

# PROPULSÃO II

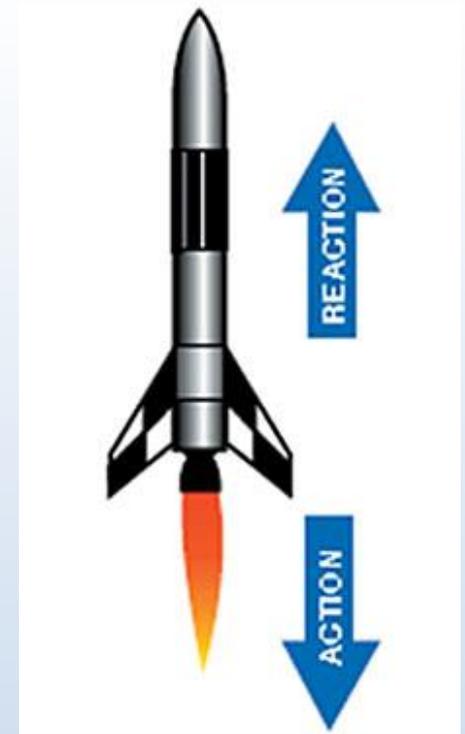
## Motores Foguete

### Dinâmica

Prof. José Eduardo Mautone Barros

[mautone@demec.ufmg.br](mailto:mautone@demec.ufmg.br)

[www.mautone.eng.br](http://www.mautone.eng.br)



## ☐ Voo Horizontal

- Delta V , Ganho de Velocidade Ideal

- sem atrito (vácuo)

- voo sem gravidade

- velocidade efetiva constante

- empuxo tangente a trajetória

- integração do tempo inicial (i) ao tempo final (f) de voo propulsado

$$F = - \frac{dM}{dt} c = M \frac{dV}{dt}$$

Razão de massas ( $\Lambda$ )

$$\Lambda = \frac{M_i}{M_f}$$

$$dV = -c \frac{dM}{M}$$

$$\Delta V = V_f - V_i = -c \ln \frac{M_f}{M_i} = c \ln \Lambda$$

# Motores Foguete

Razão de massas ( $\Lambda$ )

Razão empuxo/peso ( $\psi_0$ )

$$\Lambda = \frac{M_i}{M_f} \quad \psi_0 = \frac{F}{M_i g_0}$$

## □ Voo Vertical

- Voo no vácuo
- Aceleração da gravidade constante (até 100 km)

$$M \frac{dV}{dt} = - \frac{I_{sp}}{g_0} c \frac{dM}{dt} - M g_0 \quad \frac{dh}{dt} = V$$

- Tempo até o apogeu  $t_a = I_{sp} \ln \Lambda$
- Altitude máxima (apogeu)

$$h_a = \frac{g_0 I_{sp}^2}{\psi_0} \left( \frac{1}{2} \psi_0 \ln^2 \Lambda - \ln \Lambda - \frac{1}{\Lambda} + 1 \right)$$

## □ Dinâmica de dois corpos

- Usando a 2ª Lei de Newton e a Lei da Gravitação Universal em coordenadas polares, em um plano

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = g_0 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \qquad \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

