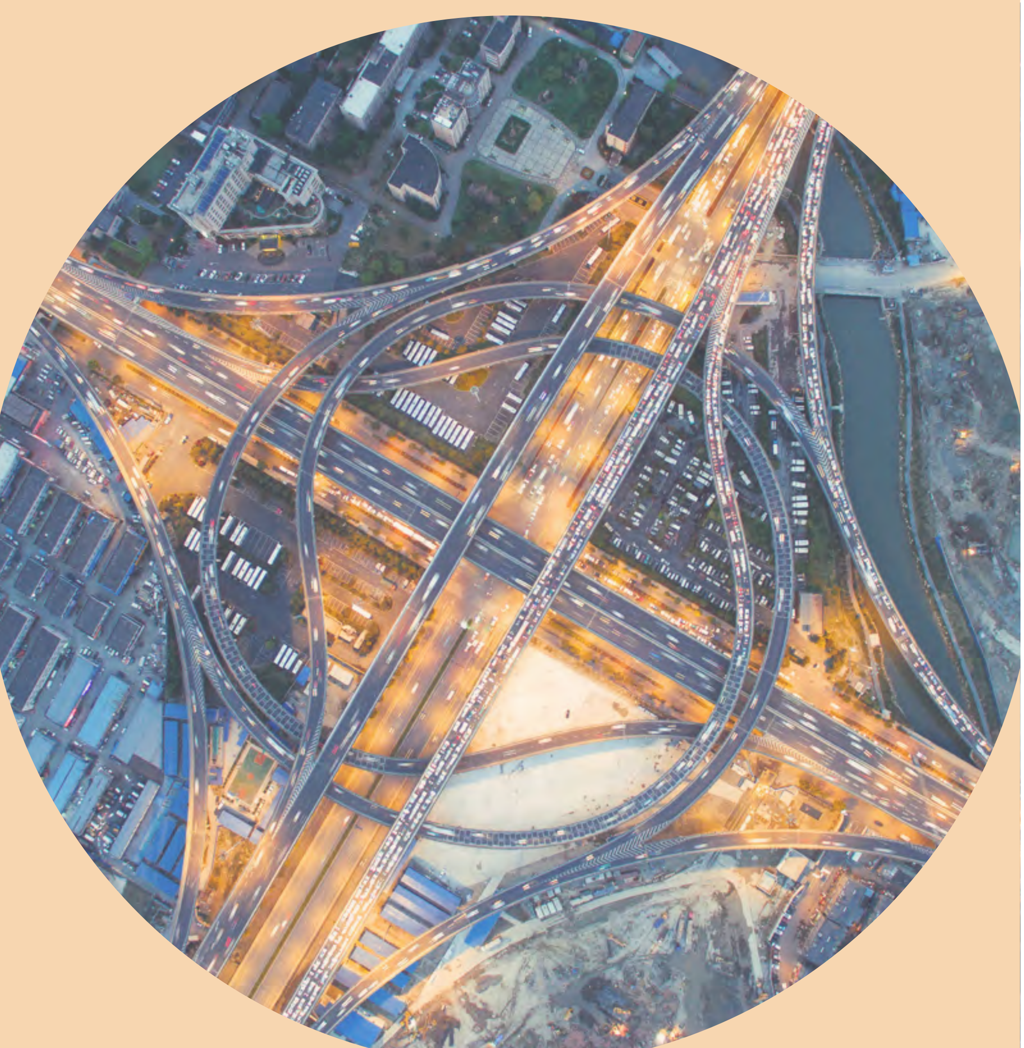
PROGRAMA DE NIVEL AVANZADO

Precálculo

Guía del maestro

PNA CollegeBoard



2020-2021

MISSION STATEMENT

The College Board's mission is to connect students to college success and opportunity. We are a not-for-profit membership organization committed to excellence and equity in education.

About College Board

The College Board is a mission-driven not-for-profit organization that connects students to college success and opportunity. Founded in 1900, the College Board was created to expand access to higher education. Today, the membership association is made up of more than 6,000 of the world's leading educational institutions and is dedicated to promoting excellence and equity in education. Each year, the College Board helps more than seven million students prepare for a successful transition to college through programs and services in college readiness and college success — including the SAT® and the Advanced Placement Program®. The organization also serves the education community through research and advocacy on behalf of students, educators and schools.

For further information, visit **www.collegeboard.org**.

El College Board de Puerto Rico y América Latina (CBPRAL) desarrolla programas y servicios similares a los que se ofrecen en los Estados Unidos, pero especialmente diseñados para poblaciones cuyo vernáculo es el español. Estos programas están dirigidos a sistematizar los procesos de evaluación y admisión universitaria, a fortalecer la orientación académica y personal y a promover la excelencia educativa.

Entre nuestros instrumentos más conocidos se encuentran la PAA™; las Pruebas de Ingreso y Evaluación para el Nivel Secundario (PIENSE™); el Programa de Nivel Avanzado (PNA™); el Inventario CEPA™ (Conoce, Explora, Planifica y Actúa); el English Language Assessment System for Hispanics (ELASH™); las Pruebas de Conocimiento por Área (PC™) y la Prueba de Certificación de Maestros (PCMAS™).

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El Programa de Nivel Avanzado (PNA) se instituyó en 1968 en Puerto Rico. Es una colaboración entre la Oficina de Puerto Rico y América Latina de College Board, el Departamento de Educación de Puerto Rico y las universidades públicas y privadas del país. De esta colaboración también reciben beneficios los colegios y escuelas privadas, además de estudiantes que se preparan independientemente para retar las pruebas.

El PNA tiene actualmente una oferta académica de cuatro cursos: uno de Español, uno de Inglés y dos de Matemáticas. Las universidades participantes en el programa acreditan estos cursos como equivalentes a sus cursos de primer año a los estudiantes cuyo desempeño en las respectivas pruebas sea satisfactorio, de acuerdo con las recomendaciones de College Board y los criterios establecidos por las propias universidades. Esto implica, por ejemplo, que un estudiante que tome tres de estos cursos y califique adecuadamente en las pruebas, puede ser admitido a una universidad habiendo aprobado ya hasta 18 créditos de su carrera universitaria, el equivalente a un semestre de estudios, además de un ahorro significativo en su costo. Por cuanto estos cursos son de nivel universitario, otros grandes beneficios del programa incluyen tener una formación académica más sólida al iniciar sus estudios superiores y un ajuste más fácil a la vida universitaria.

Los dos cursos de matemáticas que se ofrecen son: Precálculo y Matemática General Universitaria. Aunque algunos temas se cubren en ambos cursos, la diferencia en contenido es muy significativa.

El curso de **Precálculo** está dirigido a estudiantes que planifican estudiar Ciencias Naturales (tales como Biología, Física, Geología, Química, etc.), Matemáticas, Ingeniería, Administración de Empresas y Ciencias de Cómputos, cuyos currículos de estudio requieren tomar cursos de Cálculo.

El curso de **Matemática General Universitaria** está dirigido a estudiantes que planifican estudiar las llamadas Artes Liberales, tales como Humanidades, Idiomas, Artes Plásticas, Educación Física, Pedagogía y Ciencias Sociales.

Es posible tomar los dos cursos y, de obtener las calificaciones necesarias en las pruebas correspondientes, recibir crédito universitario por cursos distintos. Esto, sin embargo, en la práctica es muy raro, dado que típicamente las universidades requieren una y no ambas clases como requisito de graduación.

Es importante que los maestros se apeguen al tiempo recomendado para cada tema. Esto asegurará que los temas se cubran con la profundidad necesaria y también ayudará al maestro a distribuir apropiadamente el tiempo de manera que se pueda cubrir todo el material antes de la fecha programada para la prueba.

Selección de estudiantes

El éxito del curso dependerá en gran medida de una selección cuidadosa de estudiantes. Todo estudiante admitido al curso de Precálculo debe haber completado un año de Geometría, de escuela superior, y un curso de Álgebra con Trigonometría, o su equivalente, conforme a la carta circular vigente en el Departamento de Educación de Puerto Rico.

Se recomienda, por lo tanto, que se identifiquen a los posibles candidatos durante los grados intermedios para así estimularlos a ir adquiriendo una buena preparación en matemáticas antes de tomar este curso de Nivel Avanzado.

Selección de maestros

Al igual que en el caso de los estudiantes, la selección de los maestros que habrán de enseñar este curso es de suma importancia. Estos deben ser personas de reconocida habilidad en la enseñanza de las matemáticas y deben haber aprobado satisfactoriamente cursos universitarios de Precálculo y Cálculo Diferencial e Integral con Geometría Analítica. Se recomienda, además, haber tomado un curso de Álgebra Moderna o de Teoría de Números.

