ISSN :9 772407 749004

PROSIDING SEMINAR NASIONAL

Yogyakarta, 27 Desember 2014

Tema :

Revitalisasi Pendidikan Matematika Menuju AFTA 2015

Editor :

Dr. Suparman, M.Si., DEA.

Sugiyarto, P.hD.

Dr. Tutut Herawan, M.Si.

Bidang Ilmu :

Pendidikan Matematika dan Matematika

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warrahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur kami haturkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat dan karunia-Nya sehingga acara Seminar Nasional PendidikanMatematika Ahmad Dahlan (SENDIKMAD 2014) dapat berjalan dengan sukses. Tak lupa Shalawat dan Salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang senatiasa kita nantikan Syafa'atnya di hari akhir nanti. Selamat datang kami ucapkan kepada seluruh peserta dan pemakalah yang bergabung dengan SENDIKMAD 2014. Adapun tema seminar nasional kali ini adalah "Revitalisasi Pendidikan Matematika Menuju AFTA 2015" . Seminar nasional ini ditujukan untuk para peneliti, dosen, guru, mahasiswa, dan juga masyarakat yang peduli pada pendidikan matematika.

Kami merasa senang dan bangga karena kami telah mengundang empat pembicara utama yang ahli di bidangnya masing-masing. Salah satu diantaranya berasal dari luar negeri yaitu Dr Thien Lei Mee dari SEAMEO RECSAM Penang Malaysia. Dan juga pembicara dari dalam negeri yaitu Dr. Ir. Illah Sailah, MS. dari Dirjen BELMAWA DIKTI, Prof. Dr. suharsimi Arikunto dari Universitas Ahmad Dahlan, dan Dr. Tutut Herawan, M.Si. dari Universitas Ahmad Dahlan. Selain itu kami selaku panitia merasa senang atas partisipasi dari 239 pemakalah dan peserta seminar yang dating dari berbagai daerah di Indonesia. Terdapat sekitar 168 pemakalah yang mempresentasikan karya tulisnya yang berkaitan dengan pendidikan matematika dan matematika murni.

SENDIKMAD 2014 tidak dapat berjalan dengan baik tanpa adanya bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Kami sangat berterimakasih kepada Rektor Universitas Ahmad Dahlan dan Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Ahmad Dahlan. Terimakasih juga kami ucapkan kepada Pengurus Himpunan Mahasiswa Program Studi (HMPS) Pendidikan Matematika dan juga pihak sponsorship yang telah turut membantu kelancaran SENDIKMAD 2014.

Akhir kata, Kami selaku panitia berharap seminar nasional ini dapat menuai manfaat yang besar di kemudian hari dan juga anda merasa nyaman selama berada di Yogyakarta.

Wassalamu'alaikum Warrahmatullahi Wabarakatuh.

Yogyakarta, 23 Desember 2014

Penyusun

**SAMBUTAN KAPRODI PENDIDIKAN MATEMATIKA
PADA ACARA PEMBUKAAN SEMINAR NASIONAL PENDIDIKAN MATEMATIKA
SENDIKMAD 2014**

Asalamu'alaikum Wr. Wb

1. Yth. Rektor Universitas Ahmad Dahlan
2. Yth. Dekan FKIP UAD
3. Yth. Para Pembicara utama
4. Yth. Pemakalah dan peserta seminar
5. Yth. Bapak/ Ibu Tamu Undangan, serta hadirin sekalian

Puji Syukur kami haturkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan Hidayah- Nya sehingga acara Seminar Nasional Pendidikan matematika Ahmad Dahlan (SENDIKMAD 2014) dapat berjalan dengan sukses. Tak lupa Sholawat dan Salam selalu tercurahkan kepada nabi Muhammad SAW yang senantiasa kita nantikan Syafa'atnya di akhir nanti. Selamat datang kami ucapkan kepada seluruh peserta dan pemakalah yang bergabung dengan SENDIKMAD 2014. Adapun tema kali ini adalah " Revitalisasi Pendidikan Matematika Menuju AFTA 2015". Seminar ini merupakan kegiatan rutin tahunan prodi pendidikan matematika yang ditujukan kepada peneliti, dosen, guru, mahasiswa dan juga masyarakat yang peduli pada pendidikan matematika.

Kami merasa senang dan bangga karena kami telah mengundang pembicara-pembicara utama yang ahli pada bidang nya masing-masing. Salah satu diantaranya berasal dari luar negeri yaitu Dr. Thien Lei Mee dari SEAMEO RECSAM Penang Malaysia dan juga pembicara dari dalam negeri yaitu Dr. Ir. Illah Sailah, MS. Direktorat BELMAWA DIKTI, Prof. Dr. Suharsimi Arikunto dari UAD dan Dr. Tutut Herawan juga dari UAD. Kami atas nama panitia mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya atas kesediaan beliau semua hadir dalam acara ini. Selain itu kami selaku panitia merasa senang atas partisipasi dari 235 peserta yang datang dari berbagai daerah di Indonesia. Terdapat 167 pemakalah yang mempresentasikan karya tulisnya yang berkaitan dengan pendidikan matematika, matematika murni dan juga terapan.

SENDIKMAD 2014 tid ak dapat berjalan tanpa adanya bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Kami sangat berterimakasih kepada Rektor Universitas Ahmad Dahlan dan Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Ahmad Dahlan atas dorongan, dukungan dan fasilitas yang disediakan . Terimakasih kepada seluruh sponsor dan semua pihak yang tidak dapat kami sebutkan satu per satu yang telah turut membantu kelancaran SENDIKMAD 2014. Terimakasih juga kami ucapkan kepada pengurus Himpunan mahasiswa Program Studi (HMPS) Pendidikan matematika dan teman-teman panitia yang telah bekerja keras demi suksesnya penyelenggaraan seminar ini.