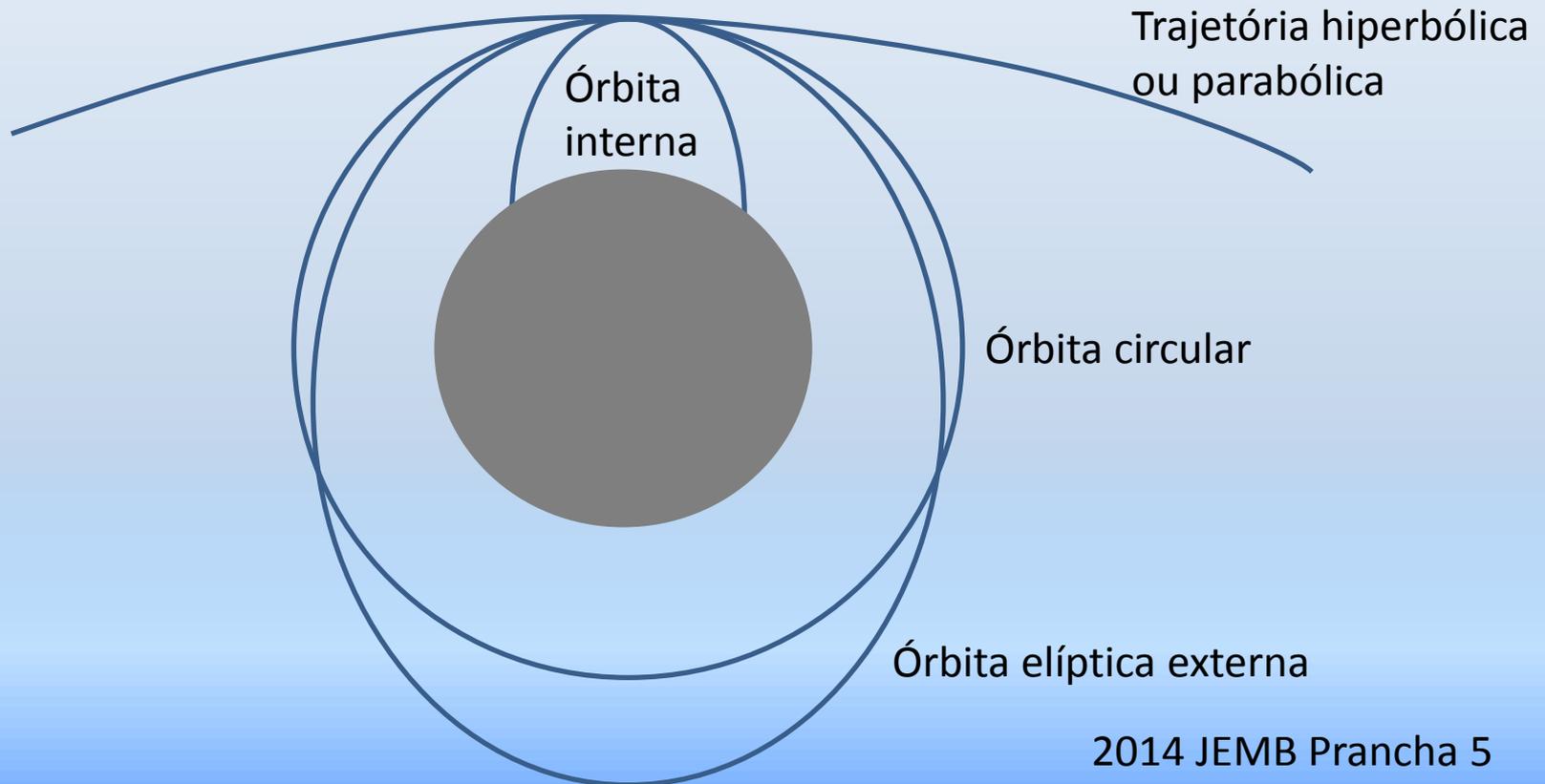
$R$  = raio do corpo celeste

$r$  = distância do veículo até o centro do corpo

$g_0$  = aceleração da gravidade na superfície do corpo celeste

## □ Dinâmica de dois corpos

- Órbitas possíveis



## □ Trajetória balística

- Voo no vácuo
- Alcance

$$\gamma_i = \frac{V_i}{\sqrt{g_0 R}}$$

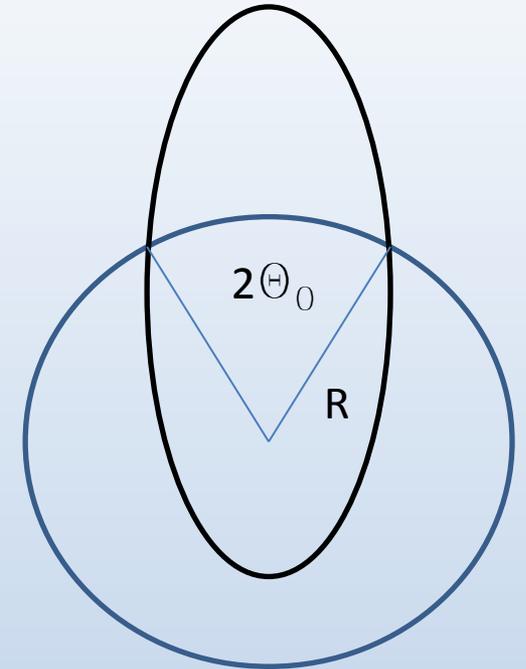
$$L = 2R\theta_0 = 2R \arccos \left( \frac{2\sqrt{1 - \gamma_i^2}}{2 - \gamma_i^2} \right)$$

- Altitude máxima

$$H = R \frac{\sqrt{1 - \gamma_i^2}}{2 - \gamma_i^2} \left( 1 - \sqrt{1 - \gamma_i^2} \right)$$

