

# PROPRIEDADES DO OLS PARA FUNÇÃO DE PRODUÇÃO CES PARA AS FORMAS PRIMAL E DUAL: UM ESTUDO COMPARATIVO DE SIMULAÇÃO MONTE-CARLO SOB A PRESENÇA DE ERROS DE MENSURAÇÃO NA DEMANDA POR INSUMOS

RONALD WEGNER NETO

Mestre em Desenvolvimento Econômico - PPGDE/UFPR

MAURICIO VAZ LOBO BITTENCOURT

Professor Doutor do Departamento de Ciências Econômicas - PPGDE/UFPR

**RESUMO:** A função CES-ACMS está bem estabelecida na literatura econômica, sobretudo nos estudos de macroeconomia. Todavia para o campo econométrico, diferentemente da função Cobb-Douglas, a sua não-linearização demanda certa complexidade no seu tratamento. Uma das primeiras formas de estimar esta função através de estimadores do tipo OLS foi proposta por Kmenta (1967), através de uma expansão de Taylor de primeira ordem. Este trabalho busca delimitar a possibilidade de trabalhar com a forma dual da função de produção CES-ACMS, utilizando-se da mesma estratégia da expansão de Taylor de primeira ordem. Uma vez estabelecida a forma linearizada da CES-ACMS na sua forma dual, duas formas de analisar as propriedades dos estimadores OLS para a forma primal e dual serão propostas. Para a forma primal, de forma semelhante a literatura existente, serão adicionados choques nos níveis de utilização dos fatores, representando erros de mensuração. Para o caso dual, uma vez que se trabalha com variáveis de mercado como preços, os distúrbios nas variáveis independentes não ocorre. Através de simulações Monte-Carlo serão trabalhadas as propriedades dos estimadores OLS para a forma primal e dual sob as circunstâncias propostas.

**Palavras-chave:** Estimação Primal-Dual, CES-ACMS, Simulação Monte-Carlo.

**JEL:** C15; C63; D00.

**ABSTRACT:** The CES-ACMS is well established in the economic literature, especially in macroeconomics studies. However, for the econometric field, unlike the Cobb-Douglas function, its non-linearization demands some more complex treatment. One of the first ways to estimate this function through OLS-type estimators was proposed by Kmenta (1967), through a Taylor expansion of first order. This work seeks to delimit the possibility of working with the dual form of the CES-ACMS production function, using the same strategy of the Taylor expansion of first order. Once the linearized form of the CES-ACMS in its dual form is established, two ways of analyzing the properties of the OLS estimators for the primal and dual form will be proposed. For the primal form, similar to existing literature, will be added shocks in the factor utilization levels, representing measurement errors. For the dual case, since we work with market variables such as prices, the disturbances on the independent variables do not occur. Through Monte Carlo simulations the properties of the OLS estimators will be analyzed for the primal and dual form under the proposed circumstances.

**Keywords:** Primal-Dual Estimation, CES-ACMS, Monte-Carlo Simulation.

**JEL:** C15; C63; D00.

## INTRODUÇÃO

As funções de produção desempenham uma primeira e fundamental abstração para o trabalho do economista. Estas funções permitem compreender como são alocados os diversos recursos para a obtenção de um ou mais produtos finais. A função CES, sobretudo na macroeconomia, tem ganho destaque, uma vez que esta forma funcional permite um maior grau de liberdade no trabalho teórico, pois possibilita compreender a elasticidade de substituição entre os fatores utilizados na produção, descrevendo desde funções com perfeita substituição entre fatores até situações de proporções fixas entre os insumos.

Todavia, a função CES, costumeiramente, não é estimada de forma empírica devido, principalmente, à sua dificuldade de tratamento, decorrente de sua não linearidade, incorrendo que seus parâmetros sejam costumeiramente calibrados (Henningsen and G.Henningsen, 2012). Muitos foram os esforços de simulação Monte-Carlo para a estimação da CES, sobretudo com estimadores não-lineares, obtendo-se bons resultados para a estimação de vários parâmetros, com exceção do parâmetro  $\rho$  (Corbo, 1977; Kumar and Gapinski, 1974; Thursby and Lovell, 1978), que é o principal objetivo desta forma funcional, uma vez que dele decorre o cálculo da elasticidade de substituição dos fatores. É dentro desta seara que se propõe neste trabalho a análise de mais uma forma de se buscar a sua análise empírica através de dados sintéticos, buscando compreender as propriedades da aplicação do OLS no caso desta função na sua forma primal e dual, utilizando-se como referência fundamental o processo proposto por Kmenta (1967).

Um dos problemas de ordem empírica proposto neste trabalho é da existência de erros na mensuração dos fatores alocados, uma vez que tais erros geram problemas na qualidade da estimação por OLS. Independente do fato gerador, erros de mensuração podem levar a alocações incorretas de fatores, fazendo, inclusive, que tais alocações pareçam ter procedimentos aleatórios em alguns casos (Berndt, 1976; Bittencourt and Sampaio, 2011; Brown and Walker, 1995; Lusk et al., 2002). Uma vez que ocorrem erros de mensuração, tais erros não acabam intervindo no resultado de produção final, tornando possível a utilização da forma dual (Pope and Just, 2003).

Este trabalho traz uma contribuição importante para a compreensão do método de linearização da CES, uma vez que a relação entre os parâmetros estimados oferecem uma nova compreensão dos limites da estimação por OLS. A exposição gráfica dos resultados, obtidos por simulação Monte-Carlo, permite-nos compreender quais os limites possíveis para os valores de estimação de alguns parâmetros e o padrão de relação entre suas estimativas, levando em conta o ponto originalmente escolhido para a expansão de Taylor. Conforme o valor verdadeiro do parâmetro escolhido para expansão de Taylor se distancia do ponto original, temos comportamentos distintos da forma Primal e Dual, sobretudo no caso Dual, onde ao inverter os vetores de preços não obtemos comportamento simétrico das estimativas como esperado.

Na primeira seção é exposta a revisão de literatura sobre formas funcionais, assim como alguns processos já utilizados para estimar a CES e da transmissão de erros durante o processo produtivo. Na seção 2 serão apresentados os conceitos delineadores da forma funcional escolhida e suas formas Primal e Dual, seguindo na seção 3 pelo processo de construção dos modelos econométricos e a construção dos distúrbios para a simulação Monte-Carlo. Por fim na quarta seção os resultados obtidos serão discutidos direcionando o artigo para sua conclusão.

## 1 REVISÃO DE LITERATURA

Diversas são as formas funcionais para as funções de produção, assim como são diversos os mecanismos de tratamento e estimação das mesmas. Uma das principais formas funcionais foi proposta por Cobb and Douglas (1928), tradicionalmente tratada com elasticidade de substituição unitária, mostrando assim certa rigidez analítica. Nos anos 1960 novas formas funcionais foram propostas, são elas as funções de produção com elasticidade de substituição constante (Arrow et al., 1961; McFadden, 1963; Uzawa, 1962); seguido do esforço posterior da construção de funções de

produção com elasticidade variável (Antony, 2010; de La Grandville, 1989; Revankar, 1971). Uma das principais características das famílias de funções de produção com elasticidade constante (CES) ou variável (VES) decorre da possibilidade de descrever situações que variam desde alocações com proporção fixa de fatores a situações com perfeita substituição dos mesmos.

Todavia, não apenas uma maior flexibilidade de novas formas funcionais devem ser consideradas, levando este trabalho, da mesma forma como tantos outros (Bittencourt and Sampaio, 2011; Kumbhakar and Tsionas, 2011; Lusk et al., 2002), para a questão da dualidade. Uma das questões que devem ser levantadas, levando-se em conta o aspecto empírico é sobre a origem dos distúrbios que ocorrem no modelo: (i) se os mesmos decorrem de erros de mensuração da demanda por insumos ou (ii) se os erros existentes decorrem de erros no processo de otimização (Pope and Just, 2003). Uma fonte de erro de mensuração, por exemplo, seria a má construção de um banco de dados. De qualquer forma distúrbios nas variáveis independentes acabam gerando estimativas vulneráveis Berndt (1976); Bittencourt and Sampaio (2011); Brown and Walker (1995); Lusk et al. (2002). No primeiro caso (existência de erros de mensuração), não havendo falhas no processo de otimização, ainda é possível ser utilizada a forma dual, pois neste caso não haveria transferência dos erros de mensuração para as variáveis duais (Kumbhakar and Tsionas, 2011; Pope and Just, 2003).

Mas não apenas do padrão de distúrbios surgem a garantia da aplicabilidade da dualidade. Alguns fatores tornam a dualidade incapaz de ser alcançada. Um fator é a questão do risco (Just and Pope, 1978; Pope, 1980), uma vez que a produção pode ocorrer antes da realização dos preços, dificultando um comportamento otimizador condizente com a tecnologia em questão. Um outro problema de ordem teórica é a escolha de uma forma funcional auto-dual (Burgess, 1975; Lusk et al., 2002; Thompson and Langworthy, 1989), caso contrário a dualidade pode não ser obtida; ao se utilizar a CES não se incorre neste problema.

Um dos objetivos deste trabalho é compreender como as estimativas por OLS nas formas Primal e Dual da CES possibilitam a recuperação dos parâmetros verdadeiros. Uma vez que a CES é não-linear, será utilizada a estratégia proposta por Kmenta (1967) para a construção do modelo Primal (Henningsen and G.Henningsen, 2011) e da versão Dual. Tendo em vista a estimação dos parâmetros de uma função CES, muitos outros trabalhos se utilizaram de simulações Monte-Carlo para analisar a qualidade da estimativa dos parâmetros na forma primal. Através de simulações Monte-Carlo Kumar and Gapinski (1974) mostraram que na forma primal estimada por NLLS apenas o parâmetro  $\rho$  não obteve estimativas consistentes. Utilizando um sistema de busca Corbo (1977) adaptou um NLLS exequível por OLS; todavia a estratégia desse trabalho é muito intensiva em cálculo computacional sem um critério definido para fazer a varredura, como seria, por exemplo o NLLS proposto por Levenberg (1944) e Marquardt (1963). De forma análoga, incorporando novas formas de se regredir uma CES, os autores Thursby (1980); Thursby and Lovell (1978) chegam aos mesmos resultados inconsistentes na estimação de  $\rho$  como em Corbo (1977); Kumar and Gapinski (1974).

## 2 FUNÇÃO DE PRODUÇÃO CES-ACMS E SUA FORMA DUAL

### 2.1 FORMA PRIMAL

Para delimitar o conceito de função de produção, primeiramente devemos assumir um vetor de insumos  $\mathbf{x}$  pertencente a um espaço de insumos  $L = \mathbb{R}_+^\ell$  sendo que cada  $x_i$  representa o  $i$ -ésimo insumo utilizado na produção. Neste trabalho apenas um produto será obtido, representado por  $y \in \mathbb{R}_+$ .