Evaluación

Los estudiantes interesados en obtener crédito universitario deben tomar la prueba de Nivel Avanzado de Precálculo que ofrece College Board. La prueba tiene una duración aproximada de dos horas y treinta minutos y consiste de ejercicios de selección múltiple que ofrecen cinco alternativas de entre las cuales se selecciona una. En un folleto aparte aparecen tres ejercicios abiertos en los que el estudiante incluirá todo el procedimiento y el razonamiento necesario para la resolución de los problemas.

El propósito de la prueba es medir el aprovechamiento del estudiante en el curso de Precálculo. Esto implica que deberán proveerse experiencias para que los conceptos aprendidos y las destrezas adquiridas durante el primer semestre se apliquen y se mantengan a lo largo del curso. Aunque la prueba NO PERMITE el uso de calculadora científica, es recomendable que el estudiante se familiarice con su uso para la resolución de problemas.

El maestro, por su parte, debe hacer evaluaciones periódicas y otorgar una nota que forme parte del expediente académico del estudiante como electiva o como requisito de graduación, según sea el caso.

Recomendaciones generales

1. Las clases deben reunirse 5 días a la semana, en períodos regulares de 50 minutos diarios, como mínimo, durante todo el año escolar.
2. El número de estudiantes en cada sección no debe ser mayor de 25.
3. Si una escuela no tiene el maestro debidamente cualificado para enseñar el curso, podría estudiarse la posibilidad de enviar a los estudiantes a otra escuela cercana donde se ofrezca.
4. Debe reducirse en un período la carga normal de trabajo de los maestros que enseñan el curso de nivel avanzado. Esta recomendación obedece al hecho ineludible de que estos maestros tendrán mayores responsabilidades y necesitarán dedicar más tiempo a la preparación de las lecciones, de tal forma que el curso resulte más efectivo.
5. Debe estimularse el mejoramiento profesional y académico de los maestros, ya sea mediante seminarios de verano, programas de adiestramiento en servicio o la asistencia a cursos universitarios.
6. Los supervisores generales deben relacionarse lo más a fondo posible con el curso, de tal forma que puedan supervisarlo mejor y prestar a los maestros la ayuda y orientación pertinentes.
7. Es importante que los maestros sigan el tiempo recomendado para cada tema. Esto asegurará que los temas se cubran con la profundidad necesaria y también ayudará al maestro a distribuir apropiadamente el tiempo, de manera que se pueda cubrir todo el material antes de la fecha programada para la prueba.

EL CURSO DE PRECÁLCULO

El objetivo principal del curso de Precálculo de Nivel Avanzado es el exponer al estudiante a los temas de álgebra, funciones, trigonometría, geometría analítica y otros necesarios para el estudio ulterior del Cálculo. Suponiendo una base sólida en geometría plana y álgebra intermedia, se desarrolla el material básico en torno al concepto de función como tema unificador, destacándose luego las funciones polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, con un balance juicioso entre el aspecto teórico, el aspecto computacional y las aplicaciones a la vida real en cada caso. A continuación se presenta una distribución sugerida de los temas a discutirse en el curso con el número de horas lectivas asignadas por unidad.

- **Unidad 1:** Álgebra .... 19 horas
- **Unidad 2:** Funciones y sus aplicaciones .... 21 horas
- **Unidad 3:** Funciones polinómicas y racionales .... 20 horas
- **Unidad 4:** Funciones exponenciales y logarítmicas .... 14 horas
- **Unidad 5:** Funciones trigonométricas .... 20 horas
- **Unidad 6:** Trigonometría Analítica .... 25 horas
- **Unidad 7:** Sistemas de ecuaciones e inecuaciones .... 15 horas
- **Unidad 8:** Fundamentos de Geometría Analítica .... 8 horas
- **Unidad 9:** Otros temas .... 8 horas
- **Total** .... 150 horas

Sin pretender señalar una aplicación para cada uno de los temas indicados, hacemos algunas observaciones. En Cálculo, aparte de las operaciones fundamentales de esa disciplina, con frecuencia es necesario simplificar expresiones algebraicas o numéricas para obtener un resultado final, escribir expresiones en forma factorizada, resolver desigualdades, algunas con valor absoluto, o utilizar identidades algebraicas o trigonométricas con el fin de desarrollar ciertas fórmulas para completar la solución de algunos tipos de problemas.

Así, por ejemplo, las expresiones equivalentes que aparecen a continuación nos facilitan su uso en el curso de cálculo diferencial e integral.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = x^{-\frac{4}{3}}$$

$$\log x - \log(x+1) = \log \frac{x}{x+1}$$

$$\cos x - \cos^3 x = \cos x \operatorname{sen}^2 x$$

Todas estas destrezas se adquieren a través del curso de Precálculo y, al completarlo, el estudiante debe ser capaz de ponerlas en práctica. También se adquieren otros conocimientos esenciales para tener éxito en el curso de Cálculo. Podríamos mencionar entre ellos los siguientes: resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos o más incógnitas, hallar la ecuación de una recta a partir de ciertas condiciones, trazar con rapidez gráficas de funciones lineales y funciones cuadráticas y calcular sumas de progresiones aritméticas y geométricas.

En resumen, el curso de Precálculo de Nivel Avanzado es una antesala al contenido del curso de Cálculo. Sin embargo, los temas incluidos, cuando se relacionan con el mundo real por medio de aplicaciones cuidadosamente seleccionadas, son tan apropiados para los estudiantes interesados en las ciencias sociales y las ciencias gerenciales como para aquellos cuyo interés principal son las ciencias naturales o la ingeniería.

Bosquejo del curso de Precálculo

Objetivos generales

- **I.** Proveer al estudiante las destrezas básicas de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica que le permitan completar la preparación mínima requerida para que pueda iniciarse en los cursos de Cálculo.
- **II.** Iniciar al estudiante en el uso de las funciones para modelar situaciones reales.
- **III.** Facilitar el desarrollo de buenos hábitos de estudio que permitan a los estudiantes cumplir con el rigor de los cursos de matemáticas de nivel universitario.
- **IV.** Familiarizar al estudiante con el vocabulario y simbolismo matemático que utilizará en sus cursos posteriores de Ciencias, Ingeniería, Administración de Empresas y otras áreas del saber.

Unidad 1: Álgebra (19 horas)

- **I. Objetivos específicos**
  - **A.** Definir valor absoluto
  - **B.** Simplificar expresiones con valor absoluto
  - **C.** Definir la unidad imaginaria i
  - **D.** Definir un número complejo de la forma $a + bi$
  - **E.** Hallar el conjugado de un número complejo
  - **F.** Realizar operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números complejos
  - **G.** Simplificar potencias de i
  - **H.** Simplificar expresiones que envuelven raíces cuadradas de números negativos.
  - **I.** Cambiar un exponente fraccionario en una raíz y viceversa
  - **J.** Aplicar las leyes de exponentes para simplificar expresiones con exponentes racionales
  - **K.** Simplificar radicales
  - **L.** Sumar, restar, multiplicar, dividir y racionalizar radicales
  - **M.** Resolver ecuaciones
    1. lineales
    2. con valor absoluto
    3. con radicales
    4. racionales
  - **N.** Resolver ecuaciones cuadráticas por
    1. factorización
    2. extracción de raíces
    3. completar el cuadrado
    4. fórmula cuadrática
  - **O.** Resolver una ecuación literal para la variable indicada.
  - **P.** Resolver inecuaciones con una sola variable
    1. lineales
    2. con valor absoluto
    3. cuadráticas
    4. racionales
  - **Q.** Expresar el conjunto solución de una inecuación en forma gráfica y en notación de intervalo
- **II. Bosquejo de contenido**
  - **A.** Sistemas numéricos (3 horas)
    1. El conjunto de los números reales y sus propiedades (repaso)
    2. Valor absoluto
    3. Números complejos
       - a. Definición
       - b. Operaciones
       - c. Potencias de i
  - **B.** Exponentes y radicales (3 horas)
    1. Exponentes enteros
    2. Leyes de exponentes
    3. Exponentes racionales
    4. Radicales
       - a. Simplificación
       - b. Operaciones
       - c. Racionalización
  - **C.** Ecuaciones con una sola variable, ecuaciones literales (7 horas)
    1. Lineales
    2. Con valor absoluto
    3. Cuadráticas o reducibles a cuadráticas
       - a. Factorización
       - b. Extracción de raíces
       - c. Fórmula cuadrática
       - d. Completar el cuadrado

4. Con radicales
5. Racionales
6. Literales

D. Inecuaciones con una sola variable (6 horas)
1. Lineales
2. Valor absoluto
3. Cuadráticas
4. Racionales

Unidad 2: Funciones y sus aplicaciones (21 horas)