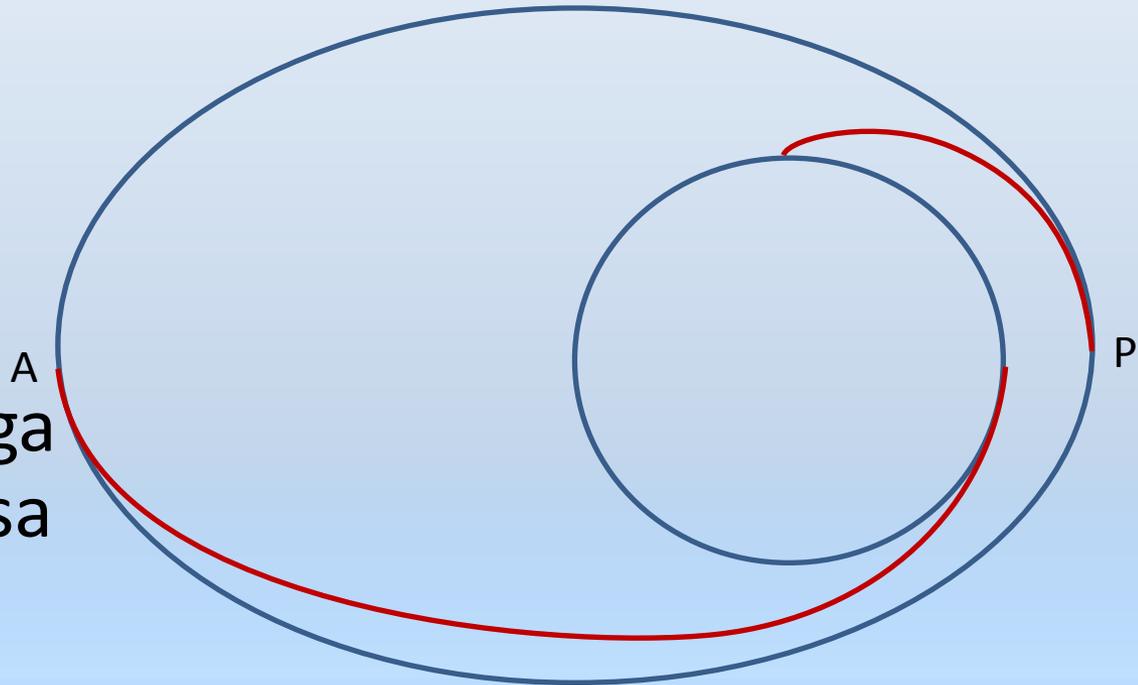
- Ângulo de lançamento

$$\omega_i = \frac{1}{2} \arcsen \left( \frac{2\sqrt{1 - \gamma_i^2}}{2 - \gamma_i^2} \right)$$



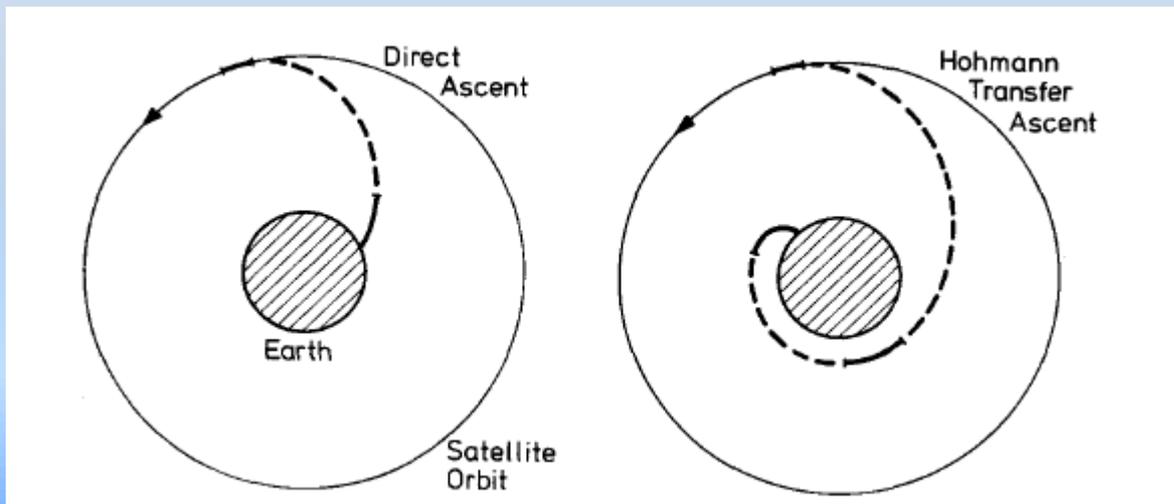
## ❑ Lançamento de satélites

- Voo no vácuo
- Variação da aceleração da gravidade com a altitude
- Trajetória A exige menor energia
- Trajetória P possui menor carga aerodinâmica e usa menos estações de rastreamento



