6
c) 234.5×10^4
d) 2345×10^3
Solución.
El número decimal se recorre a la izquierda el número de posiciones deseadas, este número será la potencia de diez (es común recorrerlo una posición antes de la primera cifra), entonces:
$2{,}345{,}000 = 2.345 \times 10^6$

Por lo tanto la respuesta correcta es el inciso b)

Ejercicio:
Al expresar el número 43, 100 en notación científica se obtiene:
a) 43.1×10^4
b) 431×10^4
c) 4.31×10^4
d) $.431 \times 10^4$

2. ALGEBRA

El **Álgebra** es la rama de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos. Ésta se enfoca a las estructuras, relaciones y formas de una infinidad de términos matemáticos. Mediante su uso se puede hacer referencia a números "desconocidos" y formular ecuaciones. Además, el algebra es un puente entre la geometría y la aritmética, pues se pueden expresar en términos puramente algebraicos un sin número de figuras y cuerpos geométricos.

Hablemos de un poco de historia…
La historia del álgebra comenzó en el antiguo Egipto y Babilonia, donde fueron capaces de resolver ecuaciones *lineales* ($ax = b$) y *cuadráticas* ($ax^2 + bx = c$), así como *ecuaciones indeterminadas* como $x^2 + y^2 = z^2$, con varias incógnitas. Los antiguos babilonios resolvían cualquier ecuación cuadrática empleando esencialmente los mismos métodos que hoy se enseñan. También fueron capaces de resolver algunas ecuaciones indeterminadas. Esta antigua sabiduría sobre resolución de ecuaciones encontró, a su vez, acogida en el mundo islámico, en donde se le llamó “ciencia de reducción y equilibrio”. (La palabra árabe *al-jabru* que significa `reducción', es el origen de la palabra *álgebra*). En el siglo IX, el matemático al-Jwðrizmð; escribió uno de los primeros libros árabes de álgebra, una presentación sistemática de la

teoría fundamental de ecuaciones, con ejemplos y demostraciones incluidas.
En las civilizaciones antiguas se escribían las expresiones algebraicas utilizando abreviaturas sólo ocasionalmente; sin embargo, en la edad media, los matemáticos árabes fueron capaces de describir cualquier potencia de la incógnita *x,* y desarrollaron el álgebra fundamental de los polinomios, aunque sin usar los símbolos modernos. Esta álgebra incluía multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas de polinomios, así como el conocimiento del teorema del binomio.

2.1 Significado y uso de las literales.

Al igual que en la aritmética, las operaciones fundamentales del álgebra son adición, sustracción, multiplicación, división y cálculo de raíces. El álgebra es capaz de generalizar las relaciones matemáticas como el teorema de Pitágoras, que dice que en un triángulo rectángulo el área del cuadrado de lado la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lado los catetos, (se verá más detenidamente más adelante), mientras que la aritmética sólo da casos particulares.
Así pues, el álgebra puede dar una generalización que cumple las condiciones del teorema: $a^2 + b^2 = c^2$. Un número

multiplicado por sí mismo se denomina *cuadrado,* y se representa con el superíndice “2”. Por ejemplo, la notación de 3 × 3 es 3^2; de la misma manera, $a \times a$ es igual que a^2. Así,

en su forma más general, se diría que el algebra es el idioma de las matemáticas, siendo éstas, al final un idioma universal.

2.2 Expresiones Algebraicas

Un término algebraico es o bien un número o una variable, o números y variables multiplicados, es decir, que se encuentran juntos. Una expresión algebraica es un grupo de términos separados por signos (ejemplos: +, -, =, $\sqrt[2]{\ }$, etc.). La agrupación de los símbolos algebraicos y la secuencia de las operaciones aritméticas se basan en los símbolos o signos de agrupación, que garantizan la claridad de lectura del lenguaje algebraico. Entre los símbolos de agrupación se encuentran los paréntesis ( ), corchetes [ ], llaves { } y rayas horizontales —también llamadas vínculos— que suelen usarse para representar la división y las raíces.

2.3 Resolución de problemas con expresiones algebraicas.

En la resolución de problemas algebraicos es muy importante el planteamiento del problema y el despeje de variables en las ecuaciones planteadas. A continuación te presentamos una pequeña variedad de ecuaciones algebraicas propias del nivel básico.

2.4 Resolución de ecuaciones de primer grado

Las ecuaciones de primer grado, ya sean con una o dos incógnitas, son ecuaciones cuyo máximo exponente en las variables es 1, es decir, en las variables se omiten exponentes.

Resolver una ecuación de este tipo significa encontrar el valor de la incógnita que satisface la igualdad. El método general que se utiliza para resolver este tipo de ecuaciones es despejando la incógnita. Observa el siguiente ejemplo:

Si al doble de la edad de Rosa se le suma seis años, obtenemos la edad de su papá, si el papá de Rosa tiene 36 años ¿Cuántos años tiene Rosa?

Solución:
Sea $x =$ Edad de Rosa y observemos que:

En términos algebraicos:

$$2x + 6 = 36$$

Despejando, obtenemos que:

$$2x = 36 - 6$$
$$2x = 30$$
$$x = \frac{30}{2}$$
$$x = 15$$

Por lo tanto, Rosa tiene 15 años.

2.5 Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado

1. Si a un número le sumamos su doble el resultado nos da 24. ¿Cuál es ese número?

a) 12 b) 6 c) 8 d) 3x e) 24

2. El doble del producto de dos números nos da 48, si uno de esos números es 6, ¿cuál es el otro número?

a) 4 b)8 c) 12 d)6 e)$2(6x) = 48$

3. Dos terceras partes del dinero que tiene Javier es igual al doble del dinero que tiene María. Si María tiene $\$30$ pesos, entonces ¿Cuánto dinero tiene Javier?

a)$20 b)$40 c)$80 d)$90 e)$30

4. La columna del Ángel de la Independencia mide treinta veces la estatura de David, si David mide 1.5 metros ¿Cuánto mide la columna del Ángel de la independencia?

a) 45m b)30m c)36m d)48m e)24m

2.6 Solución de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

En este tipo de ecuaciones aparecen dos variables o incógnitas. Para resolver este tipo de ecuaciones se despeja una de las variables para expresarla en términos de la otra, así el conjunto de soluciones puede ser infinito.

Por ejemplo:
Encuentre una infinidad de parejas de números que satisfagan la ecuación:
$2x = y$
Si $x = 1$ entonces $y = 2$ cumple la igualdad de la ecuación.
Si $x = 2$ entonces $y = 4$ también cumple la ecuación y así sucesivamente.

La solución es única o puede no existir cuando no sólo tienes una ecuación, sino dos o más ecuaciones. A este conjunto de ecuaciones se les llama sistema de ecuaciones y cuando son de primer grado, se les denomina sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo.
Cada vez que un jugador gana una partida recibe $\$7$ pesos, y cada vez que pierde paga $\$3$ pesos, al cabo de 15 juegos ha ganado $\$55$ pesos, calcular las partidas ganadas.

Solución:
¿Cuántas partidas ganó? pensemos que ya lo sabemos, es decir, supongamos que ya conocemos "el número de partidas que ganó".

Llamemos:
$x =$ al número de partidas que ganó.
$y =$ al número de partidas que perdió.

Entonces la información se puede plantear en lenguaje algebraico en las siguientes dos ecuaciones:

$$x + y = 15 \ \ldots (1)$$
$$7x + 3y = 55 \ \ldots (2)$$

De la primera ecuación (1), al despejar x, obtenemos:
$x = 15 - y \ldots (3)$

Al sustituir la ecuación (3) en la ecuación (2) obtenemos:

$$7(15 - y) - 3y = 55 \ \ldots (4)$$

Ahora, utilizando operaciones inversas, se despeja la variable y:

$$7(15) - 7y - 3y = 55$$
$$105 - 10y = 55$$
$$-10y = 55 - 105$$
$$-10y = -50$$
$$y = \frac{-50}{-10}$$
$$y = \frac{50}{10} = 5$$

Por lo tanto, el número de partidas que perdió es igual a 5, como jugó en total 15 (eso es lo que nos dice la primera ecuación), entonces el número de partidas que ganó fueron 10.

2.7 Resolución de problemas con sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de dos o más ecuaciones con varias incógnitas que conforman un problema matemático consistente en encontrar las incógnitas que satisfacen dichas ecuaciones.
Para lo anterior, existen diversos métodos de resolución, a continuación te presentamos cuatro de los más usados.

1) Método por sustitución.

Este método consiste en despejar una incógnita de cualquiera de las dos ecuaciones para sustituir en la ecuación restante y obtener una ecuación de primer grado con una incógnita. Es aconsejable utilizar este método cuando el coeficiente en una de las variables es 1 ó -1.

Ejemplo. Encuentre los valores que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \ldots (1) \\ 3x - 2y = 21 \ldots (2) \end{cases}$$

Al despejar y de la primera ecuación:

$$2x + y = 7$$
$$y = 7 - 2x \ldots (3)$$

Ahora sustituimos (3) en (2):

$$3x - 2(7 - 2x) = 21$$

El resultado es una ecuación de primer grado con una incógnita, la cual se resuelve simplemente despejando:

$$3x - 2(7 - 2x) = 21$$
$$3x - 14 + 4x = 21$$
$$7x - 14 = 21$$
$$7x = 21 + 14$$
$$7x = 35$$
$$x = \frac{35}{7}$$
$$x = 5 \ldots (4)$$

Para encontrar el valor de y, se sustituye el valor de x en cualesquiera de las ecuaciones, por ejemplo, al sustituir (4) en (1).

$$2(5) + y = 7$$
$$10 + y = 7$$
$$y = 7 - 10$$
$$y = -3$$

Por lo tanto, los valores que satisfacen el sistema de ecuaciones son $x = 5$ y $y = -3$.

2) Método por reducción (suma y resta).

Este método consiste en sumar ambas ecuaciones, y eliminar una de las variables, obteniendo una ecuación de primer grado con una incógnita.

Ejemplo.
Encuentre los valores que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 17 \ldots (1) \\ 4x - 2y = 4 \ \ldots (2) \end{cases}$$

Solución:
Se elige una incógnita a eliminar -por ejemplo x- y para poder hacerlo, los coeficientes deben ser iguales pero de signo contrario, una forma de conseguirlo es multiplicar la primera ecuación por el coeficiente de la segunda y del mismo modo, multiplicar la segunda ecuación por el coeficiente de la primera pero con el signo contrario, en nuestro

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} 4(3x + 4y = 17) \\ -3(4x - 2y = 4) \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 12x + 8y = 68 \\ -12x + 6y = -12 \\ \hline \end{array}$$

Después se suman término a término, cada una de las expresiones para lograr la cancelación deseada.

$$\begin{array}{r} \cancel{12x}+8y=68 \\ -\cancel{12x}+6y=-12 \\ \hline 0+14y=56 \end{array}$$

Ahora se despeja la incógnita que sobró:

$$14y=56$$
$$14y=56$$
$$y=\frac{56}{14}$$
$$y=4$$

Por último, se hace lo mismo pero ahora eliminando la otra variable o se sustituye el resultado en una de las dos ecuaciones para encontrar el valor de x.

Ejemplo:

$$3x+4(4)=17$$
$$3x+16=17$$
$$3x=17-16$$
$$x=\frac{1}{3}$$

Por lo tanto, los valores que satisfacen el sistema de ecuaciones son $x=\frac{1}{3}$ y $y=4$.

3) Método grafico.

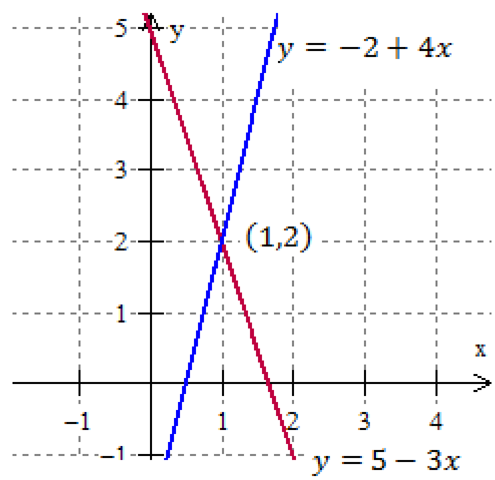
Como cada ecuación representa una función cuya gráfica es una línea recta, se grafican las dos rectas y la solución es el punto de intersección. Ejemplo. Encuentre los valores que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+y=5 \ldots(1) \\ 4x-y=2 \ \ldots(2) \end{cases}$$

Una forma de facilitar el trabajo, es despejar y en cada ecuación, para obtener las reglas de correspondencia de las funciones. En nuestro caso:

$$y=f(x)=5-3x \quad \ldots(1)$$
$$y=f(x)=-2+4x \ldots(2)$$

Una vez hecho esto se grafican las funciones y se busca el punto de intersección.



Para graficar las rectas no es necesario tabular una lista muy larga, pues basta con dar dos valores para que queden totalmente definidas.

A la variable y, también se le conoce como $f(x)$ o como variable dependiente.

4) Método de igualación.

El método anterior pudiera parecer impreciso, pues el punto de intersección puede ser difícil de ubicar, sobre todo si los números son muy grandes, pero se complementa con este método, el cual consiste en despejar una de las dos variables en ambas ecuaciones y después se igualan para obtener una ecuación de primer grado con una incógnita. En el caso anterior, como:

$$y = 5 - 3x \quad ...(1)$$
$$y = -2 + 4x ...(2)$$

Al igualarlas obtenemos que:

$$5 - 3x = -2 + 4x$$

Despejando obtenemos que:

$$-3x - 4x = -2 - 5$$
$$-7x = -7$$
$$x = \frac{-7}{-7} = 1$$

Por último, sustituyendo $x = 1$ en cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo en (1) obtenemos:

$$y = 5 - 3(1) = 5 - 3 = 2$$

Por lo tanto, los valores que satisfacen el sistema de ecuaciones son $x = 1$ y $y = 2$.

Ejercicios 1. Resuelve los siguientes problemas por el método que más te guste.

a) Un granjero cuenta con un determinado número de jaulas para sus conejos. Si introduce 6 conejos en cada jaula quedan cuatro plazas libres en una jaula. Si introduce 5 conejos en cada jaula quedan dos conejos libres. ¿Cuántos conejos y jaulas hay?

b) En una lucha entre moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase? (Recuerda que una mosca tiene 6 patas y una araña 8 patas).

c) Durante un año una persona recibe $9, 000 pesos por la renta de dos casas. Si las rentas difieren en $200 pesos y la más barata estuvo ocupada sólo 10 meses del año ¿Cuál era el costo de cada una de las casa?

d) En un estacionamiento hay 110 vehículos entre coches y motocicletas, si en total hay 360 llantas ¿Cuántas motocicletas y cuántos vehículos hay?

2.8 Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es aquella que puede reducirse a la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Donde no se anula **a**. Si observamos los coeficientes **b** y **c**, las podemos clasificar en **incompletas** si se anula **b** o **c**, o **completas** si no se anula ninguno de los coeficientes. Previo a una resolución directa es importante mostrar conocimientos fundamentales para el desarrollo de las ecuaciones cuadráticas. Así pues, las siguientes temáticas son los antecedentes de los procedimientos.

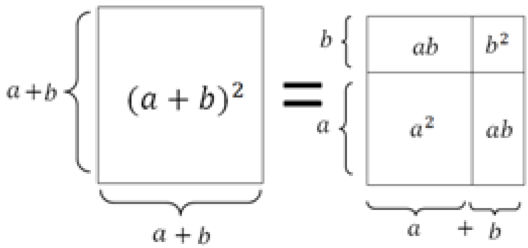
Productos Notables

Los productos notables, como su nombre lo indica, son el producto de dos polinomios en los que claramente se nota cuales son los factores de la multiplicación. Una simple inspección nos permite identificarlos. Los más conocidos son tres:

1) Binomio al cuadrado.

Son de la forma $(a + b)^2$ y por lo mismo, se pueden ver como el área de un cuadrado cuyo lado es $(a + b)$:

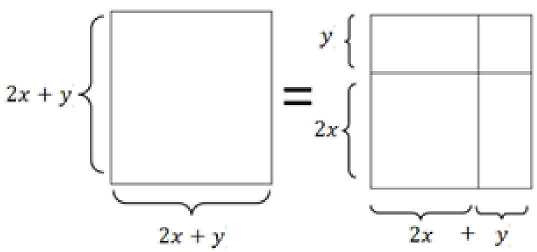
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Por lo cual:

El cuadrado de la suma, es igual al cuadrado del primer término, más dos veces el primero por el segundo, más el segundo al cuadrado.