**DEFINIÇÃO 1:** Uma função de produção  $f$  é a relação entre o vetor de insumos  $\mathbf{x} \in L \subset \mathbb{R}_+^\ell$  e o escalar do produto final  $y \in \mathbb{R}_+$ , com cada  $\mathbf{x}$  relacionado a apenas um  $y$ .

$$f : L \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

Também podemos descrever da seguinte forma:

$$y = f(\mathbf{x}). \quad (1)$$

O objetivo deste trabalho se pauta na utilização da forma funcional CES-ACMS, entendendo por forma funcional como uma função de produção com a inserção de um vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\nu}$ . Este novo vetor de parâmetros fornecendo a informação do comportamento de determinada tecnologia. Permanecendo em certa simplicidade, o vetor  $\boldsymbol{\nu}$  que ditará a forma como calculamos a elasticidade, uma vez que sendo componentes fixos, estaríamos trabalhando com uma CES, ou seja  $\sigma = \sigma(\boldsymbol{\nu})$ . Dito isto é importante ressaltar que existem casos de formas funcionais com elasticidade de substituição variável da forma  $\sigma = \sigma(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{x})$  como é o caso do trabalho de Revankar (1971), onde diferentes alocações entre os fatores de produção implicam em elasticidades de substituição diferentes. Assim, a definição de forma funcional deve ser:

**DEFINIÇÃO 2:** Uma forma funcional  $f$  de uma função de produção qualquer é a relação entre o vetor de insumos  $\mathbf{x} \in L \subset \mathbb{R}_+^\ell$  e o escalar do produto final  $y \in \mathbb{R}_+$ , com todos  $\mathbf{x}$  relacionados a apenas um  $y$  com a inserção de uma forma específica delimitada por um vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\nu}$ , ou seja,

$$y = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}). \quad (2)$$

As funções de produção com elasticidade de substituição constante foram propostas de diversas formas (McFadden, 1963; Uzawa, 1962), sendo uma das mais importantes a descrita por Arrow et al. (1961), sendo a forma funcional preliminar da CES para dois insumos com qual trabalharemos, descrita por:

$$f(\mathbf{x}) = A(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}}. \quad (3)$$

A elasticidade de substituição é dada por  $\sigma = \frac{1}{1+\rho}$ , que acaba limitando  $\rho \in [-1, 0) \cup (0, \infty)$ , uma vez que  $\sigma \in (0, \infty)$ . O parâmetro  $\alpha \in [0, 1]$  determina a proporção de alocação entre os dois insumos. Por fim  $A > 0$  representa a produtividade, funcionando como um escalar de ajuste.

Como qualquer função de produção, algumas regularidades fundamentais devem ser garantidas, ainda mais tendo em vista a sua versão dual, pois através destas propriedades que iremos garantir situações de ótimo globais. As propriedades são as seguintes:

1. *Positividade:* O produto final  $y$  é sempre não-negativo para todo vetor de insumos  $\mathbf{x}$  não-negativo. Temos também que a trajetória  $(\mathbf{x}, y)$  parte da origem, visto que  $f(\mathbf{0}) = 0$ .
2. *Monotonicidade:* A primeira derivada parcial de  $f$  é sempre positiva para todo  $\mathbf{x}$  não-negativo.
3. *Concavidade 1:* A matriz Hessiana  $\nabla^2 f(\mathbf{x})$  é semi-definida (ou definida) negativa em todo o conjunto  $L$ , ou seja,  $\nabla^2 f(\mathbf{x}) \leq 0$  (ou  $\nabla^2 f(\mathbf{x}) < 0$ ) para todo  $x \in L$ .
4. *Concavidade 2:* Considere  $L \subset \mathbb{R}^\ell$  convexo. A função de produção  $f : L \rightarrow \mathbb{R}$  é côncava, ou seja, para todo  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in L$  e  $t \in [0, 1]$ , tem-se que

$$f(t\mathbf{x}_0 + (1 - t)\mathbf{x}_1) \geq tf(\mathbf{x}_0) + (1 - t)f(\mathbf{x}_1).$$

5. *Convexidade do hipografo:* Sendo a função de produção côncava, seu hipografo  $hipo(f) = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{\ell+1} \mid y \leq f(\mathbf{x})\}$  é um conjunto convexo.

Estas propriedades são fundamentais, sobretudo da convexidade do hipografo de uma função de produção qualquer, pois de forma análoga ao corolário 3.14 de Ribeiro and Karas (2013) podemos garantir condições de máximo global para qualquer ponto estacionário existente.

Algumas características importantes foram adicionadas no decorrer do tempo. A função como vista anteriormente não permite retornos de escala crescentes ou decrescentes, apenas retornos constantes. Isto gera uma série de complicações em alguns casos, pois a função (3) pode gerar soluções ilimitadas superiormente em contextos de conjunto restrição para maximização do lucro. Adicionando um parâmetro  $\gamma$  ao modelo poderemos analisar retornos de escala crescentes e decrescentes, tal como foi posto por Kmenta (1967). Elevando os termos entre parênteses de (3) a este parâmetro teremos a evolução da CES proposta por Arrow et al. (1961). Assim:

$$f(\mathbf{x}) = A(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}}. \quad (4)$$

Deve-se garantir a concavidade desta forma, fazendo com que se tenha retornos decrescentes de escala, ou seja: com  $\gamma \in (0, 1)$ .

Ainda tentando expandir a CES, utilizaremos um fator de evolução tecnológica neutra de Hicks, da mesma forma como foi feito por Bittencourt and Sampaio (2011) para o caso da Cobb-Douglas. Adicionando a expressão  $e^{\theta t}$  temos que  $\theta$  indica a taxa de mudança tecnológica, operando como um fator de ajuste para  $A$  no decorrer do tempo medido por  $t$ . Uma vez que opera como um escalar positivo, sua influência em situações estáticas não modifica a garantia de ótimo global para pontos críticos. Assim a função final com qual iremos trabalhar se dá por:

$$f(\mathbf{x}) = Ae^{\theta t}(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}}. \quad (5)$$

Utilizando-se da fórmula de elasticidade (Hicks, 1963):

$$\sigma = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2}}{f(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}}. \quad (6)$$

Teremos que levar em consideração as primeiras derivadas parciais em função dos insumos consumidos e a derivada segunda em relação a cada insumo, assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= Ae^{\theta t} \gamma \alpha x_1^{-\rho-1} (\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}-1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= Ae^{\theta t} \gamma (1 - \alpha) x_2^{-\rho-1} (\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}-1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= Ae^{\theta t} \gamma (\gamma + \rho) \alpha (1 - \alpha) x_1^{-\rho-1} x_2^{-\rho-1} (\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}-2}. \end{aligned}$$

Substituindo em (6), teremos a elasticidade de substituição da CES dada por:

$$\sigma = \frac{\gamma}{\gamma + \rho}. \quad (7)$$

Considerando que a elasticidade de substituição deve ser positiva, uma vez que  $\gamma > 0$ , teremos que garantir que o denominador seja positivo, de tal forma que  $\gamma + \rho > 0$  que implica  $\rho > -\gamma$  como condição para a positividade de  $\sigma$ .

## 2.2 FORMA DUAL

A palavra dualidade neste contexto se refere à existência de duas formas complementares, porém diferentes, de se trabalhar com uma forma funcional qualquer. Assim teremos uma função de produção descrita por uma forma funcional do tipo  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu})$ , assim como sua contrapartida dual do tipo  $f_d(\mathbf{x}_d, \boldsymbol{\nu})$  onde o subscrito  $d$  remete à forma dual e sua ausência à forma primal. Tanto a forma

primal, quanto a dual estão sujeitas ao mesmo vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\nu}$ , representando assim uma das principais qualidades da dualidade.

Uma forma de se entender dualidade envolve o teorema do envelope. Em condições de otimalidade uma função de produção pode descrever também funções de custo ou lucro. Uma vez que estas funções de custo e lucro estarão sujeitas também ao vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\nu}$ , estas mesmas funções sob condições de otimalidade também descreverão a função de produção original. Veremos a seguir a função lucro  $\Pi$ , introduzida em Hotelling (1932), e definida de forma mais próxima da notação deste trabalho por Bittencourt and Sampaio (2011); Diewert (1982).

**DEFINIÇÃO 3:** *Uma função de lucro é a diferença entre a receita dada pela função de produção multiplicada pelo preço de venda  $p$  e os custos, resultantes do somatório dos produtos dos insumos consumidos e seu respectivo vetor de preços  $\boldsymbol{\omega}$ .*

$$\Pi(f(\mathbf{x}), \mathbf{x}, p, \boldsymbol{\omega}) = pf(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x}. \quad (8)$$

Partindo do pressuposto de que o produtor é tomador de preços, o problema da maximização de lucros decorre apenas do ajuste das quantidades de insumos consumidas e do produto final. Desta forma o problema da maximização de lucro pode ser descrito através de:

$$\Pi(p, \boldsymbol{\omega}) = \max_{\mathbf{x}} \{pf(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x}\}. \quad (9)$$

Essa maximização irrestrita resulta na seguinte condição, decorrente das condições de primeira ordem:

$$\nabla_{f(\mathbf{x}), \mathbf{x}} \Pi(p, \boldsymbol{\omega}) = (p, \boldsymbol{\omega}). \quad (10)$$

Neste caso, Hotelling (1932) diz que deve existir, de forma dual, uma função que utilizando da condição de primeira ordem nos forneceria como resultado as quantidades empregadas na produção (assim como a própria produção no formato como trataremos). É esta segunda forma que ficou conhecida como teorema de Hotelling (Pope, 1982). Destarte, segue a forma dual:

$$\nabla_{p, \boldsymbol{\omega}} \Pi(p, \boldsymbol{\omega}) = (f(\mathbf{x}), \mathbf{x}). \quad (11)$$

Buscando substituir a descrição da tecnologia do tipo  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu})$  por  $f_d(p, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu})$  iremos utilizar o teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) como exposto no teorema 7.25 por Ribeiro and Karas (2013).