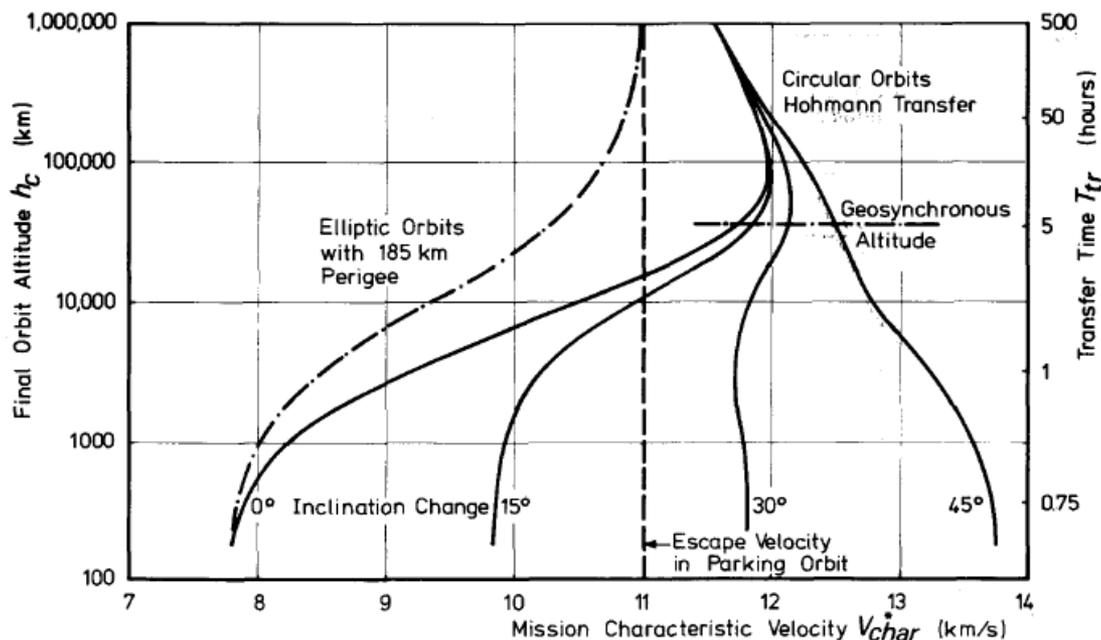
## ❑ Lançamento de satélites

- Delta V requerido: 8 a 16 km/s
- O lançador leva o veículo até uma órbita circular baixa entre 100 e 200 km de altitude
- O veículo deve seguir uma órbita de transferência tipo *Hohmann* para chegar a sua órbita final, com os seus próprios motores. (motor de apogeu)



## ☐ Lançamento de satélites

- O delta V requerido depende do ponto de lançamento e da inclinação da órbita.
- O mínimo delta V para uma órbita circular a 185 km de altitude é de 7797 m/s



## ☐ Foguete Multi-estágios

- Voo no vácuo  $M_{in} = M_{un} + M_{sn} + M_{pn}$
- Massa inicial ( $i$ ) = carga útil ( $u$ ) mais estrutura ( $s$ ) mais propelente ( $p$ )
- Foguete de  $N$  estágios
- Para o estágio  $n$   $u_n = \frac{M_{un}}{M_{in}} = \frac{1}{\Lambda_n}$
- Razão de carga útil ( $u$ )



$$u = \frac{M_u}{M_{i1}} = \frac{M_u}{M_{iN}} \frac{M_{iN}}{M_{i(N-1)}} \cdots \frac{M_{i2}}{M_{i1}} = \frac{1}{\Lambda}$$

## ☐ Foguete Multi-estágios

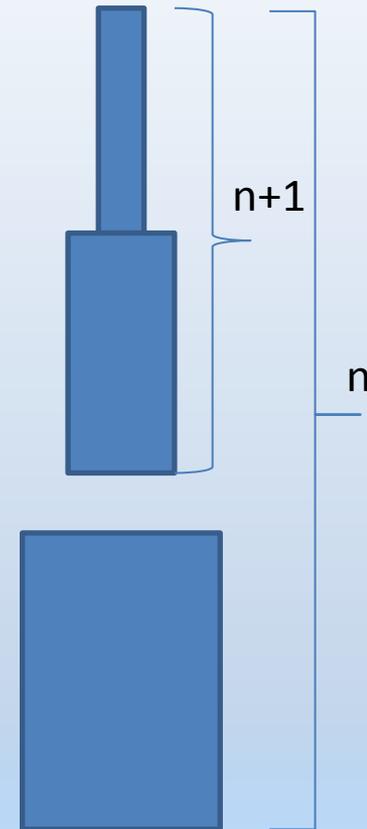
- Voo no vácuo  $\Delta V_n = c_n \ln \Lambda_n$

