Puntos, rectas y planos en el espacio. Problemas métricos en el espacio

1. Estudiar la posición relativa de las rectas r y s:

$$r:\begin{cases} x+3y+4z-6=0 \\ 2x+y-3z+2=0 \end{cases} \quad ; \quad s:\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t+1 \\ z=-3t+2 \end{cases}$$

Calcular la distancia entre ambas rectas

(Junio 1997)

Solución:

Obtengamos un vector director $\vec{u}$ y un punto A de r. Llamemos z = λ. Entonces el sistema queda de la forma: $\begin{cases} x+3y=-4\lambda+6 \\ 2x+y=3\lambda-2 \end{cases}$. Multiplicando la primera ecuación por 2 y restando queda 5y = −11λ + 14 ⇒ $y=\frac{-11}{5}\lambda+\frac{14}{5}$. Sustituyendo en la primera ecuación: $x+3\left(\frac{-11}{5}\lambda+\frac{14}{5}\right)=-4\lambda+6 \Rightarrow x-\frac{33}{5}\lambda+\frac{42}{5}=-4\lambda+6 \Rightarrow x=\frac{13}{5}\lambda-\frac{12}{5}$. Por tanto la recta es, en ecuaciones paramétricas: $r\equiv\begin{cases} x=\frac{13}{5}\lambda-\frac{12}{5} \\ y=\frac{-11}{5}\lambda+\frac{14}{5} \\ z=\lambda \end{cases}$

Así, un punto de r es $A\left(-\frac{12}{5}, \frac{14}{5}, 0\right)$ y un vector director de r es $\vec{u}=(13, -11, 5)$

Un punto de s es B(−1, 1, 2) y un vector director de s es $\vec{v}$ = (2, 1, −3)

Entonces:

- $\text{rango}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}=\text{rango}\begin{pmatrix} 13 & -11 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}=2$. pues hay al menos un menor de orden dos distinto de cero.
- $\text{rango}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix}=\text{rango}\begin{pmatrix} 13 & -11 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ \frac{7}{5} & \frac{-9}{5} & 2 \end{pmatrix}=3$, ya que $\begin{vmatrix} 13 & -11 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 7/5 & -9/5 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$.

Por tanto r y s se cruzan.

Hallemos el plano π que pasa por r y es paralelo a s. Para ello escribamos la ecuación del haz de planos de arista r: λ(x + 3y + 4z − 6) + μ(2x + y − 3z + 2) = 0 ⇔ (λ + 2μ)x + (3λ + μ)y + (4λ − 3μ)z + (−6λ + 2μ) = 0.

Para que un plano de este haz sea paralelo a la recta s se debe cumplir que el vector perpendicular al plano $(\lambda + 2\mu,\ 3\lambda + \mu,\ 4\lambda - 3\mu)$ sea perpendicular al vector director de s: $(2, 1, -3)$, es decir, que el producto escalar de ambos sea cero:

$(\lambda + 2\mu)\cdot 2 + (3\lambda + \mu)\cdot 1 + (4\lambda - 3\mu)\cdot(-3) = 0 \Rightarrow -7\lambda + 14\mu = 0$.

Para que esta última igualdad se cumpla basta elegir $\lambda = 2$, $\mu = 1$, luego el plano π es $4x - 7y + 5z - 10 = 0$.

La distancia buscada coincide por tanto con la distancia del punto $B(-1, 1, 2)$ de s al plano π:

$$d(r, s) = d(B, \pi) = \frac{|(-1)\cdot 4 + 1\cdot(-7) + 2\cdot 5 + (-10)|}{\sqrt{4^2 + (-7)^2 + 5^2}} = \frac{11}{\sqrt{90}} = \frac{11}{3\sqrt{10}} = \frac{11\sqrt{10}}{30} \text{ uds.}$$ †

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A(1, 2, -1)$, es perpendicular a la recta $r: \begin{cases} 3y + z = 7 \\ x + 4y + z = 8 \end{cases}$ y paralela al plano $2x + y - z = 3$

(Junio 1997)

Solución:

Llamemos $\vec{u} = (a, b, c)$ a un vector director de la recta s que buscamos. Hallemos un vector director $\vec{v}$ de la recta r. Para ello llamemos, por ejemplo, $y = \lambda$. Entonces $z = 7 - 3\lambda$; $x + 4\lambda + 7 - 3\lambda = 8 \Rightarrow x = 1 - \lambda$. Por tanto las ecuaciones paramétricas de r son: $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 7 - 3\lambda \end{cases}$, y entonces un vector director de r es $\vec{v} = (-1, 1, -3)$. Como $s \perp r$ $\Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow -a + b - 3c = 0$ **(1)**

Un vector perpendicular al plano $\pi \equiv 2x + y - z = 3$ es $\vec{w} = (2, 1, -1)$. Como $s \parallel \pi \Rightarrow$ $\vec{u} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \Rightarrow 2a + b - c = 0$ **(2)**

Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones **(1)** y **(2)**. Para ello llamemos, por ejemplo, $c = t \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 3t \\ 2a + b = t \end{cases}$. Restando ambas ecuaciones: $-3a = 2t \Rightarrow a = -\frac{2}{3}t$, y sustituyendo en la primera: $\frac{2}{3}t + b = 3t \Rightarrow b = \frac{7}{3}t$. Para $t = 3$ se obtiene $a = -2$, $b = 7$ y $c = 3$, por tanto un vector director de s es $\vec{u} = (-2, 7, 3)$ y la recta s es, en ecuaciones paramétricas: $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 + 7\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$ †

3. Posición relativa de la recta $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{-1}$, y el plano $x - 3y - z + 6 = 0$. Calcular la distancia entre la recta y el plano.

(Septiembre 1997)

Solución:

Tomemos un punto y un vector director de la recta r: $P(a_1, a_2, a_3) = P(3, 1, -2)$;

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = (5, 2, -1)$. Los coeficientes A, B, C del plano π son A = 1, B = −3 y C = −1. Entonces:

$Au_1 + Bu_2 + Cu_3 + D = 1·5 + (−3)·2 + (−1)(−1) = 5 − 6 + 1 = 0$

$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D = 1·3 + (−3)·1 + (−1)(−2) = 3 − 3 + 2 = 2 \neq 0$

Por tanto, la recta y el plano son paralelos: $r \parallel \pi$

La distancia entre la recta r y el plano π es la distancia de un punto cualquiera de la recta r al plano π: $d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1\cdot 3 + (-3)\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) + 6|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{11}} = \frac{8\sqrt{11}}{11}$ u †

4. Ecuación de la recta que pasa por A(2, −1, 3) y es perpendicular al plano que pasa por los puntos B(1, 1, 0), C(0, −1, 2) y D(−2, 2, 1). Calcula el volumen del tetraedro ABCD.

(Septiembre 1997)

Solución:

La ecuación del plano que pasa por los puntos B, C y D es: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Restando a la 1ª, 2ª y 3ª fila la cuarta: $\begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Desarrollando por la 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-x-2-2y+4-9z+9) - (-2z+2+3y-6+3x+6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-x-2y-9z+11) - (3x+3y-2z+2) = 0 \Leftrightarrow -4x-5y-7y+9 = 0.$$

La recta r que buscamos tendrá como vector director un vector perpendicular al plano: $\vec{u} = (4, 5, 7)$.