Dados  $p > 0$  e  $\boldsymbol{\omega} \geq 0$ , considere o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{y, \mathbf{x}}{\text{maximizar}} \quad py - \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeito a} \quad y \leq Ae^{\theta t} (\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}} \\ \quad \quad \quad \mathbf{x} \geq 0 \\ \quad \quad \quad y \geq 0, \end{array} \right. \quad (12)$$

cujo Lagrangeano associado é dado por:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, y, \lambda, \boldsymbol{\mu}_x, \mu_y) = py - \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x} + \lambda(Ae^{\theta t} (\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}} - y) + \boldsymbol{\mu}_x^T \mathbf{x} + \mu_y y. \quad (13)$$

E de acordo com o Teorema de KKT, se  $(y, \mathbf{x})$  é solução do problema, então existem os

multiplicadores de Lagrange  $\lambda, \mu_y \in \mathbb{R}_+$  e  $\mu_x \in \mathbb{R}_+^2$  tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} p \\ -\omega_1 \\ -\omega_2 \end{array} \right) + \lambda \left( \begin{array}{c} -1 \\ Ae^{\theta t}(\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma+\rho}{\rho}} \gamma \alpha x_1^{-\rho-1} \\ Ae^{\theta t}(\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma+\rho}{\rho}} \gamma (1-\alpha)x_2^{-\rho-1} \end{array} \right) + \\ + \mu_y \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) + \mu_{x_1} \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) + \mu_{x_2} \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \\ \lambda(Ae^{\theta t}(\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}} - y) = 0 \\ \mu_y y = 0 \\ \mu_{x_1} x_1 = 0 \\ \mu_{x_2} x_2 = 0 \\ y \leq Ae^{\theta t}(\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}} \\ \mathbf{x}, y, \lambda, \mu_y, \mu_{x_1}, \mu_{x_2} \geq 0. \end{array} \right. \quad (14)$$

As restrições em relação a  $y$  implicam que a restrição deve ser ativa e que  $\lambda = p$  ou no caso em que a solução é a origem  $\lambda = p + \mu_y$ . Este resultado pode ser pensado da seguinte forma: a condição de otimalidade em relação a  $y$  nos fornece a seguinte relação  $p - \lambda + \mu_y = 0$ . Caso tenhamos  $y = 0$  ambas as restrições que envolvem  $y$  devem ser ativas, assim como os multiplicadores em relação à quantidade de insumos consumida na produção, fazendo com que  $x_1 = x_2 = 0$ . Havendo qualquer nível de produção o vetor  $\boldsymbol{\mu}$  será nulo. Desta forma a condição de viabilidade, complementaridade e não-negatividade dos multiplicadores nos levam a  $\lambda = p$ . Derivando daí teremos os seguintes pontos ótimos do problema, quando há nível de produção maior que zero:

$$x_1 = \left( \frac{pAe^{(\theta t)}\alpha\gamma}{\omega_1 \left( (1-\alpha) \left( \frac{\omega_2\alpha}{\omega_1(1-\alpha)} \right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + \alpha \right)^{\frac{\gamma+\rho}{\rho}}} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (15)$$

$$x_2 = \left( \frac{pAe^{(\theta t)}(1-\alpha)\gamma}{\omega_2 \left( \alpha \left( \frac{\omega_2\alpha}{\omega_1(1-\alpha)} \right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + (1-\alpha) \right)^{\frac{\gamma+\rho}{\rho}}} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (16)$$

Substituindo estas expressões em  $y$ , obtém-se

$$y = Ae^{(\theta t)} \left( \alpha \left( \frac{pAe^{(\theta t)}\alpha\gamma}{\omega_1 \left( (1-\alpha) \left( \frac{\omega_2\alpha}{\omega_1(1-\alpha)} \right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + \alpha \right)^{\frac{\gamma+\rho}{\rho}}} \right)^{\frac{-\rho}{1-\gamma}} + (1-\alpha) \left( \frac{pAe^{(\theta t)}(1-\alpha)\gamma}{\omega_2 \left( \alpha \left( \frac{\omega_2\alpha}{\omega_1(1-\alpha)} \right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + (1-\alpha) \right)^{\frac{\gamma+\rho}{\rho}}} \right)^{\frac{-\rho}{1-\gamma}} \right)^{-\frac{\gamma}{\rho}}. \quad (17)$$

A solução dual consiste em utilizar estas três expressões na função objetivo.

### 3 CONSTRUÇÃO DOS MODELOS DE ESTIMAÇÃO E SIMULAÇÃO

#### 3.1 CONSTRUÇÃO DOS MODELOS DE ESTIMAÇÃO

O trabalho de Kmenta (1967) é pioneiro em buscar uma forma de estimar uma função CES, baseado em uma série de Taylor truncada, tornando possível a utilização do OLS (Ordinary Least Squares). De forma semelhante, os autores Henningsen and G.Henningsen (2011) nos fornecem o modelo primal da função que será utilizada (5). Sendo esta a modelagem para o problema primal, definido da seguinte forma:

$$\ln y \approx \ln A + \theta t + \gamma\alpha \ln x_1 + \gamma(1 - \alpha) \ln x_2 - \frac{\gamma\alpha(1 - \alpha)\rho}{2}(\ln x_1 - \ln x_2)^2 \quad (18)$$

Com esta informação seria possível montar um modelo econométrico, que uma vez estimado fornecerá informação suficiente para recuperar os parâmetros da CES.

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \ln x_1 + \beta_3 \ln x_2 + \beta_4(\ln x_1 - \ln x_2)^2 + \epsilon \quad (19)$$

Comparando a aproximação de Henningsen and G.Henningsen (2011) com o modelo econométrico, a recuperação dos parâmetros da CES se daria por:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= e^{\beta_0} \\ \hat{\gamma} &= \beta_2 + \beta_3 \\ \hat{\theta} &= \beta_1 \\ \hat{\alpha} &= \frac{\beta_2}{\beta_2 + \beta_3} \\ \hat{\rho} &= \frac{-2\beta_4(\beta_2 + \beta_3)}{\beta_2 \beta_3}. \end{aligned} \quad (20)$$

Tendo já a regressão na forma primal, devemos construir o modelo dual. Uma vez que a função lucro incorre na soma de três funções não lineares (15), (16) e (17), o trato da mesma se mostrou infrutífero, uma vez que não se mostrou possível isolar as variáveis independentes do modelo. A função Lucro na expansão de Taylor de primeira ordem em torno de  $\rho$  tendendo a zero é igual a zero. Tendo em vista que parte da dualidade se pauta na substituição das variáveis independentes primais por variáveis duais, foi necessário enfraquecer o conceito de dualidade e utilizar o nível de produção e descrita pelos preços, sendo estas as variáveis duais, como na equação (17).

A fim de se obter um modelo econométrico tratável por OLS, a estratégia utilizada será uma expansão de Taylor truncada, de forma semelhante ao artigo de Kmenta (1967). Mesmo que de acordo com este procedimento seja problemático (Corbo, 1977; Thursby and Lovell, 1978), é um mecanismo de se tratar a CES de forma linear.

Agrupando os termos semelhantes, (17) pode ser reescrita como:

$$y = (Ae^{\theta t}(p\gamma)^\gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left( \frac{\alpha^{\frac{1-\rho-\gamma}{1-\gamma}} \omega_1^{\frac{\rho}{1-\gamma}}}{\left(\alpha + (1-\alpha) \left(\frac{\omega_2\alpha}{\omega_1(1-\alpha)}\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right)^{\frac{\gamma+\rho}{\gamma-1}}} + \frac{(1-\alpha)^{\frac{1-\rho-\gamma}{1-\gamma}} \omega_2^{\frac{\rho}{1-\gamma}}}{\left((1-\alpha) + \alpha \left(\frac{\omega_2\alpha}{\omega_1(1-\alpha)}\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right)^{\frac{\gamma+\rho}{\gamma-1}}} \right)^{\frac{-\gamma}{\rho}} \quad (21)$$

Seguindo a estratégia de estimação proposta, primeiramente aplicamos logaritmo natural em ambos os lados da igualdade,

$$\ln y = \frac{1}{1-\gamma}(\ln A + \theta t + \gamma(\ln \gamma + \ln p) - \frac{\gamma}{\rho} \ln(g(\rho))), \quad (22)$$



onde  $g(\rho)$  denota a grande expressão de (21) entre parênteses.

A ideia é considerarmos a expansão de Taylor de primeira ordem de  $h(\cdot) = -\gamma g(\cdot)/\rho$  em torno de  $\bar{\rho}$  tendendo a zero. Assim, com o teorema 1.54 em Ribeiro and Karas (2013) temos:

$$\begin{aligned} h(\rho) &= h(\bar{\rho}) + h'(\bar{\rho})(\rho - \bar{\rho}) + r(\rho) \\ &= -\frac{\gamma}{\bar{\rho}} \ln(g(\bar{\rho})) + \frac{d(-\frac{\gamma}{\bar{\rho}} \ln(g(\bar{\rho})))}{d\rho} (\rho - \bar{\rho}) + r(\rho), \end{aligned} \quad (23)$$

onde  $\lim_{\rho \rightarrow \bar{\rho}} \frac{r(\rho)}{\|\rho - \bar{\rho}\|} = 0$ . Vamos calcular, inicialmente, o valor da primeira parcela quando  $\bar{\rho} \rightarrow 0$ . Como

$$\lim_{\bar{\rho} \rightarrow 0} g(\bar{\rho}) = 1, \quad (24)$$

o limite que desejamos calcular nos leva a uma indeterminação, que nos permite aplicar o Teorema de L'Hôpital, como segue,

$$\lim_{\bar{\rho} \rightarrow 0} -\frac{\gamma}{\bar{\rho}} \ln(g(\bar{\rho})) = \lim_{\bar{\rho} \rightarrow 0} -\gamma \frac{g'(\bar{\rho})}{g(\bar{\rho})}. \quad (25)$$

A função  $g$  é o quociente de funções que envolvem exponenciais em  $\rho$ . O numerador é o produto de duas exponenciais, enquanto o denominador é a composta de duas exponenciais. Logo a derivada de  $g$  é dada por

$$\begin{aligned} g'(\bar{\rho}) &= \frac{\alpha^{\frac{1-\bar{\rho}-\gamma}{1-\gamma}} \omega_1^{\frac{\bar{\rho}}{1-\gamma}} \left( -\ln(\alpha) + \ln(\omega_1) + \ln(\psi(\bar{\rho})) + (\gamma + \bar{\rho}) \frac{\psi'(\bar{\rho})}{\psi(\bar{\rho})} \right)}{(1-\gamma)(\psi(\bar{\rho}))^{\frac{\gamma+\bar{\rho}}{\gamma-1}}} + \\ &+ \frac{(1-\alpha)^{\frac{1-\bar{\rho}-\gamma}{1-\gamma}} \omega_2^{\frac{\bar{\rho}}{1-\gamma}} \left( -\ln(1-\alpha) + \ln(\omega_2) + \ln(\xi(\bar{\rho})) + (\gamma + \bar{\rho}) \frac{\xi'(\bar{\rho})}{\xi(\bar{\rho})} \right)}{(1-\gamma)(\xi(\bar{\rho}))^{\frac{\gamma+\bar{\rho}}{\gamma-1}}}, \end{aligned} \quad (26)$$

onde

$$\begin{aligned} \psi(\bar{\rho}) &= \alpha + (1-\alpha) \left( \frac{\omega_2 \alpha}{\omega_1 (1-\alpha)} \right)^{\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}+1}}, \\ \xi(\bar{\rho}) &= 1 - \alpha + \alpha \left( \frac{\omega_2 \alpha}{\omega_1 (1-\alpha)} \right)^{\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}+1}}, \\ \psi'(\bar{\rho}) &= \frac{1-\alpha}{(\bar{\rho}+1)^2} \left( \frac{\omega_2 \alpha}{\omega_1 (1-\alpha)} \right)^{\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}+1}} \ln \left( \frac{\omega_2 \alpha}{\omega_1 (1-\alpha)} \right), \\ \xi'(\bar{\rho}) &= \frac{-\alpha}{(\bar{\rho}+1)^2} \left( \frac{\omega_2 \alpha}{\omega_1 (1-\alpha)} \right)^{\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}+1}} \ln \left( \frac{\omega_2 \alpha}{\omega_1 (1-\alpha)} \right). \end{aligned}$$