Akhir kata selaku ketua program studi sekaligus panitia berharap seminar nasional ini dapat menuai manfaat yang besar di kemudian hari dan anda juga merasa nyaman selama berada di Yogyakarta.

Kami juga mengucapkan terimakasih kepada Bapak, Ibu dan Saudara peserta yang telah berkenan mengikuti seminar ini hingga selesai nantinya. Atas nama panitia, kami mohon maaf yang sebesar-besarnya jika dalam kegiatan ini terdapat kesalahan, kekurangan maupun hal-hal yang tidak/ kurang berkenan di hati Bapak, Ibu dan saudara sekalian.

Semoga seminar ini dapat memberikan sumbangan dalam memajukan pendidikan matematika dan matematika guna mewujudkan Indonesia yang lebih baik

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Kaprodi pendidikan matematika

Drs. H. Abdul Tarom, M.Si.

SAMBUTAN REKTOR UAD
PADA ACARA PEMBUKAAN SEMINAR NASIONAL PENDIDIKAN MATEMATIKA
SENDIKMAD 2014

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

1. Yth. Dekan FKIP UAD
2. Yth. Para Pembicara utama
3. Yth. Pemakalah dan peserta seminar
4. Yth. Bapak/ Ibu Tamu Undangan, serta hadirin sekalian

Puji Syukur kami haturkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan Hidayah- Nya sehingga acara Seminar Nasional Pendidikan matematika Ahmad Dahlan (SENDIKMAD 2014) dapat berjalan dengan sukses. Tak lupa Sholawat dan Salam selalu tercurahkan kepada nabi Muhammad SAW yang senantiasa kita nantikan Syafa'atnya di akhir nanti. Selamat datang kami ucapkan kepada seluruh peserta dan pemakalah yang bergabung dengan SENDIKMAD 2014. Adapun tema kali ini adalah " Revitalisasi Pendidikan Matematika Menuju AFTA 2015". Seminar ini ditujukan kepada peneliti, dosen, guru, mahasiswa dan juga masyarakat yang peduli pada pendidikan matematika.

Secara khusus perkenankan saya mengucapkan terimakasih kepada Dr. Thien Lei Mee dari SEAMEO RECSAM Penang Malaysia , Dr. Ir. Illah Sailah, MS. Direktorat BELMAWA DIKTI, Prof. Dr. Suharsimi Arikunto dari UAD dan Dr. Tutut Herawan juga dari UAD yang telah berkenan menjadi pembicara utama pada semiar ini.

Harapan kami dengan adanya seminar ini adalah terjadinya tukar informasi antar berbagai pihak terkait, serta terjalinnya kerjasama yang baik antar dosen, peneliti,guru serta mahasiswa di seluruh Indonesia untuk mewujudkan masyarakat Indonesia yang maju, sejahtera dan berkarakter. Seminar nasional ini harus mampu mendorong para dosen dan praktisi di bidang pendidika matematika dan matematika murni untuk senantiasa melakukan inovasi demi kemajuan bangsa Indonesia.

Akhirnya saya mengucapkan terimakasih atas partisipasinya dalam seminar yang diselenggarakan rutin tiap tahun oleh prodi pendidikan matematika FKIP UAD ini dengan harapan semoga seminar ini memberikan motivasi bagi para peserta untuk terus berkarya memajukan bangsa ini di masa mendatang.

Selanjutnya perkenankan saya menyampaikan penghargaan dan ucapan terimakasihkepada para sponsor yang telah mendukung pelaksanaan seminar ini, serta panitia pelaksana seminar yang telah mempersiapkan pelaksanaan seminar ini sehingga berjalan dengan baik dan lancar.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Rektor UAD

Dr. Kasiyarno, M.Hum

DAFTAR ISI

KENDALI OPTIMAL SISTEM PERGUDANGAN DENGAN PRODUKSI YANG MENGALAMI KEMEROSOTAN

OLEH
Pardi Affandi [1)], Salmah [2)]
Email : pardi_affandi@yahoo.com

Abstrak

Dalam penelitian ini dibahas Kendali Optimal Sistem Pergudangan dari kemerosotan produksi. Terlebih dahulu dibentuk model persamaan diferensialnya dengan melibatkan Hamiltonian dan maksimum pontryagin. Selanjutnya model persamaan diferensialnya disederhanakan dengan fungsi eksogen sehingga diperoleh sistemnya berbentuk persamaan linier orde dua dengan koefisien konstan. Kemudian ditentukan solusi optimalnya yaitu rata-rata optimal produksi pada sistem inventori yang produksinya mengalami kemerosotan.

Kata kunci: Kendali optimal, Kemerosotan, Maksimum Pontryagin.

OPTIMAL CONTROL OF DETERIORATING PRODUCTION INVENTORY SYSTEM

ABSTRACT

In this research, we are using optimal control approach to determine the optimal production rate in a production inventory system where items are subject deterioration, first build the mathematical models. The main tool in the study problems for the necessary optimality conditions in the form of the Pontryagin maximum principle involves the Hamiltonian function. The explicit solution of differential equation model results will exogenous function**.** So we can have the optimal production rate in a production inventory system where items are subject deterioration.

Key words: Optimal control, Inventory systems, Pontryagin maximum.