Entonces las ecuaciones paramétricas de la recta son: $r \equiv \begin{cases} x = 2+4\lambda \\ y = -1+5\lambda \\ z = 3+7\lambda \end{cases}$

El volumen del tetraedro es: $V = \frac{1}{6}\left\| \begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix} \right\| =$

$$=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}1-2 & 1-(-1) & 0-3\\ 0-2 & -1-(-1) & 2-3\\ -2-2 & 2-(-1) & 1-3\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}-1 & 2 & -3\\ -2 & 0 & -1\\ -4 & 3 & -2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|(0+8+18)-(0+8+3)\right|=$$

$$=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}\ u^3$$ †

5. Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r:\begin{cases}x=-7+4t\\ y=1-t\\ z=2\end{cases}\quad ; \quad s:\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z}{-2}$$

Hallar la ecuación de un plano que contenga a ambas rectas.

(Junio 1998)

Solución:

Un punto de r es A(−7, 1, 2) y un vector director es $\vec{u}=(4,-1,0)$. Un punto de s es B(3, −4, 0) y un vector director de s es $\vec{v}=(2,-3,-2)$.

- $\text{rango}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\end{pmatrix}=\text{rango}\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}=2$. pues hay al menos un menor de orden dos distinto de cero.

- $\text{rango}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\\ \overrightarrow{AB}\end{pmatrix}=\text{rango}\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 2 & -3 & -2\\ 10 & -5 & -2\end{pmatrix}=2$, ya que $\begin{vmatrix}4 & -1 & 0\\ 2 & -3 & -2\\ 10 & -5 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & -1 & 0\\ -8 & 2 & 0\\ 10 & -5 & -2\end{vmatrix}=$

$$=(-2)\begin{vmatrix}4 & -1\\ -8 & 2\end{vmatrix}=(-2)(8-8)=0.$$

Entonces las rectas son secantes. Hallemos el punto P donde se cortan ambas:

$$r\equiv\begin{cases}x=-7+4t\\ y=1-t\\ z=2\end{cases}\Rightarrow r\equiv\frac{x+7}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{0}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}-x-7=4y-4\\ 0=-z+2\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x+4y=-3\\ z=2\end{cases}$$

$$s\equiv\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z}{-2}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}-3x+9=2y+8\\ -2y-8=-3z\end{cases}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}3x+2y=1\\ 2y-3z=-8\end{cases}$$

Uniendo todas las ecuaciones se obtiene z = 2, y = −1, x = 1. Por tanto el punto P donde se cortan ambas rectas es P(1, −1, 2)

El plano π que contiene a r y a s, contiene a P y tiene por direcciones $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Entonces: $\begin{vmatrix}x-1 & y+1 & z-2\\ 4 & -1 & 0\\ 2 & -3 & -2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(2x-2-12z+24)-(-2z+4-8y-8)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(2x-12z+22)-(-8y-2z-4)=0\Leftrightarrow 2x+8y-10z+26=0\Leftrightarrow x+4y-5z+13=0$$

Por tanto $\pi\equiv x+4y-5z+13=0$ †

6. Hallar el ángulo que forman la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1}$ y el plano $x + 2y - z - 3 = 0$. Obtener el punto de corte de la recta y el plano

(Junio 1998)

Solución:

Un vector director de la recta es $\vec{v} = (2, 1, 1)$ y un vector perpendicular al plano es $\vec{u} = (1, 2, -1)$. El ángulo entre una recta y un plano viene dado por la fórmula:

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|Av_1 + Bv_2 + Cv_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2}}$, donde (A, B, C) es un vector perpendicular al plano y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es un vector director de la recta. Entonces, en nuestro caso: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{|1\cdot 2 + 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^o$

$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-1 = 2y-4 \\ y-2 = z+1 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-2y = -3 \\ y-z = 3 \end{cases}$. Uniendo las ecuaciones implícitas de la recta con la ecuación del plano obtenemos el sistema:

$\begin{cases} x-2y = -3 \\ y-z = 3 \\ x+2y-z = 3 \end{cases}$. El determinante de la matriz de los coeficientes es:

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1+2) - (-2) = 3$. Las soluciones del sistema son por tanto:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

Entonces el punto de corte de la recta y el plano es (−1, 1, −2) †

7. Estudiar si las rectas r y s son coplanarias. En caso afirmativo, dar la ecuación del plano que las contiene:

$$r:\begin{cases}2x-3y+13=0\\ 2y-z-4=0\end{cases}\ ;\ s:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{4}$$

(Septiembre 1998)

Solución:

Hallemos un vector director $\vec{u}$ y un punto A de r. Para ello pasemos a paramétricas. Llamemos, por ejemplo, y = λ. Entonces 2λ − z − 4= 0 ⇒ z = 2λ − 4 ; 2x − 3λ + 13 = 0 ⇒ 2x = 3λ − 13 ⇒ $x=\frac{3}{2}\lambda-\frac{13}{2}$. Por tanto las ecuaciones paramétricas de r son $r\equiv\begin{cases}x=\frac{3}{2}\lambda-\frac{13}{2}\\ y=\lambda\\ z=2\lambda-4\end{cases}$, con lo que un punto de r es $A(-5,1,-2)$ (haciendo λ = 1) y un vector director de r es $\vec{u}=(3, 2, 4)$

Un vector director de s es $\vec{v}=(3, 2, 4)$ y un punto de s es B(1, −2, 1).

Entonces:

- $\text{rango}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\end{pmatrix}=\text{rango}\begin{pmatrix}3&2&4\\3&2&4\end{pmatrix}=1$. pues las dos filas son iguales.
- $\text{rango}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\\ \overrightarrow{AB}\end{pmatrix}=\text{rango}\begin{pmatrix}3&2&4\\3&2&4\\6&-3&3\end{pmatrix}=2$, pues hay al menos un menor de orden 2 distinto de cero.

Esto quiere decir que r y s son paralelas: $r \parallel s$ y, por tanto, coplanarias. Para hallar el plano π que las contiene tomamos un punto cualquiera de una de las dos rectas por ejemplo A(−5, 1, −2), la dirección de r: $\vec{u}=(3, 2, 4)$ y la otra dirección la del vector $\vec{w}$ que une A con B: $\overrightarrow{AB}=(6, -3, 3)$. Podemos tomar pues $\vec{w}=(2, -1, 1)$. Así pues:

$$\begin{vmatrix}x+5&y-1&z+2\\3&2&4\\2&-1&1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(2x+10+8y-8-3z-6)-(4z+8+3y-3-4x-20)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2x+8y-3z-4)-(-4x+3y+4z-15)=0\Leftrightarrow 6x+5y-7z+11=0.$$

Por tanto el plano π que contiene a r y s es $\pi\equiv 6x+5y-7z+11=0$ †

8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por P(3, −4, 7) y es perpendicular al plano π: 2x − 3y + z − 11 = 0. Hallar el punto simétrico de P respecto del plano π.

(Septiembre 1998)

Solución:

La recta r que buscamos tendrá como vector director un vector perpendicular al plano π: $\vec{u} = (2, -3, 1)$. Las ecuaciones de r serán: $r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -4 - 3\lambda \\ z = 7 + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-7}{1} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} -3x + 9 = 2y + 8 \\ y + 4 = -3z + 21 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ y + 3z = 17 \end{cases}.$$

Resolviendo el sistema formado por la recta y el plano obtenemos el punto M donde la recta corta al plano: $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ y + 3z = 17 \\ 2x - 3y + z = 11 \end{cases}$.