Aplicando o limite quando  $\bar{\rho} \rightarrow 0$  e usando, juntamente com (24), em (25), tem-se:

$$\lim_{\bar{\rho} \rightarrow 0} -\frac{\gamma}{\bar{\rho}} \ln(g(\bar{\rho})) = \frac{\gamma}{\gamma-1} (\alpha \ln(\omega_1) + (1-\alpha) \ln(\omega_2) - \alpha \ln(\alpha) - (1-\alpha) \ln(1-\alpha)). \quad (27)$$

Vamos agora calcular a segunda parcela de (23). Assim,

$$\lim_{\bar{\rho} \rightarrow 0} \frac{d(-\frac{\gamma}{\bar{\rho}} \ln(g(\bar{\rho})))}{d\rho} = \lim_{\bar{\rho} \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\bar{\rho}} \left( \frac{1}{\bar{\rho}} \ln(g(\bar{\rho})) - \frac{g'(\bar{\rho})}{g(\bar{\rho})} \right),$$

que, por (25), recai em uma indeterminação, o que por sua vez nos permite usar, novamente, a regra

de L'Hôpital. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{\bar{\rho} \rightarrow 0} \frac{d(-\frac{\gamma}{\bar{\rho}} \ln(g(\bar{\rho})))}{d\rho} &= \gamma \lim_{\bar{\rho} \rightarrow 0} \frac{\ln(g(\bar{\rho})) - \bar{\rho} \frac{g'(\bar{\rho})}{g(\bar{\rho})}}{\bar{\rho}^2} \\ &= \lim_{\bar{\rho} \rightarrow 0} \frac{-\gamma g''(\bar{\rho})g(\bar{\rho}) - (g'(\bar{\rho}))^2}{2(g(\bar{\rho}))^2}.\end{aligned}$$

Como a expressão acima tornou-se intratável manualmente, obtivemos diretamente a aproximação de Taylor de primeira ordem de  $h$  com o uso do software Maple. Com ela, (22) é escrita como

$$\begin{aligned}\ln y &= \frac{\ln A}{1-\gamma} + \frac{\theta t}{1-\gamma} + \frac{\gamma \ln \gamma}{1-\gamma} + \frac{\gamma \ln p}{1-\gamma} - \frac{\alpha \gamma}{1-\gamma} \ln \omega_1 - \frac{(1-\alpha)\gamma}{1-\gamma} \ln \omega_2 + \frac{\alpha \gamma \ln \alpha}{1-\gamma} + \\ &+ \frac{(1-\alpha)\gamma \ln(1-\alpha)}{1-\gamma} - \frac{\alpha(1-\alpha)\gamma \rho}{2(1-\gamma)} (\ln \alpha - \ln(1-\alpha) - (\ln \omega_1 - \ln \omega_2))^2.\end{aligned}\quad (28)$$

A partir desta expressão, construímos a regressão, uma vez que teremos a correspondência teórica pertinente para cada um dos coeficientes a serem estimados com

$$\ln(y) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \ln(p) + \beta_3 \ln(\omega_1) + \beta_4 \ln(\omega_2) + \beta_5 (\ln(\omega_1) - \ln(\omega_2))^2 + \varepsilon. \quad (29)$$

Desenvolvendo o produto notável do último termo de (28), juntando os termos semelhantes e comparando com (29), segue que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = \frac{1}{1-\gamma} \left( \ln A + \gamma \ln \gamma + \gamma \alpha \ln(\alpha) + \gamma(1-\alpha) \ln(1-\alpha) - \frac{\gamma \rho \alpha (1-\alpha)}{2(1-\gamma)} (\ln \alpha - \ln(1-\alpha))^2 \right) \\ \beta_1 = \frac{\theta}{1-\gamma} \\ \beta_2 = \frac{\gamma}{1-\gamma} \\ \beta_3 = -\frac{\gamma \alpha}{1-\gamma} + \frac{\gamma \rho \alpha (1-\alpha)}{1-\gamma} \ln \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \\ \beta_4 = -\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\gamma} - \frac{\gamma \rho \alpha (1-\alpha)}{1-\gamma} \ln \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \\ \beta_5 = -\frac{\gamma \rho \alpha (1-\alpha)}{2(1-\gamma)}.\end{array} \right.$$

Da expressão de  $\beta_2$ , calcula-se o coeficiente  $\gamma$ . A partir de  $\gamma$  e da expressão de  $\beta_1$ , é possível calcular  $\theta$ , obtendo-se

$$\hat{\gamma} = \frac{\beta_2}{1 + \beta_2}, \quad \hat{\theta} = \beta_1(1 - \hat{\gamma}).$$

O parâmetro  $\alpha$  não pode ser isolado das expressões de  $\beta_3$  e  $\beta_4$ , o que nos levou a utilização do método iterativo de Newton-Raphson, descrito por Burden and Faires (2011) como um dos mais rápidos algoritmos pra se achar raízes de funções. Neste método assumimos um ponto inicial  $p_0$  e calculamos a razão de uma função  $\Theta$  pela sua primeira derivada neste ponto. Assim teremos que o ponto seguinte, de forma generalizada, depende da seguinte equação:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{\Theta(p_{n-1})}{\Theta'(p_{n-1})}. \quad (30)$$

Da equação de  $\beta_3$  criaremos a função para o método iterativo de Newton-Raphson para a aproximação de  $\alpha$ . Assim, isolando todos os termos no lado esquerdo, considerando como nossa função de  $\alpha$  pro método de Newton-Raphson teremos:

$$\beta_3 + \frac{\gamma \alpha}{1-\gamma} - \frac{\gamma \rho \alpha (1-\alpha)}{1-\gamma} \ln \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) = \Theta(\alpha).$$

Substituindo  $\beta_2$  e  $\beta_5$ , teremos:

$$\beta_3 + \beta_2\alpha + 2\beta_5 \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) = \Theta(\alpha).$$

Com sua primeira derivada em relação a  $\alpha$  como:

$$\beta_2 + \frac{2\beta_5}{\alpha - \alpha^2} = \Theta'(\alpha).$$

Utilizando-se da equação de 30 teremos, para  $n \geq 1$ :

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} - \frac{\beta_3 + \beta_2\alpha_{n-1} + 2\beta_5 \ln\left(\frac{\alpha_{n-1}}{1-\alpha_{n-1}}\right)}{\beta_2 + \frac{2\beta_5}{\alpha_{n-1} - \alpha_{n-1}^2}}. \quad (31)$$

Diferentemente do cálculo de  $\hat{\alpha}$  na sua contrapartida primal, pode-se delimitar o limite do cálculo iterativo de  $\hat{\alpha}$  para estar limitado ao intervalo onde  $\hat{\alpha} \in (0, 1)$ . Após um limite máximo de 100 iterações ou passos menores do que a tolerância de 0.001, teremos  $\hat{\alpha}$ . Desta forma fica automático o cálculo de  $\hat{\rho}$ .

$$\hat{\rho} = \frac{-2\beta_5(1-\hat{\gamma})}{\hat{\gamma}\hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})}.$$

E finalmente, da expressão de  $\beta_0$ , tem-se

$$A = e^{\beta_0(1-\gamma) - \left(\gamma \ln \gamma + \gamma \alpha \ln(\alpha) + \gamma(1-\alpha) \ln(1-\alpha) - \frac{\gamma \rho \alpha(1-\alpha)}{2(1-\gamma)} (\ln \alpha - \ln(1-\alpha))^2\right)}.$$

Cabe ressaltar que como foi usada uma aproximação linear de  $h$  em torno de  $\bar{\rho}$  tendendo a zero, a regressão poderá não funcionar para  $\rho$  longe de zero. Além disso, a cada coeficiente que recuperamos utilizamos mais parâmetros que foram estimados, podendo incorrer em acúmulo de erros numéricos.

### 3.2 CONSTRUÇÃO DAS SIMULAÇÕES

Uma vez delimitados os dois modelos que serão analisados, deve-se construir os dados para a simulação Monte-Carlo. Primeiro serão geradas as variáveis exógenas  $(\mathbf{p}, \omega_1, \omega_2)$  através de dados pseudo-aleatórios normalmente distribuídos. Através das fórmulas 15, 16 e 17 iremos utilizar as variáveis de mercado para gerar os pontos ótimos de  $(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ , ainda sem distúrbios. Antes de gerar as variáveis  $(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  com os distúrbios, iremos delimitar os parâmetros da normal para a geração dos preços. Os preços serão arbitrariamente fixados como  $(\omega_1, \omega_2, p) = (3, 20, 5)$  com desvios padrão  $(\sigma_{\omega_1}, \sigma_{\omega_2}, \sigma_p) = (0.2, 2.5, 1)$ . Para otimizar o poder computacional, foram gerados 5000 valores para as variáveis de preço, fazendo com que no evento da simulação Monte-Carlo se trabalhasse com processo de reamostragem.

Para a geração das variáveis  $(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  deve se estabelecer os parâmetros para a simulação. Tendo em vista a possibilidade de compreender o comportamento das formas Primal e Dual, iremos utilizar 6 valores para  $\rho$  e 3 para  $\alpha$  para compreender o comportamento das aproximações lineares. Assim teremos arbitrariamente para este experimento os seguintes valores para os parâmetros da função 5:  $A = 3$ ,  $\alpha = (0.1, 0.5, 0.9)$ ,  $\rho = (-0.88, -0.02, 0.02, 0.2, 1, 5)$ ,  $\gamma = (0.9)$ ,  $\theta = 0.001$ , formando 18 vetores de parâmetros.