PENDAHULUAN

Berbagai permasalahan banyak yang melibatkan teori sistem, teori kontrol optimal dan beberapa aplikasinya. Salah satunya adalah masalah inventori, masalahnya adalah bagaimana mengatur perubahan permintaan konsumen pada sebuah produk barang jadi. Sehingga perusahaan tersebut harus membuat perencanaan yang baik dalam memproduksi barang agar sesuai dengan jumlah permintaan. Salah satunya dengan cara produk barang yang sudah jadi harus di muat dalam sebuah tempat sebelum dipesan oleh konsumen. Hal inilah yang menyebabkan munculnya *inventori* yang sudah tentu akan menambah biaya yaitu berupa *biaya penyimpanan* yang berupa biaya secara fisik menyimpan produk barang atau biaya yang muncul karena modal perusahaan terikat dalam bentuk barang. Masalah ini dapat dimodelkan dengan menggunakan teknik kendali optimal matematika, pemrograman dinamis dan optimasi jaringan.

Teknik kendali optimal, teorinya merupakan perpanjangan dari kalkulus variasi, berupa metode optimasi matematika untuk menurunkan kebijakan pengendalian. Metode ini sebagian besar diilhami oleh karya Lev Pontryagin dan rekan-rekannya di Uni Soviet dan Richard Bellman di Amerika Serikat. Salah satu karya besar Lev Pontryagin adalah Pontragyn'S maximum principle atau prinsip maksimum Pontryagin.

Beberapa referensi teori yang mengaplikasikan teori kontrol kedalam produksi dan masalah inventori adalah Sprzeuzkouiski (1967), Hwang, Fan dan Erickson (1967), Pekelman (1974), Bensoussan, Hurst dan Naslund (1974), Hartl dan Sethi (1984a), Feihtinger dan Heartl (1985a), Stoppler (1985), dan Gaimon (1988). Bagian yang banyak diminati dalam teori inventori adalah masalah inventori yang sistem inventori mengalami pemerosotan diiringi dengan kemerosotan produksi. Berdasarkan tiga penelitian dari (Nahmias (1982), Raafat (1991), and Goyal and Giri (2001)), dapat kita amati betapa pentingnya masalah inventori yang sistem inventori mengalami pemerosotan diiringi dengan kemerosotan produksi.

Sethi S.P dan Thompson G.L (2002) membahas model produksi inventori dan solusinya sedangkan Yacine Benhadid, Lotfi Tadz dan Messaoud Bounkhel (2007) membahas model dalam kondisi permintaan dinamis dan inventori tersedia sepanjang waktu, fokus permasalahannya sistem inventori produksi yang berbentuk nonlinear dan biaya produksi diperlakukan sebagai fungsi secara umum masing-masing dari tingkat persediaan dan tingkat produksi.

Banyak hal yang menarik untuk dikaji terkait dengan sistem inventori namun dalam tesis ini fokus pada pembahasan tentang kendali optimal dari penurunan sistem inventori produksi. Model persamaan diferensialnya disederhanakan dengan menggunakan fungsi eksogen, kemudian ditentukan solusi optimalnya. Model berikutnya di kembangkan solusinya untuk nilai *t* menuju tak hingga. Kemudian beberapa bentuk ilustrasi model yang dipakai yaitu permintaan konstan dan permintaan linier. Adapun tujuannya adalah untuk menentukan rata-rata produksi untuk meminimumkan beberapa fungsi biaya.

Kajian sistem inventori terkait tentang kendali optimal dari penurunan sistem inventori produksi dalam tesis ini mengacu pada Messauod Bounkhel dan Lotfi Tadz (2005), yang menjamin kondisi pokok dari sistem inventori memiliki solusi optimal sehingga memenuhi kondisi Hamiltonian yang teorinya diambil dari D.N Burges, kemudian solusinya dihubungkan dengan prinsip Optimal Kontrol dari Frank L.Lewis sedangkan persamaan state Menurut Hesaam K. Alfares (*Integrating quality and maintenance decisions in a production-inventory model for deteriorating items*) bahwa dalam periode produksi $[0, t_1]$. Selama masa ini, inventori akan bertambah banyak selama masa produksi tetapi akan berkurang dengan adanya permintaan dan kemerosotan. Beberapa penjelasan terkait dengan Persamaan Diferensial Linier nonhomogen dan solusinya mengacu pada Shepley L Ross, Sistem Persamaan Diferensial yaitu karangan Ogata K, Chi-Tsong Chen, dan inventori controlnya bersumber dari Stephen F. Love. Fungsinya terjamin konveksitasnya teori bersumber dari K.V Mital sehingga membantu menjamin kondisi optimal fungsinya.

Sistem inventori terkait tentang kendali optimal dari penurunan sistem inventori produksi dibentuk persamaan diferensialnya kemudian disederhanakan dengan menggunakan fungsi eksogen, hingga dapat ditentukan solusi optimalnya berupa rata-rata produksi sehingga dapat meminimumkan beberapa fungsi biaya. Model berikutnya di kembangkan solusinya untuk nilai t menuju tak hingga. Kemudian beberapa bentuk ilustrasi model yang dipakai yaitu permintaan konstan dan permintaan linier yang kurvanya diperoleh dengan bantuan aplikasi program Maple.

LANDASAN TEORI

Berikut diberikan pengertian-pengertian konsep berupa definisi dan teorema-teorema yang dijadikan sebagai acuan yang mendasari pembahasan dalam bab III.

2.1 Fungsi kontinu dan Fungsi Diferensiabel Kontinu

Definisi 2.1.1 (Bartle 1982) Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, $C \in A$, *dan fungsi* $\boldsymbol{f}: A \longrightarrow \mathbb{R}$, *fungsi f dikatakan kontinu di C jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $\delta > 0$ *sehingga untuk setiap* $x \in A$ *dengan* $\| x - c \| < \delta$ *berlaku* $\| f(x) - f(c) \| < \varepsilon$.