I. Objetivos específicos

A. Definir plano

B. Localizar puntos en el plano

C. Definir relación

D. Trazar la gráfica de una relación

E. Dada una relación, determinar la simetría con respecto al origen y a un eje en el plano

F. Dada una relación, determinar los interceptos en los ejes del plano

G. Dados dos puntos en el plano, hallar la distancia entre ellos

H. Resolver problemas de aplicación de distancia

I. Definir punto medio de un segmento en el plano

J. Dados dos puntos en el plano, hallar el punto medio entre ellos

K. Resolver problemas de aplicación de punto medio

L. Definir lo que es círculo

M. Dados el centro y el radio, determinar la ecuación estándar del círculo

N. Dada la ecuación del círculo en forma estándar $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, determinar el centro y el radio

O. Dada la ecuación general de un círculo, representarla en la forma estándar

P. Definir función

Q. Representar una función en forma de tabla, gráfica, fórmula y verbal

R. Dada una relación en una de sus diferentes representaciones, determinar si es función o no

S. Representar una función utilizando la notación $f(x)$

T. Evaluar una función dada en cualquiera de sus representaciones

U. Determinar el dominio y el campo de valores (alcance) de una función dada, en cualquiera de sus representaciones

V. Dada la gráfica de una función, determinar
1. simetría
2. dónde es creciente o decreciente
3. si es par o impar
4. sus interceptos en los ejes

W. Utilizar las técnicas de traslaciones de gráficas para transformar las gráficas de funciones especiales:
1. $f(x) = |x|$
2. $f(x) = \sqrt{x}$
3. $f(x) = x$
4. $f(x) = x^2$
5. $f(x) = x^3$

X. Trazar gráficas de funciones definidas por pedazos

Y. Para dos funciones f y g definir: $f + g,\ f - g, f \cdot g,\ f/g$

Z. Efectuar operaciones con las funciones $f + g,\ f - g, f \cdot g,\ f/g$ en sus diferentes representaciones

AA. Determinar el dominio de $f + g,\ f - g,\ f \cdot g,\ f/g$

AB. Definir composición de funciones

AC. Componer dos o más funciones en cualquiera de sus representaciones

AD. Determinar el dominio de una composición de funciones en cualquiera de sus representaciones

AE. Determinar si una función es uno a uno en cualquiera de sus representaciones

AF. Definir la inversa de una función

AG. Dada una función invertible en cualquiera de sus representaciones, determinar la inversa

II. Bosquejo de contenido

A. El plano cartesiano (4 horas)
1. Definiciones, gráficas de relaciones y simetría
2. Distancia y punto medio
3. Círculos

B. Funciones en general (17 horas)
   1. Definiciones y conceptos generales
      a. Notación
      b. Métodos de representar una función
   2. Evaluación
   3. Dominio y campo de valores (alcance)
   4. Gráficas y traslaciones en el plano
      a. Creciente, decreciente
      b. Par o impar
      c. Interceptos en los ejes
      d. Gráficas de funciones especiales y sus traslaciones
      e. Funciones definidas por pedazos
   5. Álgebra y composición de funciones
   6. Funciones inversas

Unidad 3: Funciones polinómicas y racionales (20 horas)

I. **Objetivos específicos**

A. Definir pendiente de una recta no vertical
B. Hallar la pendiente de una recta dados dos puntos
C. Escribir la ecuación de una recta dados un punto y la pendiente
D. Escribir la ecuación de una recta horizontal y de una vertical
E. Cambiar la ecuación de una recta a la forma general
F. Definir rectas paralelas y rectas perpendiculares
G. Determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares
H. Escribir la ecuación de una recta dados un punto y la ecuación de otra recta paralela o perpendicular a esta
I. Definir la función lineal
J. Resolver problemas de aplicación que se puedan modelar con una función lineal
K. Definir función cuadrática
L. Dada la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, cambiarla a la forma $y = a(x - h)^2 + k$
M. Dada una función cuadrática
   1. Determinar el vértice y tipo de concavidad
   2. Determinar el intercepto en el eje de y
   3. Hallar los interceptos en el eje de x (si los hay)
   4. Trazar la gráfica, evaluando puntos adicionales si es necesario
N. Resolver problemas verbales de máximos y mínimos y de caída libre que se puedan modelar por medio de una función cuadrática
O. Definir función polinómica
P. Reconocer una función polinómica dada la ecuación
Q. Trazar gráficas de funciones polinómicas de la forma $f(x) = a(x - h)^n + k$
R. Dada una función polinómica, usar división sintética y el teorema del residuo para hallar $f(c)$
S. Dada una función polinómica de grado $n > 2$, usar división sintética y el teorema del factor para determinar si $x - c$ es un factor del polinomio
T. Hallar todos los ceros racionales de un polinomio utilizando el teorema de los ceros racionales
U. Expresar un polinomio de grado $n > 2$ como producto de factores lineales o cuadráticos irreducibles
V. Dado un polinomio como producto de factores lineales o cuadráticos irreducibles, determinar
   1. los ceros reales del polinomio y su multiplicidad
   2. los interceptos en el eje de x
   3. dónde la gráfica cruza o solo toca el eje de x
   4. los intervalos donde f asume valores positivos o negativos
W. Construir un polinomio dados sus ceros.
X. Definir función racional
Y. Hallar el dominio y campo de valores de una función racional
Z. Determinar asíntotas horizontales y verticales de una función racional
AA. Determinar los interceptos en los ejes de una función racional
AB. Trazar la gráfica de una función racional

II. Bosquejo de contenido

A. Funciones lineales (7 horas)
   1. Ecuaciones de la recta
   2. Gráficas (pendiente e interceptos en los ejes)
   3. Rectas paralelas y perpendiculares
   4. Definición de una función lineal
   5. Problemas de aplicación

B. Funciones cuadráticas (5 horas)
   1. Definición
   2. Gráfica (vértice, concavidad)
   3. Interceptos en los ejes
   4. Aplicaciones incluyendo máximos y mínimos

C. Funciones polinómicas de grado mayor que 2 (5 horas)
   1. Definición y grado
   2. División sintética
   3. Teorema del residuo
   4. Teorema del factor
   5. Ceros (con énfasis en ceros racionales y teorema fundamental del álgebra)
   6. Gráficas

D. Funciones racionales (3 horas)
   1. Definición
   2. Dominio y campo de valores (alcance)
   3. Asíntotas e interceptos en los ejes
   4. Gráficas

Unidad 4: Funciones exponenciales y logarítmicas (14 horas)

I. Objetivos específicos

A. Definir la función exponencial $f(x) = b^x$

B. Aplicar las características principales de la función exponencial en la resolución de problemas
   1. Dominio y campo de valores (alcance)
   2. Interceptos en los ejes
   3. Crecimiento y decrecimiento
   4. Asíntota

C. Reconocer y trazar las gráficas de las funciones exponenciales

D. Definir la función logarítimica

E. Aplicar en la resolución de problemas las características principales de la función logarítmica:
   1. Dominio y campo de valores (alcance)
   2. Interceptos en los ejes
   3. Crecimiento y decrecimiento
   4. Asíntota

F. Reconocer y trazar las gráficas de las funciones logarítmicas

G. Aplicar las propiedades de logaritmos para
   1. evaluar logaritmos
   2. expresar un logaritmo como una suma o diferencia de múltiples logaritmos y viceversa

H. Resolver ecuaciones exponenciales

I. Resolver ecuaciones logarítmicas

J. Resolver problemas de aplicación que se puedan modelar por medio de una función exponencial o logarítmica

II. Bosquejo de contenido

A. Funciones exponenciales (5 horas)
   1. Definición, evaluación, dominio y campo de valores
   2. Gráficas
   3. Ecuaciones exponenciales
   4. Aplicaciones

B. Funciones logarítmicas (9 horas)
   1. Definición, dominio, campo de valores y evaluación
   2. Gráficas
   3. Propiedades
   4. Ecuaciones logarítmicas
   5. Aplicaciones

Unidad 5: Funciones trigonométricas (20 horas)

I. Objetivos específicos

A. Definir ángulo

B. Clasificar ángulos según sus medidas

C. Cambiar de grados a radianes y viceversa

D. Calcular la longitud de un arco

E. Calcular el área de un sector circular

F. Definir las funciones trigonométricas de ángulos agudos en un triángulo rectángulo

G. Conocer y aplicar las identidades trigonométricas fundamentales

H. Resolver triángulos rectángulos

I. Resolver problemas de aplicación de triángulos rectángulos
J. Definir ángulos
  1. en posición estándar
  2. cuadrantales
  3. coterminales
  4. de referencia
K. Dado un ángulo en el plano, hallar
  1. ángulos coterminales
  2. su ángulo de referencia
L. Definir las funciones trigonométricas para un ángulo en el plano en términos de x, y y r
M. Determinar el valor exacto de las funciones trigonométricas de ángulos especiales
N. Definir el círculo unitario
O. Definir las funciones trigonométricas de números reales
P. Evaluar las funciones trigonométricas para un número real dado
Q. Definir amplitud, período y cambio de fase de una función trigonométrica
R. Reconocer las características principales de cada una de las funciones trigonométricas
  1. Dominio y campo de valores (alcance)
  2. Interceptos en los ejes
  3. Valores máximos y valores mínimos
  4. Intervalos donde es creciente o decreciente
S. Trazar gráficas de funciones trigonométricas