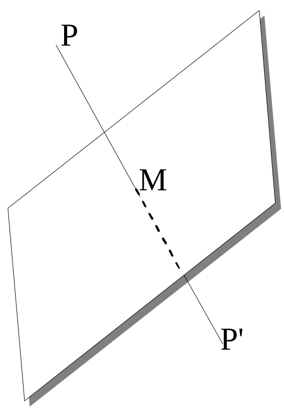
El determinante de la matriz de los coeficientes es: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (3+12) - (-27) = 42$

Por tanto:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 17 & 1 & 3 \\ 11 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{42} = \frac{(1+66)-(34-9)}{42} = \frac{42}{42} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix}}{42} = \frac{(51+6)-(99)}{42} = \frac{-42}{42} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 17 \\ 2 & -3 & 11 \end{vmatrix}}{42} = \frac{(33+68)-(2-153)}{42} = \frac{252}{42} = 6$$



Así, el punto M donde la recta r corta al plano π es M(1, −1, 6). Este punto es el punto medio del simétrico P'(a, b, c) de P respecto del plano π. Entonces:

$$(1, -1, 6) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b-4}{2}, \frac{c+7}{2} \right) \Rightarrow a = -1,\ b = 2,\ c = 5.$$

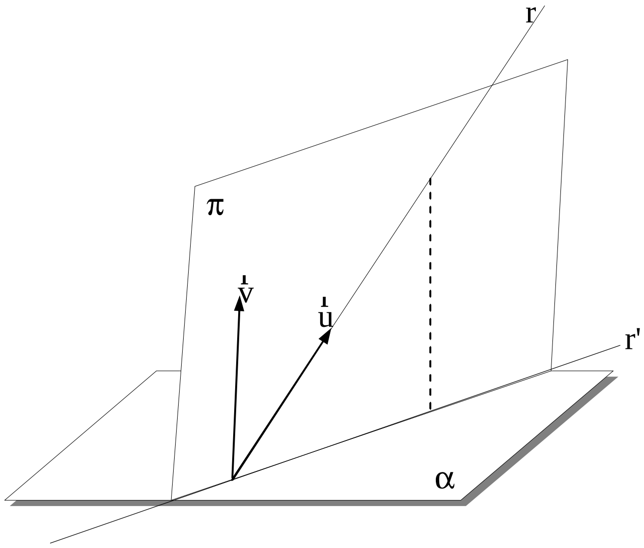
Por tanto el simétrico de P respecto del plano π es P'(−1, 2, 5) †

9. Hallar la ecuación de la proyección ortogonal r' de la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ sobre el plano α: x − 3y + 2z + 12 = 0

(Junio 1999)

Solución:

Hallemos el plano π, perpendicular al plano α que contiene a la recta r. Esta condición nos lleva a que un punto de π será A(1, 1, 2) (punto de la recta) y dos direcciones del mismo serán $\vec{u}$ = (2, 1, 2) (la de la recta, por contenerla) y $\vec{v}$ = (1, −3, 2) (la de un vector perpendicular a α). Entonces:



$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2x-2+2y-2-6z+12)-(z-2+4y-4-6x+6)=0 \Leftrightarrow$$

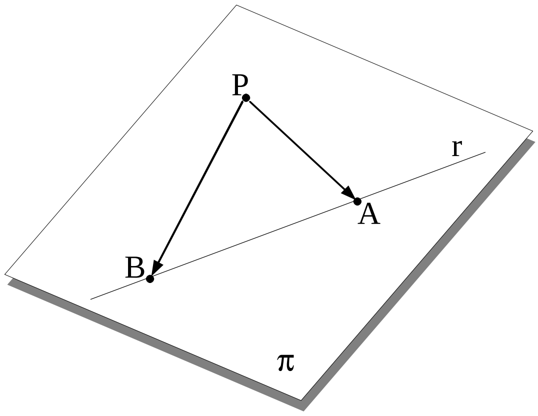
$\Leftrightarrow (2x+2y-6z+8)-(-6x+4y+z)=0 \Leftrightarrow 8x-2y-7z+8=0$. Por tanto el plano π es π ≡ 8x − 2y − 7z + 8 = 0.

La proyección ortogonal r' de la recta r sobre el plano α será el corte o intersección de α con el plano hallado π. Por tanto r' tiene ecuaciones implícitas: $r' \equiv \begin{cases} 8x-2y-7z+8=0 \\ x-3y+2x+12=0 \end{cases}$. †

10. Dados el punto P(2, 1, 2) y la recta $r:\begin{cases} x=2+t \\ y=3-t \\ z=4-3t \end{cases}$ determinar la ecuación del plano que contiene a ambos.

(Junio 1999)

Solución:



Dos puntos de la recta r son: A(2, 3, 4) (para t = 0) y B(3, 2, 1) (para t = 1). Por tanto el plano π que se busca debe pasar por el punto P(2, 1, 2) y tener las direcciones de $\overrightarrow{PA}=(0,2,2)$ y $\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$. Así pues:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (-2x+4+2y-2)-(2z-4+2x-4)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x+2y-2z+10=0 \Leftrightarrow 2x-y+z-5=0$$, y el plano es $\pi \equiv 2x-y+z-5=0$ †

11. Dadas las rectas $r:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ y $s:\begin{cases} x=\mu \\ y=-\mu \\ z=-\mu \end{cases}$, hallar los puntos que dan la mínima distancia y determinar la ecuación de la perpendicular común a ambas rectas.

(Septiembre 1999)

Solución:

Escribamos las ecuaciones implícitas de las rectas r y s:

$$r \equiv \frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x-3=2y \\ y=z-1 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x-2y-3=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=-\mu \\ z=-\mu \end{cases} \Leftrightarrow s \equiv \frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1} \Leftrightarrow s \equiv \begin{cases} -x=y \\ -y=-z \end{cases} \Leftrightarrow s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

- Hallemos el plano π que pasa por s y es paralelo a r. Escribamos para ello la ecuación del haz de planos de arista s:

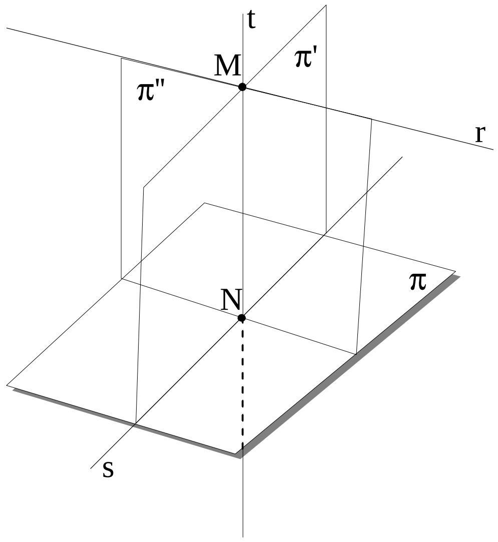
$\lambda(x + y) + \mu(y - z) = 0 \Leftrightarrow \lambda x + (\lambda + \mu)y - \mu z = 0$

Para que un plano de este haz sea paralelo a la recta r se debe cumplir que el vector perpendicular al plano $(\lambda, \lambda + \mu, -\mu)$ sea perpendicular a un vector director de r, $\vec{u} = (2, 1, 1)$, es decir, que el producto escalar de ambos sea cero:

$2\lambda + \lambda + \mu - \mu = 0 \Rightarrow 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

Tomando pues $\lambda = 0$ y un valor cualquiera de $\mu \neq 0$ $(\mu = 1)$ se tiene: $\pi \equiv y - z = 0$

- Hallemos ahora el plano π' que pasa por s y es perpendicular a π. Ya sabemos que



el haz de planos de arista s es $\lambda x + (\lambda + \mu)y - \mu z = 0$.