Teorema 2.1.1 (Bartle 1982) *Jika* $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *kontinu, maka terdapat* $M > 0$ *sehingga* $f(x) \leq M$ *untuk setiap* $x \in [a, b]$.

Teorema 2.2.4 (Mangasarian 1969) *Diberikan himpunan terbuka* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$. *Fungsi* $\theta: \Gamma \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *terdifrensial di* $\bar{x} \in \Gamma$. *Jika* θ *konveks di* $\bar{x} \in \Gamma$ *maka* $\theta(x) - \theta(\bar{x}) \geq \nabla\theta(\bar{x})(x - \bar{x})$ *untuk setiap* $x \in \Gamma$.

2.2 Himpunan Konveks dan Fungsi konveks

Teorema 2.2.2 *Bola terbuka* $B_r(x) = \{x \| x \in \mathbb{R}^n \| x - \bar{x} \| < \epsilon\}, \epsilon > 0$ *adalah merupakan himpunan konveks.*

Defenisi 2.2.4 (Mangasarian 1969) *Himpunan* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *dikatakan himpunan konveks jika untuk sebarang* $x_1, x_2 \in \Gamma$ *dan untuk* $\lambda \in \mathbb{R}$ *sedemikian sehingga* $0 \leq \lambda \leq 1$ *berlaku* $(1 - \lambda)(x_1) + \lambda(x_2) \in \Gamma$.

Defenisi 2.2.5 (K.V Mital) *Misalkan* $x \epsilon A \subseteq \mathbb{R}^n$ *dengan A adalah himpunan konveks. Suatu fungsi* θ *disebut fungsi konveks di A bila dan hanya bila untuk sebarang dua titik* $x_1, x_2 \epsilon A$ *dan setiap* $\lambda \epsilon [0,1]$, *berlaku* $\{\theta\{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2\} \leq \lambda\, \theta(x_1) + (1 - \lambda)\theta(x_2)$

Teorema 2.2.4 (Mangasarian 1969) *Diberikan himpunan terbuka* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$. *Fungsi* $\theta: \Gamma \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *terdifrensial di* $\bar{x} \in \Gamma$. *Jika* θ *konveks di* $\bar{x} \in \Gamma$ *maka* $\theta(x) - \theta(\bar{x}) \geq \nabla\theta(\bar{x})(x - \bar{x})$ *untuk setiap* $x \in \Gamma$.

2.3 Persamaan Diferensial Linear Nonhomogen dan Solusinya

Defenisi 2.3.1 (Ross, S.L 1984) *Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.*

Defenisi 2.3.2 (Ross, S.L 1984) *Persamaan diferensial linier orde-n, dengan variabel tak bebas y, dan variabel bebas x, dapat dinyatakan sebagai berikut*

$$a_0 x \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = \boldsymbol{F}(x) \qquad (2.10)$$

Dengan a_0 *tidak sama dengan nol. Jika F sama dengan nol maka persamaan tersebut tereduksi menjadi*

$$a_0 x\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x\frac{dy}{dx} + a_n xy = \mathbf{0}$$
(2.11)

yang disebut dengan persamaan diferensial homogen. Untuk $\boldsymbol{F}(x) \neq 0$, *disebut dengan persamaan diferensial non homogen.*

Selanjutnya dibicarakan teorema eksistensi untuk masalah syarat awal yang berkaitan dengan persamaan diferensial linear orde-n.

Teorema 2.3.7 (Ross, S.L 1984) *Diberikan* y_p *suatu solusi untuk persamaan diferensial linear nonhomogen (2.14) yang tidak memuat sebarang konstanta.*

Jika $y_c = (c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n)$ solusi umum persamaan diferensial linear homogen (2.15) maka setiap solusi persamaan diferensial (2.14) dapat dinyatakan sebagai $y_c + y_p$ untuk suatu pemilihan konstanta $c_1, c_2, \ldots, c_n$ yang sesuai.

2.4 Sistem Persamaan Diferensial

Teorema 2.4.1 *Matriks transisi sistem linear homogen* $\dot{x} = Ax$ *adalah* $e^{A(t-s)}$.

Sistem persamaan diferensial berbentuk $\dot{x} = ax + bu$, solusinya dapat diselesaikan sehingga diperoleh

$$x = x_0 e^{at} + e^{at}\int_0^t e^{-a\tau}\,(bu)\tau d\tau$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas tentang kendali optimal dari penurunan sistem inventori produksi. Model persamaan diferensialnya disederhanakan dengan menggunakan fungsi eksogen, kemudian ditentukan solusi optimalnya. Model berikutnya di kembangkan solusinya untuk nilai *t* menuju tak hingga. Kemudian beberapa bentuk ilustrasi model yang dipakai yaitu permintaan konstan dan permintaan linier.

3.1 Pembentukan Model

Pada bagian awal terlebih dahulu diperkenalkan notasi-notasi yang digunakan :

I(t) : tingkat inventori pada waktu t,

P(t) : rata-rata produksi pada waktu t,

D(t) : rata-rata permintaan pada waktu t,

θ(t,I(t)) : rata-rata kemerosotan pada waktu t sesuai dengan *I(t),*

h(I(t)) : rata-rata biaya penyimpanan sesuai dengan *I(t),* *K(P(t))* : rata-rata biaya produksi sesuai dengan *P(t)*,