II. **Bosquejo de contenido**
A. Funciones trigonométricas de números reales (12 horas)
  1. El círculo unitario
  2. Definición de funciones trigonométricas de números reales
  3. Identidades básicas
  4. Gráficas
B. Funciones trigonométricas de ángulos (8 horas)
  1. Ángulos y sus medidas
  2. Funciones trigonométricas de ángulos agudos
  3. Aplicaciones al triángulo rectángulo
  4. Ángulos
    a. en posición estándar
    b. coterminales
    c. cuadrantales
    d. de referencia
  5. Funciones trigonométricas para cualquier ángulo

Unidad 6: Trigonometría Analítica
(25 horas)

I. **Objetivos específicos**
A. Simplificar expresiones trigonométricas
B. Verificar identidades trigonométricas
C. Aplicar las fórmulas de:
  1. suma y diferencia de ángulos
  2. doble ángulo
  3. medio ángulo
D. Definir las funciones trigonométricas inversas de seno, coseno y tangente, y
  1. determinar el dominio y campo de valores
  2. trazar las gráficas
E. Evaluar funciones trigonométricas inversas
F. Resolver ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0, 2\pi]$
G. Hallar la solución general de una ecuación trigonométrica
H. Definir la ley de senos
I. Resolver triángulos oblicuángulos usando la ley de senos (discutir el caso ambiguo)
J. Resolver problemas de aplicación usando la ley de senos
K. Definir la ley de cosenos
L. Resolver triángulos oblicuángulos usando la ley de cosenos
M. Resolver problemas de aplicación usando la ley de cosenos

II. **Bosquejo de contenido**
A. Identidades trigonométricas (3 horas)
B. Fórmulas de suma, diferencia, doble ángulo y medio ángulo (3 horas)
C. Funciones trigonométricas inversas de seno, coseno y tangente (5 horas)
D. Ecuaciones trigonométricas (6 horas)
E. Leyes de seno y coseno y sus aplicaciones (8 horas)

Unidad 7: Sistemas de ecuaciones e inecuaciones (15 horas)

I. Objetivos específicos

A. Resolver sistemas de ecuaciones lineales en dos y tres variables usando
   1. Método gráfico
   2. Método de sustitución
   3. Método de eliminación

B. Determinar si un sistema de ecuaciones lineales es consistente, inconsistente o consistente dependiente y determinar el número de soluciones

C. Definir lo que es una matriz

D. Determinar el tamaño de una matriz

E. Determinar los elementos a_{ij} en una matriz

F. Determinar las condiciones necesarias para que dos matrices sean iguales

G. Realizar operaciones básicas con matrices
   1. Suma y resta
   2. Multiplicación escalar
   3. Multiplicación de matrices

H. Escribir la matriz de coeficientes y la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales

I. Utilizar operaciones fundamentales sobre filas para reducir una matriz al sistema escalonado

J. Resolver un sistema de ecuaciones lineales reduciendo la matriz aumentada

K. Definir el determinante de una matriz cuadrada

L. Hallar el determinante de una matriz

M. Resolver sistemas de ecuaciones lineales 2×2 y 3×3 usando la regla de Cramer

N. Resolver sistemas de ecuaciones no lineales usando
   1. Método gráfico
   2. Método de sustitución
   3. Método de eliminación

O. Resolver sistemas de inecuaciones lineales en dos variables por el método gráfico

P. Utilizar el método gráfico para resolver problemas de aplicación modelados por un sistema de inecuaciones lineales en dos variables

II. Bosquejo de contenido

A. Sistemas de ecuaciones lineales (8 horas)
   1. Métodos gráfico y algebraico
   2. Método de reducción de matrices
   3. Determinantes
   4. Regla de Cramer
   5. Aplicaciones

B. Sistemas de ecuaciones NO lineales (4 horas)
   1. Método gráfico
   2. Método de sustitución
   3. Método de eliminación

C. Sistemas de inecuaciones lineales (3 horas)
   1. Gráficas
   2. Aplicaciones

Unidad 8: Fundamentos de Geometría Analítica (8 horas)

I. Objetivos específicos

A. Definir geométricamente la parábola

B. Dada la ecuación de una parábola, determinar
   1. el vértice
   2. el foco
   3. la directriz
   4. la gráfica

C. Determinar la ecuación de una parábola
   1. dada la gráfica
   2. que cumpla con unas condiciones dadas

D. Definir geométricamente una elipse

E. Dada la ecuación de la elipse, determinar
   1. los vértices
   2. el eje mayor
   3. el eje menor
   4. los focos
   5. la gráfica

F. Determinar la ecuación de una elipse
   1. dada la gráfica
   2. que cumpla con unas condiciones dadas

G. Definir geométricamente una hipérbola

H. Dada la ecuación de una hipérbola, determinar
   1. los vértices

2. el eje transversal y el eje conjugado
3. las asíntotas
4. los focos
5. la gráfica

I. Determinar la ecuación de una hipérbola
1. dada la gráfica
2. que cumpla con unas condiciones dadas

II. Bosquejo de contenido

A. Secciones cónicas con traslaciones de ejes paralelos a los ejes coordenados (8 horas)
1. Parábola
2. Elipse
3. Hipérbola

Unidad 9: Otros temas (8 horas)

I. Objetivos específicos

A. Definir sucesión

B. Utilizar correctamente la notación de sucesión

C. Dada la fórmula de una sucesión, determinar el enésimo término

D. Utilizar la notación de sumatoria para representar la suma de los términos de una sucesión

E. Utilizar las propiedades básicas para evaluar una sumatoria

F. Definir sucesión aritmética

G. Utilizar las propiedades de una sucesión aritmética para
1. determinar el enésimo término de la sucesión
2. determinar la suma de los primeros términos de la sucesión
3. resolver problemas de aplicación

H. Definir sucesión geométrica

I. Utilizar las propiedades de una sucesión geométrica para
1. determinar el enésimo término de la sucesión
2. determinar la suma de los primeros términos de la sucesión
3. resolver problemas de aplicación

J. *Definir el sistema de coordenadas polares

K. *Localizar puntos en un sistema de coordenadas polares

L. *Convertir de coordenadas polares a coordenadas cartesianas (rectangulares)

M. *Trazar la gráfica de una ecuación polar

N. *Definir la forma trigonométrica de un número complejo

O. *Escribir un número complejo en forma trigonométrica

P. *Determinar el producto y el cociente de dos números complejos en forma trigonométrica

Q. *Definir el teorema de De Moivre

R. *Determinar potencias de números complejos en forma trigonométrica aplicando el teorema de De Moivre

S. *Aplicar el teorema de las raíces enésimas de un número complejo

II. Bosquejo de contenido

A. Sucesiones y series (8 horas) (Requisito)
1. Definición y conceptos generales
2. Sumatorias
3. Sucesiones aritméticas y geométricas

B. *Coordenadas polares (5 horas)

C. *Forma trigonométrica de números complejos (5 horas)
1. Definición
2. Operaciones
3. Potencias
4. Raíces

*Temas opcionales

BIBLIOGRAFÍA

A continuación, se citan fuentes de referencia que pueden ser consultadas por los profesores y estudiantes durante el estudio de algunas unidades o temas:

*Barnett, Raymond, Michael Ziegler y Karl Byleen. *Precálculo: Funciones y Gráficas*. McGraw-Hill. 2005. 5ª ed.

Bittinger, Marvin, Judith Beecher, David Ellenbogen y Judith Penna. *College Algebra: Graphs and Models*. Pearson. 2012. 5ª ed.

Blitzer, Robert. *Precalculus*. Pearson. 2013. 5ª ed.

Connally, Eric, Deborah Hughes-Hallett y Andrew Gleason. *Functions Modeling Change: A Preparation for Calculus*. Wiley. 2014. 5ª ed.

Demana, Frank, Bert Waits, Gregory Foley y Daniel Kennedy. *Precalculus: Graphical, Numerical, Algebraic*. Addison Wesley. 2010. 8ª ed.

Dugopolski, Mark. *Precalculus: Functions and Graphs*. Pearson. 2012. 4ª ed.

Holder, Leonard Irvin. *A Primer for Calculus*. Wadsworth. 1993. 6ª ed.

Larson, Ron. *Precalculus*. Cengage Learning. 2013. 9ª ed.

Lial, Margaret, John Hornsby, David Schneider y Callie Daniels. *Precalculus*. Pearson. 2012. 5ª ed.