Ejercicio 1.
Calcula el área del cuadrado de las dos formas diferentes:



Ejercicio 2.
El resultado de $(2x+y)^2$ es:

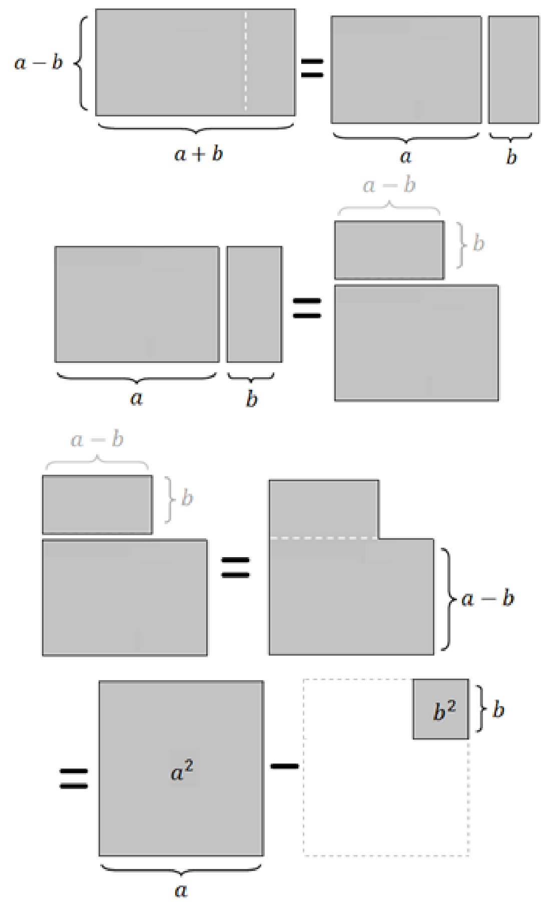
a) $4x^2 + 2xy + y^2$
b) $2x^2 + 2xy + y^2$
c) $2x^2 + 4xy + 2y^2$
d) $4x^2 + 4xy + y^2$
e) $4x^2 + 4xy + 2y^2$

2) Binomios conjugados.

Son de la forma $(a+b)(a-b)$ su característica principal es que tienen los mismos términos, pero uno de ellos tiene signo contrario, de ahí el nombre de conjugados, al realizar el producto se obtiene una diferencia de cuadrados, esto es:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Geométricamente se puede interpretar que el área de un rectángulo cuyos lados son $(a+b)$ y $(a-b)$ es igual a la resta de dos cuadrados cuyos lados son a y b respectivamente.



Observa que al efectuar el producto $(a+b)(a-b)$, también obtenemos:

$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2$
$= a^2 - b^2$

Ejercicio:
Al desarrollar $(x+3)(x-3)$ se obtiene:

a) $x^2 - 3$
b) $x^2 - 9$
c) $x^2 + 6x - 9$

d) $x^2 - (-9)$
e) $x^2 + 9$

3) Binomios con término común.

Son de la forma $(x + a)(x + b)$ en este caso, sólo un elemento se repite en ambos paréntesis y al realizar el producto se obtiene que:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

El desarrollo es:

El producto de dos binomios con término común es igual al cuadrado del término común más la suma de los términos no comunes por el común más el producto de los no comunes.

Ejercicio:
¿Cómo se vería geométricamente este producto?

Cuadrado de la diferencia de dos cantidades.

Otro producto notable es el cuadrado de la diferencia de dos cantidades, es decir, supongamos que a y b son dos que primero se van a restar y el resultado se va a elevar al cuadrado.
Donde:

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a - b)(a - b) \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejercicio:
¿Cómo se vería geométricamente este producto?

Factorización

Como ya habíamos visto en aritmética, la multiplicación es la operación que consiste en multiplicar dos números llamados factores. **Factorizar** significa expresar un número o expresión algebraica como el producto de varios factores. Algunas factorizaciones muy frecuentes son las siguientes:

1) Factorización de un monomio.

Factorizar un monomio consiste en expresarlo como el producto de dos o más monomios.
Ejemplo:
$10ab = (2a)(5b)$

2) Factorización de polinomios

No todo polinomio puede ser expresado como el producto de dos o más factores distintos de 1, pues hay expresiones algebraicas que sólo son divisibles por ellas mismas y por 1, y que por lo tanto, no son el producto de otras expresiones algebraicas.
Así $x + y = (x + y)(1)$

Por lo tanto, existen diferentes formas de factorizar un polinomio:

a) Polinomios, que tiene un monomio por factor común.

Uno de los factores comunes más usados es el producto del máximo común divisor de los términos del polinomio, multiplicado por las variables comunes elevadas al menor exponente en que aparecen.

Ejemplo.
Factorizar: $9a^3x^2 - 18ax^3$

Solución:
Sabemos que:

- El m.c.d. $(9,18) = 9$
- Las variables comunes elevadas al menor exponente son: a y x^2
- El factor común: $9x^2a$

Por lo tanto la factorización queda así:

$$9a^3x^2 - 18ax^3 = 9x^2a(a^2 - 2x)$$

b) Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto

Un Trinomio Cuadrado Perfecto es el producto de un binomio al cuadrado, para encontrar su factorización debes identificar el producto notable.

Ejemplo.
$b^2 + 14b + 49 = (b + 7)^2$

c) Factorización de una Diferencia de Cuadrados.

Siempre que te encuentres una diferencia de cuadrados, es decir un polinomio de la forma $\boldsymbol{a^2 - b^2}$, recuerda que se puede factorizar como un binomio conjugado:

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$$

Ejemplo.
$100 - x^2 = 10^2 - x^2$
$= (10 + x^2)(10 - x^2)$

d) Factorización de Trinomios de la Forma: $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$.

Un trinomio de la forma $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$, se obtiene de desarrollar el producto de dos binomios en los que la variable x, es un término común. Para factorizar este tipo de polinomios se busca una pareja de números cuyo producto sea c y cuya suma sea b.

Por ejemplo, para factorizar $x^2 + 6x + 8$:

Se buscan dos números que al multiplicarlos nos de 8 y al sumarlos nos de 6. En este caso, los números que cumplen esto son 2 y 4. Pues $2 \times 4 = 8$ y $2 + 4 = 6$.

Por lo tanto:

$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$

Los números también se pueden encontrar usando la formula general de segundo grado que se verá más a continuación.

Ejercicio.
Factorizar:
a) $m^2 + 9m + 14$
b) $x^2 + 8x + 15$
c) $x^2 + x - 30$
d) $x^2 - 8x + 16$
e) $x^2 - x - 90$
f) $x^2 + x + 42$
g) $x^2 - 5x + 6$
h) $x^2 - 16$
i) $x^2 - 49$
j) $x^2 - 64$

2.9 Resolución de ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$, se le llama ecuación de segundo grado, por ejemplo:

$4x^2 + 3x - 2 = 0$

A los valores que satisfacen la ecuación se les llama raíces o soluciones de la ecuación. Existe una fórmula general para resolver este tipo de ecuaciones y esta es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Está formula se deduce a partir de la ecuación cuadrática, usando un método de completar un cuadrado.

Demostración:
Partimos de la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0, \; a \neq 0$$

Multiplicando la ecuación por $\frac{1}{a}$, obtenemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Sumando a ambos lados $-\frac{c}{a}$:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Sumando a ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente de x: $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Simplificando el lado derecho y escribiendo el lado derecho como un binomio, obtenemos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Sacando raíz cuadrada para despejar x, tenemos que:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Distribuyendo la raíz (la raíz de la división es igual a la división de las raíces):

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

Por último, simplificando y despejando x, obtenemos la formula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para aplicar la fórmula general se deben obtener los valores de a, b y c en el orden de la ecuación de segundo grado, es decir, $ax^2 + bx + c = 0$, donde:

$a =$ El coeficiente del término cuadrático
$b =$ El coeficiente del término lineal
$c =$ El término independiente

Cuando uno de los términos no aparece en la ecuación, por ejemplo, en la ecuación:
$6x^2 + 5 = 0$

Los coeficientes que faltan, (en este caso el del término lineal b), se igualan a cero ($b = 0$).

Ejemplo.
Encuentre las raíces de la ecuación:
$-x - 6 = -x^2$

Solución. Primero se ordenan los términos de la ecuación para que aparezcan de la forma

$ax^2 + bx + c = 0$. En nuestro caso, obtenemos:
$x^2 - x - 6 = 0$

Después se obtienen los valores de a, b y $c,$ para el ejemplo:

$a = 1$, $b = -1$ y $c = -6$

Una vez que se tiene los valores de a, b y $c,$ se sustituyen en la fórmula.

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)}$$

Recuerda escribir todos los signos, incluyendo los de la formula.
Por último, se hacen las operaciones:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

De aquí se obtienen dos soluciones:

$$x_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Por lo tanto, los valores que satisfacen la ecuación son $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$

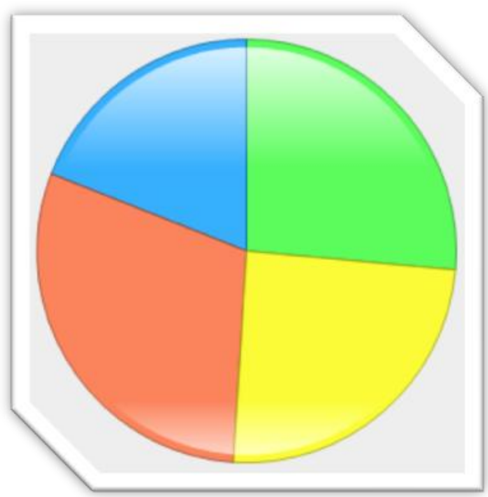
La ecuación tiene dos soluciones cuando $b^2 - 4ac$, llamado el discriminante de la ecuación, es mayor que cero:

$$b^2 - 4ac > 0$$

La ecuación tiene una única solución cuando: $b^2 - 4ac = 0$

La ecuación no tiene solución dentro del conjunto de los números reales cuando:
$b^2 - 4ac < 0$

3. Manejo de la información estadística



La estadística es una rama de la matemática que se encarga del estudio de la recolección, análisis e interpretación de datos, que permiten tomar de decisiones o explicar condiciones de algún fenómeno o estudio aplicado por medio de datos.

La presentación y el tratamiento de la información son todos los procedimientos y operaciones matemáticas que se le hacen a la información o datos para que puedan ser analizados con certeza, y consiste en "limpiar los datos" además de mostrarlos de manera que se pueda interpretar información que a simple vista, no se podría.
.
Dentro de este apartado, se abordarán temas que permiten hacer uso de la información, de una manera que permita tener otra visión de los datos que en un primer momento, podrían parecer sin sentido.

3.1 Análisis de la información estadística.

Una tabla de datos, es un ordenamiento de información en forma de filas y columnas, que permiten tener un orden de dicha información, además de permitir observar relaciones y tendencias de la misma. Algunas tablas son una forma de organizar gran cantidad de información de manera que resulte fácil de consultar para el usuario. Un ejemplo es el siguiente:

Se elabora un examen en un grupo de clases. Luego de calificar los exámenes, se tiene que los alumnos tuvieron las siguientes calificaciones: Laura 8.7, Pancho 6.5, Luis 7.7, José 6.4, Sofía 8.5, Fernanda 9.5, Estefanía 8.7, Fernando 6.9, Ignacio 7.7, Dante 10, Rodrigo 7.8, Pepito 5.1, Fidel 6.7, Mónica 5.2, Edith 6.7, Felipe 7.9, Alejandro 6.5, Emilio 7.4, Julio 6.7, María 9.5, Perla 8.7.

Un primer tratamiento es colocar los datos dentro de una tabla, como se muestra (para este ejemplo solo se utilizan algunos datos):

Nombre	Calificación
Laura	8.7
Pancho	6.5
Luis	7.7
José	6.4
Sofía	8.5
Fernanda	9.5
Estefanía	8.7
Fernando	6.9
Ignacio	7.7
Dante	10
Rodrigo	7.8
Pepito	5.1
Fidel	6.7
Mónica	5.2
Edith	6.7
Perla	8.7

¿Qué más podrías observar de los datos dentro de la tabla?

Al hacer este tipo de tratamiento, podemos llegar a conclusiones como:

- Sólo hay un hombre que tiene más de 8 como promedio
- La mayoría de los resultados menores a 8 son hombres
- Sólo hay 2 reprobados

Este tipo de información no la dice tal cual los datos que se tienen, pero con esto, podemos tener un idea de otro tipo de información con los mismos datos. Un ejemplo de una afirmación que se podría decir con lo anterior es:

En el grupo hay más problemas en el aprendizaje con los hombres que con las mujeres.

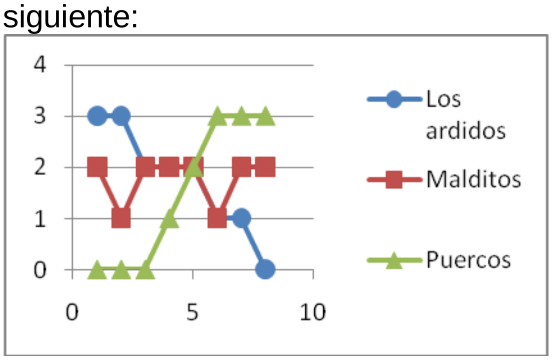
Este tipo de afirmaciones se respaldan mejor cuando el número de datos es aún mayor, es decir, aquí sólo estamos hablando de 21 personas, cuando el número de participantes es mucho mayor, los resultados son más precisos.

Otra forma de poder ver este tipo de información es por medio de una gráfica. Una gráfica es una imagen que representa ciertos datos. Existen muchos tipos de gráficas y cada una de ellas se utiliza dependiendo cómo se desea mostrar la información, por el gusto, por la conveniencia o simplemente porque es la mejor manera.

Tomemos otro ejemplo: tres equipos de futbol tuvieron durante todo el torneo los siguientes resultados:

La letra **P** Corresponde a un partido, en este caso P1 es el primer partido y así sucesivamente.

Una vez más esta información podría no significar mucho, pero si graficamos los datos tendríamos lo siguiente:



Hacer uso de una gráfica, permite tener una visión general de la información además de proporcionar elementos que muestren tendencias y otros datos que puedan ayudarnos a elaborar hipótesis y conclusiones. Con esta imagen, podemos llegar a conclusiones como:

- Los ardidos comenzaron metiendo muchos goles pero comenzaron a bajar desde el tercer partido
- Los malditos tuvieron altas y bajas pero en general se mantuvieron estables
- Los puercos comenzaron mal porque no metían goles, pero subieron y se mantuvieron

Estas afirmaciones son válidas porque los respaldan los datos obtenidos, aquí no se tuvo que ordenar la información porque ya existe un orden, además se tuvo que relacionar el número de goles con el número del partido.

	GOLES							
Equipo	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**
Los ardidos	3	3	2	2	2	1	1	0
Malditos	2	1	2	2	2	1	2	2
Puercos	0	0	0	1	2	3	3	3

Una gráfica siempre debe llevar dos o más datos que se puedan relacionar para poder graficarlos. Recordemos que toda gráfica requiere de un valor en x y uno en y para poder construirla.

El uso de este tipo de recursos, son muy útiles para el manejo de la información, además de que ofrecen una visión más amplia y proporcionan información que no necesariamente se puede observar a primer instancia.

3.2 Medidas descriptivas

El estudio de una variable estadística comienza con la obtención de datos, ya sea sondeando la población o tomando una muestra. El siguiente paso en el proceso es la ordenación de datos elaborando la tabla correspondiente. Trabajar con una tabla es complejo y tedioso por lo que es más conveniente la introducción de nuevos parámetros que nos permitan resumir la información que contienen esas tablas.

El objetivo que se persigue es la síntesis de la información que nos aportan los datos con la menor pérdida posible. Vamos a agrupar los parámetros en tres grupos dependiendo de su función.

- Medidas de centralización: Con ellas pretendemos condensar los distintos valores de la variable en uno sólo que los resuma.

- Medidas de posición: Una vez ordenados los datos de menor a mayor será necesario identificar la posición de los valores.

- Medidas de dispersión: Las medidas de centralización nos condensan los datos en uno sólo pero no nos aportan información ninguna sobre la concentración o dispersión de los datos.

3.2.1 Uso de porcentajes como índices o indicadores

3.2.2 Cálculo de media, mediana y moda

Un porcentaje es una forma de expresar un número como una fracción de 100 (por ciento, que significa "*de cada 100*"). Es a menudo denotado utilizando el signo porcentaje %, se utiliza para agrupar cierto tipo de información y representarla a manera de que proporcionen una visión general de la misma. Un ejemplo sería el siguiente:

De 500 alumnos de secundaria:
- 375 son mujeres y 125 hombres
- 145 tienen entre 12 años, 200 tienen 13 años y 155 tienen 14 años.
- 450 tienen pareja y 50 no tienen.

Mostrando la misma información con porcentajes quedaría de la siguiente forma:

- 75 % son mujeres y 25 % hombres
- 29 % tiene 12 años, 40% 13 años y 31% 14 años
- 90 % tiene pareja y 10% no.

Sin necesidad de conocer el número exacto de personas, podemos hacer las siguientes afirmaciones: El número de mujeres es tres veces más grandes que el de hombres, o, por cada hombre hay 3 mujeres. El mayor número de alumnos tiene 13 años. Casi todos tienen pareja.

Cuando se tiene este tipo de información, es una forma más amplia y general de ver los datos y llegar a conclusiones de este tipo.

Dentro de la estadística existen 3 tipos de cálculos simples que permiten llegar a obtener información que de otra forma no se podría tener, además de llegar a conclusiones y afirmaciones respaldadas.

Vamos a ver un ejemplo con una tabla de datos y luego se explicará lo que es cada uno de los conceptos.

Retomemos el ejemplo de las calificaciones en un grupo, sólo que en esta ocasión olvidaremos los nombres y nos limitaremos a contar el número de alumnos y sus calificaciones. Los datos se muestran en la siguiente tabla:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
8	**6**	**8**	**7**	**9**	**5**	**7**	**4**	**6**	**7**	**9**	**10**	**8**	**5**	**4**

16	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*	*27*	*28*	*29*	*30*
4	**5**	**6**	**7**	**6**	**7**	**9**	**10**	**4**	**6**	**7**	**7**	**7**	**6**	**9**

En esta tabla, los número de arriba son solamente el conteo de alumnos, es decir que hay 30 alumnos que se contaron. Los números que se encuentran abajo, son las calificaciones obtenidas de los alumnos.