$$\Delta V = \sum_{n=1}^N \Delta V_n = \sum_{n=1}^N c_n \ln \Lambda_n$$

$$u_n = \frac{1}{\Lambda_n} = \frac{\eta_{sn} - \Lambda_n}{\eta_{sn} - 1}$$

- Condição de máximo para em função de  $\Lambda_n$

$$\sum_{n=1}^n \ln u_n = \text{máximo}$$

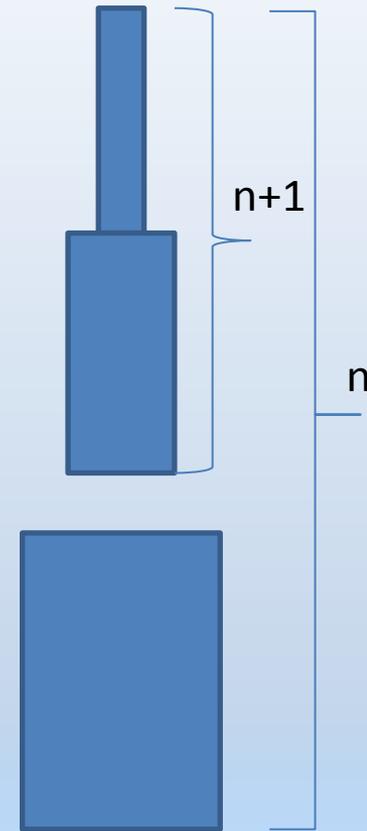


## ☐ Foguete Multi-estágios

- Usando a técnica de otimização multivariada dos multiplicadores de Lagrange, no caso é necessário apenas um  $(1/v)$ ,

$$U = \sum_{n=1}^N \ln u_n - \frac{1}{v} \left( \Delta V - \sum_{n=1}^N c_n \ln \Lambda_n \right)_{max}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Lambda_n} = 0$$



## ☐ Foguete Multi-estágios

- Condições ótimas

*Resolver para  $v$*

$$\Delta V = \sum_{i=1}^N c_n \left[ \ln \eta_{sn} + \ln \left( 1 - \frac{v}{c_n} \right) \right]$$

*Solução do problema*

$$\Lambda_n = \left( 1 - \frac{v}{c_n} \right) \eta_{sn}$$

- Para  $c$  constante,

$$1 - \frac{v}{c} = \frac{1}{\eta_s} \exp \left( \frac{\Delta V}{Nc} \right) \quad \ln \eta_s = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \eta_{sn}$$



## ☐ Foguete Multi-estágios

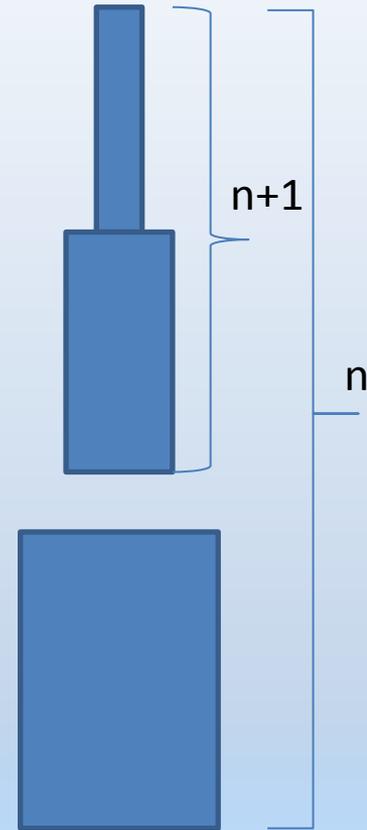
- Assim

$$\Lambda_n = \frac{\eta_{sn}}{\eta_s} \exp\left(\frac{\Delta V}{Nc}\right)$$

$$u = \left[ \eta_s \exp\left(-\frac{\Delta V}{Nc}\right) - 1 \right]^N \prod_{n=1}^N \frac{1}{(\eta_{sn} - 1)}$$

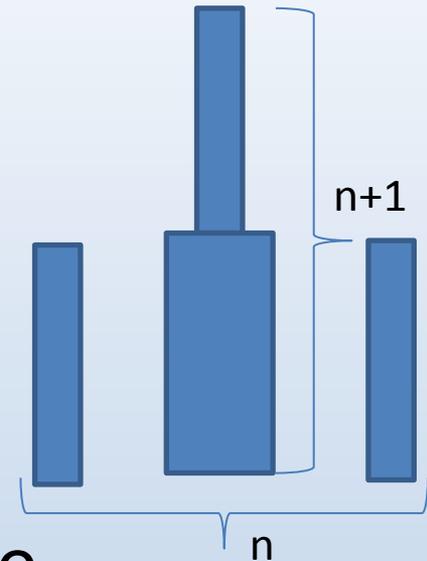
- Para  $\eta_{sn}$  constante,

$$u = \frac{M_u}{M_{i1}} = \left[ \frac{\eta_s \exp\left(-\frac{\Delta V}{Nc}\right) - 1}{(\eta_s - 1)} \right]^N$$