T : panjang rencana dalam waktu tertentu,

ρ : konstan non negatif rata-rata discount,

I_0 : tingkat inventori awal,

$\tilde{\theta}$: tujuan rata-rata kemerosotan,

$\tilde{I}$: tingkat inventori tujuan,

$\tilde{P}$: rata-rata produksi tujuan,

c : biaya positif produksi unit produksi

Seluruh fungsi yang digunakan diasumsikan non negatif, kontinu dan differensiabel. Andaikan hasil perolehan rata-rata permintaan *D*, produksi yang dapat diawasi nilai rata-ratanya *P*, dan pemerosotan yang terjadi rata-ratanya θ, mengikuti tingkat inventori *I(t)*, berkembang secara dinamis berdasarkan persamaan state. Menurut Hesaam K. Alfares (*Integrating quality and maintenance decisions in a production-inventory model for deteriorating items*) bahwa dalam periode produksi *[0, t_1]*. Selama masa ini, inventori akan bertambah banyak selama masa produksi tetapi akan berkurang dengan adanya permintaan dan kemerosotan sehingga akan diperoleh *inventory differential equation (IDE)* adalah sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t) - \theta(t, I(t)) \qquad (3.1.1)$$

Model tersebut merepresentasikan masalah kontrol optimal dengan sebuah *state variable* yaitu tingkat inventori dan satu variable kontrol yaitu rata-rata tingkat produksi. Masalahnya diasosiasikan meminimumkan sebuah fungsi objektif yang kita inginkan, hingga biaya yang dikeluarkan seoptimal mungkin. Berarti kita akan meminimumkan :

$$\min_{P(t)\geq 0} J(P, I) = \int_0^T F\big(t, I(t), P(t)\big)dt \qquad (3.1.2)$$

subjek dari persamaan state (3.1.1) adalah

$$F\big(t, I(t), P(t)\big) = \mathrm{e}^{-\rho t}\left\langle \frac{1}{2}\left[\mathrm{h}\big(\mathrm{I(t)}\big) - \mathrm{h}(\tilde{\mathrm{I}})\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\mathrm{K}\big(\mathrm{P(t)}\big) - \mathrm{K}(\tilde{\mathrm{P}})\right]^2 + \frac{\mathrm{c}}{2}\left[\theta\big(\mathrm{t}, \mathrm{I(t)}\big) - \tilde{\theta}\right]^2 \right\rangle \qquad (3.1.3)$$

Alat utama untuk menyelesaikan masalah ($\mathcal{P}$) pencariannya melibatkan kondisi optimal bentuk pontryagin maksimum seperti yang terdapat dalam pembahasan sebelumnya. Kemudian teori yang digunakan melibatkan fungsi *Hamiltonian* yaitu:

$$H(t,I(t),P(t),\lambda(t)) = -F\big(t,I(t),P(t)\big) + \lambda(t) f\big(t,I(t),P(t)\big)$$

Masalah minimisasi dengan performance functional berbentuk J(u) dapat diselesaikan dengan *prinsip maksimum Pontryagin* yaitu terlebih dahulu diubah ke dalam bentuk masalah memaksimalkan $J^*(u)$ dengan $J^*(u) = -J(u)$.

Dimana $f\big(t,I(t),P(t)\big) = P(t) - D(t) - \theta(\mathrm{t},\mathrm{I}(\mathrm{t}))$ dan λ adalah yang menghubungkan dengan fungsi konstrain dari persamaan differensialnya. Kemudian solusinya akan dihubungkan dengan *prinsip Pontryagin maksimum* .

Teorema 3.1

Kondisi pokok untuk (P^*,I^*) *untuk menjadi solusi optimal dari masalah* $(\mathcal{P})$

$$K\big(P^*(t)\big) - K\big(\tilde{P}\big)\frac{d}{dt}P^*(t)\frac{d^2}{dp^2}K\big(P^*(t)\big) - \rho\frac{\partial}{\partial I}\theta\big(t^*,I(t)\big)\frac{d}{dP}K\big(P^*(t)\big) = -\frac{d}{dt}P^*(t)\frac{d}{dP}K\big(P^*(t)\big)^2 + \Big(h\big(I^*(t)\big) - h(\tilde{I})\Big)\frac{d}{dP}h\big(I^*(t)\big) + c(\theta\big(t^*,I(t)\big)\frac{\partial}{\partial I}\theta\big(t^*,I(t)\big) \quad (3.1.4)$$

Dan $I^*(0) = I_0$ $\quad K\big(P^*(T)\big) - K\big(\tilde{P}\big)\frac{d}{dT}P^*(T) = 0 \quad P^*(t) \geq 0$

Teorema 3.2

Diasumsikan bahwa fungsi F(t,.,P) dan θ(t,.) adalah konvek. Kemudian kondisi pokok (3.1.5) − (3.1.7) *adalah syarat cukup* (P^*,I^*) *akan menjadi syarat optimal untuk masalah* $(\mathcal{P})$.

Untuk pembahasan berikutnya, kita akan melibatkan fungsi eksogen yang sifat fungsinya sangat umum. Sehingga solusi eksplisit yang sukar ditemukan, akan dapat diselesaikan pada masalah yang akan kita bahas berikut. Pada hakekatnya mencari nilai dari sistem, sama halnya kita menghitung solusi eksplisit dalam kasus yang fungsi eksogennya memiliki bentuk dasar. Akan didapatkan hasil yang dapat memenuhi kondisi optimal sehingga sistem yang lebih komplek dapat disederhanakan dengan menggunakan fungsi eksogen.