Os valores de  $\rho$  foram escolhidos tendo em vista que o menor valor possível que poderia assumir é  $-\gamma$ , portanto  $\rho \geq -0.9$ ; 3 dos 6 valores escolhidos de  $\rho$  estão em situações próximas do limite de menor valor e do ponto nulo. Os outros três valores buscam compreender como as estimativas dos parâmetros se comportam quanto maior a distância de  $\rho$  do ponto de origem. Já os valores de  $\alpha$  correspondem a situações de propensão de utilização entre insumos. Utilizaremos 3 tamanhos de amostras, sendo a quantidade de amostras escolhidas  $N$  tal que  $N = \{40, 120, 360\}$ , desta forma com 18 conjunto de parâmetros e 3 tamanhos de amostras teremos 54 experimentos que serão simulados 10000 vezes.

Uma vez feita a reamostragem dos vetores de preços, dentro de cada iteração, teremos de construir o vetor  $(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  utilizando as fórmulas 15, 16 e 17. Optou-se utilizar no R o pacote Rcpp, fazendo com que as funções de pontos ótimos fossem escritas em C++, importadas pelo comando sourceCpp. Nesta etapa, com este procedimento se poupou até 70% do tempo em relação a usar as funções diretamente em R.

### 3.2.1 Especificação Estocástica das simulações

Para a geração dos distúrbios nas variáveis  $(y, x_1, x_2)$  devemos levar em conta a inexistência de valores negativos, uma vez que teoricamente nenhuma variável construída até agora pode ter valor menor que zero. Das três especificações de erros que serão mostradas, cada uma tem uma forma diferente de ser trabalhada para evitar os valores negativos. Semelhante como apresentado por Just and Pope (1978), são os três modelos mais comuns:

$$\begin{aligned} y &= f(X) e^\varepsilon & \text{com } E(\varepsilon) &= 0 \\ y &= f(X) \varepsilon & \text{com } E(\varepsilon) &= 1 \\ y &= f(X) + \varepsilon & \text{com } E(\varepsilon) &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Basicamente temos duas fórmulas com erros multiplicativos e uma com erros aditivos. As formas multiplicativas são mais manejáveis quando se trata de evitar valores negativos. Isto se deve ao fato de que a esperança do termo que multiplicará por  $f(X)$  ser 1 (no caso de  $e^\varepsilon$  teremos que a esperança é dada por  $e^0 = 1$ ), uma vez que os desvios em torno da média representam variações percentuais na quantidade produzida e dos fatores alocados. No caso do termo de erro aditivo a representação gira em torno do quantum produzido. No formato aditivo o desvio padrão deve ser pequeno o suficiente para que nenhum valor seja negativo.

Duas contrapartidas para os modelos aditivos e multiplicativos são os modelos gerais de erro (Kumbhakar and Tsionas, 2011), sendo especificados por:

$$\begin{aligned} y &= f(x_1 - \varepsilon_1, x_2 - \varepsilon_2, \dots, x_j - \varepsilon_j) & \text{com } E(\varepsilon_i) &= 0 \quad \forall i \in [1, j] \\ y &= f(x_1 \varepsilon_1, x_2 \varepsilon_2, \dots, x_j \varepsilon_j) & \text{com } E(\varepsilon_i) &= 1 \quad \forall i \in [1, j]. \end{aligned} \quad (33)$$

Utilizando-se das duas formas de erros gerais, podemos adaptar isto para o caso em que também a quantidade de insumos consumida sofre distúrbios. Com erros adicionados nas demandas por insumo, Lusk et al. (2002) mostra que a própria noção de dualidade terá resultados inconsistentes, uma vez que estes erros de mensuração na demanda por insumos influenciam a função de lucro (por exemplo) se houver baixa variabilidade de preços. Este problema é contornado uma vez que a função utilizada será o nível de produção  $y$  em relação aos preços como variáveis duais, garantindo a dualidade de forma semelhante ao trabalho de Pope and Just (2003). Utilizando da Cobb-Douglas, os autores Bittencourt and Sampaio (2011) mostram que, uma vez que existam erros estocásticos na demanda por insumos a estimativa dos parâmetros pela forma dual detém um viés menor que a forma primal.

Destarte, tentaremos abranger a análise da Cobb-Douglas para a função CES, mostrando como se comportam as estimativas dos parâmetros nas formas Primal e Dual.

Os modelos Primal e Dual construídos serão regressidos por OLS. Nestes modelos, apenas as quantidades consumidas de insumos e de produto final sofrerão distúrbios, sendo compreendido no caso do vetor  $x$  como erros de mensuração e para  $y$  como choques aleatórios para a simulação Monte-Carlo:

$$\begin{aligned} y(\varepsilon_y) &= y e^{\varepsilon_y} \\ x_1(\varepsilon_1) &= x_1 e^{\varepsilon_1} \\ x_2(\varepsilon_2) &= x_2 e^{\varepsilon_2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Tanto  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_1$  como  $\varepsilon_2$  serão normalmente distribuídas e independentes, todas com média 0 e desvio padrão de 0.04. O valor do desvio padrão foi escolhido de tal forma que, o algoritmo para os distúrbios tem como valor limite a geração de variáveis com até 6 desvios padrão de distância da média, assim é possível garantir que com 6 desvios padrão de distância da média ainda seriam obtidos valores positivos. Para o caso em que se utilize 6 desvios-padrão seriam obtidos, utilizando de erros multiplicativos, variações percentuais como descritas abaixo, onde no exemplo utilizamos a variável  $y$  e sua variação percentual:

$$\begin{aligned} y(-0.24) &= y e^{-0.24} \Rightarrow y = y 0.7866 \\ y(0.24) &= y e^{0.24} \Rightarrow y = y 1.2712. \end{aligned} \quad (35)$$

Desta forma é bastante pouco provável que as variáveis  $(y, x_1, x_2)$  acabem sendo utilizadas em

valores menores que 78.66% do ponto ótimo ou 127.12% acima. Utilizando-se do logaritmo natural teremos:

$$\begin{aligned}\ln y(\varepsilon_y) &= \ln y + \varepsilon_y \\ \ln x_1(\varepsilon_1) &= \ln x_1 + \varepsilon_1 \\ \ln x_2(\varepsilon_2) &= \ln x_2 + \varepsilon_2.\end{aligned}\tag{36}$$

A construção dos modelos primal e dual serão construídas com estes erros nos modelos (19) e (29), reescritos como:

$$\begin{aligned}\ln y(p, \boldsymbol{\omega}, t, \boldsymbol{\nu}, \varepsilon_y) &= \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \ln x_1(p, \boldsymbol{\omega}, t, \boldsymbol{\nu}, \varepsilon_1) + \beta_3 \ln x_2(p, \boldsymbol{\omega}, t, \boldsymbol{\nu}, \varepsilon_2) + \\ &+ \beta_4 (\ln x_1(p, \boldsymbol{\omega}, t, \boldsymbol{\nu}, \varepsilon_1) - \ln x_2(p, \boldsymbol{\omega}, t, \boldsymbol{\nu}, \varepsilon_2))^2 + \varepsilon_{kp}.\end{aligned}\tag{37}$$

$$\ln y(p, \boldsymbol{\omega}, t, \boldsymbol{\nu}, \varepsilon_y) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \ln p + \beta_3 \ln \omega_1 + \beta_4 \ln \omega_2 + \beta_5 (\ln \omega_1 - \ln \omega_2)^2 + \varepsilon_{kd}.\tag{38}$$

Por fim, para analisar a consistência quando se reverte os vetores de preços, invertemos  $\omega_1$  por  $\omega_2$  e reproduzir todo o experimento. Este procedimento busca compreender a sensibilidade das estimativas dos parâmetros, uma vez que se espera que nesta inversão para valores de  $\alpha$  simétricos ( $\alpha = 0.1$  e  $\alpha = 0.9$  por exemplo) sejam obtidas estimativas simétricas.

## 4 DISCUSSÃO DE RESULTADOS

As estimativas de alguns dos parâmetros correspondem com os resultados obtidos pela literatura. No caso das estimativas dos parâmetros  $\hat{\gamma}$  e  $\hat{\theta}$  pode-se observar que o viés de ambas as estimativas obtidas por OLS tendem a zero e são não correlacionados, expressando graficamente o comportamento de erros esféricos (Figura 1). No caso Primal percebe-se uma variância maior, onde ambos são consistentes quando se aumenta a amostra (Figura 1). Uma vez que estes resultados para estes dois parâmetros condizem com a literatura, segue-se para a análise dos outros parâmetros  $\hat{A}$ ,  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\rho}$ .

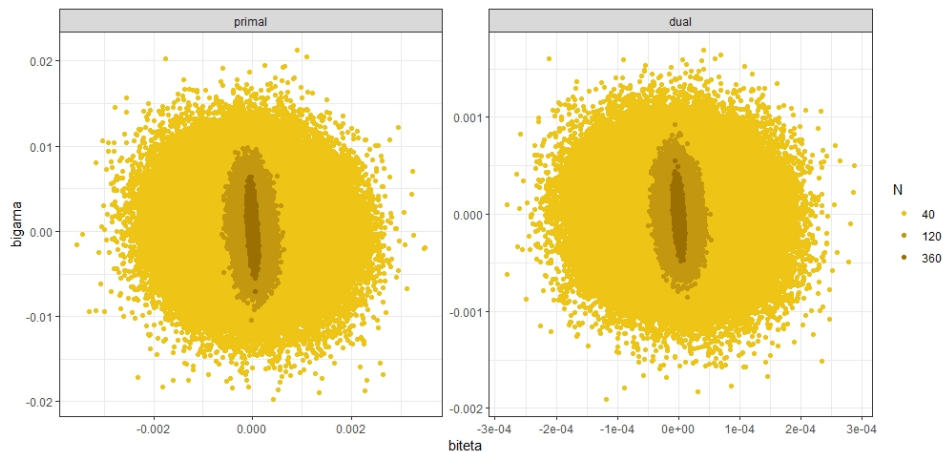


Figura 1: Viés de  $\hat{\gamma}$  e  $\hat{\theta}$  agrupados pelo tamanho das amostras

Analisando em seguida a relação das estimativas de  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\rho}$ , assim como a forma com que se comportam conjuntamente nas formas Primal e Dual, observa-se preliminarmente com a Figura 2, 3 e 4 que as estimativas no modelo Primal são simétricas quando se inverte o padrão de preços de  $E(\omega_1) = 3$  e  $E(\omega_2) = 20$  para  $E(\omega_1) = 20$  e  $E(\omega_2) = 3$ . A simetria para o caso Primal fica clara quando se compara a Figura 2 com a Figura 4, ou apenas utilizando a Figura 3. Todavia no caso Dual as estimativas destes parâmetros não seguem um comportamento simétrico, fato que ficará mais claro com a análise da Figura 5 mais adiante.