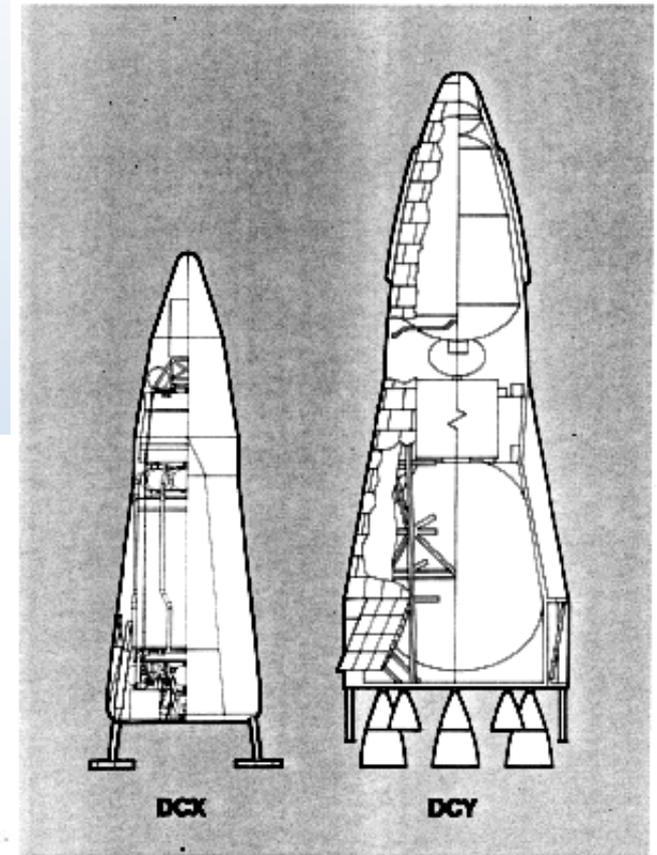
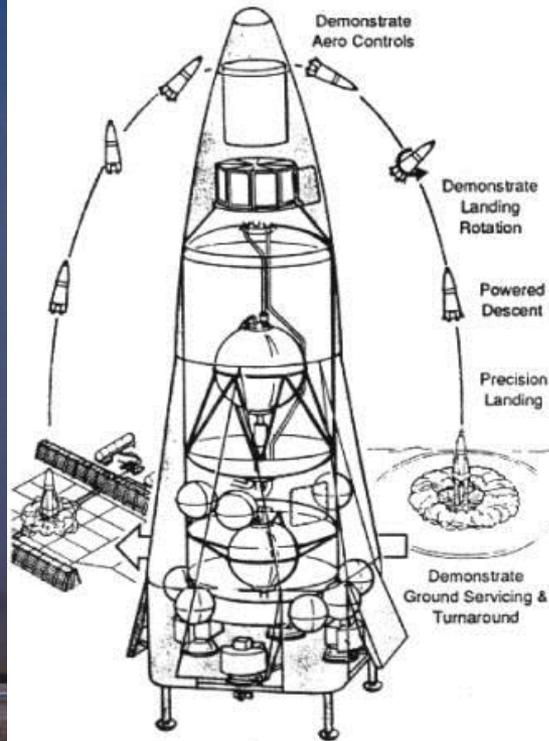
## ❑ Foguete Multi-estágios

- Estágios em paralelo
- Reduz perdas gravitacionais
- Aumenta a área transversal, ou seja, provoca mais arrasto
- Reduz eficiência dos bocais do foguete com a variação de altitude
- Possibilidade de transferência de combustível entre estágios em voo (*crossfeed*)



## □ Uso do Delta V

- Exemplo DC-XA
  - SSTO (*Single Stage to Orbit*)



**DC-X Suborbital Vehicle**  
Phase II Program  
Fly Spring 1993

**DC-X Vehicle Characteristics**

Empty Weight	22,780 lb.
Gross Liftoff Weight	41,630 lb.
Vehicle Height	39 ft.