Martínez-Planell, Rafael, Eliseo Cruz, Nilsa Toro y Pedro Vásquez. *Precálculo*. Universidad de Puerto Rico – Mayagüez. 2014.

Martínez-Planell, Rafael, Daniel McGee, Deborah Moore-Russo, Yuri Rojas y Keith Wayland. *Precalculus for Science and Engineering*. Wiley. 2005.

*Stewart, James, Lothar Redlin y Saleem Watson. *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo*. Cengage Learning. 2017. 7ª ed.

Sullivan, Michael. *Precalculus*. Pearson. 2011. 9ª ed.

Swokowski, Earl & Jeffery Cole. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Cengage Learning. 2011. 13ª ed.

*Se puede utilizar cualquiera de estos libros como texto.

LA PRUEBA DE PRECÁLCULO

Descripción

La prueba de Precálculo de Nivel Avanzado tiene una duración de aproximadamente dos horas y treinta minutos. Esta provee a los candidatos la oportunidad para que apliquen los conceptos aprendidos y las destrezas adquiridas en la solución de ejercicios y problemas relacionados con los temas del curso. Como la prueba pretende evaluar tanto a los estudiantes que se han preparado por diversos medios como a los que han tomado cursos avanzados en distintas escuelas o colegios, su contenido no es representativo del curso de ninguna universidad en particular.

La prueba contiene ejercicios de selección múltiple que consisten en una premisa o pregunta seguida de cinco (5) alternativas para seleccionar la respuesta correcta. Además, incluye ejercicios con un formato distinto. En estos se planteará un problema o pregunta, pero NO tendrá alternativas para seleccionar la respuesta. El estudiante tendrá que elaborar su respuesta y escribir todo el procedimiento que la justifique. Los ejercicios abiertos se encuentran en un folleto aparte y el estudiante tendrá veinte (20) minutos para contestarlos. En cada uno deberá demostrar todo el procedimiento que conduce a la solución del problema. En estos ejercicios, a diferencia de los de selección múltiple, se evalúa el procedimiento y el resultado, y se ofrece puntuación de acuerdo con su ejecución. Se utiliza una escala de 1 a 6 puntos, para realizar el cómputo de la puntuación total para cada ejercicio. **Si un examinando deja algún ejercicio en blanco se le asigna la puntuación cero en ese ejercicio, pero si deja todos los ejercicios en blanco se invalidará toda la prueba.**

En general, los problemas son de diferentes categorías: los que solo requieren que el estudiante recuerde una definición o un dato, los que presuponen la aplicación de ideas, principios o métodos a situaciones nuevas y los que implican el análisis y la evaluación de información dada. En esta guía se presentan algunos ejemplos de ejercicios para ayudar al candidato en su preparación para tomar la prueba.

En esta prueba NO se permite el uso de calculadora alguna.

Las áreas que se cubren en la prueba son Álgebra, Funciones, Trigonometría, Sistemas de ecuaciones e inecuaciones, Fundamentos de Geometría Analítica y Sucesiones. Los candidatos que obtengan calificaciones meritorias en esta prueba están capacitados para iniciar el curso universitario de Cálculo.

A continuación, se presenta la distribución por área de contenido y peso aproximado (en porcentaje) de la prueba.

En esta prueba NO se permite el uso de calculadora alguna.

Área de contenido de la prueba	Pesos aproximados en la prueba
Álgebra	13 %
Funciones y sus aplicaciones	14 %
Funciones polinómicas y racionales	13 %
Funciones exponenciales y logarítmicas	10 %
Funciones trigonométricas	13 %
Trigonometría Analítica	17 %
Sistemas de ecuaciones e inecuaciones	10 %
Fundamentos de Geometría Analítica	5 %
Sucesiones y series	5 %
Temas opcionales	0 %
TOTAL	100 %

Ejemplos de ejercicios de selección múltiple

Los ejercicios que aparecen a continuación dan una idea de los tipos de preguntas que se incluyen en la prueba, pero no representan la totalidad de su contenido. El candidato debe trabajar dichos ejercicios y referirse luego a la clave de respuestas y a las soluciones detalladas que se encuentran al final de cada uno.

1

¿Cuántos litros de una solución salina al 40 % de sal deben añadirse a 3 litros de otra solución al 15 % de sal para obtener una solución al 25 % de sal?

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

Solución:

Sea x el número de litros de solución salina al 40 % de sal. Para obtener la cantidad de litros de sal en esta solución, multiplicamos la concentración por la cantidad de litros, es decir, $.40x$ litros.

De igual manera, la cantidad de litros de sal en la otra solución es $.15(3) = .45$ litros.

La cantidad de litros de sal en la solución resultante es el valor de x que satisface la siguiente ecuación:
$.40x + .45 = .25(x + 3)$

Multiplicamos por 100, simplificamos y despejamos para x.

$40x + 45 = 25\,(x + 3)$
$40x + 45 = 25x + 75$
$15x = 30$
$x = 2$

La opción correcta es la (B).

2

Determine para qué valores de x la distancia entre los puntos $A(x, 5)$ y $B(-3, x)$ es MENOR que $\sqrt{40}$.

A) $x > 0$

B) $x < -3$ o $x > 1$

C) $-3 < x < 1$

D) $-1 < x < 3$

E) $x < -1$ o $x > 3$

Solución:

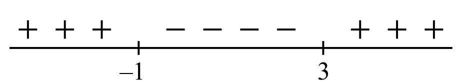
Recuerde que la fórmula de distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ está dada por

$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Entonces, $\sqrt{(-3 - x)^2 + (x - 5)^2} < \sqrt{40}$.

Al cuadrar ambos lados, expandir y simplificar, obtenemos:
$(9 + 6x + x^2) + (x^2 - 10x + 25) < 40$
$2x^2 - 4x + 34 - 40 < 0$
$2x^2 - 4x - 6 < 0$
$x^2 - 2x - 3 < 0$

Para resolver esta inecuación, primero resolvemos la ecuación cuadrática:
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x - 3)(x + 1) = 0$
$x = 3$ o $x = -1$



$-1 < x < 3$

La opción correcta es la (D).

3

Si el punto $(2, -1)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, ¿cuál de los siguientes puntos pertenece a la gráfica de la función $y = -f(x - 3) + 5$?

A) $(4, 6)$

B) $(5, 6)$

C) $(-5, 4)$

D) $(5, -4)$

E) $(-1, 6)$

Solución:

Note que la nueva función es una transformación de f. Primero sucede una traslación horizontal de tres unidades a la derecha que lleva el punto $(2, -1)$ a $(5, -1)$. Luego ocurre una reflexión con respecto al eje de x, que lleva el punto $(5, -1)$ a $(5, 1)$. Finalmente, hay una traslación vertical de 5 unidades hacia arriba, que lleva el punto $(5, 1)$ a $(5, 6)$.

Una solución alterna es la siguiente:
como $f(2) = -1$, entonces, cuando $x = 5$
$y = -f(5 - 3) + 5 = -f(2) + 5 = -(-1) + 5 = 6$.

La opción correcta es la (B).

4

¿Cuáles son las asíntotas verticales de la gráfica de la función dada por $f(x) = \dfrac{x+2}{2x^2 - 8}$?

A) No tiene asíntotas verticales.

B) $x = -2$

C) $x = 2$

D) $x = 2, x = -2$

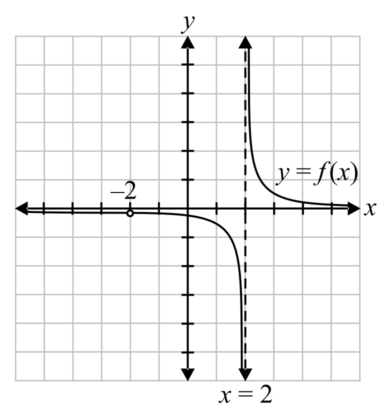
E) $x = 4, x = -4$

Solución:

Si a es número real, la línea $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una función racional $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ si $Q(a) = 0$ pero $P(a) \neq 0$, es decir, la asíntota vertical ocurre cuando el denominador es igual a 0 en $x = a$, pero el numerador no lo es.

Al simplificar $f(x) = \dfrac{x+2}{2(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{2(x-2)}$, tengamos en cuenta que para $x = 2$ solo el denominador es cero, mientras que para $x = -2$ el numerador y el denominador de la función original son iguales a cero.

Según la definición, la gráfica de la función tiene una única asíntota vertical en $x = 2$, como se muestra a continuación.



Se puede observar en la gráfica que la función no está definida para $x = -2$, pero no existe una asíntota vertical en ese valor.

La opción correcta es la (C).

5

¿Cuál es el número de soluciones de la ecuación $\log_2 x + \log_2 (x-2) = 3$?