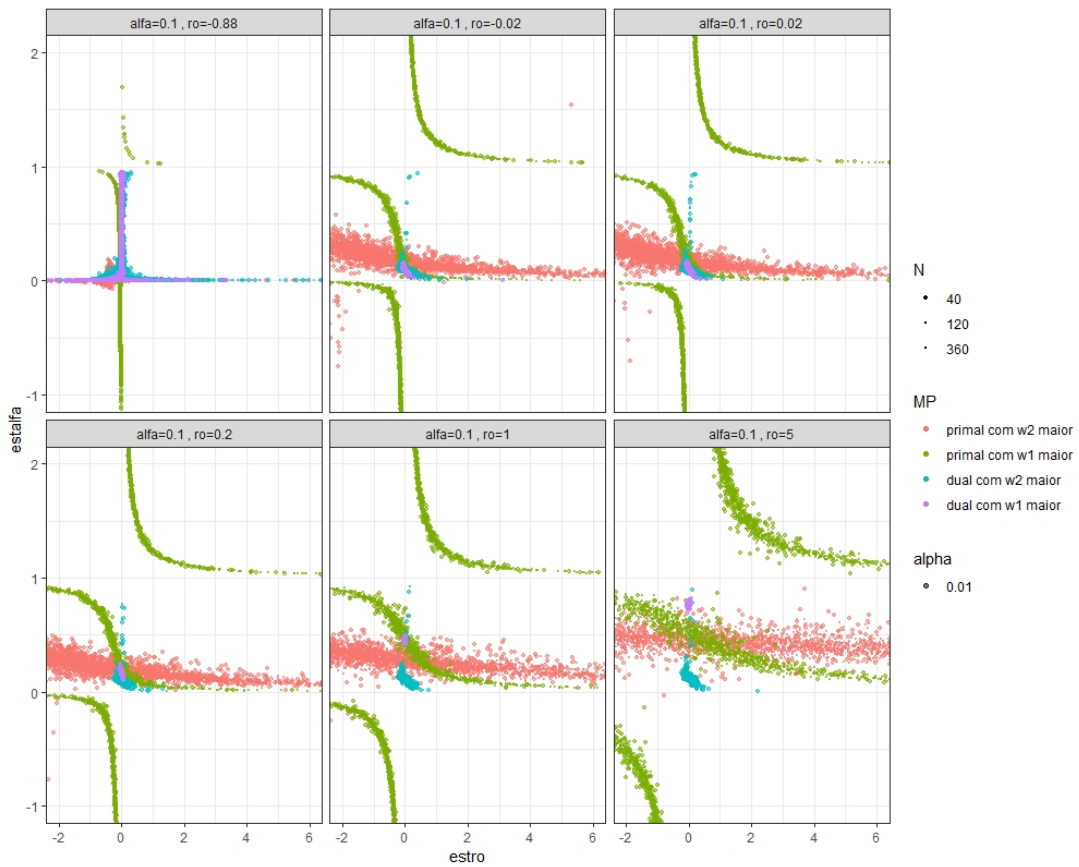


Figura 2: Estimativas de  $\hat{\rho}$  e  $\hat{\alpha}$  com  $\alpha = 0.1$

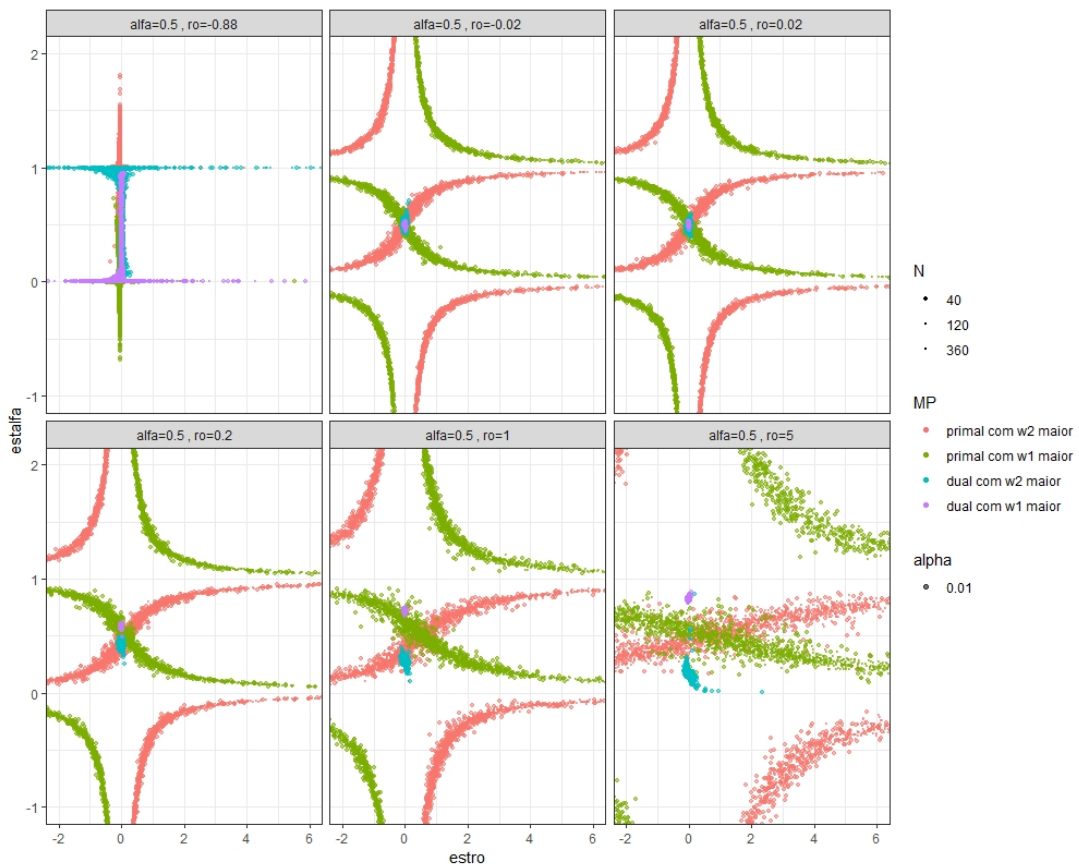


Figura 3: Estimativas de  $\hat{\rho}$  e  $\hat{\alpha}$  com  $\alpha = 0.5$

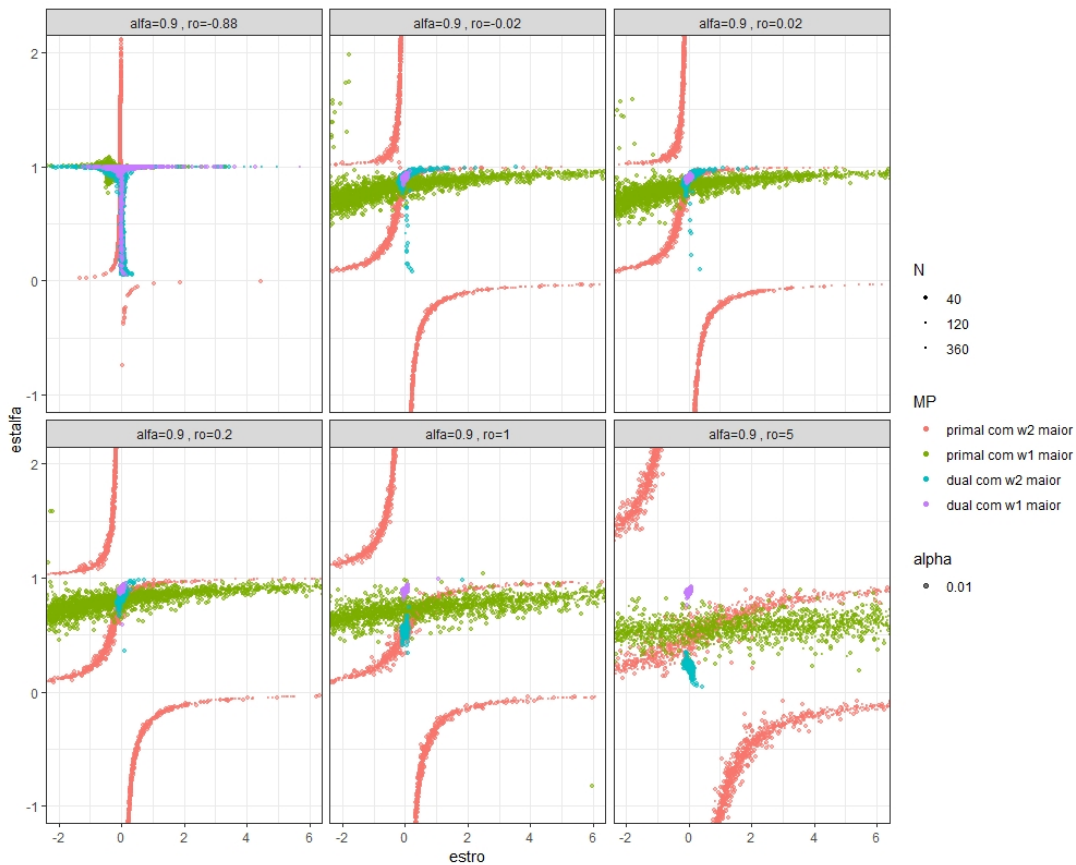


Figura 4: Estimativas de  $\hat{\rho}$  e  $\hat{\alpha}$  com  $\alpha = 0.9$

Observa-se que o modelo Dual tem estimativas de  $\hat{\rho}$  bastante próximas de 0, enquanto no modelo Primal existe uma dispersão bastante elevada dos valores estimados, ficando cada vez mais dispersa quanto maior for o  $\rho$  original (Figura 2, 3 e 4). Preliminarmente percebe-se também que o caso Dual, até pela construção da estimativa de  $\hat{\alpha}$  não tem valores negativos ou superiores a 1, mostrando que a construção do modelo Dual foi mais rigorosa neste contexto, onde o modelo Primal, mais uma vez, mostra estimativas bastante esparsas.

Sobre os valores verdadeiros e estimados, alguns comportamentos são como esperados. Quanto mais próximo está o  $\rho$  verdadeiro do valor de  $\gamma$ , mais esta função se aproxima de uma função de produção com elasticidade de substituição infinita, com substituíbilidade quase perfeita na alocação de fatores, levando as estimativas nestas situações a menores dispersões, por outro lado, neste caso, a estimativa de  $\alpha$  se aproxima de 0 quando seu valor verdadeiro é 0.1, ou de 1 no caso em que seu valor verdadeiro é de 0.9 (Figura 5).

No caso em que  $\alpha = 0.5$  qual seria, então, as estimativas de  $\hat{\alpha}$ ? Neste caso, tanto na forma Primal como na forma Dual, os valores das estimativas de  $\hat{\alpha}$  acabam se direcionando não ao parâmetro verdadeiro, mas a um valor que indique maior utilização do fator com menor preço.