Fungsi eksogen yang lain tidak dipergunakan disini, diupayakan untuk tidak terkait notasi kompleks karena terlalu banyak menggunakan teknik yang detail. Sebagai ilustrasi tujuan mari kita asumsikan beberapa dari bentuk fungsi eksogen sebagai berikut.

$$K(P(t)) = K_1 P(t) + K_2$$

$$h(I(t)) = h_1 I(t) + h_2$$

$$\theta(t, I(t)) = \theta_1 I(t) + \theta_2$$

Dimana $K_i, h_i\, dan\, \theta_i\, (i = 1,2)$ adalah konstanta real K_1, h_1 dan θ_1 adalah tidak kosong. Dalam kasus ini, karena I adalah tertutup ke $\tilde{I}$ dan $\theta(t, I(t))$ adalah tertutup ke $\tilde{\theta}$, hingga kita akan peroleh $\tilde{\theta} = \theta_1 I + \theta_2$ dalam problem $(\mathcal{P})$. Sehingga fungsi objektif (3.1.2) akan disederhanakan

$$F(t, I(t), P(t)) = e^{-\rho t}\left[\frac{H}{2}\left([\mathrm{I(t)} - (\tilde{\mathrm{I}})]^2 + \frac{K}{2}\left([\mathrm{P(t)} - (\tilde{\mathrm{P}})]^2\right)\right)\right]$$

(3.1.18)

Dengan nilai dari $H = h^2 + c{\theta_1}^2$ dan $K = \boldsymbol{K^2}$.

Kemudian fungsi eksogen juga kita gunakan pada teorema 3.1.1 sehingga diharapkan akan diperoleh bentuk dasar yang lebih sederhana. Persamaan kita mulai dari kombinasi persamaan (3.1.8) dengan (3.1.9) seperti yang sudah kita peroleh sebelumnya yaitu

$$\frac{d^2}{dt^2}I(t) - \rho\frac{d}{dt}I(t) - \left((\rho + \theta_1)\theta_1 + \frac{h}{K}\right)I(t) = \rho D(t) - \rho\tilde{P} + \rho\theta_2 + \theta_1 D(t) - \theta_1\tilde{P} + \theta_1\theta_2 - \frac{d}{dt}D(t) - \frac{h}{K}\tilde{I}$$

Berarti dengan fungsi eksogen kita dapat peroleh bentuk dasar yang lebih sederhana dari teorema 3.1.1 yaitu

$$\frac{d^2}{dt^2}I(t) - \rho\frac{d}{dt}I(t) - \left((\rho + \theta_1)\theta_1 + \frac{h}{K}\right)I(t) = (\rho + \theta_1)[D(t) - \tilde{P} + \theta_2] - \frac{d}{dt}D(t) - \frac{h}{K}\tilde{I}$$

Corollary 3.1

Kondisi pokok dari (P^*, I^*) untuk menjadi syarat optimal untuk masalah $(\mathcal{P})$ adalah

$$\frac{d^2}{dt^2}I(t) - \rho\frac{d}{dt}I(t) - \left((\rho + \theta_1)\theta_1 + \frac{h}{K}\right)I(t) = \beta(t)$$

(3.1.19)

Dengan

$I^*(0) = I_0 \qquad P^*(T) = \tilde{P}$

$P^*(t) \geq 0$

(3.1.20)

Dimana

$$\beta(t) = (\rho + \theta_1)[D(t) - \tilde{P} + \theta_2] - \frac{d}{dt}D(t) - \frac{h}{K}\tilde{I}$$

(3.1.21)

Masalah state dalam Corollary 3.1 adalah masalah dua titik batas. Akan diselesaikan dalam *Corollary* berikutnya.

Corollary 3.2

Syarat optimal untuk solusi masalah ($\mathcal{P}$) *adalah diberikan dengan*

$P^*(t) = maks\{P(t), 0\}$,

$$I^*(t) = I_0 e^{-\theta_1 t} + \int_0^t [P^*(s) - D(s) - \theta_2] e^{\theta_1 (s-t)}\, ds$$

(3.1.22)

Dimana

$$P(t) = a_1(m_1 + \theta_1)e^{m_1 t} + a_2(m_2 + \theta_1)e^{m_2 t} + \frac{d}{dt}Q(t) + \theta_1 Q(t) + D(t) + \theta_2$$

Konstanta a_1, a_2, m_1 dan m_2 akan diberikan dalam bukti berikut, dan *Q(t)* adalah solusi partikular dari persamaan (3.1.19) .

Bukti

Kita selesaikan persamaan (3.1.19) dengan metode standar. Persamaan karakteristiknya adalah

$$m^2 - \rho m - (\rho + \theta_1)\theta_1 + \frac{h}{K} = 0$$

Memiliki dua jenis akar berlawanan, yang diberikan dengan

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(\rho - \sqrt{\rho^2 + 4\left[(\rho + \theta_1)\theta_1 + \frac{h}{K}\right]}\right) < 0$$

$$m_2 = \frac{1}{2}\left(\rho - \sqrt{\rho^2 + 4\left[(\rho + \theta_1)\theta_1 + \frac{h}{K}\right]}\right) > 0$$

Hingga diperoleh nilai

$$I(t) = a_1 e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + Q(t)$$

(3.1.23)

Sedangkan dari persamaan (3.1.1) nilai dari $\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t) - \theta(t, I(t))$

Berarti dapat ditentukan

$$P(t) = \frac{d}{dt}I(t) + D(t) + \theta(t, I(t))$$

Dengan menggunakan persamaan (3.1.23)

$$I(t) = a_1 e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + Q(t)$$

akan kita peroleh

$$P(t) = \frac{d}{dt}(a_1 e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + Q(t)) + D(t) + \theta(t, I(t))$$

Karena $\theta(t, I(t) = [\theta_1 I(t) + \theta_2]$ berarti akan diperoleh

$$P(t) = \frac{d}{dt}(a_1 e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + Q(t)) + D(t) + (\theta_1 I(t) + \theta_2)$$

$$P(t) = (a_{1m_1} e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + \frac{d}{dt} Q(t)) + D(t) + (\theta_1 (a_1 e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + Q(t)) + \theta_2)$$