**DC-Y Orbital Prototype**  
Phase III Program  
Fly Summer 1996

**DC-Y Vehicle Characteristics**

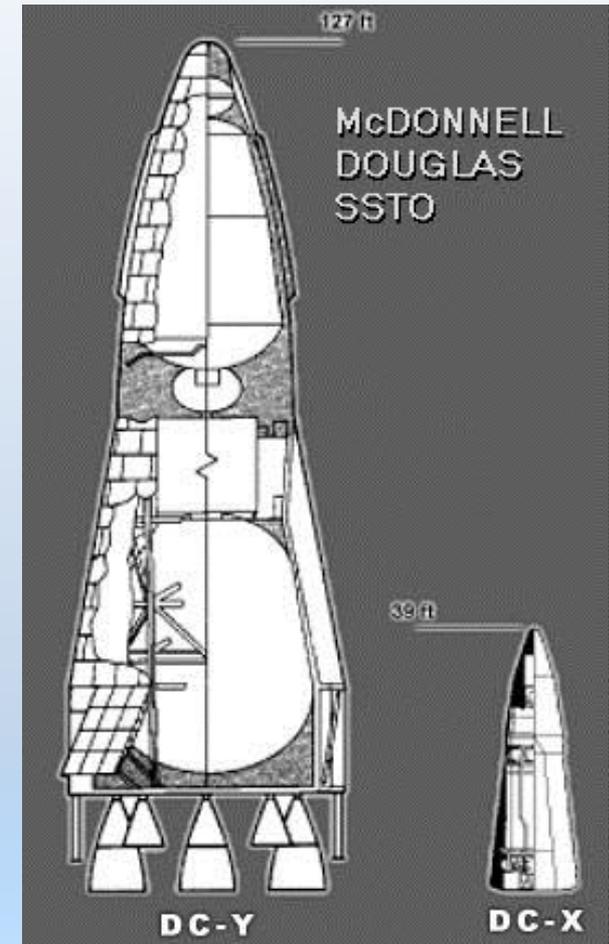
Empty Weight	104,100 lb.
Gross Liftoff Weight	1,279,000 lb.
Vehicle Height	127 ft.

## □ Uso do Delta V

- Exemplo

- SSTO (*Single Stage to Orbit*)

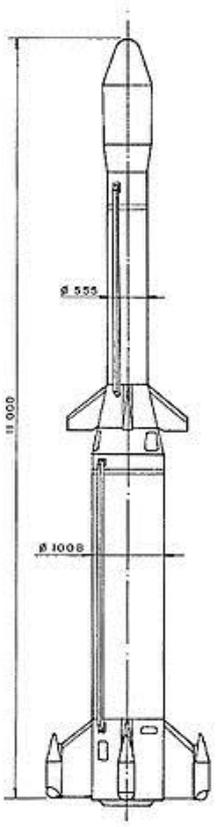
- LEO (100 km, 8000 m/s)
    - 1 estágio
    - $I_{sp}$  de 340 s
    - Massa de carga útil e estrutura: 50 toneladas métricas
    - Calcular a massa na decolagem do veículo variando com a eficiência estrutural.
    - O SSTO foguete é viável com a tecnologia atual?



## □ Uso do Delta V

- Exemplo - Voo vertical
  - Foguete de sondagem (Sonda IV)

- 2 estágios
- Fator de eficiência estrutural de 5
- $I_{sp}$  de 210 s
- Massa de carga útil: 500 kg
- Altitude de perigeu: 730 km
- Massa na decolagem: **7270 kg**
- Empuxo médio dos 2 estágios: 150 kN
- Calcular as massas de propelente e estrutura do 1º e 2º estágios. Calcular a massa na decolagem do veículo.
- Comparar com os dados disponíveis para o Sonda IV. Explicar as diferenças encontradas.



## □ Uso do Delta V

- Exercício

- Míssil balístico (Coreia do Norte - EUA)

- 1 estágio
    - Fator de eficiência estrutural de 11,5
    - $I_{sp}$  de 320 s
    - Massa de carga útil: 200 kg
    - Calcular as massas de propelente, de estrutura e a massa total na decolagem do veículo.
    - Qual o ângulo ótimo de início de voo?
    - Qual é a altitude máxima atingida?