Quando o  $\rho$  verdadeiro se distancia de 0 a caminho de uma função de produção do tipo Leontieff, observa-se com rigidez nas proporções utilizadas cada vez maior quanto maior  $\rho$ . Para o caso Primal as estimativas de  $\hat{\alpha}$  se direcionam para o valor de 0.5 com grande variância (Figura 5). De forma contrária do que ocorre no caso Primal, as estimativas de  $\hat{\alpha}$  no caso Dual quando se invertem os vetores de preços não implica em simetria, mas sim no aumento da distância dos  $\hat{\alpha}$  e concentração cada vez mais patente na utilização mais intensiva do insumo com o maior preço (Figura 5).

A estimativa de  $A$  quando se compara as fórmulas de recuperação parece ter um comportamento mais simples no caso Primal que no caso da fórmula da sua contrapartida Dual, todavia graficamente a percepção é diferente (Figuras 6 e 7). Percebe-se que  $A$  no caso Primal varia de valores muito menores que o valor verdadeiro até valores muito maiores, comparativamente com sua estimativa Dual. Comparando o comportamento de  $\hat{A}$  com  $\hat{\rho}$  e  $\hat{\alpha}$  (Figuras 6 e 7) e a densidade das estimativas de  $\hat{A}$  (Figura 8), observa-se que o comportamento destas estimativas pelo OLS é bastante difusa e altamente dependente do vetor da utilização de insumos, vetor de preços, assim como dos valores verdadeiros de  $\alpha$  e  $\rho$ .

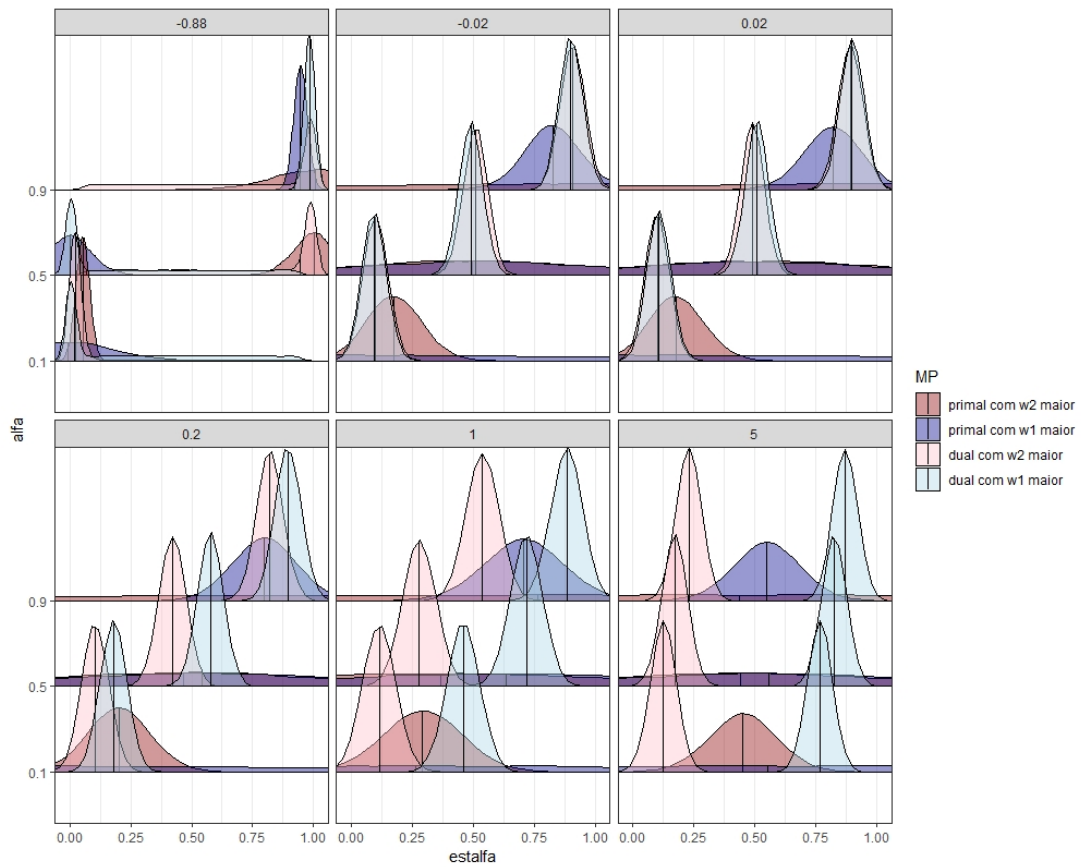


Figura 5: Densidade de  $\hat{\alpha}$  comparados com  $\alpha$  verdadeiro e agrupados por  $\rho$