Para que un plano de este haz sea perpendicular a π se debe cumplir que los vectores perpendiculares a ambos planos sean perpendiculares, es decir, que el producto escalar de los vectores $(\lambda, \lambda + \mu, -\mu)$ y $(0, 1, -1)$ sea 0:

$\lambda + \mu + \mu = 0 \Rightarrow \lambda + 2\mu = 0$

Tomando $\lambda = -2$, $\mu = 1$, se tiene que $\pi' \equiv -2x - y - z = 0 \Leftrightarrow \pi' \equiv 2x + y + z = 0$

- Hallemos por último el plano π'' que pasa por r y es perpendicular a π. El haz de planos de arista r es

$\lambda(x - 2y - 3) + \mu(y - z + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda x + (-2\lambda + \mu)y - \mu z - 3\lambda + \mu = 0$

Para que un plano de este haz sea perpendicular a π se debe cumplir (al igual que en el punto anterior) que $(\lambda, -2\lambda + \mu, -\mu) \perp (0, 1, -1)$, es decir que:

$-2\lambda + \mu + \mu = 0 \Leftrightarrow -2\lambda + 2\mu = 0 \Leftrightarrow \lambda - \mu = 0$

Tomando $\lambda = \mu = 1$, se tiene que $\pi'' \equiv x - y - z - 2 = 0$

La recta t, perpendicular común a r y s, es la intersección de π' y π'', luego tiene ecuaciones implícitas $t \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y - z - 2 = 0 \end{cases}$

La recta t corta a r en un punto M: $t \cap r = M$. Por tanto resolvamos el sistema formado por t y r: $\begin{cases} x-2y-3=0 \\ y-z+1=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=3 \\ y-z=-1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$. Observa que hemos eliminado la última ecuación (sabemos que tiene solución única) y hemos pasado los términos independientes al segundo miembro. De la primera ecuación: x = 3 + 2y. Sustituyendo en la tercera: 2(3 + 2y) + y + z = 0 ⇒ 5y + z = −6. Por tanto nos queda el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\begin{cases} y-z=-1 \\ 5y+z=-6 \end{cases}$, cuyas soluciones son: $y=-\frac{7}{6}$, $z=-\frac{1}{6}$ y sustituyendo en la expresión de x se tiene $x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Así pues $M=\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right)$.

De una manera completamente análoga se obtiene el punto N: t ∩ s = N. El sistema formado por t y s es: $\begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \\ x-y-z=2 \end{cases} \Rightarrow [x=-y] \Rightarrow \begin{cases} y-z=0 \\ -2y-z=2 \end{cases}$.

De aquí se obtiene $x=\frac{2}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$, $z=-\frac{2}{3} \Rightarrow N=\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

Observa que en este caso hemos suprimido la tercera ecuación, pues si suprimimos la cuarta queda un sistema con infinitas soluciones y esto no es posible pues sabemos que la solución es única (es conveniente hacer también estas comprobaciones utilizando el teorema de Rouché).

Estos puntos $M=\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right)$ y $N=\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, son los que dan la mínima distancia entre r y s, por tanto:

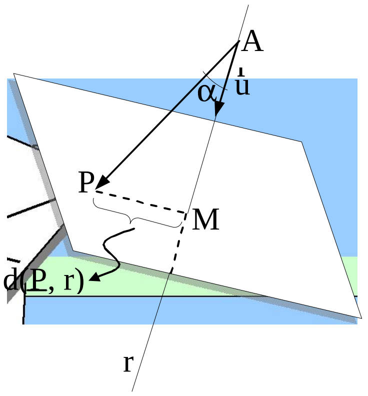
$$d(r,\ s)=d(M,\ N)=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right)\right)^2+\left(-\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2}=$$

$$=\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ uds.}$$ †

12. Hallar la distancia del punto P(1, 2, 3) a la recta r de ecuaciones $r:\begin{cases} x = t \\ y = 6 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$, determinando el punto de la recta que dista menos de P.

(Septiembre 1999)

Solución:



El punto M de r que dista menos de P, es la intersección de r con el plano π que pasa por P y es perpendicular a r. Un vector director de r es $\vec{u} = (1, -1, 1)$. Por tanto este mismo será un vector perpendicular a π. Así pues π ha de ser de la forma $x - y + z + D = 0$. Como este plano pasa por P ⇒ $1 - 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow \pi \equiv x - y + z - 2 = 0$.

Las ecuaciones implícitas de la recta r son:

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 6 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} -x = y - 6 \\ y - 6 = -z + 2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x + y = 6 \\ y + z = 8 \end{cases}.$$

Como $r \cap \pi = M$, al resolver el sistema formado por r y π obtenemos el punto M: $\begin{cases} x + y = 6 \\ y + z = 8 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$. De la primera ecuación $x = 6 - y$. Sustituyendo en la tercera tenemos: $6 - y - y + z - 2 = 0 \Rightarrow -2y + z = -4$, quedando el sistema $\begin{cases} y + z = 8 \\ -2y + z = -4 \end{cases}$, de donde $y = 4$, $z = 4$. Sustituyendo en la expresión de x, se tiene $x = 2$. Por tanto el punto M de r que dista menos de P es M(2, 4, 4) y la distancia de P a r, será la misma que la de P a M:

$$d(P,\ r) = d(P,\ M) = \left|\overrightarrow{PM}\right| = \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}\ \text{uds.}$$

También se puede hallar la distancia de P a r utilizando la fórmula:

$$d(P,\ r) = \frac{\left|(p_1 - a_1,\ p_2 - a_2,\ p_3 - a_3) \times (u_1,\ u_2,\ u_3)\right|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}},$$ donde $P(p_1,\ p_2,\ p_3) = P(1,\ 2,\ 3)$, $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$ es un punto de la recta: A(0, 6, 2) y $\vec{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ es un vector director de la recta $\vec{u} = (1, -1, 1)$

Entonces: $(p_1 - a_1,\ p_2 - a_2,\ p_3 - a_3) = (1 - 0,\ 2 - 6,\ 3 - 2) = (1,\ -4,\ 1)$, luego

$$(p_1 - a_1,\ p_2 - a_2,\ p_3 - a_3) \times (u_1,\ u_2,\ u_3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} i & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$=-3(i-k)=-3i+3k$ (donde se le ha restado a la tercera fila la segunda y luego se ha desarrollado el determinante por los elementos de la tercera fila). Entonces tenemos $(p_1-a_1,\ p_2-a_2,\ p_3-a_3)\times(u_1,\ u_2,\ u_3)=(-3,\ 0,\ 3)$. Por tanto

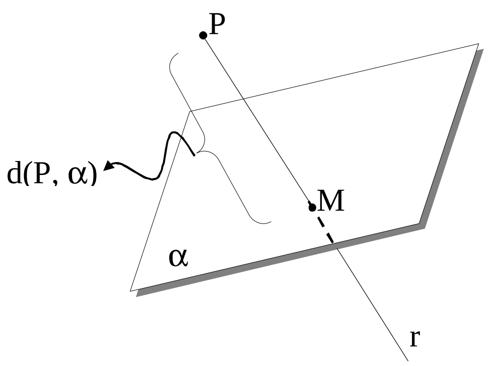
$$d(P,\ r)=\frac{\left|(-3,\ 0,\ -3)\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{9+0+9}}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{6}}{3}=\sqrt{6}\text{ uds.}$$ †

13. Hallar la distancia del punto P(2, 4, 1) al plano $\alpha \equiv 3x + 4y + 12z - 8 = 0$, y encontrar el punto del plano que da la mínima distancia del punto P.