Sehingga

$$P(t) = (a_{1m_1} e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + \frac{d}{dt} Q(t)) + D(t) + (\theta_1 a_1 e^{m_1 t} + \theta_1 a_2 e^{m_2 t} + (\theta_1 Q(t)) + \theta_2)$$

$$P(t) = a_1 (m_1 + \theta_1) e^{m_1 t} + a_2 (m_2 + \theta_1) e^{m_2 t} + \frac{d}{dt} Q(t) + \theta_1 Q(t) + D(t) + \theta_2$$

Dimana $Q(t)$ adalah solusi partikular (3.1.19). Syarat awal dan kondisi akhir (3.1.20) akan digunakan untuk menghitung konstanta a_1 dan a_2 sebagai berikut. Dari kondisi awal kita peroleh

$$I(0) = a_1 + a_2 + Q(0)$$

Dan dari kondisi akhir kita dapatkan

$$a_1 (m_1 + \theta_1) e^{m_1 T} + a_2 (m_2 + \theta_1) e^{m_2 T} + \left[\frac{C}{K} + \frac{d}{dt} Q(T) + \theta_1 Q(T) + D(T)\right] = 0$$

Dengan mengambil

$$b_1 = I_0 - Q(0)$$

$$b_2 = -\left[\frac{C}{K} + \frac{d}{dt} Q(T) + \theta_1 Q(T) + D(T)\right]$$

Maka akan kita peroleh dua sistem persamaan linier dengan dua variabel yang tidak diketahui

$$a_1 + a_2 = b_1$$

$$a_1 (m_1 + \theta_1) e^{m_1 T} + a_2 (m_2 + \theta_1) e^{m_2 T} = b_2$$

Maka akan kita peroleh solusi yang unik

$$a_1 = \frac{b_2 - (m_2 + \theta_1) e^{m_2 T} b_1}{(m_1 + \theta_1) e^{m_1 T} - (m_2 + \theta_1) e^{m_2 T}}$$

$$a_2 = \frac{(m_2 + \theta_1) e^{m_2 T} b_1 - b_2}{(m_1 + \theta_1) e^{m_1 T} - (m_2 + \theta_1) e^{m_2 T}}$$

Kita dapat menarik kesimpulan dari P menggunakan ekspresi optimal I mendekati dengan persamaan *state* (3.1..1). Mengingat bahwa nilai optimal kontrol P^* harus *non negatif*, sehingga P^* akan menjadi

$$P^*(t) = maks\{P(t), 0\}$$

Dan kemudian I^* akan kita peroleh langsung dengan menggunakan (3.1.1) yaitu

$$\theta(t, I^*(t)) = P^*(t) - D(t) - \frac{d}{dt}\mathrm{I}^*(\mathrm{t})$$

Berarti kita peroleh

$$\frac{d}{dt}\mathrm{I}^*(\mathrm{t}) = P^*(t) - D(t) - \theta(t, I^*(t))$$

Sedangkan berdasarkan fungsi eksogen $\theta\big(t, I(t)\big) = \theta_1 I(t) + \theta_2$ berarti

$$\theta(t, I^*(t)) \quad = \theta_1 I^*(t) + \theta_2$$

Sehingga akan didapatkan

$$\frac{d}{dt}\mathrm{I}^*(t) = P^*(t) - D(t) - (\theta_1 \mathrm{I}^*(\mathrm{t}) + \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}I^*(t) = -\theta_1 I^*(t) + P^*(t) - D(t) - \theta_2.$$

Berdasarkan bentuk solusi sistem $\dot{x}_\iota(t) = Ax + Bu \ \ dengan \ \ x(t_0) = x_0$ dapat dinyatakan dalam bentuk solusi

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\, Bu(\tau)d\tau.$$

Maka dengan membentuk solusi sesuai dengan permasalahan di atas akan kita peroleh hasil solusi dalam batas interval dari *(0,t)* adalah sebagai berikut:

$$I^*(t) = I_0 e^{-\theta_1 t} + \int_0^t [P^*(s) - D(s) - \theta_2] e^{\theta_1(s-t)}\, ds.$$

Sehingga bentuk akhir diperoleh

$$I^*(t) \quad = I_0 e^{-\theta_1 \mathrm{t}} + \int_0^t [P^*(s) - D(s) - \theta_2] e^{\theta_1(\mathrm{s}-\mathrm{t})}\, ds$$

3.2 Perluasan Model

Solusi optimal untuk masalah ($\mathcal{P}$) yang dihasilkan *Corollary* 3.2 dapat diperluas dalam beberapa kondisi pada kasus perencanaan waktu yang lama. Berikut akan kita bahas kasus untuk $T \to \infty$. Dengan asumsi bahwa $\rho > 0$. Kita akan tunjukkan bahwa solusi limit menuju tak hingga memiliki masalah solusi optimal yang akan diselesaikan sebagai berikut

$$(\mathcal{P}\infty) \quad \begin{cases} \min\limits_{P(t)\geq 0} J(P, I) = \int_0^\infty F\big(t, I(t), P(t)\big)dt \\ \frac{d}{dt}I(t) = f\big(t, I(t), P(t)\big), \quad I(0) = I_0 \end{cases}$$

Dimana

$$F\big(t, I(t), P(t)\big) = e^{-\rho t}\langle\frac{1}{2}\big[h\big(I(t)\big) - h(\tilde{I})\big]^2 + \frac{1}{2}\big[K\big(P(t)\big) - K(\tilde{P})\big]^2 + \frac{c}{2}\big[\theta\big(t, I(t)\big) - \tilde{\theta}\big]^2\rangle$$

$$f\big(t, I(t), P(t)\big) = P(t) - D(t) - \theta(\mathrm{t}, \mathrm{I}(\mathrm{t}))$$