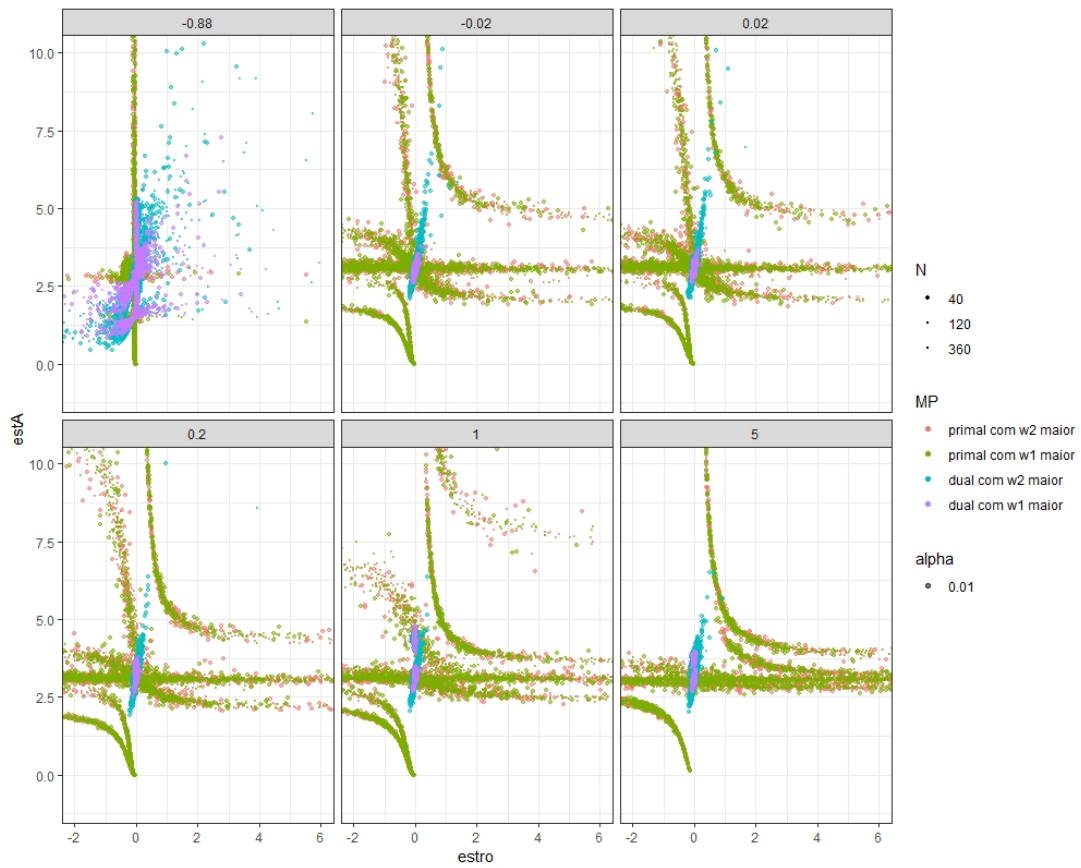


Figura 6: Estimativas de  $\hat{\rho}$  e  $\hat{A}$  agrupados por  $\rho$



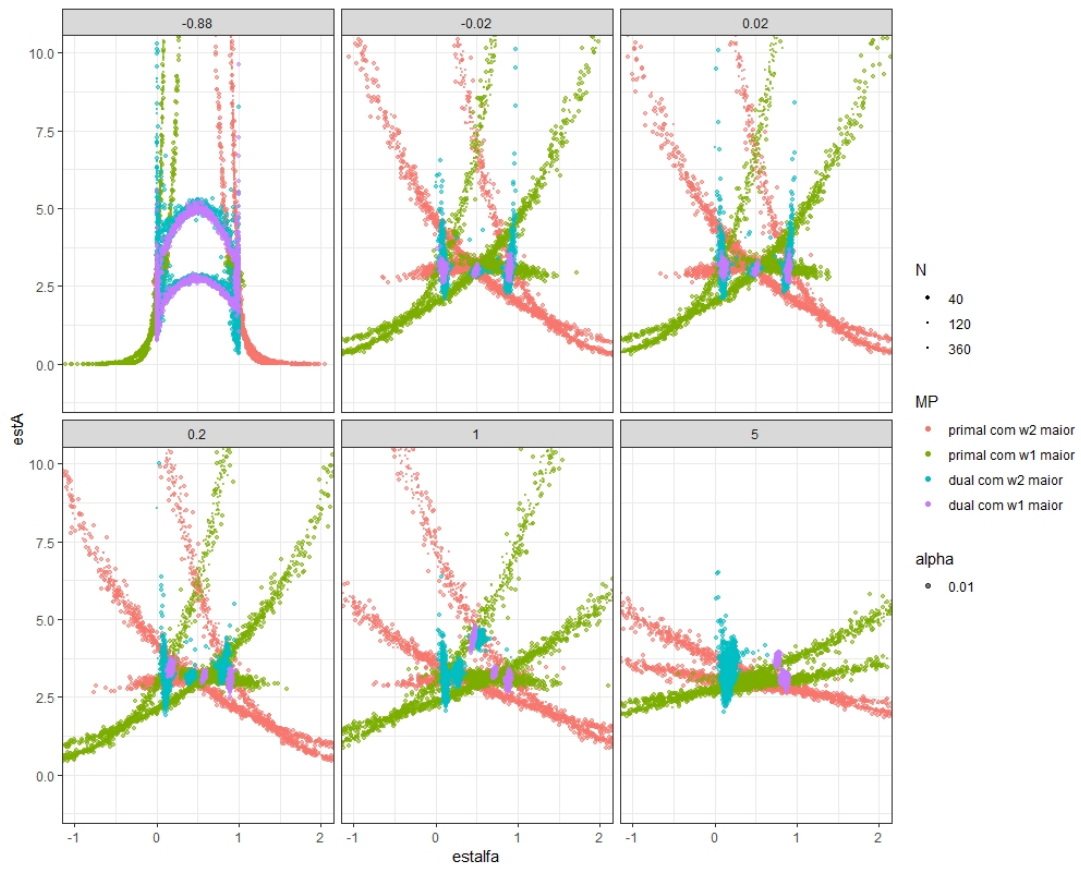


Figura 7: Estimativas de  $\hat{A}$  e  $\hat{\alpha}$  agrupados por  $\rho$

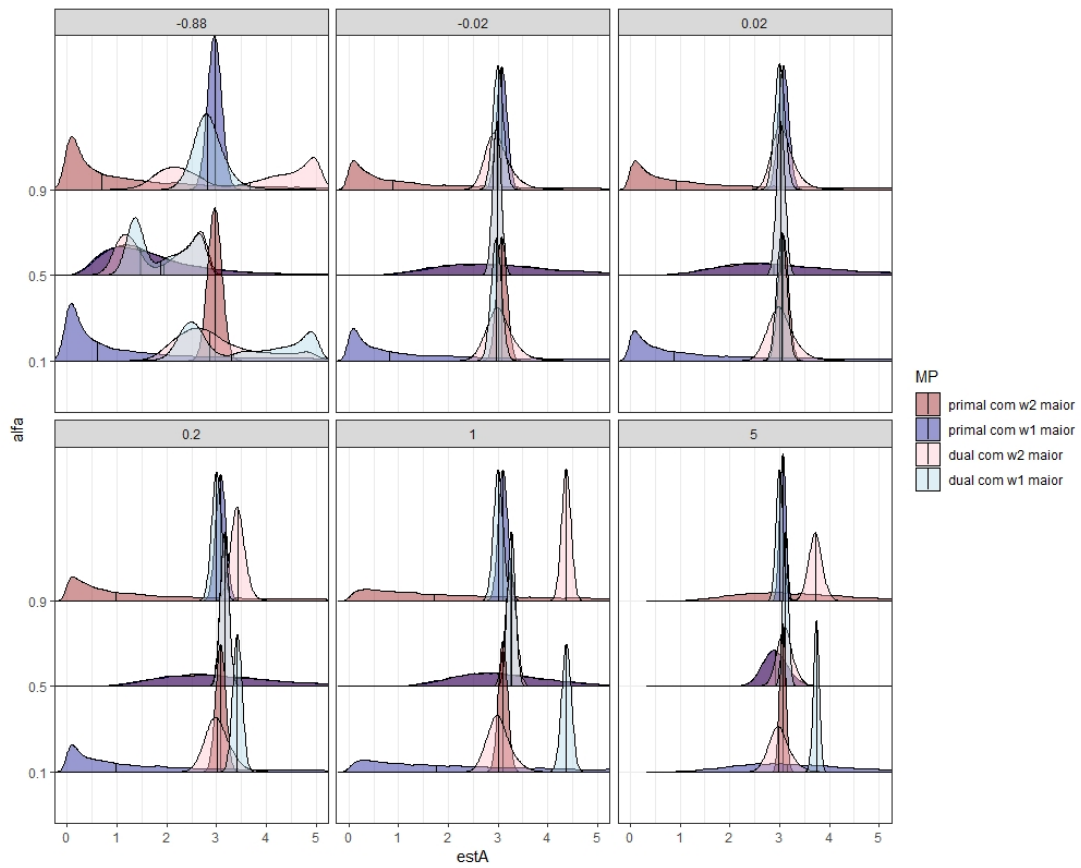


Figura 8: Densidade de  $\hat{A}$  agrupados por  $\alpha$  verdadeiro e  $\rho$  verdadeiro

## CONCLUSÃO

Buscou-se primeiramente neste trabalho estabelecer uma solução Dual para a função CES-ACMS e sua extensão com retornos decrescentes de escala e um termo neutro de Hicks. Um dos percalços enfrentados foi de que não foi possível descrever um modelo econométrico utilizando a estratégia de Kmenta (1967) para o caso dual utilizando a função Lucro, uma vez que os termos internos se anulavam quando utilizando uma expansão de Taylor de primeira ordem; optou-se, neste caso, por fazer uma substituição das variáveis primais independentes pelas variáveis duais, permanecendo  $y$  como a variável dependente.

Utilizando-se de erros multiplicativos, para evitar com mais facilidade a possibilidade de valores negativos, incorporou-se erros de mensuração nas variáveis de consumo de insumos, assim como choques aleatórios no nível de produção tendo em vista a simulação Monte-Carlo. Tanto as estimativas de  $\hat{\gamma}$  como de  $\hat{\theta}$  não tiveram viés na média, todavia na regressão dual se obteve resultados mais eficientes (Figura 1). Para os parâmetros  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{A}$  as estimativas, na média, de ambos se deram muito próximas dos valores verdadeiros apenas quando  $\rho$  estava próximo de zero, reforçando o diagnóstico de Thursby and Lovell (1978) de que as estimativas dependem da proximidade com o ponto de aproximação da expansão de Taylor (Figuras 2 a 8).

Uma das vantagens de se tratar pela forma Dual em relação a Primal é a capacidade de limitação, mesmo que por um algoritmo como o de Newton-Raphson, do intervalo inferior e superior de  $\hat{\alpha}$ , o que não ocorre com o modelo Primal. Outra diferença quando se trata das estimativas de  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\rho}$  é o comportamento assintótico no modelo Primal o que diverge drasticamente das estimativas no modelo Dual que estão todas muito mais concentradas.

Embora com a percepção do comportamento dos diversos parâmetros conforme o  $\rho$  verdadeiro se distancie do ponto escolhido para a expansão de Taylor, os resultados para a forma Dual não trouxeram maiores ganhos nas estimativas de  $\hat{A}$ ,  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\rho}$ , comparativamente ao modelo primal com erros de mensuração na demanda por insumos; com exceção do entorno de  $\rho$  tendendo a zero, onde foram obtidas estimativas consistentes para o modelo Dual de todos os parâmetros, enquanto o modelo Primal exibiu padrão de estimação enviesado.

Um resultado ainda não explorado pela literatura foi o fato de que no caso Dual, ao se inverter os vetores de preços não se observou um comportamento de simetria das estimativas de  $\hat{\alpha}$  (Figura 5). Uma visão possível para futuros trabalhos corresponde ao caso em que seja possível ter algum nível de informação sobre o parâmetro  $\rho$  verdadeiro utilizando a inversão dos preços para o caso Dual, uma vez que a distância das estimativas de  $\hat{\alpha}$  aumenta conforme o  $\rho$  verdadeiro; mesmo tendo em vista que neste caso seria necessário um nível de informação mais elevado do que o exigido apenas para o caso Primal ou apenas Dual, uma vez que a comparação de ambas as formas seria necessária, indo na contramão da simplicidade dos modelos primais e da menor necessidade de dados para os casos duais.

# Referências Bibliográficas

- Jürgen Antony. A class of changing elasticity of substitution production functions. *Journal of Economics*, 100(2):165–183, 2010.
- Kenneth J Arrow, Hollis B Chenery, Bagicha S Minhas, and Robert M Solow. Capital-labor substitution and economic efficiency. *The Review of Economics and Statistics*, pages 225–250, 1961.
- Ernst R Berndt. Reconciling alternative estimates of the elasticity of substitution. *The Review of Economics and Statistics*, pages 59–68, 1976.
- M.V.L. Bittencourt and A.V. Sampaio. Are dual and primal estimations equivalent in the presence of stochastic errors in input demand? *Brazilian Review of Econometrics*, 31(2):295–313, 2011.
- Bryan W Brown and Mary Beth Walker. Stochastic specification in random production models of cost-minimizing firms. *Journal of Econometrics*, 66(1):175–205, 1995.
- R.L. Burden and J.D. Faires. *Numerical Analysis*. Cengage Learning, Boston - EUA, 2011.
- David F Burgess. Duality theory and pitfalls in the specification of technologies. *Journal of Econometrics*, 3(2):105–121, 1975.
- Charles W Cobb and Paul H Douglas. A theory of production. *The American Economic Review*, 18(1):139–165, 1928.
- Vittorio Corbo. A search procedure for least squares ces estimates: A monte-carlo study. *Southern Economic Journal*, pages 1466–1477, 1977.
- Olivier de La Grandville. In quest of the slutsky diamond. *The American Economic Review*, pages 468–481, 1989.
- W Erwin Diewert. Duality approaches to microeconomic theory. *Handbook of mathematical economics*, 2:535–599, 1982.
- A. Henningsen and G.Henningsen. Econometric estimation of the constant elasticity of substitution function in r: Package miceconces. 2011.
- A. Henningsen and G.Henningsen. On estimation of the ces production function - revisited. 2012.
- John Hicks. *The theory of wages*. Springer, 1963.
- Harold Hotelling. Edgeworth’s taxation paradox and the nature of demand and supply functions. *Journal of Political Economy*, 40(5):577–616, 1932.
- Richard E Just and Rulon D Pope. Stochastic specification of production functions and economic implications. *Journal of econometrics*, 7(1):67–86, 1978.
- Jan Kmenta. On estimation of the ces production function. *International Economic Review*, 8(2):180–189, 1967.

- T Krishna Kumar and James H Gapinski. Nonlinear estimation of the ces production parameters: a monte carlo study. *The Review of Economics and Statistics*, pages 563–567, 1974.
- Subal C Kumbhakar and Efthymios G Tsionas. Stochastic error specification in primal and dual production systems. *Journal of Applied Econometrics*, 26(2):270–297, 2011.
- Kenneth Levenberg. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly of applied mathematics*, 2(2):164–168, 1944.
- Jayson L Lusk, Allen M Featherstone, Thomas L Marsh, and Abdullahi Abdulkadri. Empirical properties of duality theory. *The Australian Journal of Agricultural and Resource Economics*, pages 45–68, 2002.
- Donald W Marquardt. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2):431–441, 1963.
- Daniel McFadden. Constant elasticity of substitution production functions. *The Review of Economic Studies*, 30(2):73–83, 1963.
- Rulon D Pope. The generalized envelope theorem and price uncertainty. *International Economic Review*, pages 75–86, 1980.
- Rulon D Pope. To dual or not to dual? *Western Journal of Agricultural Economics*, 7(2):337–351, 1982.
- Rulon D Pope and Richard E Just. Distinguishing errors in measurement from errors in optimization. *American Journal of Agricultural Economics*, 85(2):348–358, 2003.
- Nagesh S Revankar. A class of variable elasticity of substitution production functions. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 61–71, 1971.
- A. A. Ribeiro and E. W. Karas. *Um curso de Otimização Contínua: Aspectos teóricos e computacionais*. Cengage Learning, São Paulo, 2013.
- Gary D Thompson and Mark Langworthy. Profit function approximations and duality applications to agriculture. *American Journal of Agricultural Economics*, 71(3):791–798, 1989.
- Jerry Thursby. Alternative ces estimation techniques. *The Review of Economics and Statistics*, pages 295–299, 1980.
- Jerry G Thursby and CA Knox Lovell. An investigation of the kmenta approximation to the ces function. *International Economic Review*, pages 363–377, 1978.
- Hirofumi Uzawa. Production functions with constant elasticities of substitution. *The Review of Economic Studies*, 29(4):291–299, 1962.