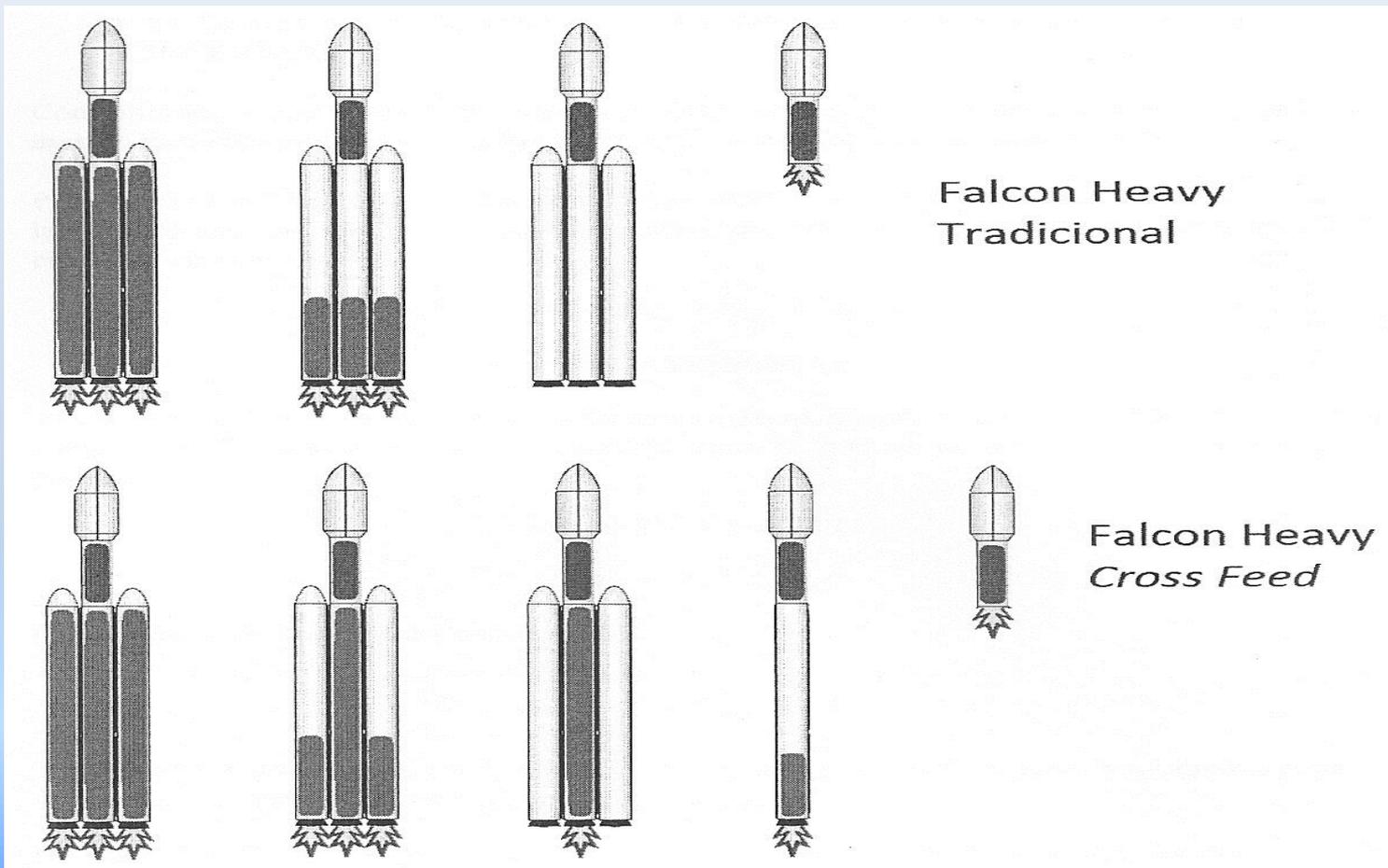
## ☐ Uso do Delta V

- Exercício (Falcon 9)
  - Lançador de satélite, estágios em série 2 estágios
  - Fator de eficiência estrutural de 10
  - $I_{sp}$  de 300 s
  - Massa de carga útil: 6600 kg
  - Velocidade característica da missão: 7,7 km/s
  - Altitude de perigeu: 185 km
  - Massa na decolagem: 333400 kg
  - Calcular as massas de propelente e estrutura do 1º e 2º estágios. Calcular a massa na decolagem do lançador.



## □ Uso do Delta V

- Exercício (Falcon Heavy)



## □ Uso do Delta V

- Exercício (Falcon Heavy)
  - Lançador de satélite, estágios em paralelo e em série
    - Caso (a) 2 boosters em paralelo, idênticos ao 1º estágio do Falcon 9. Os 2 boosters são ejetados no final da sua queima de propelente.
    - Caso (b) 2 boosters em paralelo, iguais aos motores do 1º estágio do Falcon 9 e mesmos motores. Considere a transferência de combustível entre os tanques na metade do tempo de queima do 1º estágio (*crossfeed*). Os 2 boosters são ejetados no final da transferência dos propelentes.
    - Qual a diferença de carga útil entre os dois casos para atingir LEO?

# Bibliografia

- BARRERE, M., JAUMOTTE, A., DE VEUBEKE, B. F. e VANDENKERCKOVE, J. *Rocket Propulsion*. Amsterdam: Elsevier, 1960. 829p.
- ALVIM FILHO, G. *Problemas Relativos a Motor Foguete*. Apostila de Curso, PRP-30. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. São José dos Campos: ITA. 1982.
- ALVIM FILHO, G. *Motor Foguete*. Apostila de Curso, PRP-11. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. São José dos Campos: ITA. 1983.
- MATTINGLY, J. D. *Elements of Gas Turbine Propulsion*. New York: McGraw-Hill, 1996. 960p.
- OATES, G. C. *Aerothermodynamics of Gas Turbine and Rocket Propulsion*, AIAA Education Series. Washington, DC: AIAA, 1988. 456p.
- CORNELISSE, J. W., SCHÖYER, H. F. R. et WAKKER, K. F. *Rocket Propulsion na Spaceflight Dynamics*. London: Pitman, 1979, 505p.