(Junio 2000)

Solución:

Hallemos la recta r que es perpendicular al plano α y que pasa por P(2, 4, 1). Un vector director de esta recta será un vector perpendicular al plano α, o sea el vector $\vec{u}$ = (3, 4, 12). Por tanto la recta r será: $r\equiv\begin{cases}x=2+3t\\ y=4+4t\\ z=1+12t\end{cases}\Rightarrow r\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-1}{12}\Rightarrow$



$$\Rightarrow r\equiv\begin{cases}4x-8=3y-12\\ 12y-48=4z-4\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}4x-3y=-4\\ 12y-4z=44\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}4x-3y=-4\\ 3y-z=11\end{cases}.$$

Esta recta corta al plano α en un punto M, que da la mínima distancia del punto P al plano α: $r \cap \alpha = M$. Para hallar el punto M se resuelve el sistema formado por la recta r y el plano α: $\begin{cases}4x-3y=-4\\ 3y-z=11\\ 3x+4y+12z-8=0\end{cases}$. De la segunda ecuación $z = 3y - 11$. Sustituyendo en la tercera $3x + 4y + 12(3y - 11) - 8 = 0 \Rightarrow 3x + 40y = 140$, que junto con la primera ecuación forman el sistema: $\begin{cases}4x-3y=-4\\ 3x+40y=140\end{cases}$, cuyas soluciones son $x=\frac{20}{13}$, $y=\frac{44}{13}$. Sustituyendo en la expresión de z se tiene $z=-\frac{11}{13}$. De este modo el punto M es $M\left(\frac{20}{13},\ \frac{44}{13},\ -\frac{11}{13}\right)$

La distancia del punto P al plano α coincidirá por tanto con la distancia de P a M:

$$d(P,\ \alpha)=d(P,\ M)=\left|\overrightarrow{PM}\right|=\sqrt{\left(\frac{20}{13}-2\right)^2+\left(\frac{44}{13}-4\right)^2+\left(-\frac{11}{13}-1\right)^2}=$$

$$\sqrt{\left(\frac{-6}{13}\right)^2+\left(\frac{-8}{13}\right)^2+\left(\frac{-24}{13}\right)^2}=\sqrt{\frac{36}{169}+\frac{64}{169}+\frac{576}{169}}=\sqrt{\frac{676}{169}}=\sqrt{4}=2\text{ uds.}$$

La distancia del punto P al plano α también se puede hallar utilizando la fórmula:

$d(P,\ \alpha)=\dfrac{\left|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, donde $P(p_1,\ p_2,\ p_3)=P(2,\ 4,\ 1)$ y como α es el plano: $\alpha\equiv 3x+4y+12z-8=0\Rightarrow A=3,\ B=4,\ C=12,\ D=-8$. De este modo:

$$d(P,\ \alpha)=\frac{\left|3\cdot 2+4\cdot 4+12\cdot 1+(-8)\right|}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}}=\frac{26}{\sqrt{169}}=\frac{26}{13}=2\text{ uds.}$$ †

---

14. Hallar el punto simétrico del punto A(1, 2, 3) respecto de la recta $r\equiv\begin{cases}x-y+1=0\\2x-z-1=0\end{cases}$

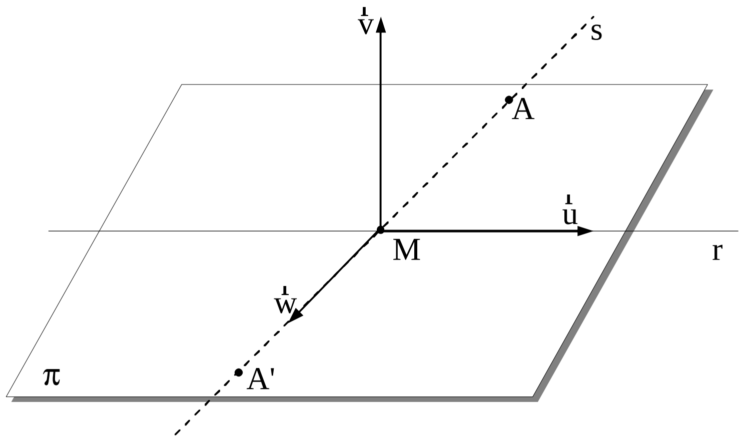
(Junio 2000)

Solución:

Hallemos el plano π que contiene al punto A y a la recta r.

El haz de planos de base la recta r es $\lambda(x-y+1)+\mu(2x-z-1)=0$. Podemos suponer que $\lambda\neq 0$ y dividir todos los términos entre λ con lo que la ecuación del haz queda de la forma: $x-y+1+t(2x-z-1)=0$, donde $t=\mu/\lambda$. Como el plano contiene al punto $A\Rightarrow 1-2+1+t(2-3-1)=0\Rightarrow -2t=0\Rightarrow t=0$ y el plano π que buscamos es $\pi\equiv x-y+1=0$

La idea consiste en hallar un vector $\vec{w}$ perpendicular a r para, utilizándolo, hallar la recta s perpendicular a r, contenida en π, que pasa por el punto A. Esta recta s cortará a r (están en el mismo plano y son perpendiculares) en un punto M. El punto simétrico de A respecto de r, A', se encuentra de M a la misma distancia que M de A: M es el punto medio de A y A'. Ahora ya será fácil hallar A' (ver figura).



Hallemos entonces un vector director $\vec{u}$ de la recta r. Para ello escribamos r en paramétricas. Llamando y = λ ⇒ x = λ − 1 ⇒ 2(λ − 1) − z − 1 = 0 ⇒ z = 2λ − 2 ⇒

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda - 2 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = (1,\ 1,\ 2).$$

Un vector perpendicular al plano π es $\vec{v} = (1, -1, 0)$.

Entonces el vector $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ es simultáneamente perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$. Hallémoslo: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j+i & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} j+i & k \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2i + 2j - 2k \Rightarrow \vec{w} = (2,\ 2,\ -2).$

Podemos tomar $\vec{w}$ un vector proporcional: $\vec{w} = (1, 1, -1)$

La recta s que pasa por A(1, 2, 3) y tiene dirección $\vec{w} = (1, 1, -1)$ es perpendicular a r y está contenida en π: $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x - 1 = y - 2 \\ -y + 2 = z - 3 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow s \equiv \begin{cases} x - y = -1 \\ y + z = 5 \end{cases}.$$

Hallemos el punto de corte de r y s: M = r ∩ s. Para ello resolvemos el sistema formado por r y s: $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \\ x - y = -1 \\ y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - z = 1 \\ y + z = 5 \end{cases}$ (obsérvese que se ha eliminado la tercera ecuación, que es igual que la primera). De la primera ecuación x = y − 1. Sustituyendo en la segunda: 2(y − 1) − z = 1 ⇒ 2y − z = 3 que, con la tercera forman el sistema $\begin{cases} 2y - z = 3 \\ y + z = 5 \end{cases}$, cuyas soluciones son: $y = \frac{8}{3},\ z = \frac{7}{3}$. Sustituyendo en la expresión de x se tiene $x = \frac{5}{3}$, con lo que $M\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

Supongamos que el punto simétrico de A(1, 2, 3) respecto de r es A'(a, b, c). Como M es el punto medio de A y A' $\Rightarrow \begin{cases} \frac{a+1}{2} = \frac{5}{3} \\ \frac{b+2}{2} = \frac{8}{3} \\ \frac{c+3}{2} = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = \frac{10}{3} \\ c = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$ †

15. Dados los puntos A(−2, −4, −3) y B(2, 6, 5), y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$, averiguar si existe alguna recta tal que contenga los puntos A y B y corte a la recta r. Razonar la respuesta.

(Septiembre 2000)

Solución:

Se trata de hallar la posición relativa de r y la recta s que pasa por A y B.

Pasemos r a paramétricas. Llamemos z = t ⇒ $r \equiv \begin{cases} x - y = 1 - t \\ 2x + y = 2 + 3t \end{cases}$, de donde $x = 1 + \frac{2}{3}t$, $y = \frac{5}{3}t$. Entonces $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}t \\ y = \frac{5}{3}t \\ z = t \end{cases}$. Luego un vector director suyo es $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1\right)$ y podemos tomar también uno proporcional: $\vec{u} = (2, 5, 3)$. Un punto de r es M(1, 0, 0).

La recta s que pasa por A y B es tiene vector director $\overrightarrow{AB} = (4, 10, 8)$ y podemos tomar también uno proporcional: $\vec{v} = (2, 5, 4)$.