Con los datos anteriores tenemos que:

- La media es el valor obtenido al sumar todos los datos y dividir el resultado entre el número total de datos, un promedio. En este caso hacemos la suma de todos los valores;

8+6+8+7+9+5+6+4+6+7+9+10 +8… hasta el último número que es +9. El resultado de la suma es 203. Luego dividimos ese número entre el número de muestras que en este caso son 30 y quedaría así:

$$\frac{203}{30} = \mathbf{6.76}$$

De tal manera que la media de los valores es de 6.76, es decir, que el promedio general de todo el grupo es de 6.76.

- La mediana es el valor que ocupa el lugar central de todos los datos cuando éstos están ordenados de menor a mayor. Para este ejemplo los datos ya ordenados quedan como se muestran.

4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9	10	10

6	6	6	7	7	7	7	7	7	7

En este caso hay 2 números que se quedan en el centro, cuando esto sucede, se suman y se saca un promedio, es decir, 7+7=14, luego se divide entre 2 y en total tenemos 14/2=7. Por lo tanto la mediana de todos los valores es 7.

- La moda es el valor que tiene mayor frecuencia, si ponemos los número en una tabla tendríamos lo siguiente:

Calificación	Número de veces que aparece
4	4
5	3
6	6
7	9
8	3
9	4
10	2

Observando la tabla, tenemos que la calificación que más se repite es 7 con 9 veces, por lo tanto, la moda de todos los valores es 7.

Con estas herramientas, se puede llegar a interpretaciones que se utilizan para hacer afirmaciones, hipótesis o llegar a conclusiones. Es importante tomar en cuenta que entre mayor sea el número de muestras, más preciso y confiable son las conclusiones que se hagan.

3.3 Nociones de probabilidad

Un evento es un suceso que puede ocurrir al realizar un experimento, por ejemplo, que salga águila al lanzar una moneda, obtener un dos al lanzar un dado, sacar un rey al tomar una carta de una baraja, etc.

La probabilidad de un evento, la vamos a definir como sigue:

$$P(evento\ A) = \frac{número\ de\ casos\ favorables}{número\ de\ casos\ totales}$$

Es decir, vamos a dividir el número de casos en los que sucede el evento que queremos, entre el número total de eventos que pueden ocurrir al realizar el experimento.

Volvamos a los casos citados al principio

En el ejemplo de la moneda tenemos lo siguiente:

Casos totales=2, pues sólo se puede obtener o águila o sol

Casos favorables=1, pues solo hay una manera de obtener águila.

Por lo que podemos concluir que:

$$P(obtener\ \acute{a}guila) = \frac{casos\ favorables}{casos\ totales} = \frac{1}{2}$$

En el caso del dado:

Casos totales=6, pues en un dado podemos obtener 6 resultados

Casos favorables=1, pues solo de una manera puedo obtener un dos

Por lo tanto

$$P(obtener\ un\ dos) = \frac{casos\ favorables}{casos\ totales} = \frac{1}{6}$$

Para el caso del rey. (Suponiendo que tenemos una baraja inglesa)

Casos totales=52, pues podemos sacar 52 cartas diferentes

Casos favorables=4, pues hay cuatro posibilidades de obtener un rey:

- Rey de corazones
- Rey de espadas
- Rey de tréboles
- Rey de diamantes

Por lo tanto

$$P(obtener\ un\ rey) = \frac{casos\ favorables}{casos\ totales} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Ahora bien, si tuviéramos una baraja española, la probabilidad cambiaría

Casos totales=40, pues podemos sacar 40 cartas distintas

Casos favorables=4, pues podemos obtener un rey de cuatro maneras:

- Rey de oros
- Rey de espadas
- Rey de bastos
- Rey de copas

Por lo que

$$P(obtener\ un\ rey) = \frac{casos\ favorables}{casos\ totales} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

Una cosa importante que hay que recalcar, es que las probabilidades siempre son menores o iguales a uno, y mayores a iguales a cero, es decir:

$$P(evento) \geq 0\ y\ P(evento) \leq 1$$

Tenemos tres maneras para representar las probabilidades:

- Por medio de una fracción
- Por medio de números decimales
- Por medio de porcentajes

A primera manera se obtiene por el método presentado en los ejemplos, la segunda tomando la expresión fraccionaria y dividiendo el numerador entre e denominador, y la última manera se obtiene multiplicando la expresión decimal por cien y agregando el símbolo %.

Ejercicios:

1.- Teniendo en cuenta la siguiente lista de edades de los alumnos inscritos a un grupo, construye una tabla de valores y encuentra la mediana, la moda y la media

15,15,16,17,15,18,14,14,14,15,16,19, 22,15,14,16,17,18,14,15,15,15,14,13, 15,14,15,16,19,15,14,13,14,14,15.

2.-De acuerdo a la siguiente información, haz una gráfica y contesta las siguientes preguntas:

Posición de un equipo de fútbol a lo largo del torneo:

5, 3, 6, 7, 8, 5, 4, 3, 3, 5, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1.

¿Cómo fue la posición del equipo, en aumento, en descenso, o se mantuvo estable?

¿Cuál fue la moda de las posiciones?

¿Cuál fue la mediana?

3.-Un nadador se está preparando para las siguientes olimpiadas en la prueba de 200m. estilo mariposa y registró los siguientes tiempos en sus vueltas de práctica:

1:30, 1:45, 1:33, 1:25, 1:31, 1:18, 1:15, 1:23, 1:22,1:27, 1:25, 1:29, 1:30, 1:27. 1:19, 1:23, 1:22, 1:23

¿Cuál es la media de las vueltas?

¿Cuál es la mediana?

Si el promedio general de los mejores nadadores es de 1:21¿Cómo crees que le vaya en las olimpiadas?

¿Crees que sus tiempos se han mantenido estables o que han variado mucho?

4.-Un equipo de béisbol tuvo en 20 partidos la siguiente cantidad de carreras

5, 5, 5, 3, 3, 7, 6, 7, 5, 3, 4, 5, 6, 7, 5, 3, 3, 5, 3, 4.

Realiza una tabla y una gráfica de los datos proporcionados

Calcula la media, la moda y la mediana

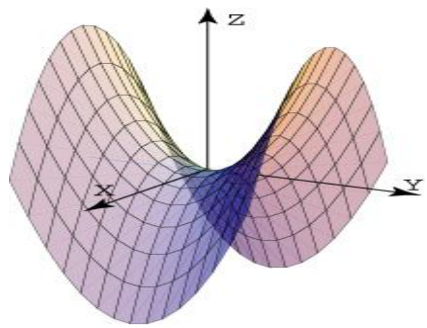
Que puedes decir de éste equipo en base a los datos proporcionados.

5.-Si en un cajón tengo 3 pares de calcetines grises, 3 pares de calcetines negros y 5 pares de calcetines cafés ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar un par a ciegas el par sea negro?

6.-Si en el refrigerador tengo 4 latas de refresco de cola, 5 de limón, 3 de naranja, 2 de manzana y 1 de toronja, ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar un refresco al azar éste sea de cola?

7.- Si en un juego tengo 32 fichas negras, 40 fichas azules y 32 fichas rojas ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger una ficha al azar, ésta sea de color azul?.

4. Formas Geométricas



La geometría es la rama de las Matemáticas que se encarga del estudio de las propiedades y medidas de las figuras en un universo determinado. En el caso de un plano, ejemplos de estás figuras pueden ser puntos, rectas, triángulos, cuadrados o círculos. En el caso del espacio, ejemplos de figuras pueden ser cilindros, esferas, planos conos o poliedros.

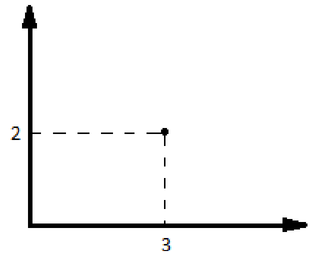
4.1 Rectas y ángulos

A veces afrontamos un problema con ciertas palabras, las utilizamos y podemos entender su contenido, aunque no seamos capaces de definirlas. Por ejemplo ¿cómo se definen el amor, el odio o la verdad? Usualmente podemos describir algunas características o efectos, pero no podemos dar una definición satisfactoria.

A continuación te presentamos una serie de definiciones de los objetos geométricos más usados a nivel básico, es importante saber que a medida que aumentes tu nivel escolar dichas definiciones irán cambiando.

Las definiciones que te presentamos aquí, son las llamadas definiciones clásicas pues provienen de la Grecia antigua, dichas definiciones las puedes encontrar en uno de los libros más citados en dicha época, nos referimos a los "Elementos de Euclides" y te darán una idea de lo que cada objeto geométrico significa

Punto.
El punto es la figura geométrica fundamental en las matemáticas. Carece de dimensiones (ni longitud, ni anchura, ni profundidad) y sólo tiene posición. Los griegos lo definían como "aquello que no tiene partes".



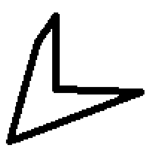
Un punto y su posición

Línea.

Una línea se define como una longitud sin anchura, es decir, es la sucesión infinita de puntos que solamente tienen longitud. Pueden ser curvas, rectas o formar figuras geométricas.
Ejemplos de líneas:

Línea recta


Línea curva


Línea cerrada


Línea irregular

Línea Recta

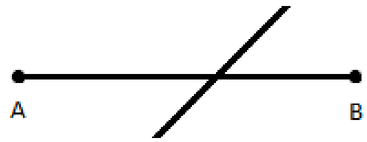
Euclides la definió como “aquella que ya hace por igual respecto de los puntos que están en ella” Es la línea, en la que al tomar cualesquiera dos puntos de ella, el valor de la pendiente resulta siempre constante. La representación de una línea recta la podemos encontrar al tensar un hilo o al mirar un rayo de luz.

Segmento de recta.

Las líneas rectas son ilimitadas en extensión, pero nosotros vemos y estudiamos partes de ellas llamadas segmentos de recta.

Línea transversal.

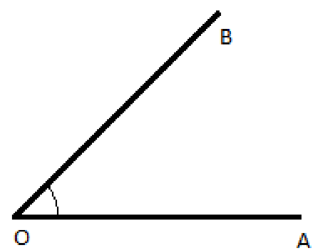
Si una línea es atravesada por otra en cualquier punto, la segunda línea es llamada línea transversal.



Línea transversal

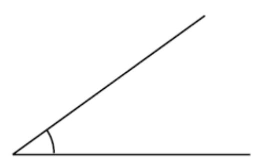
Ángulo.

Euclides definía al ángulo como la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra. Actualmente es más común encontrar definido al ángulo como la apertura que forman dos semirrectas, con el mismo punto extremo, a las semirrectas se les llama lados del ángulo y a su punto extremo, vértice.



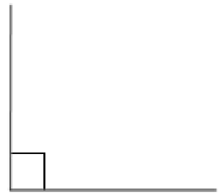
Ángulo Agudo.

Es aquel ángulo que vale menos de 90º entre sus lados.


Ángulo agudo

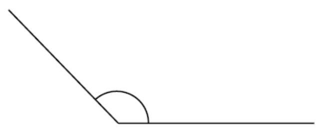
Ángulo Recto.

Un ángulo recto equivale a una rotación de 90 grados. Los lados de un ángulo recto son perpendiculares. Para distinguirlos de otros tipos de ángulos se coloca una esquina rectangular en su vértice.



Ángulo recto

Ángulo Obtuso.
Es aquel ángulo que vale más de 90° y menos de 180° entre sus lados.

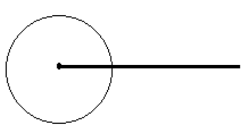


Ángulo obtuso

Ángulo llano.
Es aquel ángulo cuyos lados se encuentran situados en una misma línea recta y su valor es de 180º entre sus lados.

Ángulo llano

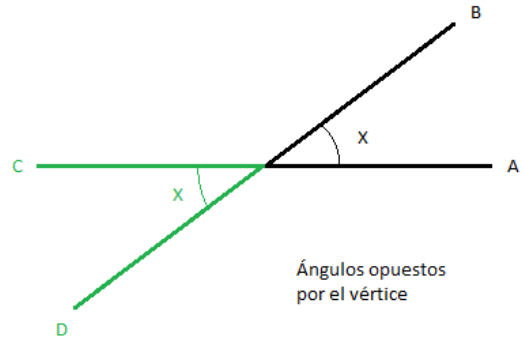
Ángulo Perigonal.
Es aquel ángulo caya magnitud es igual a 360°.



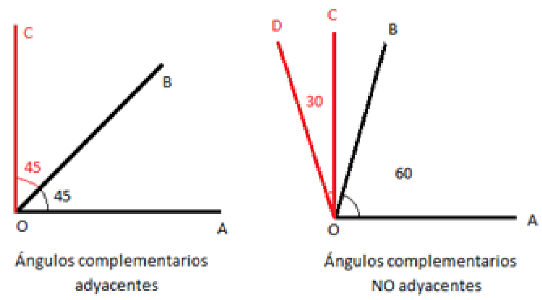
Ángulo perigonal

Ángulos opuestos por el vértice.

Se llaman así dos ángulos que tienen el vértice en común, y sus lados están en un par de rectas que se cortan en el vértice.



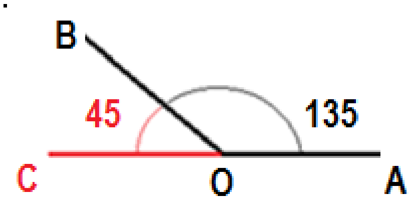
Ángulos complementarios.
Son dos ángulos cuya suma es igual a 90°. Estos pueden ser adyacentes o no.



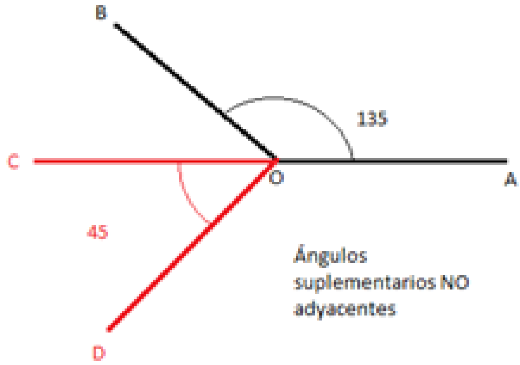
Ejemplo. ¿Cuál es el complemento de un ángulo de 80°?

Solución:
$x + 80 = 90$
Al despejar x obtenemos:
$x = 90º - 80º$
$x = 10º$
Por lo tanto, el complemento de 80º es un ángulo de 10º

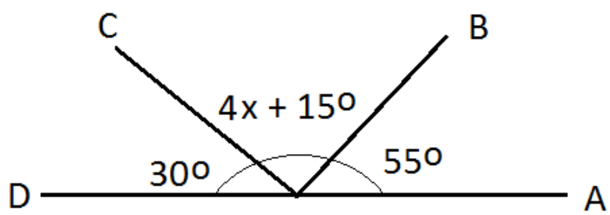
Ángulos suplementarios.
Son dos ángulos cuya suma es igual a 180º. Estos pueden ser adyacentes o no.



Suplementarios adyacentes



Ejemplo.
De acuerdo con la figura:



¿Cuál es el valor de x?
a)30°
b)28°
c)20°
d)15°
e)95°

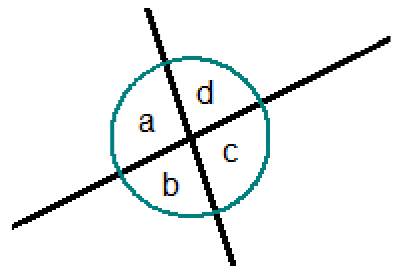
Solución:
La suma de los ángulos forma un ángulo llano, entonces:

$$30º + (4x + 15º) + 55º = 180º$$
$$4x + 100º = 180º$$
$$4x = 180º - 100º$$
$$4x = 80º$$
$$x = 80º / 4$$
$$x = 20º$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es el inciso C).

Ejercicios:

1. En cada caso y de acuerdo con la siguiente figura, determine la opción que contenga los valores de los ángulos restantes si se da el valor de sólo uno de ellos.