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

Solución:

Al aplicar las propiedades de logaritmos a la ecuación $\log_2 x + \log_2 (x-2) = 3$, obtenemos

$\log_2 x(x-2) = 3$

$2^3 = x(x-2)$

$8 = x^2 - 2x$

$0 = x^2 - 2x - 8$

$0 = (x-4)(x+2)$

$x = 4,\ x = -2$

Al verificar las raíces de la ecuación cuadrática en la ecuación logarítmica original, hallamos que $x = -2$ no es una solución, ya que no se halla en el dominio de $\log_2 x$.

La opción correcta es la (B).

6

Determine la medida del ángulo MAYOR de un triángulo cuyos lados miden 2, 3 y 4 unidades.

A) $\cos^{-1}\left(\frac{11}{16}\right)$

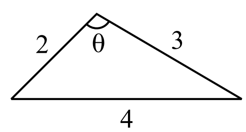
B) $\cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right)$

C) $\cos^{-1}\left(-\frac{7}{8}\right)$

D) $\cos^{-1}\left(-\frac{11}{16}\right)$

E) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$

Solución:



En un triángulo, el ángulo mayor es el ángulo opuesto al lado mayor. Por lo tanto, según se muestra en la figura, en este caso, θ es el ángulo mayor.

Utilizamos la ley de cosenos $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

y sustituimos los valores $a = 2$, $b = 3$ y $c = 4$ para obtener

$4^2 = 2^2 + 3^2 - 2(2)(3)\cos\theta$

$16 = 4 + 9 - 12\cos\theta$

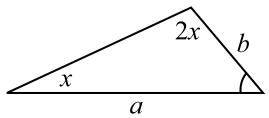
$12\cos\theta = -3$

$\cos\theta = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$

$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$

La opción correcta es la (E).

7



En el triángulo de la figura anterior, ¿cuál es el valor de $\cos x$?

A) $\frac{a}{b}$

B) $\frac{b}{a}$

C) $\frac{a}{2b}$

D) $\frac{b}{2a}$

E) $\frac{2a}{b}$

Solución:

Utilizamos la ley de senos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{b} = \frac{\operatorname{sen} 2x}{a}$$

de la que se obtiene

$a \operatorname{sen} x = b \operatorname{sen} 2x$.

Luego, usamos la fórmula de doble ángulo para $\operatorname{sen} 2x$, y resolvemos la ecuación.

$a \operatorname{sen} x = b(2 \operatorname{sen} x \cos x)$

$a \operatorname{sen} x - 2b \operatorname{sen} x \cos x = 0$

$\operatorname{sen} x(a - 2b \cos x) = 0$

Dado que x es un ángulo agudo sabemos que $\operatorname{sen} x \neq 0$.
Por lo tanto

$a - 2b \cos x = 0$

$a = 2b \cos x$

$\frac{a}{2b} = \cos x$

La opción correcta es la (C).

8

$$A = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ y & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & z \\ 2y & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Halle los valores de las variables en las matrices anteriores si $3A - 2B + C = 2A$.

A) $x = \frac{9}{4},\ y = 1,\ z = 2$

B) $x = -\frac{9}{4},\ y = \frac{2}{3},\ z = 2$

C) $x = \frac{9}{4},\ y = 1,\ z = -2$

D) $x = -\frac{9}{2},\ y = \frac{2}{3},\ z = 2$

E) $x = \frac{9}{2},\ y = \frac{2}{3},\ z = 2$

Solución:

$$3A = \begin{bmatrix} 6x & 3 \\ 3y & 9 \end{bmatrix}$$

$$2B = \begin{bmatrix} -4 & 2z \\ 4y & 8 \end{bmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{bmatrix} 6x + 4 & 3 - 2z \\ -y & 1 \end{bmatrix}$$

$$3A - 2B + C = \begin{bmatrix} 6x + 9 & 6 - 2z \\ 2 - y & 6 \end{bmatrix}.$$

Igualando a $2A$, obtenemos que

$$\begin{aligned} 6x + 9 &= 4x \\ 2x &= -9 \\ x &= -\frac{9}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 6 - 2z &= 2 \\ 4 &= 2z \\ 2 &= z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2 - y &= 2y \\ 2 &= 3y \\ \frac{2}{3} &= y \end{aligned}$$

La opción correcta es la (D).

Pasar a la próxima página para ver otra solución posible para el ejercicio 8.

Otra solución posible para el ejercicio 8 es:

$3A - 2B + C = 2A$

$A - 2B + C = 0$

$$\begin{bmatrix} 2x & 1 \\ y & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 2z \\ 4y & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x+4 & 1-2z \\ -3y & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x+9 & 4-2z \\ 2-3y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2x+9=0 \qquad 4-2z=0 \qquad 2-3y=0$$

$$x=-\frac{9}{2} \qquad 4=2z \qquad 2=3y$$

$$2=z \qquad \frac{2}{3}=y$$

9

¿Cuál es el vértice de la parábola $y = 4x^2 + 3x - 1$?

A) $\left(-\frac{3}{8}, -\frac{25}{16}\right)$

B) $\left(\frac{3}{8}, -\frac{25}{16}\right)$

C) $\left(-\frac{3}{8}, \frac{25}{16}\right)$

D) $\left(-\frac{3}{8}, -1\right)$

E) $\left(\frac{3}{8}, 1\right)$

Solución:

Si $y = ax^2 + bx + c$ es la ecuación de una parábola, entonces la abscisa de su vértice está dada por

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2(4)} = -\frac{3}{8}.$$

La ordenada del vértice es

$$y_v = 4\left(-\frac{3}{8}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{8}\right) - 1$$

$$= 4\left(\frac{9}{64}\right) - \frac{9}{8} - 1$$

$$= \frac{9}{16} - \frac{18}{16} - \frac{16}{16}$$

$$= -\frac{25}{16}$$

Por lo tanto, el vértice es $V = \left(-\frac{3}{8}, -\frac{25}{16}\right)$.

La opción correcta es la (A).

Pasar a la próxima página para ver otra solución posible para el ejercicio 9.

Otra solución posible para el ejercicio 9 se obtiene completando el cuadrado de la siguiente manera:

$$y = 4\left(x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{64}\right) - 1 - \frac{9}{16}$$

$$y = 4\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{25}{16}$$

El vértice es $\left(-\frac{3}{8}, -\frac{25}{16}\right)$.

10

Halle a_{35} si $\{a_n\}$ es una sucesión aritmética con $a_{27} = 186$ y $a_{45} = 312$.

A) 264
B) 242
C) 234
D) 221
E) 214

Solución:

Si $\{a_n\}$ es una sucesión aritmética, entonces

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

donde a_1 es el primer término y d es la diferencia común.

Al sustituir los dos datos conocidos, obtenemos

$$\begin{cases} a_{27} = a_1 + 26d \\ a_{45} = a_1 + 44d \end{cases}$$

y el siguiente sistema lineal $\begin{cases} a_1 + 26d = 186 \\ a_1 + 44d = 312 \end{cases}$.

Usamos el método de eliminación y restamos la primera ecuación de la segunda para obtener

$18d = 126$

$d = 7$

Sustituimos $d = 7$ en la primera ecuación del sistema para obtener

$a_1 + 26(7) = 186$

$a_1 = 186 - 182$

$a_1 = 4$

Luego, hallamos a_{35} utilizando $n = 35$, $a_1 = 4$ y $d = 7$.

$a_{35} = a_1 + 34d$

$= 4 + 34(7)$

$= 4 + 238$

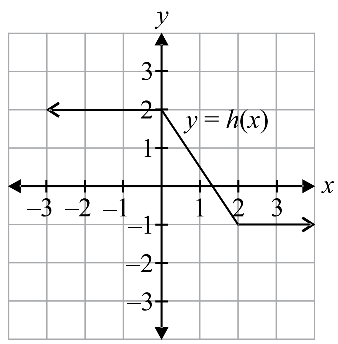
$= 242$

La opción correcta es la (B).

Ejemplos de ejercicios abiertos

A continuación, se muestran ejemplos de ejercicios abiertos. En este tipo de ejercicio se deberá demostrar toda la cadena de razonamiento que conduce a la solución del problema. Se evaluará tanto el proceso como el resultado. Si se dejan todos los ejercicios abiertos en blanco se invalidará la prueba en su totalidad, ya que no se dispondrá de un parámetro importante para conocer su dominio del contenido. Se utilizará una escala de valoración de 0 a 6. Todos los problemas tendrán igual peso, pero a las partes de un problema particular no necesariamente se les asigna el mismo peso.

1



Sean f, g y h funciones dadas por las relaciones $f(x) = 3x - 1$, $g = \{(1, 2), (2, 5), (0, 4), (5, 0)\}$ y $h(x)$, según se ilustra en la figura anterior. Halle el valor de la expresión $h(5) + g(2) - f(-1)$.

Solución:

Dado que la gráfica de $y = h(x)$ contiene el punto $(5, -1)$, tenemos que $h(5) = -1$.

Dado que el punto $(2, 5)$ está en la función g, tenemos que $g(2) = 5$.

Para obtener $f(-1)$ evaluamos $f(x)$ cuando $x = -1$ y obtenemos $f(-1) = -4$.

Finalmente, $h(5) + g(2) - f(-1) = -1 + 5 - (-4) = 8$.

2

Si $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$, donde $x \geq \frac{3}{2}$, determine $f^{-1}(9)$.

Solución:

Si $f^{-1}(9) = x$, entonces, $f(x) = 9$.

$4x^2 - 12x + 9 = 9$

$4x^2 - 12x = 0$

$4x(x - 3) = 0$

$x = 0, \;\; x = 3$

Como $x \geq \frac{3}{2}$, $x \neq 0$, entonces $f^{-1}(9) = 3$.

3

Halle el coseno del ángulo MAYOR de un triángulo cuyos lados miden 5, 7 y 8 unidades.

Solución:

El ángulo mayor de un triángulo está opuesto al lado mayor. Utilizamos la ley de cosenos $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\theta$ y sustituimos los valores $a = 5$, $b = 7$ y $c = 8$ para obtener $8^2 = 5^2 + 7^2 - 2(5)(7) \cos\theta$.

$70 \cos\theta = 25 + 49 - 64$

$70 \cos\theta = 74 - 64$

$\cos\theta = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$

Por lo tanto, el coseno del ángulo mayor es $\cos\theta = \frac{1}{7}$.

4

Utilice la sucesión {1, 3, 5, 7, ...} para determinar el valor de 7 + 9 + 11 + ... + 121.

Solución:

Note que 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 121 corresponde a la suma de los primeros 61 términos de la sucesión aritmética {1, 3, 5, 7, ...} con $a_{61} = 121$, ya que

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

$121 = 1 + (n - 1)(2)$

$n = 61$

Luego, utilizamos la fórmula para los primeros n términos de una sucesión.

$$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$$

$$S_{61} = (61)\left(\frac{a_1 + a_{61}}{2}\right)$$

$$S_{61} = (61)\left(\frac{1 + 121}{2}\right) = (61)(61) = 3721$$

Finalmente, 7 + 9 + 11 + ... + 121 =

(1 + 3 + 5 + 7 + ... + 121) − (1 + 3 + 5) =

$S_{61} - (1 + 3 + 5) = 3721 - 9 = 3712.$

5

Halle las soluciones del sistema $\begin{cases} 5x^2 + 3y^2 = 15 \\ x + y = 1 \end{cases}$.

Solución:

De la segunda ecuación tenemos que $y = 1 - x$.

Usamos el método de sustitución y obtenemos

$5x^2 + 3(1 - x)^2 = 15$

$5x^2 + 3(1 - 2x + x^2) = 15$

$5x^2 + 3 - 6x + 3x^2 = 15$

$8x^2 - 6x - 12 = 0$

Al simplificar y utilizar la fórmula cuadrática, obtenemos

$4x^2 - 3x - 6 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(4)(-6)}}{8}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{105}}{8}$$

Cuando $x = \dfrac{3 + \sqrt{105}}{8}$, $y = 1 - \dfrac{3 + \sqrt{105}}{8} = \dfrac{5 - \sqrt{105}}{8}$.

Cuando $x = \dfrac{3 - \sqrt{105}}{8}$, $y = 1 - \dfrac{3 - \sqrt{105}}{8} = \dfrac{5 + \sqrt{105}}{8}$.

Por lo tanto, las soluciones del sistema son

$$\left(\frac{3 + \sqrt{105}}{8}, \frac{5 - \sqrt{105}}{8}\right) \text{ y } \left(\frac{3 - \sqrt{105}}{8}, \frac{5 + \sqrt{105}}{8}\right).$$

PRUEBA DE PRÁCTICA

En esta sección se presenta un formato de la prueba para propósito de práctica. Los 25 ejercicios ilustran, de forma más completa, la variedad de ejercicios y temas que cubre la prueba de **Precálculo**. El candidato debe tratar de resolver estos problemas en aproximadamente una (1) hora y treinta (30) minutos, y referirse luego a la clave de respuestas que aparece al final.

Para contestar los ejercicios, use la hoja de respuestas que está en la **página 29**. Luego, compare sus respuestas con las claves que aparecen en la **página 31**.

Ejercicios de selección múltiple

INSTRUCCIONES

En cada uno de los ejercicios siguientes, indique la respuesta correcta y oscurezca el espacio correspondiente de la letra en la hoja de contestaciones.

1

La solución de $\dfrac{2y}{y-4}+\dfrac{1}{3}=1$ es

A) -8

B) -2

C) 0

D) 2

E) 8

2

Al tratar de resolver la ecuación $\sqrt{x}+x=6$, encontramos que

A) no tiene solución.

B) tiene una solución.

C) tiene dos soluciones.

D) tiene más de dos soluciones.

E) no es posible determinar el número de soluciones.

3

Al simplificar $\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{1}{2}}$ se obtiene

A) $\dfrac{(2x+1)^2}{2x}$

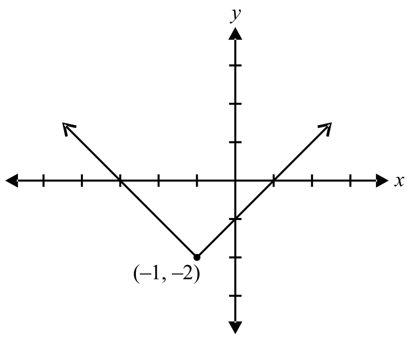
B) $\dfrac{6}{x(x+1)}$

C) $\dfrac{3}{x^2}$

D) $\dfrac{x}{2}$

E) $\dfrac{2}{x}$

4



La función que corresponde a la gráfica de la figura anterior es

A) $f(x) = x - 1$

B) $f(x) = -x - 3$

C) $f(x) = -|x - 1|$

D) $f(x) = |x - 1|$

E) $f(x) = |x + 1| - 2$

5

Suponga que usted está observando el comportamiento de la duplicación de una célula en un laboratorio. En un experimento, usted comenzó con una célula, y las células se duplican cada minuto. ¿En cuántos minutos el número total de células sobrepasa las mil?

A) 8

B) 9

C) 10

D) 15

E) 17

6

¿Cuál de las siguientes funciones cuadráticas $y = f(x)$ satisface las condiciones I, II y III?

I. f es simétrica respecto al eje de y.
II. El valor mínimo de f es -18.
III. Uno de los interceptos en x es -3.

A) $f(x) = 2x^2 + 3x - 9$

B) $f(x) = 3x^2 - 18$

C) $f(x) = -2x^2 - 18$

D) $f(x) = 2x^2 - 18$

E) $f(x) = 2x^2 - 3x - 18$

7

Si $f(x) = 7 - 2x$, entonces $f^{-1}(x) =$

A) $7 + 2x$

B) $-(7 - 2x)$

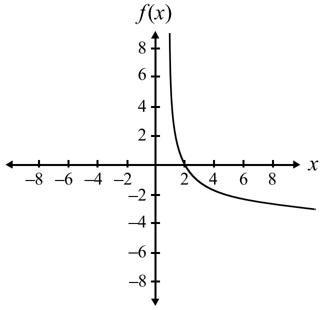
C) $\dfrac{1}{7 - 2x}$

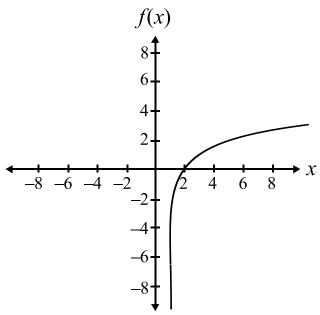
D) $\dfrac{2}{7 - x}$

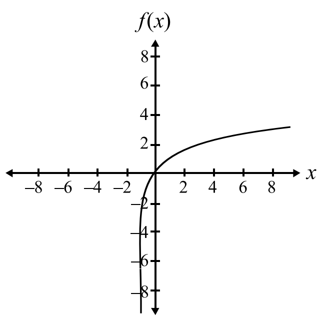
E) $\dfrac{7 - x}{2}$

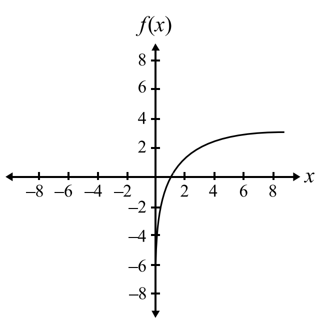
8

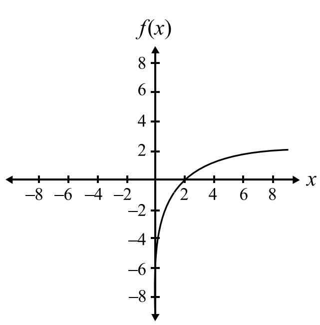
La gráfica de la función $f(x) = \log_2(x - 1)$ es