Estudiemos las posición relativa de r y s:

- $\text{rango}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = 2$ ($\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales)
- $\text{rango}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{MA} \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix} = 3$, ya que $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

Por tanto r y s se cruzan y no puede existir ninguna recta que contenga a los puntos A y B y corte a la recta r. †

16. Hallar el punto simétrico del punto A(2, −3, 5) respecto del plano $\alpha \equiv x - 3y + 4z + 21 = 0$.

(Septiembre 2000)

Solución:

La resolución de este ejercicio es como la del ejercicio número 8:

Calculemos la recta r que pasa por A y es perpendicular al plano α. Esta recta tendrá como vector director un vector perpendicular al plano α: $\vec{u} = (1, -3, 4)$. Las ecuaciones de r serán pues: $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 - 3\lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-5}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} -3x+6=y+3 \\ 4y+12=-3z+15 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} 3x+y=3 \\ 4y+3z=3 \end{cases}.$$

Resolviendo el sistema formado por la recta y el plano obtenemos el punto M donde la recta corta al plano: $\begin{cases} 3x+y=3 \\ 4y+3z=3 \\ x-3y+4z=-21 \end{cases}$.

De la primera ecuación y = 3 − 3x.

Sustituyendo en la segunda: 4(3 – 3x) + 3z = 3 ⇒ −12x + 3z = −9 ⇒ −4x + z = −3.

Sustituyendo en la tercera: x − 3(3 − 3x) + 4z = −21 ⇒ x − 9 + 9x + 4z = −21 ⇒ 10x + 4z = −12 ⇒ 5x + 2z = −6.

Tenemos pues el sistema: $\begin{cases} -4x+z=-3 \\ 5x+2z=-6 \end{cases}$, de donde x = 0, z = −3; y por tanto y = 3.

Así, el punto M donde la recta r corta al plano α es M(0, 3, −3). Este punto es el punto medio del simétrico A'(a, b, c) de A(2, −3, 5) respecto del plano α. Entonces:

$$(0,\ 3,\ -3) = \left(\frac{a+2}{2}, \frac{b-3}{2}, \frac{c+5}{2} \right) \Rightarrow a = -2,\ b = 9,\ c = -11.$$

Por tanto el simétrico de A respecto del plano α es A'(−2, 9, −11) †

17. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 2+2\mu \\ z = 0 \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.
b) Halla la ecuación de una recta que sea perpendicular simultáneamente a r y s.

(Junio 2001)

Solución:

a) Punto y vector director de r: A(1, 0, 0), $\vec{u} = (1, 1, -1)$

Punto y vector director de s: B(0, 2, 0), $\vec{v} = (1, 2, 0)$

$\text{rango}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$ (hay un menor de orden dos distinto de cero: $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales).

$$\text{rango}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3, \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

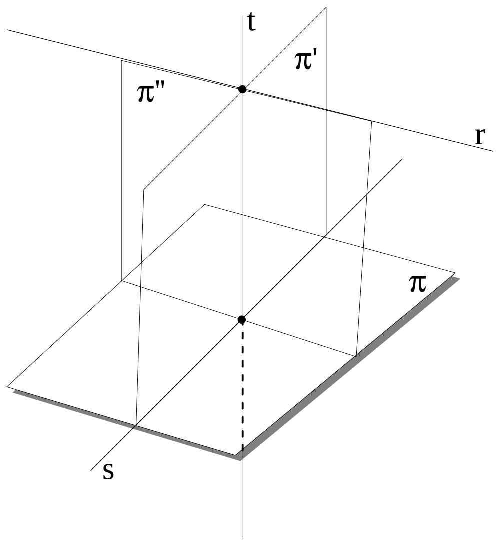
Por tanto r y s se cruzan.

b) *Este parte es similar al ejercicio 11*

Las ecuaciones implícitas de r y s son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-1 = y \\ -y = z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-y-1=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 2+2\mu \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{0} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} 2x = y-2 \\ 0 = 2z \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} 2x-y+2=0 \\ z=0 \end{cases}$$



- Hallemos el plano π que pasa por s y es paralelo a r. Escribamos para ello la ecuación del haz de planos de arista s:

  $\lambda(2x - y + 2) + \mu z = 0 \Leftrightarrow 2\lambda x - \lambda y + \mu z + 2 = 0$

  Para que un plano de este haz sea paralelo a la recta r se debe cumplir que el vector perpendicular al plano $(2\lambda, -\lambda, \mu)$ sea perpendicular a un vector director de r, $\vec{u} = (1, 1, -1)$, es decir, que el producto escalar de ambos sea cero: $2\lambda - \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu$.

  Tomando pues $\lambda = \mu = 1$ se tiene: $\pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0$

- Hallemos ahora el plano π' que pasa por s y es perpendicular a π. Ya sabemos que el haz de planos de arista s es $2\lambda x - \lambda y + \mu z + 2 = 0$.

  Para que un plano de este haz sea perpendicular a π se debe cumplir que los vectores perpendiculares a ambos planos sean perpendiculares, es decir, que el producto escalar de los vectores $(2\lambda, -\lambda, \mu)$ y $(2, -1, 1)$ sea 0:

  $4\lambda + \lambda + \mu = 0 \Rightarrow 5\lambda + \mu = 0$

  Tomando $\lambda = 1$, $\mu = -5$, se tiene que $\pi' \equiv 2x - y - 5z + 2 = 0$

- Hallemos por último el plano π'' que pasa por r y es perpendicular a π. El haz de planos de arista r es:

  $\lambda(x - y - 1) + \mu(y + z) = 0 \Leftrightarrow \lambda x + (-\lambda + \mu)y + \mu z - \lambda = 0$

  Para que un plano de este haz sea perpendicular a π se debe cumplir (al igual que en el punto anterior) que $(\lambda, -\lambda + \mu, \mu) \perp (2, -1, 1)$, es decir que:

$2\lambda + \lambda - \mu + \mu = 0 \Leftrightarrow 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

Tomando $\lambda = 0$ y $\mu = 1$, se tiene que $\pi'' \equiv y + z = 0$

La recta t, perpendicular común a r y s, es la intersección de π' y π'', luego tiene ecuaciones implícitas $t \equiv \begin{cases} 2x - y - 5z + 2 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

Si se quiere hallar también la distancia entre r y s, se aplica la fórmula de la distancia de un punto cualquiera de r, por ejemplo A(1, 0, 0), al plano $\pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0$:

$$d(r,\, s) = d(A,\, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ uds.}$$ †

18. Determina las coordenadas del punto simétrico del A(−2, 1, 6) respecto de la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$

(Junio 2001)

Solución:

La resolución de este ejercicio es como la del ejercicio número 14:

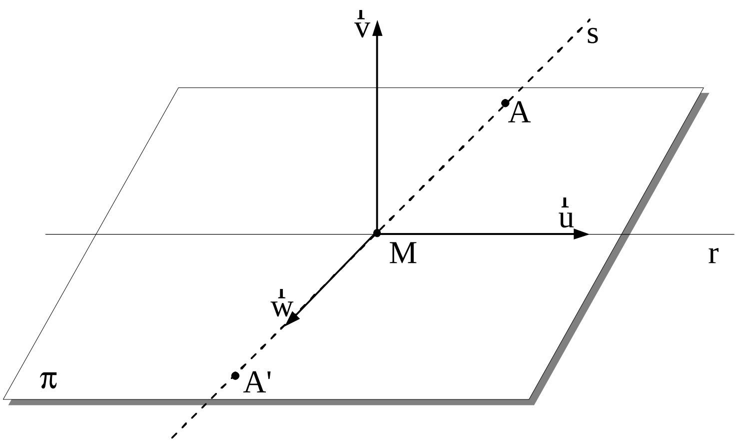
Las ecuaciones implícitas de r son:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 2 = y - 3 \\ 2y - 6 = 2z + 2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x - y = -5 \\ 2y - 2z = 8 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

Hallemos el plano π que contiene al punto A y a la recta r.