Caso 1. Si $a = 42°$
a) b= 112° c=21° d=112°
b) b= 138° c= 138° d=42°
c) b= 138° c= 42° d=138°
d) b= 45° c=45° d=45°
e) b= 90° c= 60° d=30°

Caso 2. Si $b = 79°$
a) a= 101° c=101° d=79°
b) a= 138° c= 138° d=42°
c) a=138° c= 42° d=138°
d) a= 45° c=45° d=45°
e) a= 90° c= 60° d=30°

Caso 3. Si $c = 3°$
a) b= 112° d=21° a=112°
b) b= 138° d= 138° a=42°
c) b= 138° d= 42° a=138°
d) b= 177° d=177° a=3°
e) b= 90° d= 60° a=30°

Caso 4. Si $d = 173°$
a) b= 112° c=21° a=112°
b) b= 7° c= 138° a=112°
c) b= 138° c= 42° a=138°
d) b= 45° c=45° a=45°
e) b= 173° c= 7° a=7°

2. Para cada caso encuentra el ángulo suplementario de θ.

Caso 1. Si θ = 67°
   a) 113°
   b) 23°
   c) 14°
   d) 45°
   e) 293°

Caso 2. Si θ = 173°
   a) 45°
   b) 15°
   c) 7°
   d) 90°
   e) 12°

Caso 3. Si θ = 90°
   a) 2°
   b) 23°
   c) 35°
   d) 90°
   e) 10°

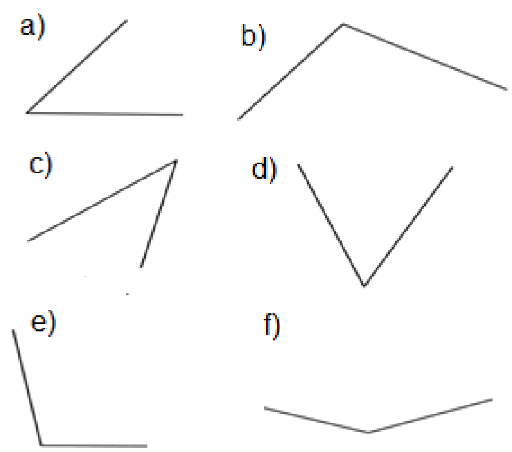
Caso 4. Si θ = 113°
   a) 90°
   b) 45°
   c) 35°
   d) 2°
   e) 67°

3. ¿Cuánto mide un ángulo que es igual a su suplementario?
   a) 90°
   b) 180°
   c) 45°
   d) 30°
   e) 15°

4. Si un ángulo mide el doble que su suplementario ¿Cuántos grados mide?
   a) 90°
   b) 180°
   c) 12°
   d) 120°
   e) 45°

5. Si un ángulo mide 75° más que su suplementario ¿Cuántos grados mide?
   a) 127.5°
   b) 8.2°
   c) 90°
   d) 13.4°
   e) 52.5°

6. De los siguientes ángulos ¿cuales parecen ser rectos, cuáles agudos y cuáles obtusos?



7. Seleccione la opción que indique cuántos grados mide el complemento de cada uno de los siguientes ángulos:

θ = 22°
   a) 123°
   b) 23°
   c) 78°
   d) 178°
   e) 324°

θ = 89°
   a) 1°
   b) 4°
   c) 15°
   d) 91°
   e) 300°

θ = 45°

a) 135°
b) 35°
c) 45°
d) 32°
e) 67°

θ = 63°

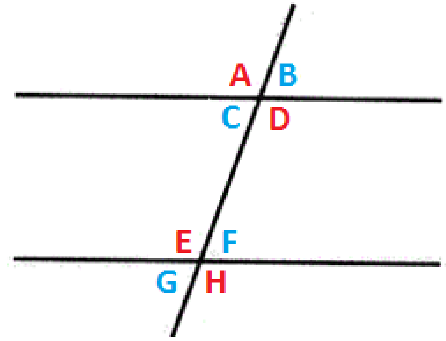
a) 227°
b) 122°
c) 107°
d) 11°
e) 27°

8. Si un ángulo mide lo mismo que su complementario ¿cuánto mide dicho ángulo?
   a) 45°
   b) 30°
   c) 60°
   d) 180°
   e) 360°

9. Si un ángulo mide 42° más que el doble de su complementario ¿cuánto mide?
   a) 138°
   b) 38°
   c) 48°
   d) 14°
   e) 46°

Ángulos entre líneas paralelas y una secante.

Líneas paralelas.
Se dice que dos rectas son paralelas si ambas tienen la misma pendiente. Cuando son cortadas por una transversal, se distinguen ocho ángulos: cuatro internos, llamados así por estar dentro de las paralelas y cuatro externos, llamados así por encontrarse fuera de ellas.



Los ángulos alternos son iguales. Los ángulos correspondientes también. Los ángulos internos al mismo lado de la transversal son suplementarios y los ángulos externos al mismo lado de la transversal también.

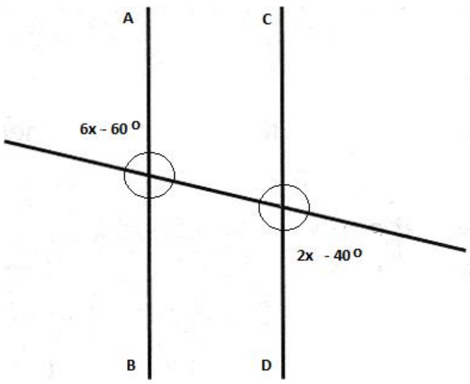
De acuerdo con esto los ángulos:

- Internos son:
  $\{C, D, E \text{ y } F\}$
- Externos son:
  $\{A, B, G \text{ y } H\}$
- Alternos externos son:
  $\{A = H \text{ y } B = G\}$
- Alternos internos son:
  $\{C = F \text{ y } D = E\}$
- Correspondientes son:
  $\{A = E, B = F, C = G \text{ y } D = H\}$
- Opuestos por el vértice son:
  $\{A = D, B = C, E = H \text{ y } F = G\}$
- Suplementarios internos son:
  $\{C + E = 180º \text{ y } D + F = 180º\}$
- Suplementarios externos son:
  $\{A + G = 180º \text{ y } B + H = 180º\}$

Ejemplo.

De la siguiente figura, determina el valor de x.

A)30° B)15° C)20° D)5° E) 0°



Solución:

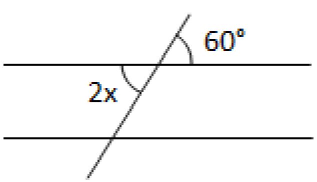
De la figura, los ángulos son alternos externos, por lo tanto, son iguales, entonces:

$$6x - 60º = 2x - 40º$$
$$6x - 2x = 60º - 40º$$
$$4x = 20º$$
$$x = \frac{20º}{4} = 5°$$

De modo que la respuesta correcta es el inciso D).

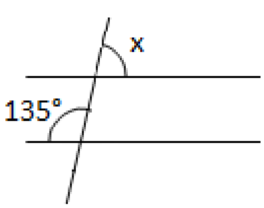
Ejercicios:

1.



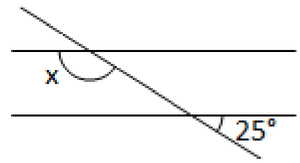
A) 60°
B) 120°
C) 30°
D) 180°
E) 45°

2.



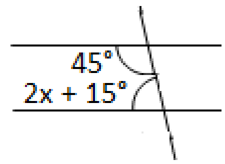
A) 80°
B) 90°
C) 130°
D) 45°
E) 60°

3.



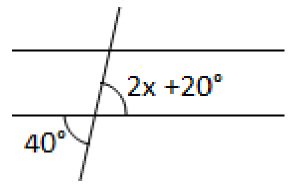
A)135°
B)160°
C)45°
D)155°
E)180°

4.



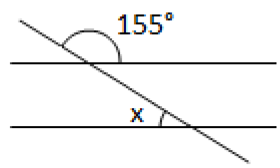
A) 60°
B) 30°
C) 10°
D) 15°
E) 22.5°

5.



A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 10°
E) 140°

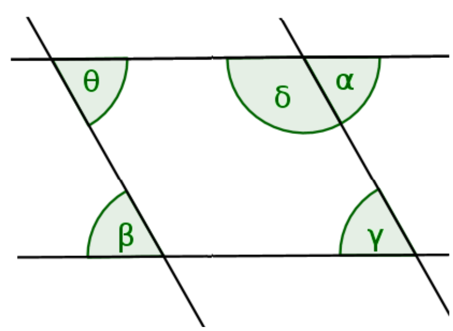
6.



A)135°
B)25°
C)155°
D)35°
E)15°

Más ejercicios:

1. Considera la siguiente figura formada por la intersección de dos pares de líneas para lelas. Para cada caso encuentra cuánto miden los ángulos α, β, γ, δ.



Caso 1. Si $\theta = 42°$

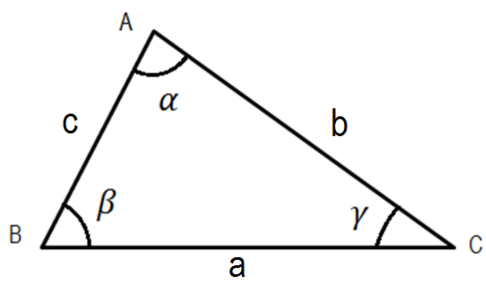
a) $\alpha=50°$, $\beta=1°$, $\gamma=12°$, $\delta=105°$
b) $\alpha=42°$, $\beta=42°$, $\gamma=42°$, $\delta=138°$
c) $\alpha=42°$, $\beta=138°$, $\gamma=138°$, $\delta=42°$
d) $\alpha=42°$, $\beta=42°$, $\gamma=42°$, $\delta=42°$
e) $\alpha=135°$, $\beta=135°$, $\gamma=135°$, $\delta=45°$

Caso 1. Si $\theta = 53°$

a) $\alpha=53°$, $\beta=53°$, $\gamma=53°$, $\delta=127°$
b) $\alpha=42°$, $\beta=42°$, $\gamma=42°$, $\delta=138°$
c) $\alpha=42°$, $\beta=138°$, $\gamma=138°$, $\delta=42°$
d) $\alpha=42°$, $\beta=42°$, $\gamma=42°$, $\delta=42°$
e) $\alpha=135°$, $\beta=135°$, $\gamma=135°$, $\delta=45°$

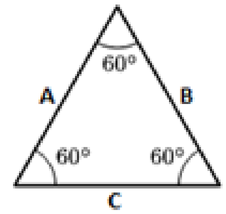
4.2 Figuras planas

Triángulo
Un triángulo es un polígono (figura plana formada por la intersección de segmentos de recta) que tiene 3 lados y 3 ángulos. Los puntos de intersección de los lados, se llaman vértices.



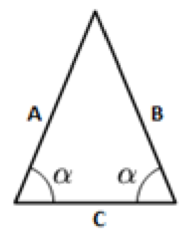
Tipos de triángulos:
Los triángulos se pueden clasificar por sus lados en tres tipos:

1. Equilátero.
Tienen sus tres lados iguales. En este triángulo, invariablemente todos sus ángulos internos son iguales y valen 60º cada uno.



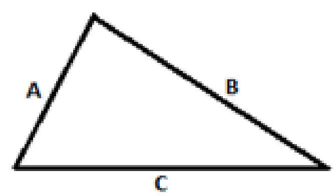
Triángulo Equilátero
(A=B=C)

2. Isósceles.
Tienes 2 lados iguales y otro desigual. Por lo tanto, también dos de sus ángulos internos son iguales y otro desigual.



Triángulo Isoceles
(A=B)

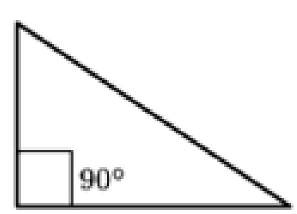
3. Escaleno.
Sus tres lados son desiguales, con ángulos internos también distintos.



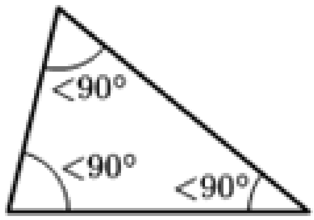
Triángulo escaleno

Por otro lado, los triángulos también se pueden clasificar por sus ángulos en tres tipos.

1. Rectángulos.
Si tienen un ángulo recto.

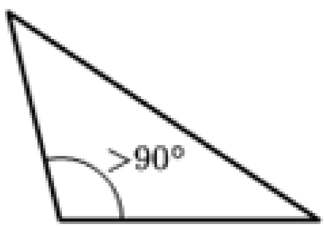


2. Acutángulos.
Si sus tres ángulos internos son

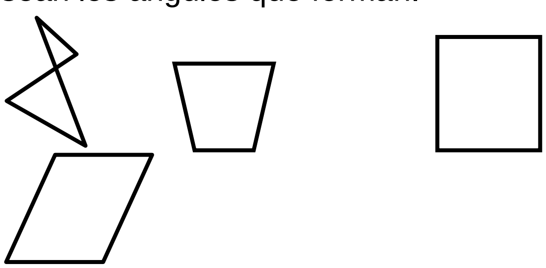


agudos.

3. Obtusángulos:
Si tienen un ángulo obtuso.



Cuadriláteros.
A todas las figuras planas de cuatro lados rectos se les llama cuadriláteros, no importando como sean los ángulos que forman.

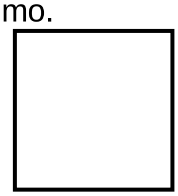


Cuadriláteros más comunes.
Los cuadriláteros son las figuras planas de cuatro lados, existe una gran variedad de ellos y se les suele clasificar de diferentes formas, nosotros te presentamos a continuación los cuadriláteros más comunes.

1. Rectángulo.
Cuadrilátero en el que los ángulos internos que forman los lados son todos de 90° (ángulos rectos, de ahí el nombre de rectángulo).

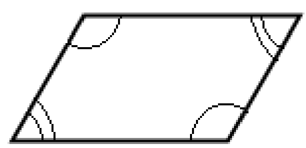
En el rectángulo no siempre la base es igual a la altura.

2. Cuadrado.
Es muy parecido al rectángulo, pues también sus lados forman ángulos rectos, pero el cuadrado cumple además de esto, que sus cuatro lados miden lo mismo.



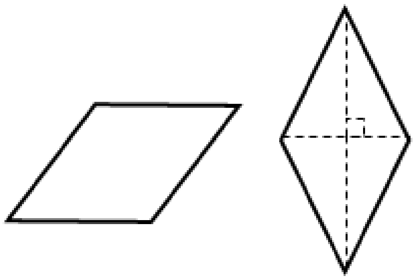
Es decir, es un rectángulo en el que la base es igual a la altura.

3. Paralelogramo.
Es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos.



En el paralelogramo, tanto los lados opuestos, como los ángulos opuestos son iguales.

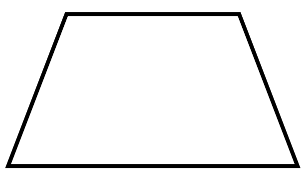
4. Rombo.
El rombo es un cuadrilátero en que todos sus lados son iguales, pero a diferencia del cuadrado sus ángulos opuestos son iguales y diferentes de 90°



En el rombo, los lados opuestos son paralelos, es decir, el rombo es un paralelogramo en el que todos los lados son iguales.

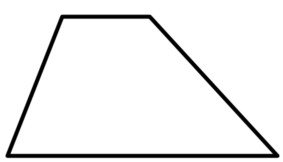
Otra cosa interesante es que las diagonales se intersecan formando un ángulo recto.

5. Trapezoide.
El trapezoide es un cuadrilátero que tiene un único par de lados paralelos.



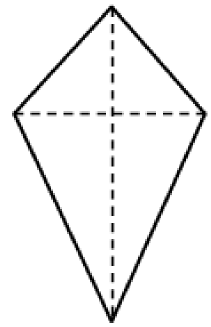
Trapezoide regular.

Si el par de lados que no son paralelos son del mismo tamaño, se dice que el trapezoide es regular, si no es así, se le llama trapezoide irregular.



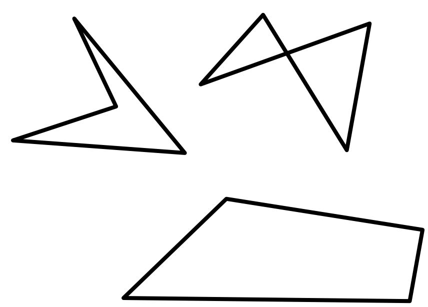
Trapezoide irregular

6. Deltoide.
Son como los papalotes, tiene dos pares de lados iguales y los lados iguales son adyacentes entre sí.



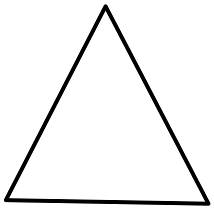
Los ángulos donde se encuentran los pares son iguales. Las diagonales (líneas de puntos) son perpendiculares y una de las diagonales biseca (divide por la mitad) a la otra.

Cuadriláteros Irregulares.
A los cuadriláteros que no son como los anteriores, se les llama cuadriláteros irregulares.

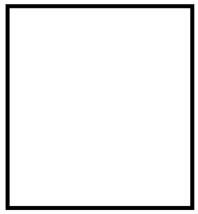


Polígonos regulares.
Los polígonos regulares son figuras planas en las que tanto sus lados, como sus ángulos, son iguales. El nombre de cada uno de ellos, depende del número de ángulos que lo forman. De ahí el nombre de polígono: poli-ángulo (muchos ángulos).

Ejemplos:
$n = 3$ $n = 4$

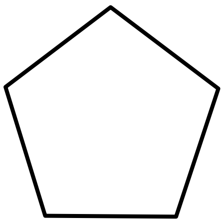


T. Equilátero



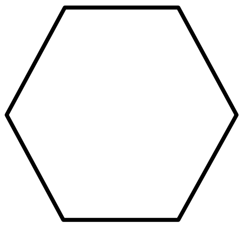
Cuadrado

$n = 5$



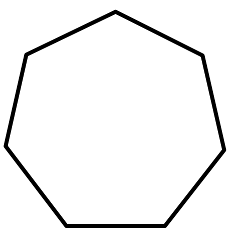
Pentágono

$n = 6$



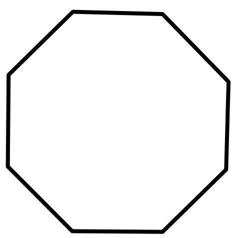
Hexágono

$n = 7$



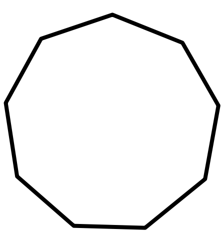
Heptágono

$n = 8$



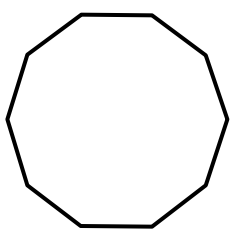
Octágono

$n = 9$

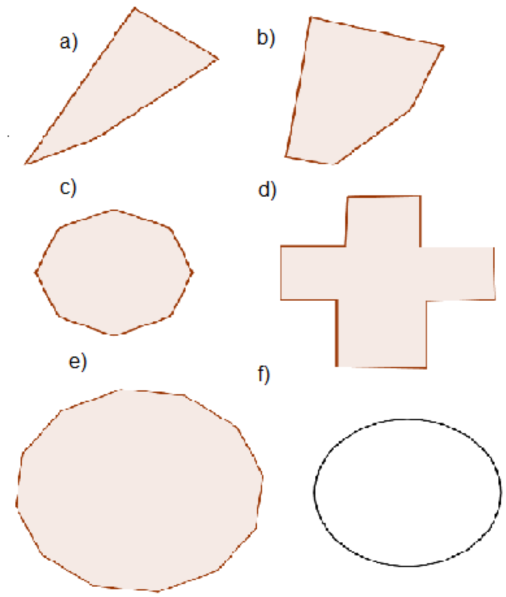


Nonágono

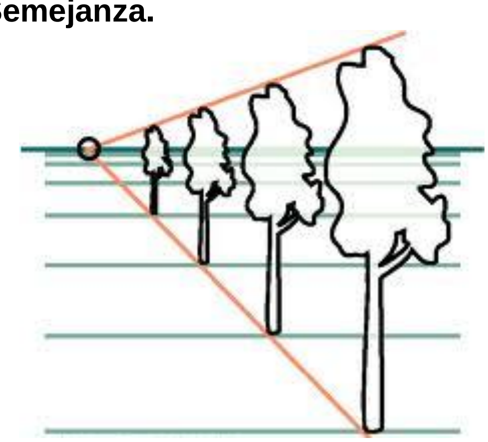
$n = 10$



Decágono



Semejanza.



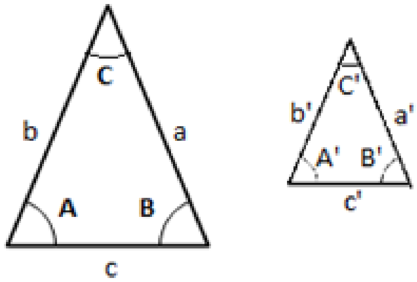
Dos figuras se dice que son semejantes si tienen la misma forma. Por lo tanto, puede cambiar el tamaño de la figura (es decir, puede estar una figura a escala de la otra), incluso pueden estar giradas, pero los ángulos no cambian.

Calculo de Distancias inaccesibles.
Hay veces que en el mundo encontramos cosas que sería muy difícil medir directamente con algún aparato o patrón. Tal es el caso de la altura de un edificio, del ancho de un río, de la altura de una pirámide, etc. Para poder medirlas y conocer su

magnitud, se requieren de métodos indirectos para poder obtener el valor.

4.3 Semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si tienen ángulos iguales entre sí o si sus lados son proporcionales entre sí.



Si los lados son proporcionales, entonces los ángulos son iguales, es decir, se cumple que:

$\measuredangle A = \measuredangle A'$

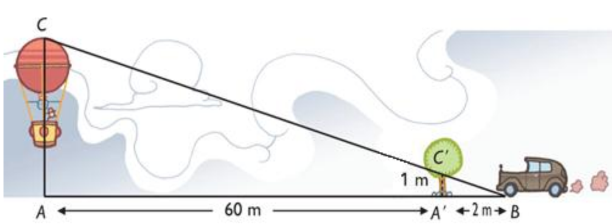
$\measuredangle B = \measuredangle B'$

$\measuredangle C = \measuredangle C'$

Si los ángulos son iguales, entonces los lados son proporcionales, es decir, si se cumple que:

$$\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c}$$

Las figuras semejantes pueden ser usadas para calcular distancias inaccesibles, veamos el siguiente caso.



Ejemplo.

Calcular la altura del globo aerostático tomando en cuenta que el triángulo entre el carro y el árbol es semejante al del globo y el carro

R = A) 15m B) 31m C) 40m D) 60m

Para mostrar que ambos triángulos son semejantes, se verá más adelante, basta con que tengan dos ángulos iguales y en nuestro caso tienen un ángulo en común y en cada triángulo la altura forma con el piso un ángulo de 90°.

Tomando en cuenta que los triángulos formados son semejantes, podemos observar que la base del triángulo pequeño es proporcional a la base del triángulo grande y de la misma forma nos podemos percatar de que la altura del triángulo pequeño es proporcional a la altura del triángulo grande.

De donde, utilizando la regla de tres obtenemos que:

$$2 \longrightarrow 62$$
$$1 \longrightarrow x$$

$$x = \frac{1 \times 62}{2}$$

Por lo tanto $x = 31m$

En otras palabras, la altura del globo son 31 metros. De modo que, la respuesta es el inciso B)

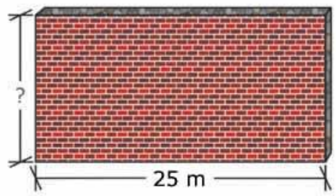
Ejercicios:

1. Determinar la altura de un edificio que proyecta una sombra de 6.5 m a la misma hora que un poste de 4.5 m de altura da una sombra de 0.90 m.

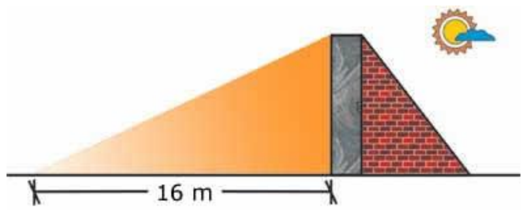
2. Los catetos de un triángulo rectángulo que miden 24 m y 10 m. ¿Cuánto medirán los catetos de un triángulo semejante al primero cuya hipotenusa mide 52 m?

3. Un pintor necesita saber cuántos metros cuadrados hay en un muro que va a pitar. Sabiendo que:

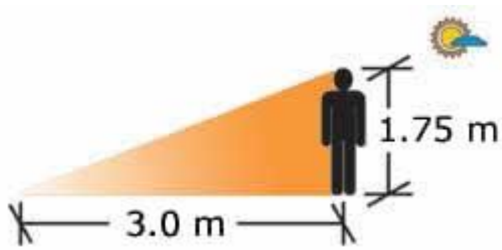
1) La dimensión de su base es de 25m.



2) La sombra que da el Sol cuando pasa por el muro a las 11 a.m. mide 16 m.

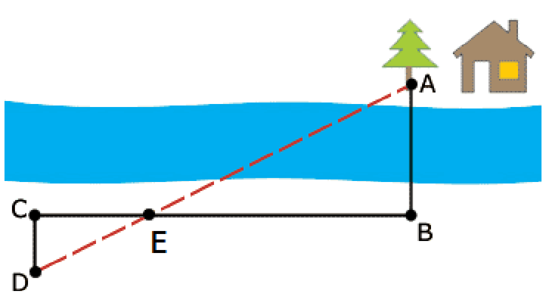


3) La sombra del pintor a la misma hora es de 3m. y por último, que el pintor mide 1.75m.



Encuentre cuántos metros cuadrados hay en un muro.

4. Un joven debe medir el ancho del río que pasa cerca de su propiedad, pero no puede llegar al otro lado.



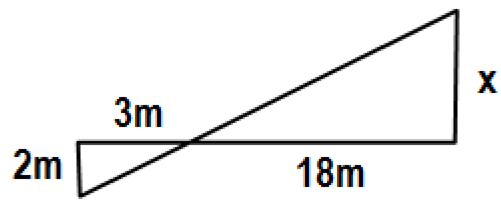
Sabiendo que:

1. El segmento de recta CD mide dos metros.

2. El segmento de recta CE mide tres metros, y por último, conociendo que:

3. El segmento de recta EB mide 18 metros.

¿Cuánto mide el segmento de recta AB, que es aproximadamente, el ancho del rio?



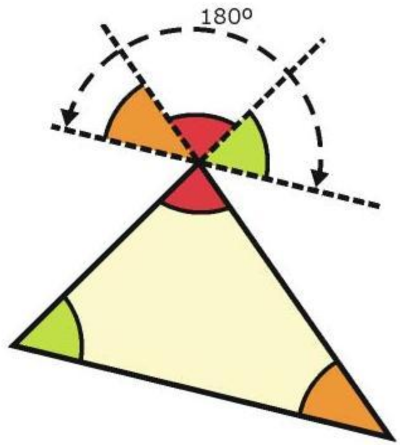
Teoremas.

Los teoremas son enunciados matemáticos que siempre dicen la verdad, en otras palabras, lo que enuncian ya está demostrado con argumentos lógicos o matemáticos indiscutibles. Un teorema muy importante de la geometría nos dice que:

La suma de los ángulos internos de un triángulo SIEMPRE es igual a 180º.

Esto es, si los ángulos internos de un triángulo son A, B y C:

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$

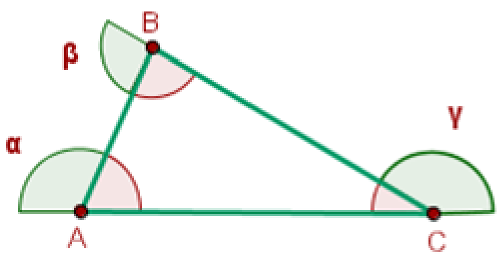


Otro teorema muy importante de la geometría nos dice que:

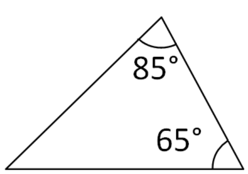
La suma de los ángulos exteriores de un triángulo SIEMPRE será de 360º

Esto es, si los ángulos externos de un triángulo son α + β + γ:

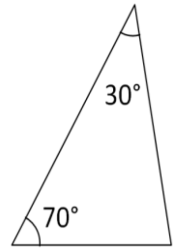
$$\measuredangle\alpha + \measuredangle\beta + \measuredangle\gamma = 360^\circ$$



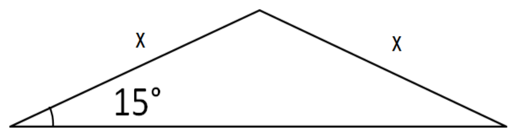
Ejercicios:
1. En los siguientes triángulos diga cuál es el valor del ángulo que falta:
a)



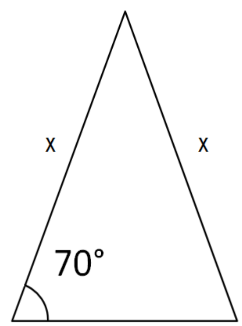
b)



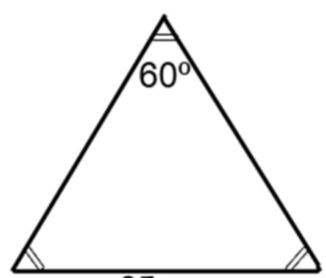
2. Sabiendo que los ángulos que se forman con los extremos de los iguales y el lado desigual son iguales. Diga cuál es el valor de cada uno de los de los ángulos de los siguientes triángulos:
a)



b)



c)

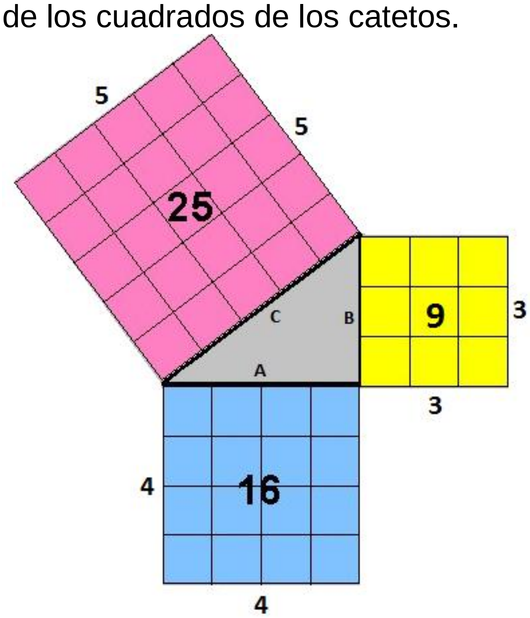


4.4 Teorema de Pitágoras.

En los triángulos rectángulos a los lados que subtienden al ángulo recto (ángulo de 90°), se les llama catetos y al lado opuesto al ángulo recto se le llama hipotenusa.

El Teorema de Pitágoras es uno de los más importantes de la geometría, pues nos permite conocer la longitud de uno de los lados de un triángulo rectángulo, si se sabe la longitud de los otros dos.

Dicho teorema, en términos actuales establece que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

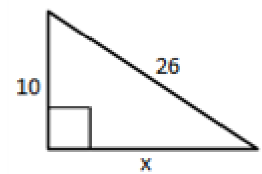


Es decir:

$$C^2 = A^2 + B^2$$

Donde A y B son los catetos del triángulo, y C la Hipotenusa.

Ejemplo.
El valor de x en el siguiente triángulo es:



A) 24
B) 36
C) 16
D) 25
E) 20

Solución:
El Teorema de Pitágoras nos dice que $C^2 = A^2 + B^2$ donde C es la hipotenusa (el lado más grande), A y B los catetos. Como el lado más grande es 26, podemos determinar que $26^2 = 10^2 + x^2$.

Por lo tanto:

$$676 = 100 + x^2$$

$$x^2 = 676 - 100$$

$$x^2 = 576$$

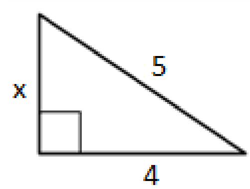
$$x = \sqrt{576}$$

$$x = 24$$

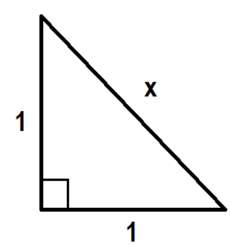
Por lo tanto, la respuesta es el inciso A).

Ejercicios:
1. Diga cuál es valor de x en las siguientes figuras:

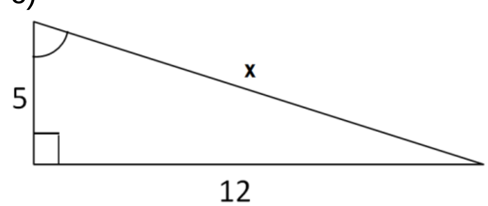
a)



b)



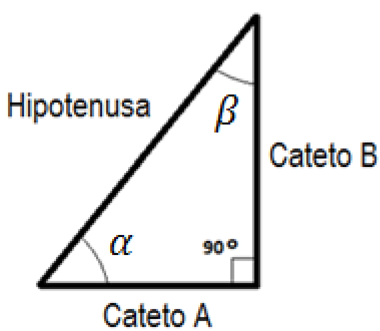
c)



4.5 Razones Trigonométricas

La trigonometría es la rama de la geometría que estudia la relación que se establece entre los lados y los ángulos de un TRIÁNGULO RECTÁNGULO. La trigonometría nos provee de medios para calcular el valor de lados o ángulos desconocidos en un triángulo y la proporción que guardan. Es útil en la vida real para calcular distancias inaccesibles o desconocidas sin necesidad de medirlas, así como para encontrar valores geométricos que antes sólo podíamos medir gráficamente.

Lados de un Triángulo Rectángulo:

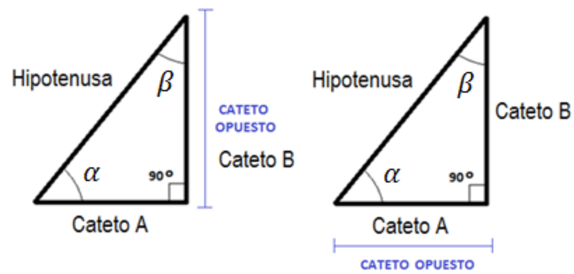


Hipotenusa: Es el lado opuesto al ángulo recto y es siempre el lado más largo.

Los Catetos.

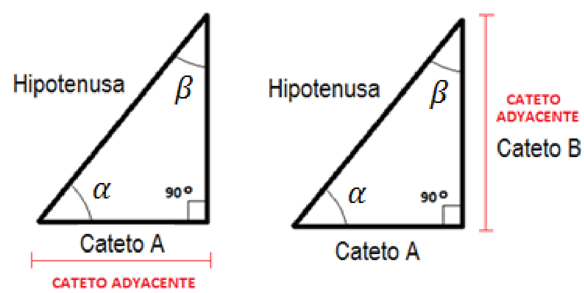
Cateto opuesto: Un cateto es opuesto en relación al ángulo al que hace referencia.

Ejemplo:
En la figura anterior, el cateto opuesto al ángulo α es el cateto B. Por otro lado, el cateto opuesto al ángulo β es el cateto A.



Cateto adyacente: Un cateto es adyacente en relación al ángulo al que hace referencia.

Ejemplo:
En la figura anterior, el cateto adyacente al ángulo α es el cateto A. Por otro lado, el cateto adyacente al ángulo β es el cateto B.



Existen seis razones trigonométricas que resultan de dividir, cada lado del triángulo, entre otro diferente. Las razones trigonométricas dependen del ángulo al que se hace referencia (α o β). En general, si el ángulo es cualquiera de los dos, llamémosle θ, las razones trigonométricas son las siguientes:

1. Seno:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

2. Coseno:

$$\cos\theta = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

3. Tangente:

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}$$

4. Cotangente:

$$\cot\theta = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}}$$

5. Secante:

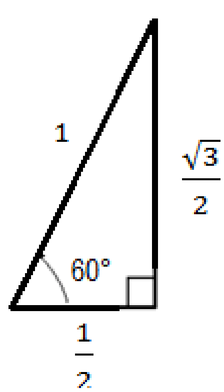
$$\sec\theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}}$$

6. Cosecante:

$$\csc\theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}}$$

Importante:
Recordemos que un cateto puede ser opuesto o adyacente, dependiendo del ángulo al que se hace referencia.

Ejemplo 1.
En el siguiente triángulo rectángulo, calcule los valores de:
$\cos 60°$ y $\text{sen } 60°$



Solución:
Como la relación trigonométrica del coseno es:

$$\cos\theta = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

En el triángulo anterior, para $\theta = 60°$, el cateto adyacente vale $\frac{1}{2}$ y la hipotenusa vale 1, por lo tanto:

$$\cos 60° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

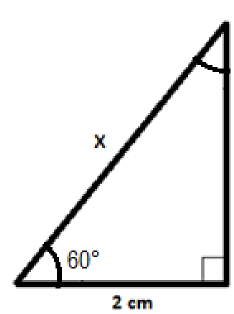
Por otro lado, como la relación trigonométrica del seno es:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

En el triángulo anterior, para $\theta = 60°$, el cateto opuesto vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y la hipotenusa vale 1, por lo tanto:

$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo 2.
En el siguiente triángulo, encontrar el valor de la hipotenusa. Sugerencia: tome en cuenta que del ejercicio se encontró que: $\cos 60° = \frac{1}{2}$



A) $3\ cm$ B) $1\ cm$ C) $2\ cm$ D) $4\ cm$ E) $6\ cm$

Solución:
Datos.
a) $\theta = 60°$
b) Por un lado, sabemos que:

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

c) Por otro lado, del triángulo anterior encontramos que:

$$\cos 30° = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{2\ \text{cm}}{\text{x}}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2} = \frac{2\ \text{cm}}{\text{x}}$$

Despejando x, encontramos que:

$$\text{x}\frac{1}{2} = 2\ \text{cm}$$

$$\frac{\text{x}}{2} = 2\ \text{cm}$$

$$x = (2)(2cm)$$

$$x = 4\ cm$$

Por lo tanto, la hipotenusa vale 4cm y la respuesta correcta es el inciso D).

Ejercicios.

1. Calcule:
a) $\text{sen}\ 30° =$

b) $\cos 30° =$

c) $\text{tg}\ 60° =$

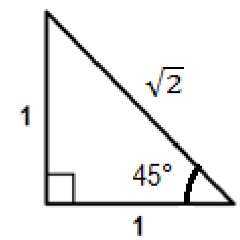
d) $\csc 30° =$

e) $\cot 60° =$

f) $\sec 30° =$

g) $\csc 60° =$

2. En el triángulo siguiente, calcular el valor de las seis relaciones trigonométricas para $\theta = 45°$.



3. Un camino tiene una pendiente de 30° ¿cuánto asciende el camino por cada kilometro recorrido? (ver figura)

Cuerpos Geométricos

A continuación te presentamos una tabla con las formulas para calcular ya sea el perímetro, área o volumen de las figuras más comunes en el plano y el espacio.

Más ejercicios.

1. Una escalera apoyada contra una pared de un edificio forma un ángulo de 70° con respecto al terreno. El pie de la misma se encuentra a una distancia de 10 m del edificio.

Calcule:

- La altura a la que está la cima de la escalera sobre el edificio.
- La longitud de la escalera.

2. En un triángulo isósceles el ángulo de la base es de 28 ° y cada uno de los lados iguales miden 45 cm.

- ¿Cuánto mide la base?
- ¿Cuánto mide la altura?
- Calcule el área del triángulo.

3. Un avión recorre 15 km con un ángulo de elevación constante, ganado 1.9 km de altura. ¿Cuál es su ángulo de elevación?

   a) 2°
   b) 6.7°
   c) 7°
   d) 15°
   e) 30°

4. Un faro tiene 90 m de altura, desde su cima se ve un barco con un ángulo de depresión de 24°. ¿A qué distancia horizontal se encuentra el barco alejado de la base del faro?

   a) 124m
   b) 190m
   c) 202m
   d) 200m
   e) 300m

5. Hallar los ángulos de un triángulo isóceles,cuyo perímetro es de 72 cm, sabiendo que su base es 6 cm menor que sus lados iguales.

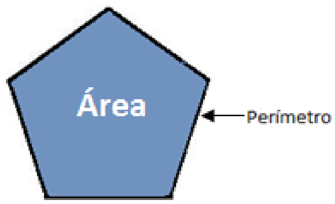
   a) 44°, 68°
   b) 42°, 66°
   c) 55°, 35°
   d) 41°, 68°
   e) 43°, 38°

4.6 Cálculo de perímetros.

Perímetro. Es la suma de los lados de cualquier polígono, es decir, **la orilla**. Con ello se representa la magnitud del total de todos sus lados.

4.7 Cálculo de áreas.

Área. Es la región interna de un polígono, es decir, **lo de adentro.** Al ser una magnitud de dos dimensiones, sus unidades son cuadráticas (m^2, cm^2, etc.).



Hallar el área y el perímetro de las siguientes figuras:

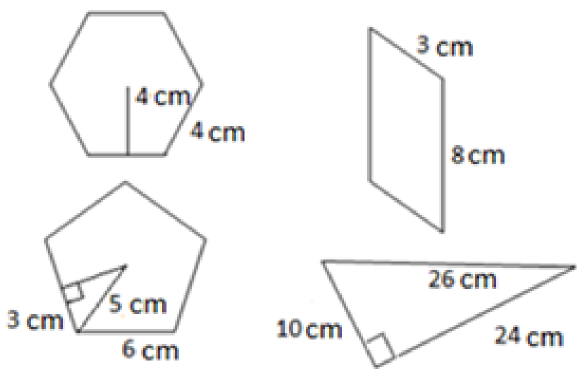
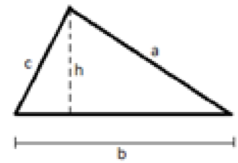
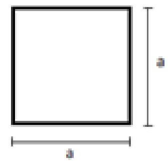
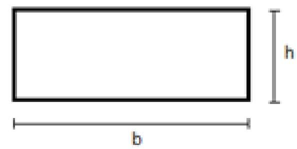
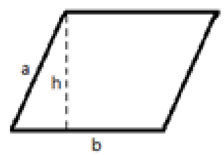
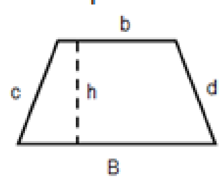
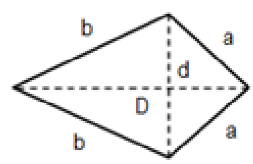
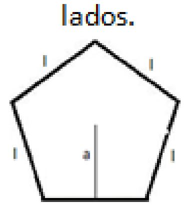


Figura	Área y Perímetro
Triángulo 	$A=\frac{1}{2}\, b \times h$ P = a + b + c
Cuadrado 	$A = a^2$ P = 4a
Rectángulo 	A = b x h P = 2b + 2h
Paralelogramo 	A = b x h P = 2a + 2b
Trapezoide 	$A = \frac{1}{2}(B + b)h$ $P = c + d + b + B$
Deltoide 	$A = \frac{d + D}{2}(h)$ $P = 2a + 2b$
Polígono regular de "n" lados. 	$A=\frac{P \times a}{2}$ $P = n \times l$

Ejercicios.

Hallar el área de las figuras, tomando π = 3.14

Círculo con 30 cm de radio.

a) 270 cm^2
b) 314 cm^2
c) 282.6 cm^2
d) 30 cm^2
e) 23 cm^2

Círculo con diámetro de 18 cm.

a) 56.2 cm^2
b) 215.3cm^2
c) 234 cm^2
d) 254.34cm^2
e) 340.7cm^2

Rectángulo cuyos lados miden 8cm y 12 cm respectivamente.

a) 12 cm^2
b) 96 cm^2
c) 128 cm^2
d) 48 cm^2
e) 90 cm^2

Paralelogramo cuya base mide 5 cm y altura 4 cm

a) 23 cm^2
b) 54 cm^2
c) 10 cm^2
d) 12 cm^2
e) 20m^2

Triángulo cuya base mide 10 cm y altura 8 cm

a) 45 cm^2
b) 80 cm^2
c) 20 cm^2
d) 40 cm^2
e) 12 cm^2

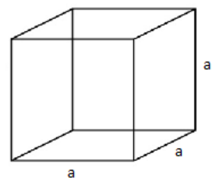
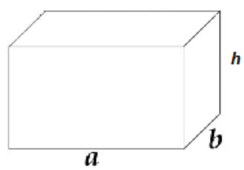
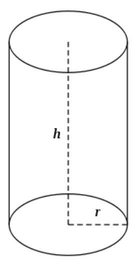
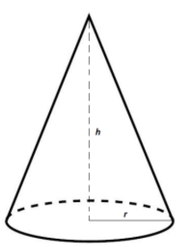
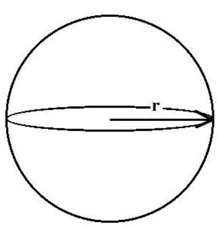
Trapecio cuyas bases miden 6 cm , 4 cm y altura 3.5 cm

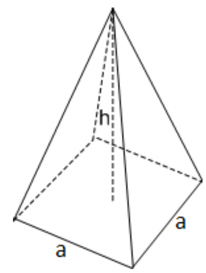
a) 12.35 cm^2
b) 24 cm^2
c) 35 cm^2
d) 12 cm^2
e) 17.5 cm^2

4.8 Cálculo de volúmenes.

La palabra poliedro proviene del griego y significa muchas caras, es decir los poliedros son las figuras de tres dimensiones que están limitada por la intersección de varios planos.

Volumen. Es la región interna de un poliedro. Al ser una magnitud de tres dimensiones, sus unidades son cubicas (m^3, cm^3, etc.).

Figura	Volumen
Cubo  	$V = a^3$ a = Longitud de la arista
Prisma rectangular  	$V = a \times b \times h$ a = Largo b = Ancho h = Altura
Cilindro circular  	$V = \pi \times r^2 \times h$ r = Radio h = Altura
Cono  	V= $\frac{1}{3} \pi \times r^2 \times h$ r = Radio h = Altura
Esfera  	V= $\frac{4}{3} \pi \times r^3$ r = Radio

Pirámide de base cuadrada  	V= $\frac{1}{3} a^2 \times h$ a = arista h = Altura

Ejercicios:

Hallar el volumen de las siguientes figuras.

Cubo cuya arista mide 7 cm

a) 350cm^3
b) 340cm^3
c) 343cm^3
d) 111cm^3
e) 777cm^3

Paralelepípedo cuyas aristas miden 8 cm, 6.5 cm y 14 cm

a) 730cm^3
b) 1468cm^3
c) 1400cm^3
d) 2244cm^3
e) 728cm^3

Esfera de radio 10 cm tomando π=3.14

a) 4186.66cm^3
b) 2416.66cm^3

c) 3000.4cm^3

d) 4123.66cm^3

e) 31416.66 cm^3

Prisma de 2 cm cuya base es un pentágono regular con lados de 9 cm y apotema de 3 cm.

a) 54 cm^3

b) 154 cm^3

c) 145.2 cm^3

d) 135 cm^3

e) 135.3 cm^3

Pirámide de 2cm de altura y base con área de 6 m^2

a) 12 cm^3

b) 1.2 m^3

c) 12 m^3

d) 1.2 cm^3

e) 0.12 cm^3

Cono de 1 metro de altura y base circular de 1.4 m de radio.

a) 6.4 m^3

b) 0.64 m^3

c) 1.95 m^3

d) 0.19m^3

e) 1.4 m^3

Habilidad Matemática

La Habilidad Matemática es la capacidad para encontrar relaciones, percibir el mundo visual (objetos y formas) para hacer transformaciones o modificaciones a partir de lo percibido inicialmente y basándose en un proceso de razonamiento, síntesis y análisis de los objetos matemáticos. Se suele clasificar en cuatro rubros; Sucesiones Numéricas, Series Espaciales, Imaginación Espacial y Problemas de Razonamiento Matemático.

1. Sucesiones Numéricas

Una sucesión numérica es un conjunto de números que cumplen con un modelo o regla matemática, la cual es generalmente generada por una o varias operaciones aritméticas.

Ejemplos:

{1, 2, 3, 4 ,...} ¿Cuál es el número que sigue?

{20, 25, 30, 35, ...} ¿Cuál es el número que sigue?

{1, 2, 4, 8, 16, 32,...} ¿Cuál es el número que sigue?

{0, 1, 0, 1, 0, 1,...} En esta sucesión se alternan ceros y unos (siguen un orden, en este caso un orden alternativo)

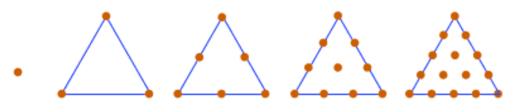
Algunas sucesiones especiales son las siguientes:

Números Triangulares

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45**, ...**

Esta sucesión se genera a partir de una pauta de puntos en un triángulo.

Añadiendo otra fila de puntos y contando el total, encontramos el siguiente número de la sucesión.



pero es más fácil usar la regla: $x_n = n(n+1)/2$

Ejemplo:

El quinto número triangular es $\boldsymbol{x_5 = 5(5+1)/2 = 15}$, y el sexto es $\boldsymbol{x_6 = 6(6+1)/2 = 21}$

Números Cuadrados

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, ...

El siguiente número se calcula elevando al cuadrado su posición: La regla es $\boldsymbol{x_n = n^2}$

Números Cúbicos

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, ...

El siguiente número se calcula elevando al cubo su posición: La regla es $\boldsymbol{x_n = n^3}$

Números de Fibonacci

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

El siguiente número se calcula sumando los dos que están antes de él.
El 2 se calcula sumando los dos delante de él $(1+1)$
El 21 se calcula sumando los dos delante de él $(8+13)$

La regla es $\boldsymbol{x_n = x_{n-1} + x_{n-2}}$

Esta regla es interesante porque depende de los valores de los términos anteriores.

Por ejemplo el 6º término se calcularía así:

$$x_6 = x_{6-1} + x_{6-2} = x_5 + x_4 = 5 + 3 = 8$$

Para calcular un número que falta en una sucesión, primero necesitas saber la regla que sigue la sucesión. A veces basta con mirar los números y ver el patrón.

Ejemplo:

Calcula el número que sigue en la sucesión 1, 4, 9, 16, …

Solución:

La regla que muestra la sucesión es que cada término es un número elevado al cuadrado:

(1^2=1, 2^2=4, 3^2=9, 4^2=16,...)

Por lo que, la regla es: $\boldsymbol{x_n = n^2}$

Y por lo tanto la sucesión continua con los números 25, 36, 49,... etc.

Ejercicios:

1. Calcula el término que sigue en las siguientes sucesiones:

A) 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22,

B) 6, 8, 7, 9, 8, 10,…

C) 1, 3, 9, 27,…,

D) 4, 8, 12, 16,…

2. Encuentre los números que faltan en la sucesión:

80, 40, 75, 35, ___ , ___ , 65, 25

3. Calcula los dos números siguientes en la sucesión numérica 8, 7, 11, 10, 14….

4. Calcula los dos números siguientes en la sucesión numérica 75, 74, 72, 71…

5. Calcula en número que falta en la siguiente sucesión numérica 6, 18, ___, 360, 2160…

6. Calcula el siguiente numero que le sigue a la sucesión XX, XXII, XXVI, XXVIII, ___...

7. Calcula el siguiente número que le sigue a la sucesión 9, 17, 11, 19, ___...

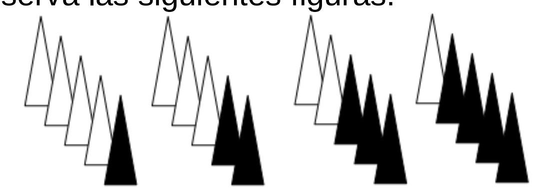
8. Calcula los dos números siguientes en la sucesión numérica

13, 18, 24, 29___, ___,…

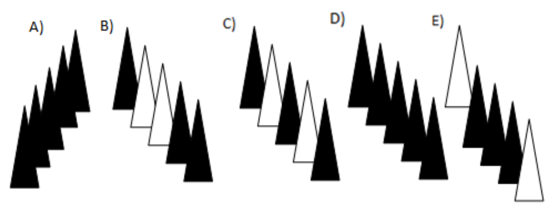
2. Series Espaciales

Las series espaciales son un conjunto de signos o imágenes que están ordenados de acuerdo a un principio, o patrón determinado.

Ejemplo 1.
Observa las siguientes figuras:

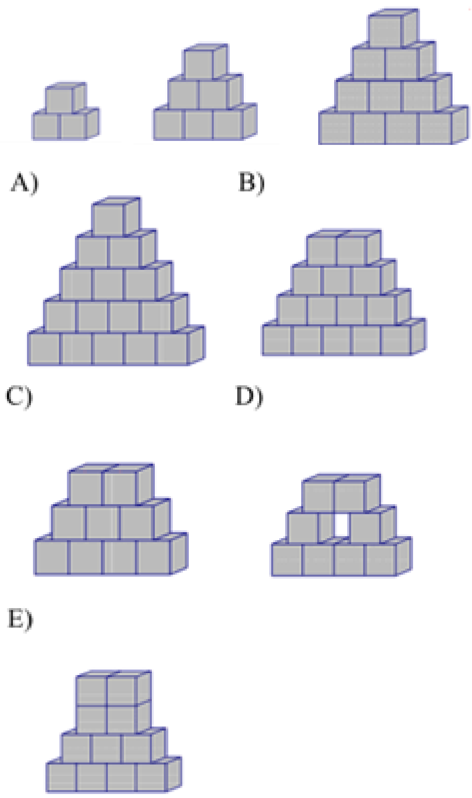


De las siguientes figuras ¿Cuál continúa la serie?



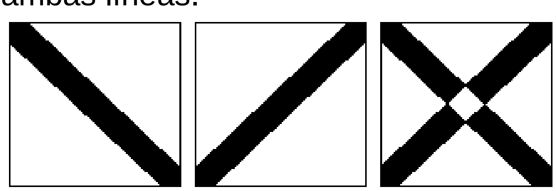
Solución:
Al observar el principio que rige la serie, nos percatamos que el número de triángulos negros va en aumento, de esta forma se puede inferir que el siguiente término debe tener cinco triángulos negros y además la posición de los triángulos no cambia. Por lo tanto, la figura que continúa la serie es la del inciso D).

Ejemplo 2.
Que opción continúa la serie:



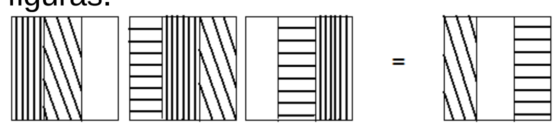
Observa que en cada paso se van agregando más cubos en la base y lo demás queda igual, por lo tanto, la respuesta correcta es el inciso A).

Ejemplo 3.
A veces se encuentran series en donde se deben restar las áreas, por ejemplo, en la serie de abajo, se tienen en los dos primeros cuadrados líneas inclinadas a diferentes ángulos y el resultado de la superposición son las 2 líneas, y en el punto de cruce se elimina el color de ambas líneas.

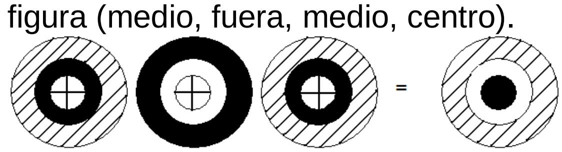


Ejemplo 4.
En este caso también se tienen 2 líneas, una en cada cuadrado, lo que al final resulta en una 'suma' de figuras, en cuya intersección se elimina el color de ambas líneas.

Ejemplo 5.
El patrón en el siguiente ejemplo se muestra solo después de 4 tercios de observar las figuras. Cada cuadrado es dividido en 3 partes, en donde cada una tiene una figura en especial, la cual se repite cada 4 tercios, por ejemplo el cuadro blanco del primer cuadrado solo se repite hasta el primer tercio del tercer cuadrado, lo mismo sucede con las demás figuras.

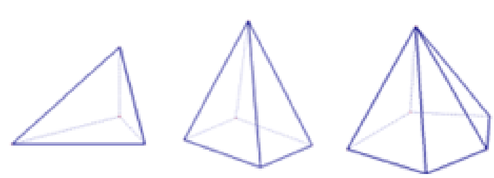


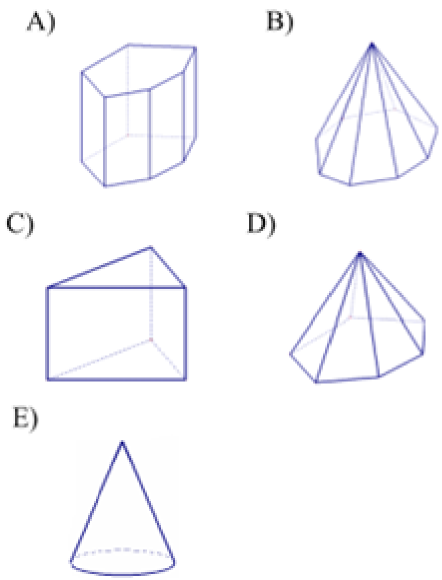
Ejemplo 6.
En este caso la única variante es la parte oscura en cada figura, la cual se mueve del centro hacia afuera y al llegar al límite del último círculo, recorre nuevamente la figura (medio, fuera, medio, centro).

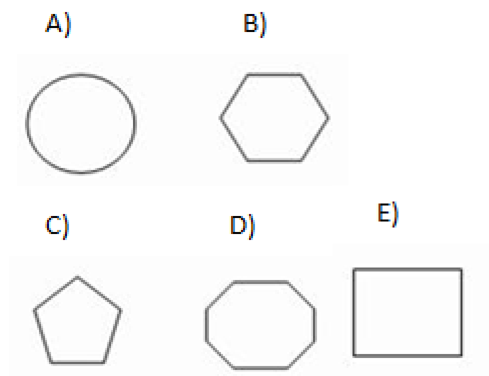


Ejercicios:

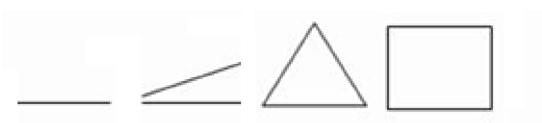
1. Cuál es el término que siguiente en la sucesión:





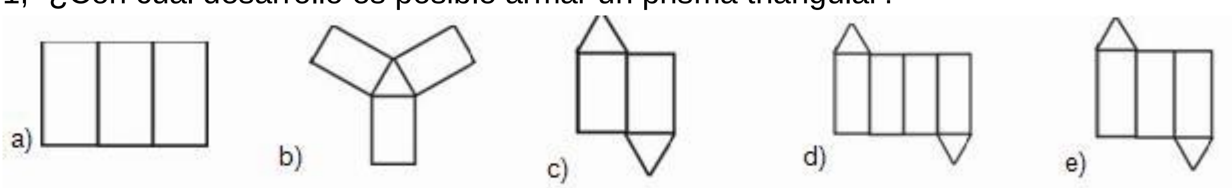


2. Que figura continúa la serie:

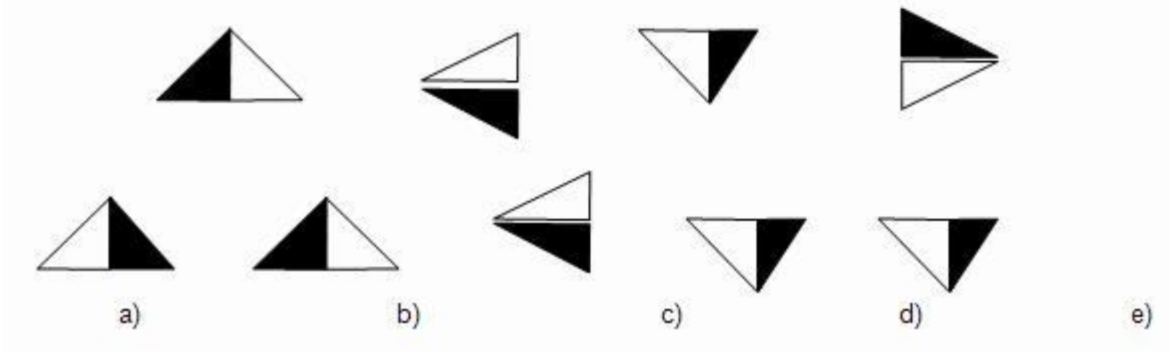


Ejercicios:

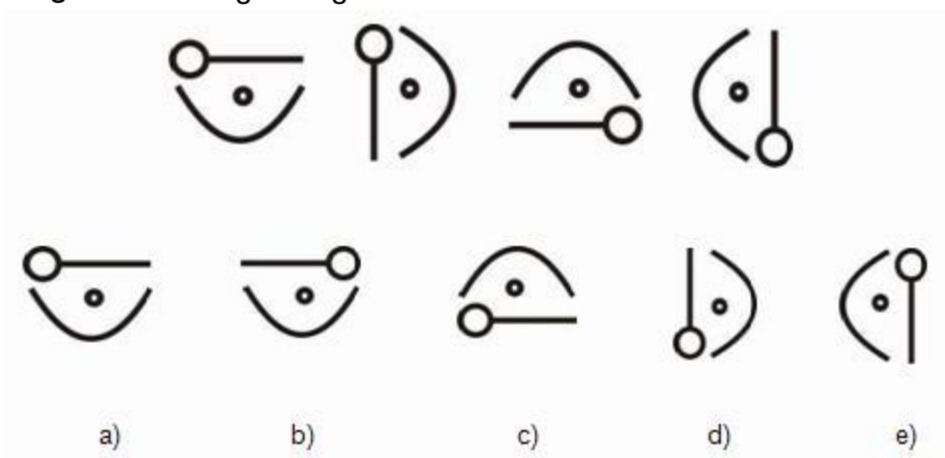
1,- ¿Con cuál desarrollo es posible armar un prisma triangular?



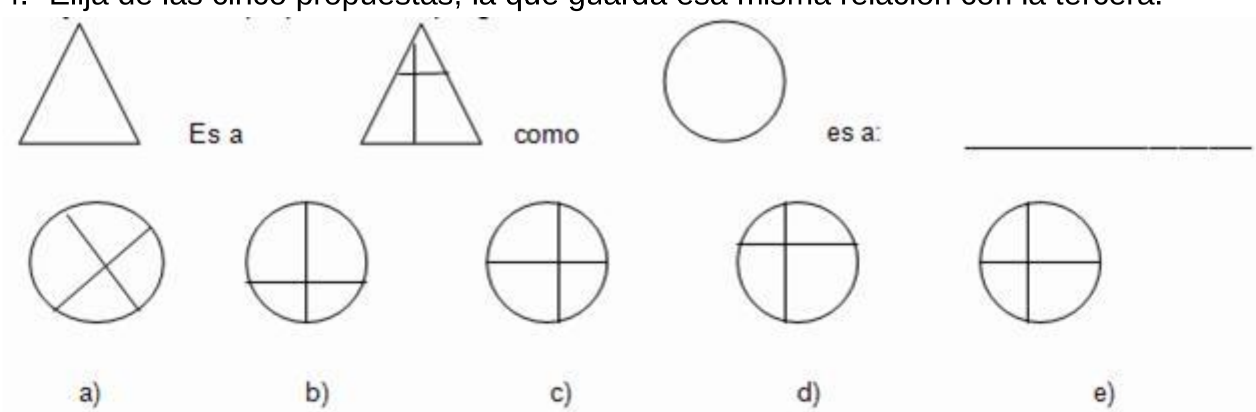
2.-¿Qué triángulo sigue a esta serie?



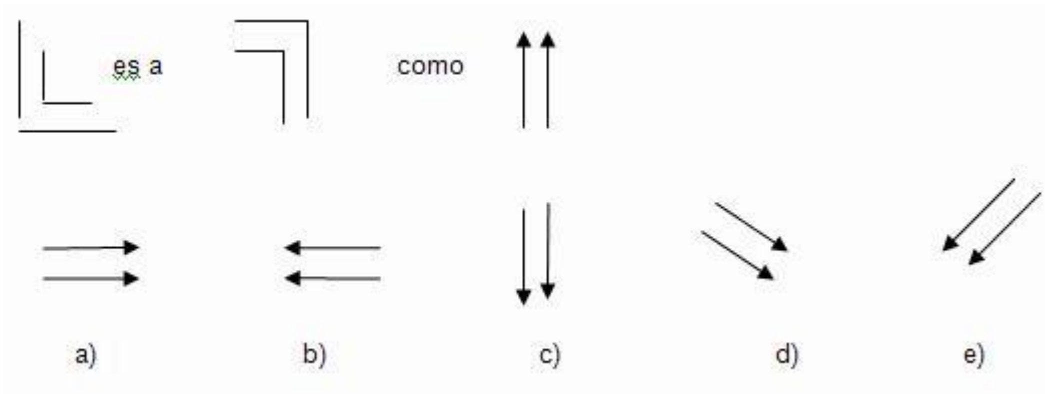
3.- ¿Cuál es la figura siguiente en esta serie?



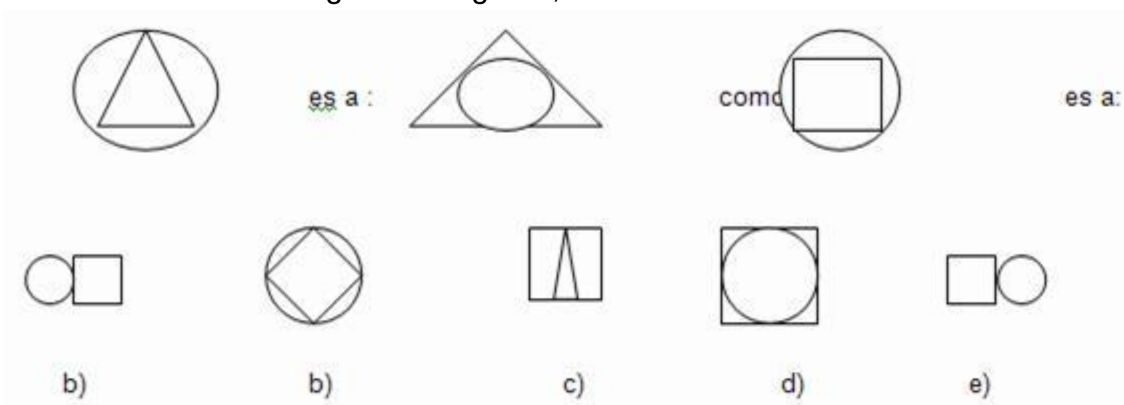
4.- Elija de las cinco propuestas, la que guarda esa misma relación con la tercera.



5.-De la comparación de las figuras, resulta:



6.- Relacionando las siguientes figuras, se obtiene:



3. Imaginación Espacial

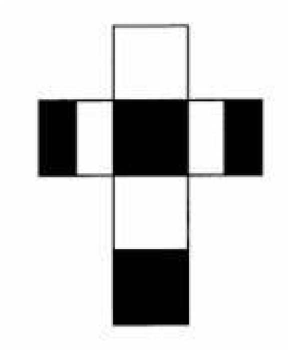
La imaginación espacial permite encontrar la forma de figuras o imágenes desconocidas a partir de algunos datos, empleando a fondo la ***experiencia***, ***lógica*** e ***imaginación.***

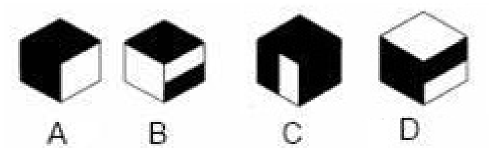
Al igual que en las sucesiones numéricas y series espaciales, la imaginación espacial no depende de muchos conocimientos matemáticos, sino que se desarrolla gradualmente, como resultado de un entrenamiento continuo; es necesario imaginarse bien "desde distintos puntos de vista" los cuerpos y figuras que se plantean en el problema.

La imaginación espacial tiene gran importancia en la resolución de problemas geométricos, ya que es fundamental a la hora de trabajar e imaginarse correctamente el dibujo, examinarlo y explicar todos los casos que se presentan.

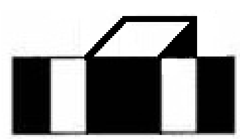
Ejemplo 1.

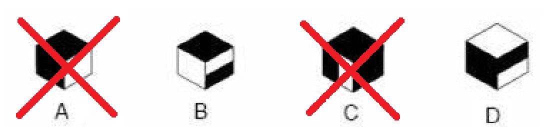
Si se tiene el siguiente cubo desarmado, ¿Cuál imagen mostrara el resultado final al armar el cubo?



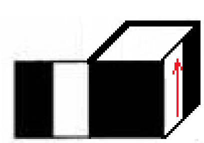


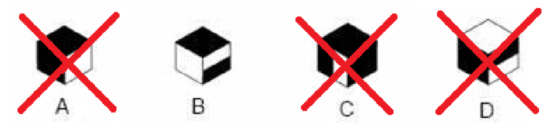
Comenzando a armar el cubo, y en primer lugar, observando que una cara blanca se alterna con una negra en la sección larga del cubo, entonces de inmediato se debe descartar cualquier respuesta que nos muestre 2 caras blancas o 2 caras negras juntas:





Ahora se debe observar que la línea central de la cara bicolor es perpendicular a las caras blancas, por lo que también se elimina la respuesta D.

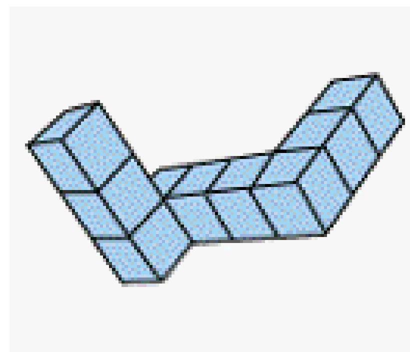


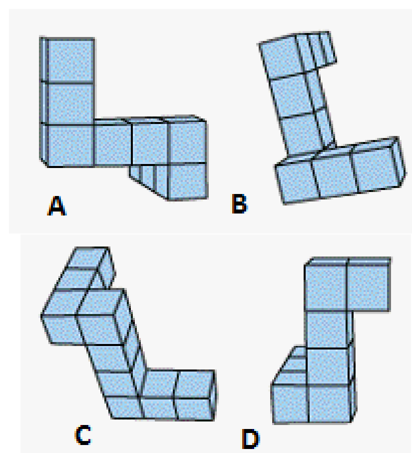


Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción ***B.***

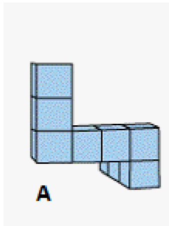
Ejemplo 2

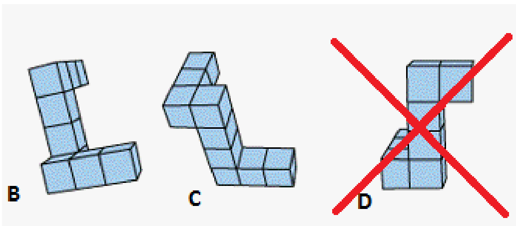
Al girar el siguiente cuerpo, ¿Qué figura tridimensional resulta?



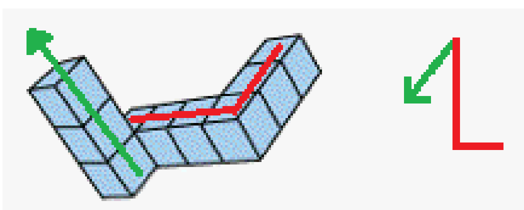


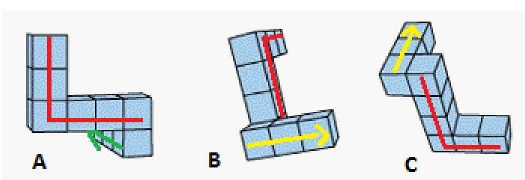
Lo primero que se observa del enunciado, es que solamente habla de un giro y por lo tanto las dimensiones, es decir, el número de cuadritos del cuerpo serán los mismos, por lo que de entrada se elimina la respuesta **D**, ya que una sección reduce de 3 a 2 los cuadritos





Ahora, se observa la sección que forma una "L" y su relación con el tercer segmento de la figura. Si dicha "L" se pusiera de pie, la tercera sección apuntaría hacia el frente. Como en dos incisos **A** y **B** la flecha apunta hacia otro lado, estos automáticamente se eliminan.





Al poder visualizar el cuerpo como dicha "L", se realizan giros hasta encontrar la respuesta correcta. En este caso, es el inciso **A**

Problemas de Razonamiento Matemático

El razonamiento es una facultad del ser humano (aunque no es exclusiva de nosotros) que le permite resolver un problema. Para ello recurre a una serie de procesos mentales que le permiten llegar a una idea, una vez que desarrolla esa idea puede encontrar la solución del problema. Cuando realizamos este proceso decimos que usamos la razón.

Por ejemplo, supongamos que nos hacen este tipo de preguntas:

El número de mi casa es el doble que el de la casa de mi amigo Beto que vive en el mismo lado. Las casas con número pares están del lado izquierdo de la acera y las casas que tienen números impares del lado derecho. ¿De qué lado está mi casa?

A primer momento parecería incluso una pregunta sin sentido, pero si hacemos un pequeño de procesos matemáticos podríamos llegar a lo siguiente:

Si dice que el número de su casa es el doble que la de su amigo, podemos comenzar a imaginar un número comenzando por el 1 para la casa de su amigo, así el doble sería 2. Luego, si fuera el 2 la casa de su amigo, el doble sería 4. Si la casa de su amigo fuera el número 3, el doble sería 6. Podríamos continuar así y llegaríamos a la siguiente conclusión. Si todos los números aunque sean impares, el doble es un número par, entonces la casa debe estar en donde están los números pares, puesto que son vecinos. Así que la respuesta correcta es que la casa está del lado izquierdo de la acera.

Las preguntas de Razonamiento Matemático en el examen al que vas a enfrentarte **sirven** para medir tu habilidad para aplicar las matemáticas en situaciones nuevas y diferentes. Las preguntas miden tu habilidad para procesar, analizar y utilizar información en la Aritmética, el Álgebra y la Geometría”…(1)

Los problemas que se te presentarán por lo general no tienen una única forma de resolverlos y/o plantearlos, para encontrar la solución de algunos podrás utilizar un esquema o dibujo, para otros una fórmula matemática, para otros leyendo el problema se te ocurrirá la solución y muchas veces la encontrarás por ensayo y error.

Esto es porque existen muy variadas formas de plantear y resolver problemas , es decir; cada persona “razona” de una forma diferente,

También existen diversas “técnicas” para resolver problemas. A continuación te planteamos un esquema que puede serte útil a la hora de abordar un problema.

1. Entiende el problema.
   El problema debe ser leído, releído y analizado cuidadosamente, hasta entender completamente ¿Qué es lo que se te está pidiendo?

2. Elabora un plan.
   Ya dijimos que hay muchas formas de atacar un problema, aquí enlistamos varias estrategias:
   Haz un dibujo o diagrama.
   Busca un patrón.
   Elabora una tabla de datos.
   Piensa o recuerda un problema similar más sencillo.
   Piensa si alguna ecuación o fórmula es aplicable y utilízala.
   Si una respuesta parece demasiado obvia o imposible entonces busca una trampa.

3. Realiza tu plan, es decir resuelve el problema

4. Revisa y comprueba.

   Comprueba tu respuesta para ver que es razonable.

Ejemplo:

En una tribu del Amazonas en donde todavía se aplica el trueque como un medio de intercambio de pertenencias se tienen las siguientes equivalencias:

- Un collar y una lanza se cambian por un escudo
- Una lanza se cambia por un collar y un cuchillo
- Dos escudos se cambian por tres cuchillos.
- ¿A cuántos collares equivale una lanza?

1. Entiende el problema.
   Se trata de encontrar un equivalencias, el problema presenta varias pero ninguna es la que se nos pide.

2. Formula un plan

Para simplificar la escritura, tomaremos la siguiente nomenclatura:

1 collar = C
1 lanza = L
1 cuchillo = K
1 escudo = E

De forma que el problema de las equivalencias queda representado así

C + L = E
C + K = L
2E = 3K

3. Realiza tu plan

Como L = C + K entonces multiplicando por 3 "de cada lado" para conservar la igualdad tenemos que:

$$3L = 3C + 3K \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Como:

$$2E = 3K$$

Entonces de (1) podemos obtener

$$3L = 3C + 2E \ldots\ldots\ldots(2)$$

Como:

$$E = L + C \Rightarrow 2E = 2L + 2C$$

Sustituyendo en (2) tenemos que

$$3L = 3C + 2L + 2C$$

De donde:

$$3L = 5C + 2L$$

Si quitamos dos lanzas de ambos lados llegamos a que

L = 5C…por lo que una lanza equivale a 5 collares

4. Comprueba tu respuesta

Si leemos las afirmaciones del problema podemos comprobar que nuestra respuesta es correcta.

Ejemplo 2.-

LA HERENCIA DE LOS CAMELLOS.

Un jefe árabe dejó en herencia 17 camellos para sus tres hijos, de modo que tenían que repartírselos del siguiente modo:

La mitad para el mayor de los tres hijos.

La tercera parte para el mediano.

La novena parte para el más pequeño de los tres.

Ante la imposibilidad de hacer el reparto de los camellos, acudieron al Cadí. Se trataba de un hombre justo, generoso y un buen matemático.

¿Cómo afrontó el Cadí la situación?

Regaló a los tres hermanos un camello de su propiedad, de modo que eran 18 el total de camellos a repartir. Así al mayor de los tres hermanos le correspondió 9 camellos, al mediano, 6 y al pequeño 2. Pero con esto sobró 1 camello, que naturalmente devolvieron al Cadí llenos de agradecimiento y admiración por su sabiduría.

Aquí te presentamos una serie de problemas:

1. Un reloj despertador se adelanta tres minutos cada hora. Si el domingo a las 9 de la noche pongo a tiempo mi reloj y deseo despertarme el lunes a las 7 de la mañana, ¿Qué hora tengo que poner en la alarma para que me despierte a tiempo?

   7:30 b) 6:40 c) 6:30 d) 6:15 e) 7:10

2. Pedro fue a cortar mangos a una huerta. Para salir debe pasar por dos puertas; en cada una de ellas debe dejar un tercio de los mangos que lleve en ese momento. Si Pedro salió con 8 mangos, ¿Cuántos mangos cortó?

   27 b) 72 c) 24 d) 18 e) 32

3. Van tres amigos a tomarse un refresco. Después de tomarlo, al pedir la cuenta, es donde viene el lío:

   −Amigos: Mesero, nos trae la cuenta, por favor.
   −Mesero: Son 30 pesos, caballeros.

Y cada uno de ellos pone 10 pesos.
Cuando el mesero va a poner el dinero en caja, lo ve el jefe y le dice:

−Jefe: No, esos son amigos míos. Cóbrales solo 25 pesos.

Cuando el mesero les regresa el cambio a los amigos, estos deciden darle dos pesos de propina y sólo quedarse con el resto (uno para cada quien).

Si cada uno puso 10 pesos y les devuelven 1 peso a cada uno, entonces realmente cada uno contribuyo con 9 pesos.

Por lo tanto, si añadimos los 2 pesos que se quedó el mesero, tenemos un total de 29 pesos

¿DÓNDE ESTÁ EL OTRO PESO ?

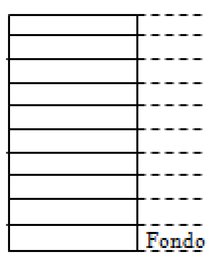
4. Una rana se encuentra en el fondo de un pozo de 10 m de profundidad. Cada día avanza hacia arriba 3 metros, pero cada noche, se desliza hacia abajo dos metros. ¿Cuántos días le llevará a la rana salir del pozo?

En problemas de este estilo suele ser útil hacer un dibujo. Por ejemplo, usa el siguiente dibujo para indicar a qué altura amanece la rana

El segundo día _____

El cuarto día _____

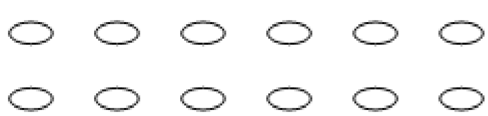
El sexto día _____



Finalmente contesta en cuantos días salió.

5. En una granja hay 12 animales, algunos son conejos y las otras gallinas. Si el total de patas es 38, ¿cuántos son conejos y cuántas gallinas?

Imagina que estos son los 12 cuerpos. Dibújales patas y responde la pregunta

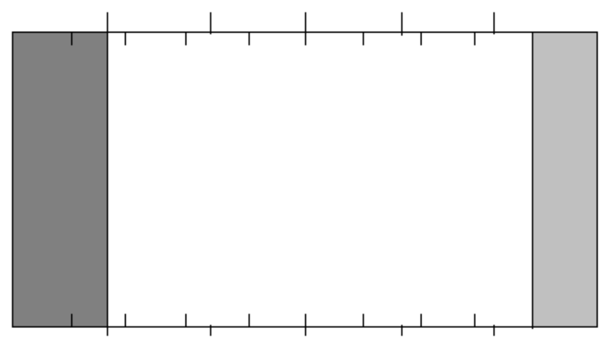


6. Un pintor A puede pintar una pared en 10 minutos. Otro pintor B puede pintar la misma pared en 6 minutos. ¿Cuánto le tomará a ambos pintores hacer el trabajo juntos?

Antes de resolverlo, razona: ¿el número que debes obtener es mayor, menor o igual que 10 minutos?

¿Es mayor, menor o igual que 6 minutos? ¿Por qué?

El siguiente dibujo puede ayudarte a encontrar una solución aproximada al problema:



En un minuto, cada uno de ellos pinta una parte. Escribe sobre la figura siguiente cuál pintor pinta una parte como la gris oscuro y cuál una parte como la gris claro.

Contesta la pregunta.

7. Un niño tiene el mismo número de hermanas que de hermanos, y una de sus hermanas tiene la mitad de hermanas que de hermanos. ¿Cuántos niños hay en la familia? ¿Cuántos son hombres y cuántas mujeres?

8. LOS OCHO PANES.

Cabalgaban, camino a Bagdad, por el desierto dos hombres cuando encontraron a un viejo jeque tumbado en la arena hambriento y sediento. Los hombres ofrecieron un poco de agua al jeque y cuando se había repuesto contó que había sido asaltado por un grupo de enmascarados. El jeque preguntó a los hombres si llevaban alguna cosa para comer, a lo cual el primer hombre contestó que aun le quedaban cinco panes y el segundo contestó que le quedaban tres panes. El jeque propuso que compartieran entre los tres toda esta comida y al llegar a Bagdad les recompensaría con 8 monedas de oro. Así lo hicieron y al llegar a Bagdad al día siguiente se habían comido entre los tres los ocho panes y el jeque les quiso recompensar con 8 monedas, por lo que entregó cinco monedas al primer hombre y tres monedas al segundo. Pero el primer hombre dijo:

El reparto no es correcto. Si yo di cinco panes me tocan 7 monedas y a mi compañero, que solo aportó tres panes, solo le toca 1 moneda!. ¿Por qué dijo esto el primer hombre?

9. Año tras año brota en la superficie de un estanque un hermoso lirio acuático. Cada día duplica su extensión. Al cabo de 21 días llega a cubrir todo el estanque. ¿Cuánto tardó en cubrir la mitad del estanque?

10. Una costurera tiene 20 metros de tela. Cada día tiene que cortar un pedazo de dos metros. Si el primer corte que realizó fue el día 11 de abril, ¿qué día hará el último corte?.

11. Las cinco islas. Las islas lima son uno de los países más pequeños del mundo. En total son cinco islas: Lama, Lema, Lima, Loma y Luma. Las islas están habitadas por 750 pobladores. Aquí hay 6 pistas con las que podrás saber la población de cada isla.

a)La isla menos poblada alberga a un décimo de los habitantes

b)La isla más poblada, Lema, alberga a un tercio

c)La isla menos poblada no es Luma

d) En una de las islas vive un quinto del total de habitantes

e)Loma alberga cien habitantes más que la isla menos poblada

f) En Lima, hay cincuenta habitantes más que en Luma

12. Aquí tienes 4 pedazos de una cadena, cada uno de ellos formado por 3 aros:

Explica cómo puedes unirlos para formar una cadena circular de 12 aros cortando y volviendo a pegar sólo tres aros.

13. El diablo y el campesino.

Iba un campesino quejándose de lo pobre que era, dijo: daría cualquier cosa si alguien me ayudara. De pronto se le aparece el diablo y le propone lo siguiente:

Ves aquel puente, si lo pasas en cualquier dirección tendrás exactamente el doble del dinero que tenías antes de pasarlo. Pero *hay una condición debes tirar al río 24 pesos por cada vez que pases el puente.*

Paso el campesino el puente una vez y contó su dinero, en efecto tenía dos veces más, tiró 24 pesos al río, y paso el puente otra vez y tenía el doble que antes y tiro los 24 pesos, paso el puente por tercera vez y el dinero se duplicó pero resultó que tenía 24 pesos exactos y tuvo que tirarlos al río. Y se quedó sin un peso.

¿Cuánto dinero tenía el campesino al pasar por última vez?

14..Una anciana vende huevos. Una mañana salió de casa un cierto número de huevos. A su primer cliente le vendió la mitad de los huevos que traía más medio huevo. Al segundo cliente le vendió la mitad de los huevos que le quedaban más medio huevo, al tercer cliente le vendió la mitad de los huevos que le quedaban más medio huevo. Después de eso, le quedó un huevo. ¿Cuántos huevos traía?, ¿cuántos tuvo que partir?

Te será útil llenar un cuadro como el siguiente del final hacia arriba:

	Traía	Le vendió	Le quedaron
1er Cliente			
2do. Cliente			
3er. Cliente			

Respuestas a los problemas 8, 9, 10 y 11.

8.- Asumiendo que compartieran los panes a partes iguales, correspondería 8/3 panes a cada uno. El hombre que poseía 5 panes ha contribuido en 5-8/3 = 7/3, mientras que el que poseía 3 panes lo hace en 3-8/3 = 1/3. Por tanto, el primero contribuye 7 veces más que el segundo, con lo cual debe recibir 7 veces más monedas que el segundo

9.- 20 días, pues cada día duplica su extensión

10.- Vamos a pensar…

En 20 metros de tela se pueden obtener 10 pedazos de 2 metros. Si el primer corte es el día 11, ¿el último será? ¿el día 20? ¿el día 21? ¿el día 19?

Sólo hay que ver que para obtener 10 pedazos es necesario hacer sólo 9 cortes, por tanto el último corte será el día 19.

11.- Pregunta clave:

¿Cuál es la más poblada? ¿Y la menos poblada? Resp. 75, 250, 150, 175 y 100