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

9

Halle todas las asíntotas verticales y horizontales de

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{3x^2 - 75}.$$

A) $x = -5,\ x = 0,\ x = 5,\ y = 0$

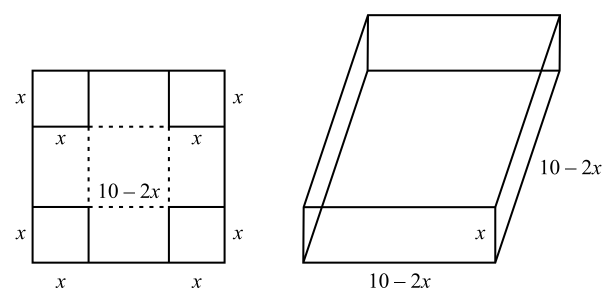
B) $x = -5,\ x = 5,\ y = 0$

C) $x = -5,\ x = 5,\ y = \frac{2}{3}$

D) $x = -5,\ x = 3,\ x = 5,\ y = \frac{2}{3}$

E) $x = -5,\ x = 3,\ x = 5,\ y = \frac{2}{3},\ x = 0,\ y = 0$

10



Una caja abierta de volumen V se construye utilizando un pedazo de cartulina en forma cuadrada de lados que miden 10 pulgadas, según se muestra en la figura anterior. Para obtener la caja abierta se recortan pedazos cuadrados de dimensión x en cada esquina y luego se doblan sus lados. La expresión $V(x)$ es igual a

A) $4x^3 - 100x$

B) $-4x^3 + 10x^2$

C) $4x^3 - 40x^2 + 100x$

D) $-4x^3 - 40x^2 - 100x$

E) $4x^3 + 40x^2 + 100x$

11

Si $\log_b x = 2\log_b x - 1$, entonces $x =$

A) $\frac{1}{b}$

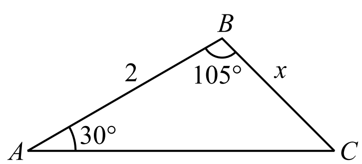
B) 2

C) -1

D) $-\frac{1}{b}$

E) b

12



El valor de x en la figura anterior es

A) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{6}$

E) $\sqrt{12}$

13

Halle el valor de $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$.

A) $-\frac{1}{2}$

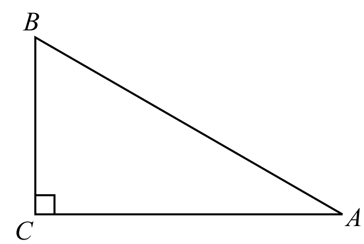
B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

E) $\frac{\pi}{2} - 2$

14



En el triángulo rectángulo de la figura anterior, $\overline{BC} = x$ y P es un punto en el segmento AB tal que $\overline{AP} = x$ y $\overline{PB} = y$. Si la medida del ángulo A es 30°, entonces se concluye que

A) $x < y$

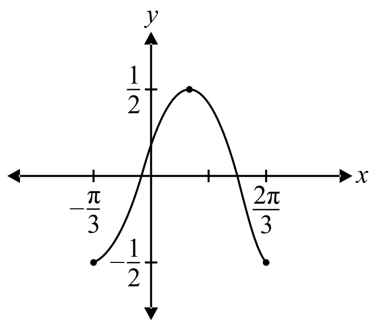
B) $x = y$

C) $x > y$

D) $y = 2x$

E) $x = 2y$

15



Halle la amplitud, el periodo y el ángulo de fase de la gráfica que se muestra en la figura anterior.

A) $A = -\frac{1}{2},\ P = \frac{2\pi}{3},\ F = \frac{\pi}{3}$

B) $A = -\frac{1}{2},\ P = \pi,\ F = -\frac{\pi}{3}$

C) $A = \frac{1}{2},\ P = \pi,\ F = \frac{\pi}{3}$

D) $A = \frac{1}{2},\ P = \pi,\ F = -\frac{\pi}{3}$

E) $A = \frac{1}{2},\ P = \frac{2\pi}{3},\ F = \frac{\pi}{3}$

16

Simplifique $\frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$.

A) $\frac{\operatorname{sen} x}{2}$

B) $\operatorname{sen} x$

C) $2 \operatorname{sen} x$

D) $2 \sec x$

E) $2 \csc x$

17

Las soluciones de la ecuación $3 \tan^2 x = 1$ se encuentran en los cuadrantes

A) II y III.

B) I y III.

C) II y IV.

D) I y IV.

E) I, II, III y IV.

18

En una clase hay 35 estudiantes. Por buen comportamiento, cada niña recibió 2 bolígrafos y cada niño un cuaderno. Si en total se entregaron 55 regalos, ¿cuántas niñas hay en la clase?

A) 15

B) 16

C) 18

D) 20

E) 22

19

Si $\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, entonces $x =$

A) –2

B) –1

C) 0

D) 1

E) 2

20

Juan le dijo a José: "Si me das una manzana, entonces tendremos la misma cantidad de manzanas". José le dijo a Juan: "En cambio, si me das una manzana, entonces tendré el doble de las que tú tienes". ¿Cuántas manzanas tiene Juan?

A) 1

B) 2

C) 3

D) 5

E) 7

21

Los vértices de la elipse dada por $4x^2 + 25y^2 = 100$ son

A) (±5, 0)

B) (±2, 0)

C) (0, ±2)

D) (0, ±5)

E) (±2, 5)

22

Las coordenadas del centro del círculo representado por $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 30 = 0$ son

A) (0, 0)

B) (–10, –6)

C) (–5, 3)

D) (10, –6)

E) (5, –3)

23

Halle la ecuación de una hipérbola en la forma $\frac{y^2}{M} - \frac{x^2}{N} = 1$, $M, N > 0$ si el centro está en el origen, la longitud del eje conjugado es 10 y los focos están a $\sqrt{29}$ unidades del centro.

A) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{25} = 1$

B) $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{25} = 1$

C) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{29} = 1$

D) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{4} = 1$

E) $\frac{y^2}{29} + \frac{x^2}{4} = 1$

24

¿Cuál es el enésimo término de la sucesión cuyos primeros términos son 3, –6, 12, –24, ... ?

A) $(-6)^{n-1}$

B) $12 - 9n$

C) $3(-2)^{n-1}$

D) $(-2)^{n-1}3^{n}$

E) 6^{n-1}

25

Fila	Butacas
1	3
2	4
3	6
4	9

El número de butacas por filas de un teatro están acomodadas según la tabla anterior. Determine el número de butacas en la fila 10.

A) 40

B) 42

C) 45

D) 47

E) 48

Hoja de respuestas

1 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	6 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	11 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	16 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	21 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
2 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	7 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	12 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	17 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	22 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
3 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	8 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	13 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	18 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	23 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
4 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	9 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	14 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	19 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	24 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
5 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	10 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	15 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	20 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ	25 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

26	27	28	29	30
/ /	/ /	/ /	/ /	/ /
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1
2 2 2 2	2 2 2 2	2 2 2 2	2 2 2 2	2 2 2 2
3 3 3 3	3 3 3 3	3 3 3 3	3 3 3 3	3 3 3 3
4 4 4 4	4 4 4 4	4 4 4 4	4 4 4 4	4 4 4 4
5 5 5 5	5 5 5 5	5 5 5 5	5 5 5 5	5 5 5 5
6 6 6 6	6 6 6 6	6 6 6 6	6 6 6 6	6 6 6 6
7 7 7 7	7 7 7 7	7 7 7 7	7 7 7 7	7 7 7 7
8 8 8 8	8 8 8 8	8 8 8 8	8 8 8 8	8 8 8 8
9 9 9 9	9 9 9 9	9 9 9 9	9 9 9 9	9 9 9 9

¡Éxito!

Respuestas correctas: **próxima página**

Claves de la prueba de práctica

1. B	**6.** D	**11.** E	**16.** E	**21.** A
2. B	**7.** E	**12.** C	**17.** E	**22.** E
3. E	**8.** B	**13.** C	**18.** D	**23.** A
4. E	**9.** C	**14.** B	**19.** B	**24.** C
5. C	**10.** C	**15.** D	**20.** D	**25.** E

COMITÉ DE NIVEL AVANZADO

Comité de examinadores

En el comité de examinadores participan profesores de diversas instituciones universitarias de Puerto Rico.

Comité de lectores

En las lecturas de las preguntas abiertas participan profesores de diversas instituciones universitarias de Puerto Rico y maestros que enseñan el curso de Precálculo en instituciones de nivel secundario.

NOTAS

NOTAS