El haz de planos de base la recta r es $\lambda(2x - y + 5) + \mu(y - z - 4) = 0$. Podemos suponer que $\lambda \neq 0$ y dividir todos los términos entre λ con lo que la ecuación del haz queda de la forma: $2x - y + 5 + t(y - z - 4) = 0$, donde $t = \mu/\lambda$. Como el plano contiene al punto A $\Rightarrow -4 - 1 + 5 + t(1 - 6 - 4) = 0 \Rightarrow -9t = 0 \Rightarrow t = 0$ y el plano π que buscamos es $\pi \equiv 2x - y + 5 = 0$

La idea consiste en hallar un vector $\vec{w}$ perpendicular a r para, utilizándolo, hallar la recta s perpendicular a r, contenida en π, que pasa por el punto A. Esta recta s cortará a r (están en el mismo plano y son perpendiculares) en un punto M. El punto simétrico de A respecto de r, A', se encuentra de M a la misma distancia que M de A: M es el punto medio de A y A'. Ahora ya será fácil hallar A' (ver figura).



Un vector director $\vec{u}$ de la recta r es $\vec{u} = (1, 2, 2)$.

Un vector perpendicular al plano π es $\vec{v} = (2, -1, 0)$.

Entonces el vector $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ es simultáneamente perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

Hallémoslo: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (4j - k) - (4k - 2i) = 2i + 4j - 5k \Rightarrow \vec{w} = (2, 4, -5)$.

La recta s que pasa por A(−2, 1, 6) y tiene dirección $\vec{w} = (2, 4, -5)$ es perpendicular a r y está contenida en π: $s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-6}{-5} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} 4x + 8 = 2y - 2 \\ -5y + 5 = 4z - 24 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow s \equiv \begin{cases} 4x - 2y = -10 \\ 5y + 4z = 29 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} 2x - y = -5 \\ 5y + 4z = 29 \end{cases}.$$

Hallemos el punto de corte de r y s: $M = r \cap s$. Para ello resolvemos el sistema formado por r y s: $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \\ 2x - y = -5 \\ 5y + 4z = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -5 \\ y - z = 4 \\ 5y + 4z = 29 \end{cases}$ (obsérvese que se ha eliminado la tercera ecuación, que es igual que la primera). De las dos últimas ecuaciones se obtiene: y = 5, z = 1. Sustituyendo en la primera se obtiene x = 0, con lo que M(0, 5, 1).

Supongamos que el punto simétrico de A(−2, 1, 6) respecto de r es A'(a, b, c). Como M es el punto medio de A y A' $\Rightarrow \begin{cases} \frac{a-2}{2} = 0 \\ \frac{b+1}{2} = 5 \\ \frac{c+6}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 9 \\ c = -4 \end{cases} \Rightarrow A'(2, 9, -4)$†

19. Halla el valor de k para que las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = 3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y - 3z = k \\ y - 2z = 2 \end{cases}$ se corten. Halla el punto de corte.

(Septiembre 2001)

Solución:

Para que se corten el sistema conjunto $\begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = 3 \\ y - 3z = k \\ y - 2z = 2 \end{cases}$ formado por las ecuaciones de r y de s debe tener solución única. Para ello el determinante de la matriz ampliada tiene que ser cero porque, en caso contrario, el rango de la matriz ampliada sería 4 y el rango de la matriz de los coeficientes es 3 (hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$), con lo que el sistema sería incompatible y las rectas no podrían cortarse. De este modo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & k \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & k \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & k-3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & k-3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2-(-k+3) = k-1 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ k = 1.

Para hallar el punto de corte P de r y s resolvemos el sistema. Sustituimos k por su valor y eliminamos, por ejemplo, la última ecuación: $\begin{cases} x+y=2 \\ y-z=3 \\ y-3z=1 \end{cases}$. De las dos últimas se obtiene y = 4, z = 1. Sustituyendo en la primera x = −2. Por tanto el punto de corte de r y s es P(−2, 4, 1). †

20. Halla λ para que el plano π ≡ 2x + λy − z = 1 y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$ sean paralelos. ¿Puedes encontrar otro valor de λ para que sean perpendiculares?

(Septiembre 2001)

Solución:

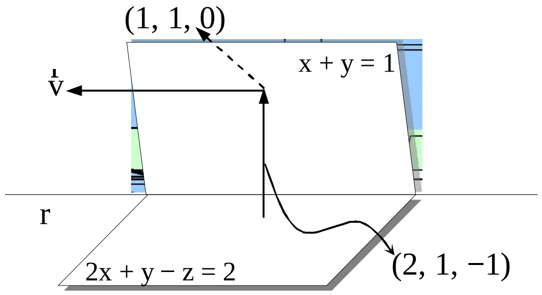
Para que la recta y el plano sean paralelos no deben tener ningún punto en común. Por tanto el sistema conjunto formado por la recta y el plano, $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 2x+\lambda y-z=1 \end{cases}$, no debe tener soluciones, es decir, el rango de la matriz de los coeficientes A tiene que ser distinto que el rango de la matriz ampliada $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$. El rango de esta última es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Por tanto el rango de la matriz de los coeficientes A deber ser menor que 3 y para ello el determinante de la matriz A tiene que ser 0: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & \lambda-2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \lambda-2 & -1 \end{vmatrix} = 1-(-\lambda+2) = \lambda-1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Para ver si se puede encontrar otro valor de λ para el que el plano y la recta sean perpendiculares, habremos de ver si un vector perpendicular del plano, $\vec{u} = (2, \lambda, 1)$ es paralelo o tiene la misma dirección que un vector director de la recta.

Hallaremos en este caso el vector director de la recta $\vec{v}$ como el producto vectorial de los dos vectores perpendiculares a los dos planos que la definen (ver figura):



$$\vec{v} = (1, 1, 0)\times(2, 1, -1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-i+k)-(2k-j) = -i+j-k \Rightarrow \vec{v} = (-1, 1, -1)$$

Obsérvese que, llamando $z = \lambda$ y resolviendo el sistema de incógnitas x e y $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=2+\lambda \end{cases}$, se tiene $x = 1 + \lambda$, $y = -\lambda$, con lo que las ecuaciones paramétricas de la recta son $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, y por tanto un vector director es $(1, -1, 1)$ que tiene la misma dirección de $\vec{v}$ (son claramente proporcionales).

Pues bien, tal y como se había planteado, para que r y π sean perpendiculares, el vector perpendicular al plano $\vec{u} = (2, \lambda, 1)$ y el vector director de la recta $\vec{v} = (-1, 1, -1)$ deben ser paralelos. Es decir debe existir k tal que $\vec{u} = k\vec{v}$, es decir tal que $(2, \lambda, 1) = k(-1, 1, -1) \Rightarrow (2, \lambda, 1) = (-k, k, -k)$ y esto es imposible pues tendría que ser simultáneamente $k = -2$ y $k = -1$.

Por tanto no existe ningún valor de λ para el que r y π sean perpendiculares. †

21. Considera el plano $\pi \equiv x - y + 1 = 0$ y el punto $A(2, 0, 1)$.
   a) Determina la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto A.
   b) Halla las coordenadas del punto B que es simétrico del punto A respecto del plano π.

(Junio 2002)

Solución:

22. Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 0, 2)$, es paralelo a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z-3$ y perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$.

(Junio 2002)

Solución:

23. Sea π el plano que pasa por los puntos (1, 0, 0), (0, 1, 1) y (1, 1, 1); A el punto (1, 2, 3) y B el simétrico de A respecto del plano π.
    a) Halla la ecuación de la recta que pasa por A y por el punto medio del segmento $\overline{AB}$.
    b) Halla la ecuación de la recta paralela a la anterior que pasa por el punto (2, 2, 2).