Untuk kasus tak hingga, kondisi akhir $\lambda(T) = 0$ akan diubah menjadi

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0, \qquad (3.2.1)$$

Maka akan kita peroleh solusi yang unik

$$a_1 = \frac{b_2 - (m_2 + \theta_1)e^{m_2 T} b_1}{(m_1 + \theta_1)e^{m_1 T} - (m_2 + \theta_1)e^{m_2 T}}$$

$$a_2 = \frac{(m_2 + \theta_1)e^{m_2 T} b_1 - b_2}{(m_1 + \theta_1)e^{m_1 T} - (m_2 + \theta_1)e^{m_2 T}}$$

Sehingga akhirnya akan diperoleh :

$$P_\infty{}^*(t) = maks\{P(t), 0\}$$

$$I_\infty * (t) = I_0 e^{-\theta_1 t} + \int_0^t [P_\infty{}^*(s) - D(s) - \theta_2] e^{\theta_1 (s-t)}\, ds$$

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Dari uraian bab-bab sebelumnya dan pembahasan tentang kendali optimal dari sebuah sistem inventori produksi yang mengalami kemerosotan dapat ditarik beberapa kesimpulan sebagai berikut

1. Kita dapat menggunakan kendali optimal dari sebuah sistem inventori produksi yang mengalami kemerosotan. Andaikan hasil perolehan rata-rata permintaan *D*, produksi yang dapat diawasi nilai rata-ratanya *P*, dan pemerosotan yang terjadi rata-ratanya θ, mengikuti tingkat inventori *I(t)*, berkembang secara dinamis berdasarkan persamaan state. Menurut Hesaam K. Alfares (*Integrating quality and maintenance decisions in a production-inventory model for deteriorating items*) bahwa dalam periode produksi $[0, t_1]$. Selama masa ini, inventori akan bertambah banyak selama masa produksi tetapi akan berkurang dengan adanya permintaan dan kemerosotan sehingga akan diperoleh *inventory differential equation (IDE)* adalah sebagai berikut:

$\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t) - \theta(t, I(t))$. Adapun caranya dengan terlebih dahulu membentuk model persamaan diferensialnya kemudian teori yang digunakan melibatkan fungsi *Hamiltonian* yaitu:

$$H(t, I(t), P(t), \lambda(t)) = -F\big(t, I(t), P(t)\big) + \lambda(t) f\big(t, I(t), P(t)\big)$$

disederhanakan dengan menggunakan fungsi eksogen, sehingga dapat ditentukan solusi optimalnya yaitu rata-rata optimal produksi pada sistem inventori produksi yang keadaannya mengalami penurunan.

2. Model berikutnya di kembangkan solusinya untuk nilai t menuju tak hingga, dengan asumsi bahwa $\rho > 0$. Untuk kasus tak hingga, kondisi akhir $\lambda(T) = 0$ akan diubah menjadi $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$, dimana nilai λ merupakan *adjoin*t fungsi yang terdapat dalam masalah $(\mathcal{P})$ dengan mempergunakan produksi rata-rata $P(t)$ selalu terbatas dan juga ${K_1}^2(P(t) - \hat{P})$ adalah terbatas. Melibatkan fungsi *Hamiltonian yang* diselesaikan dengan *prinsip maksimum Pontryagin.* Solusi optimal diberikan detail dengan menggunakan fungsi eksogen. Ini akan bermanfaat sebagai salah satu bentuk solusi dengan menggunakan fungsi eksogen. Kita mendapatkan prosedur solusi bisa menjadi lebih atau sedikit sukar, hal ini akan bergantung pada bentuk fungsi yang akan diperoleh.

Saran

Dapat dilakukan penelitian lebih lanjut untuk menyelidiki sifat-sifat sistem inventorinya, kemudian hal yang terkait dengan sistem inventori produksi yang mengalami peningkatan.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., 1988. *Calculus.* Drexel University, John Wiley & Sons, New York.

Burghes, D.N *Introduction to Control Theory Including Optimal Control* .John Wiley & Sons. New York.

Chi-Tsong Chen, 1984. *Linear System Theory and Design,* Madison Avenue New York.

Danese,A.E. 1965. *Advanced Calculus an introduction to Applied Mathematics.*

Edwin K.P Chong, 1996. *An introduction to Optimization*, John Wiley & Sons. New York.

Frank L.Lewis, *Applied Optimal Control & Estimation*. The University of Texas at Arlington. New York.

Haberman, R., 1977. *Mathematical Models in Mechanical Vibrations, Population Dynamics and Traffic Flow*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

Hamdy A.Taha.1998. *Operations Research an Introduction*.Prentice Hall International, Inc.Philippines.

Katsuhiko Ogata.1995.*Discrete-Time Control Systems*, 2 editions, Prentice-Hall International, INC.

Murray R. Spiegel Statistic Schaum, 2 edition Renselaer Polytechnic Institut Hartford.

Olsder, G.J., 1994. *Mathematical System Theory*, 1 . Delft University of Technlogy. Netherlands.

Perko, L., 1991. *Differential Equation and Dynamical System*. Springer-Verlag, New York.

Shepley L.Ross.1984. *Differential Equation*. 3 Editions, John Wiley & Sons. New York.

Serge Lang, 1968. *Linear Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company.New York.

Stephen F.Love.1979. *Inventory Control*. McGraw-Hill International Book Company.Tokyo.

Stewart,J.1998.*Kalkulus Jilid II. Edisi 5*. Penerbit Erlangga. Jakarta

Verhulst, Ferdinan, 1996. *Nonlinear Differential Equation and Dynamical System*, 2 edition, Springer-Verlag, Berlin Heidlberg.

Wiggins, S., 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*. Springer-Verlag, New York.