(Septiembre 2002)

Solución:

24. Considera el plano $\pi \equiv ax + 2y - 4z + b = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$
    a) Halla los valores de a y b para que la recta r esté contenida en π.
    b) ¿Existe algún valor de a y de b para que la recta sea perpendicular al plano π?

(Septiembre 2002)

Solución:

25. Las rectas de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$ se cruzan en el espacio.
    a) Escribe las ecuaciones paramétricas de ambas rectas.
    b) Halla un punto de r y otro de s tales que el vector con origen en uno y otro extremo sea perpendicular a ambas rectas.

(Junio 2003)

Solución:

26. Considera la recta dada por $r \equiv \begin{cases} x-4y+9=0 \\ 3y-z-9=0 \end{cases}$
    a) Determina el plano que pasa por el punto P(1, 4, 0) y contiene a r.
    b) ¿Para cualquier valor de λ, el plano $x - 4y + 9 + \lambda(3y - z - 9) = 0$ contiene a r?
    c) Determina los valores de λ para que el plano diste 3 unidades del origen de coordenadas.

(Junio 2003)

Solución:

27. Sea π el plano de ecuación $3x - 2y - 6z = 1$ y r la recta dada por $(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(2, -1, 1)$
    a) Define la relación de paralelismo entre una recta y un plano.
    b) Averigua si la recta r y el plano π son paralelos.
    c) Define la relación de perpendicularidad entre una recta y un plano.
    d) Averigua si la recta r y el plano π son perpendiculares.

(Septiembre 2003)

Solución:

28. Dados los planos $\pi \equiv x + y + z = 1$; $\pi' \equiv x - y = 0$:
    a) Calcula el ángulo que forman π y π'.
    b) Determina las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al plano π.

(Septiembre 2003)

Solución:

29. Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2z = 3 \\ y + 4z = 5 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x - y + 2z = 1$. Se pide:
    a) Comprueba que r y π son paralelos.
    b) Calcula la distancia entre r y π.
    c) Determina dos rectas distintas que estén contenidas en π y sean paralelas a r.

(Junio 2004)

Solución:

30. Considera los puntos $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(2, 2, 1)$ y $D(1, 1, 2)$ y calcula:
    a) El volumen del tetraedro que determinan.
    b) La ecuación cartesiana o implícita del plano que contiene al punto D y es paralelo al que contiene a los puntos A, B, C.

(Junio 2004)

Solución:

31. Halla la distancia del plano $\pi_1 \equiv 4x - 10y + 2z = -1$ al plano $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$

(Septiembre 2004)

Solución:

32. Considera la recta r que pasa por los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(-4, -2, 0)$ y la recta s determinada por el punto $C(2, 3, 5)$ y el vector dirección $v(1, 3, 0)$.
    a) Calcula el ángulo formado por r y s.
    b) Calcula la distancia de r a s.

(Septiembre 2004)

Solución:

33. a) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$ y al punto P(2, −1, 2).

b) Calcula la distancia desde el plano obtenido al punto Q(0, 1, 0).

(Junio 2005)

Solución:

34. Halla el área y las longitudes de las tres alturas de un triángulo cuyos vértices son: A(1, 1, 1), B(0, 3, 5) y C(4, 0, 2).

(Junio 2005)

Solución:

35. Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$ con la recta $s \equiv \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$

(Septiembre 2005)

Solución:

36. Dados los puntos A(1, −2, 3) y B(0, 2, 1), se pide:

a) La ecuación paramétrica de la recta que pasa por ambos puntos.

b) La ecuación del plano π que está a igual distancia de A y B.

c) La distancia al origen de la recta intersección del plano 2y − z = 0 con el plano π del apartado b)

(Septiembre 2005)

Solución:

37. El plano α de ecuación general x + y + z = 10, corta a las rectas $r_1 : x = y = 1$, $r_2 : y = z = 2$ y $r_3 : x = z = 3$, en los puntos A, B y C respectivamente. Se pide:

a) Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D(1, 2, 3).

b) Determina la distancia desde el vértice D hasta la cara opuesta del tetraedro.

(Junio 2006)

Solución:

38. a) Halla un punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 \end{cases}$ equidistante de los puntos $P(-1, 2, 1)$ y $Q(0, 3, 1)$.

b) Calcula la ecuación implícita de un plano π de modo que el simétrico del punto P respecto del plano π sea el punto Q.

(Junio 2006)

Solución:

39. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + t \\ z = 6 + t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ -2y + z = 2 \end{cases}$, se pide:

a) Analiza su posición relativa.

b) Halla la ecuación general del plano π que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r.

(Septiembre 2006)

Solución:

40. a) Calcula unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(2, -1, 3)$ y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$.

b) Halla las coordenadas del punto P', simétrico del punto P respecto de la recta r.

(Septiembre 2006)

Solución:

41. Consideramos las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 2 \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$ y $r_3 \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 3 \end{cases}$. Se pide:

a) Demuestra que las rectas r_1 y r_2 se cortan en un único punto.

b) Halla las ecuaciones en forma continua de la recta que pasa por el punto de intersección de r_1 y r_2, y es paralela a r_3.

(Junio 2007)

Solución:

42. Dados los planos $\alpha \equiv x + y - z = 1$ y $\beta \equiv \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 1 - t \\ z = 2 + s \end{cases}$, con $t, s \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Determina su posición relativa.
b) Calcula la distancia entre ellos.

(Junio 2007)

Solución:

43. Consideramos los planos $\pi_1 \equiv x+2y-z=1$, $\pi_2 \equiv 3x-z=3$ y $\pi_3 \equiv -x+2y+z=7$.
a) Determina su posición relativa.
b) Halla el ángulo que forman los plano π_1 y π_2.

(Septiembre 2007)

Solución:

44. Dados los puntos de coordenadas A(3, 1, 1), B(0, 2, 2) y C(−1, −1, −1), se pide:
a) Determina la ecuación general del plano que los contiene.
b) Calcula la distancia desde el punto P(0, 0, 4) a dicho plano.

(Septiembre 2007)

Solución:

45. Dados los vectores $\vec{u}=(a,\ b\ ,1)$, $\vec{v}=(-3,\ 4,\ 1)$ y $\vec{w}=(1,\ 2,\ c)$, determina el valor de lo parámetro a, b, c $\in \mathbb{R}$ de manera que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares y además $\vec{u}\times\vec{w}=\vec{v}$, donde $\times$ denota el producto vectorial. ¿Qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en dicho caso?

(Junio 2008)

Solución:

46. Dados los puntos A(1, 1, 1), B(1 + λ, 2, 1 − λ) y C(1 + λ, 1 + λ, 2 + λ), donde $\lambda \in \mathbb{R}$:
a) Prueba que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman un ángulo de 90º, independientemente del valor de λ.
b) Determina los valores de λ para que la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices A, B y C sea igual a 3.

(Junio 2008)

Solución:

47. Dados el plano $\pi \equiv x - y + z + k = 0$, donde $k \in \mathbb{R}$, y la recta $r \equiv \dfrac{x-3}{2}=y+1=-z$, se pide:
a) Demuestra que para cualquier $k \in \mathbb{R}$, la recta r es paralela al plano π.
b) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ de forma que la recta r esté contenida en el plano π.

(Septiembre 2008)

Solución:

48. Dado el punto P(2, 2, 1) y el plano π de ecuaciones $\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 1 - t + s \\ z = t \end{cases}$, se pide:

a) Distancia del punto P al plano π.

b) Ecuaciones generales de la recta que pasa por el punto P y es perpendicular a π.

(Septiembre 2008)

Solución: