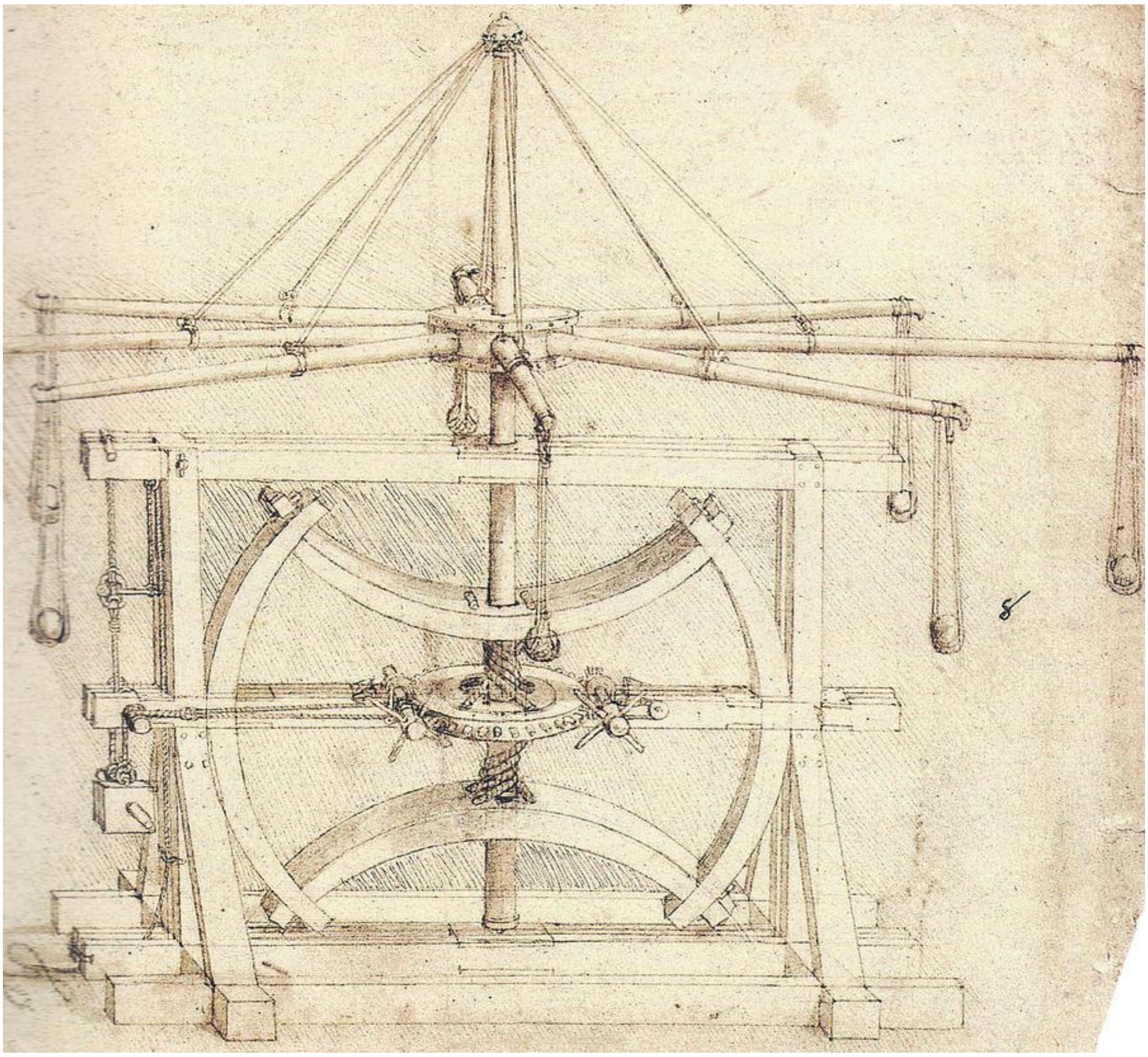
Jean-David DELORD
Jean-David.Delord@univ-eiffel.fr
http://jean.david.delord.free.fr

Mécanique du solide

Résumé de cours



Préambule

Extrait du PPN

Objectifs du module :

Acquérir une culture scientifique de base permettant la compréhension des lois du mouvement et une certaine maîtrise dans le maniement des outils de la dynamique avec des applications en rapport avec la thermique et l'énergétique

Définition de la mécanique (dictionnaire le Robert) :

Partie des mathématiques et de la physique qui a pour objet l'étude du mouvement (cinématique, dynamique) et de l'équilibre (statique) des corps, ainsi que la théorie des machines.

La mécanique peut être classée en plusieurs domaines :

- La mécanique rationnelle (dite aussi mécanique newtonienne), qui regroupe elle-même :
    - La mécanique analytique, qui regroupe différentes formulations très mathématisées de la mécanique classique ;
    - La mécanique céleste ;
    - La mécanique du point matériel ;
    - La mécanique du solide ;
    - La mécanique statique ou *mécanique des systèmes matériels* ;
    - La mécanique des milieux continus, incluant la mécanique des fluides (S2) ;
    - La dynamique (mécanique), discipline de la mécanique classique qui étudie les corps en mouvement sous l'influence des forces qui leur sont appliquées ;
- La mécanique quantique ;
- La mécanique relativiste ;

Liaisons cinématiques – torseur cinématique – torseur statique

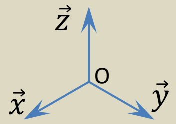
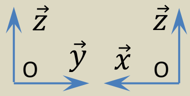
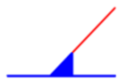
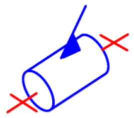
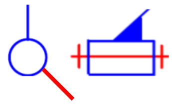
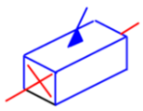
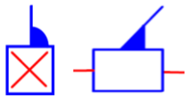
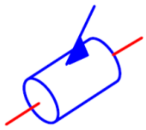
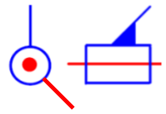
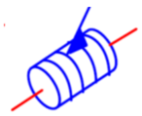
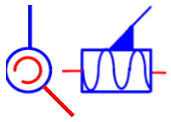
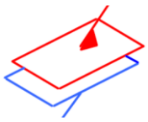
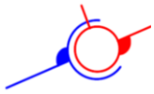
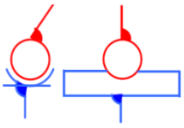
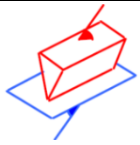
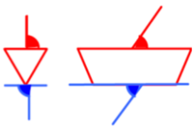
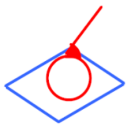
Nom et description géométrique	Représentation spatiale 	Représentation plane 	Mobilité de la liaison $\begin{Bmatrix} T_x & R_x \\ T_y & R_y \\ T_z & R_z \end{Bmatrix}$	Forme du torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & V_{x,A_{2/1}} \\ \omega_{y,2/1} & V_{y,A_{2/1}} \\ \omega_{z,2/1} & V_{z,A_{2/1}} \end{Bmatrix}$	Forme du torseur statique $\{\mathcal{T}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}$
Complète ou encastrement			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}$
Pivot d'axe $(A, \vec{x})$			$\begin{Bmatrix} 0 & R_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}$
Glissière d'axe $(A, \vec{x})$			$\begin{Bmatrix} T_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & V_{x,A_{2/1}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}$
Pivot glissant d'axe $(A, \vec{x})$			$\begin{Bmatrix} T_x & R_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & V_{x,A_{2/1}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}$
Hélicoïdale d'axe $(A, \vec{x})$			$\begin{Bmatrix} T_x & R_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ Tx et Rx sont liées par le pas (p) de l'hélice	$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & V_{x,A_{2/1}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ Avec $V_{x,A_{2/1}} = \frac{\omega_x \cdot p}{2\pi}$	$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}$ Avec $L_A = \frac{X_A \cdot p}{2\pi}$
Appui plan de normale $(A, \vec{z})$			$\begin{Bmatrix} T_x & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & R_z \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & V_{x,A_{2/1}} \\ 0 & V_{y,A_{2/1}} \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & L_A \\ 0 & M_A \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}$
Rotule ou sphérique de centre A			$\begin{Bmatrix} 0 & R_x \\ 0 & R_y \\ 0 & R_z \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & 0 \\ \omega_{y,2/1} & 0 \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}$
Rotule à doigt de centre 0 et de rotation interdite $(A, \vec{y})$			$\begin{Bmatrix} 0 & R_x \\ 0 & 0 \\ 0 & R_z \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & M_A \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}$
Linéaire annulaire d'axe $(A, \vec{x})$			$\begin{Bmatrix} T_x & R_x \\ 0 & R_y \\ 0 & R_z \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & V_{x,A_{2/1}} \\ \omega_{y,2/1} & 0 \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}$
Linéaire rectiligne d'axe $(A, \vec{x})$ et de normale $(A, \vec{z})$			$\begin{Bmatrix} T_x & R_x \\ T_y & 0 \\ 0 & R_z \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & V_{x,A_{2/1}} \\ 0 & V_{y,A_{2/1}} \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_A \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}$
Ponctuelle de normale $(A, \vec{z})$			$\begin{Bmatrix} T_x & R_x \\ T_y & R_y \\ 0 & R_z \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & V_{x,A_{2/1}} \\ \omega_{y,2/1} & V_{y,A_{2/1}} \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{Bmatrix}$	$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}$

Table des matières

Cinématique

1. Introduction

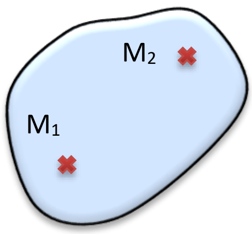
La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie le mouvement des corps indépendamment des forces qui les produisent. Les grandeurs étudiées s'appellent :

- **Mouvement, déplacement.**
- **Trajectoire.**
- **Vitesse.**
- **Accélération.**

Le but est de pouvoir définir la géométrie et les dimensions des différentes pièces afin de respecter un cahier des charges.

1.1. Solide indéformable

En cinématique, un solide est un système matériel indéformable au cours du temps.



Soit M_1 et $M_2 \in (S)$.

$$M_1M_2 = cste = \|M_1M_2\| = d(M_1M_2) = cste\ \forall t$$

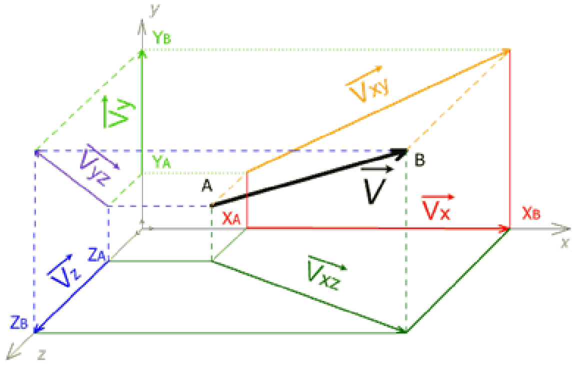
1.2. Référentiel temporel et spatial

En cinématique, le mouvement d'un solide (une pièce ou un ensemble de pièce) peut être défini par rapport à un autre solide choisi comme référence. Ce dernier devient alors un solide de référence.

<u>*Exemple :*</u> le mouvement d'un rotor par rapport au stator.

Un repère de référence permet de positionner parfaitement chaque point dans l'espace. Nous repèrerons cet espace par un repère orthonormé de sens direct**.**

La notion d'écoulement du temps, de manière régulière et irréversible, est donné à l'observateur par des appareils particuliers appelés ***horloge.***

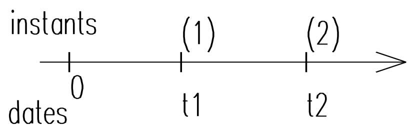


Le stator est fixe

Le rotor est animé d'un mouvement de rotation

On mesure le temps en représentant l'état de l'horloge sur un repère à une dimension, appelé ***repère de temps***, orienté dans le sens de la succession des événements dans le temps.

Chaque point de ce repère est appelé ***instant***.

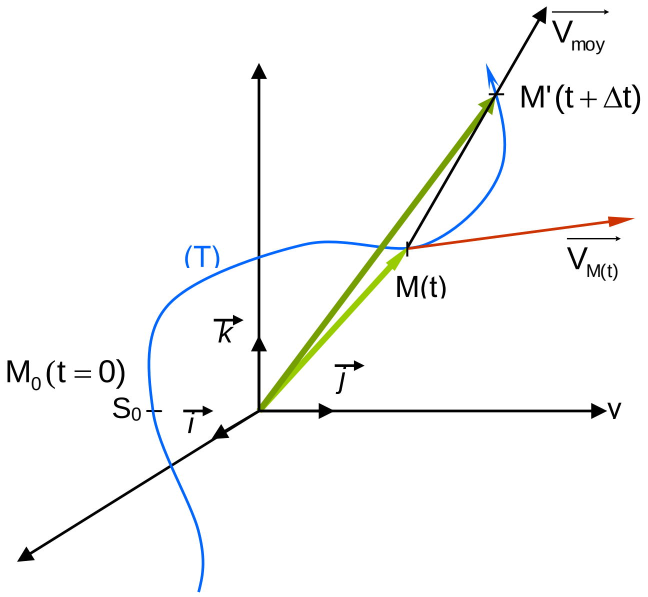


L'abscisse de l'instant est appelée ***date*** (généralement désignée par la lettre ***t***).

La durée entre deux instants (1) et (2), (1) précédant (2) dans l'ordre chronologique, de date t_1 et t_2 est la différence$t_2 - t_1$.

1.3.Vitesse et accélération d'un point

Soit *$M_{(t)}$* la position du point mobile *M* à la date *t* et *$M_{(t+\Delta t)}$* sa position à la date *t* + *Δt*, Δt étant une durée aussi petite que possible.



On appelle ***vecteur vitesse instantanée*** du point *M* par rapport à la date *t*, la limite du vecteur : $\frac{\overrightarrow{OM_{(t+\Delta t)}}+\overrightarrow{OM_{(t)}}}{\Delta t}$ lorsque *Δt* tend vers zéro.

On notera cette valeur$\overrightarrow{V_{M/R}} = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_R$.

Le vecteur $\left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_R = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM_{(t+\Delta t)}}-\overrightarrow{OM_{(t)}}}{\Delta t}$ représente la ***<u>variation du point M au cours du temps</u>*** et s'appelle la ***<u>dérivée</u>*** dans *R* du vecteur $\overrightarrow{OM}$par rapport au temps.

Unité : $\frac{m}{s}$ $ou\ m.s^{-1}$

De la même façon que le vecteur vitesse caractérise la variation du vecteur position du point M entre deux instants t et $(t + \Delta t)$, le vecteur accélération caractérise la variation du vecteur vitesse du point M entre ces mêmes instants t et $(t + \Delta t)$.

- À l'instant t, le point M est en M,
- À l'instant $(t + \Delta t)$, le point M est en M',
- $\overrightarrow{V_{M(t)}}$ et $\overrightarrow{V_{M(t+\Delta t)}}$ sont donc les vecteurs vitesses de M aux instants t et $(t + \Delta t)$.

L'accélération moyenne entre ces deux instants :

$$\overrightarrow{a_{moy\ M}} = \frac{\overrightarrow{V_{M(t+\Delta t)}} - \overrightarrow{V_{M(t)}}}{\Delta t}$$

Accélération instantanée du point M :

$$\overrightarrow{a_M} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overrightarrow{V_{M(t+\Delta t)}} - \overrightarrow{V_{M(t)}}}{\Delta t}\right) = \frac{d\,\overrightarrow{V_M}}{dt} = \frac{d^2\,\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}.\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{k}$$

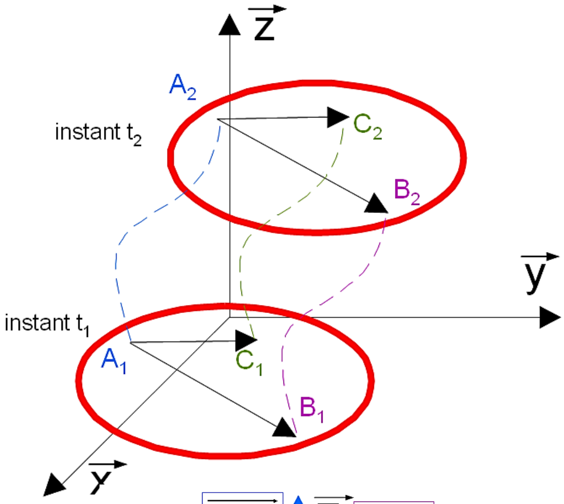
$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \to \overrightarrow{V_{M(t)}} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\begin{cases} v_x = x'(t) \\ v_y = y'(t) \\ v_z = z'(t) \end{cases} \to \overrightarrow{a_{M(t)}} = \begin{cases} a_x = v_x'(t) = x''(t) \\ a_y = v_y'(t) = y''(t) \\ a_z = v_z'(t) = z''(t) \end{cases}$$

La norme du vecteur accélération :

$$a_{M(t)} = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} \qquad \text{Unité : } \frac{m}{s^2}$$

2. Mouvement de translation :

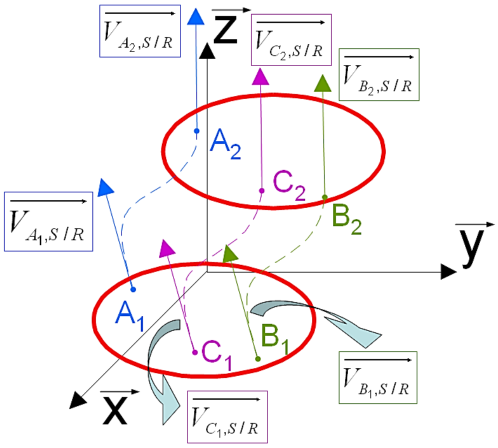
2.1. Définition :



Un solide (S) est animé d'un mouvement de translation dans ($\Re_0$) si on a :

$$\begin{matrix} \forall A, B, C \in (S) \\ A, B, C \ distincts' \end{matrix} \quad \forall \ t \begin{cases} \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2} \\ \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_2C_2} \end{cases}$$

2.2. Champ des vecteurs vitesses :



Dans le mouvement de translation d'un solide (S) par rapport à un repère de référence (R), tous les points du solide (S) ont au même instant (t) ont des vecteurs vitesses par rapport à (R) équipollent entre eux.

On dit que **<u>le champ des vecteurs vitesses est UNIFORME</u>**.

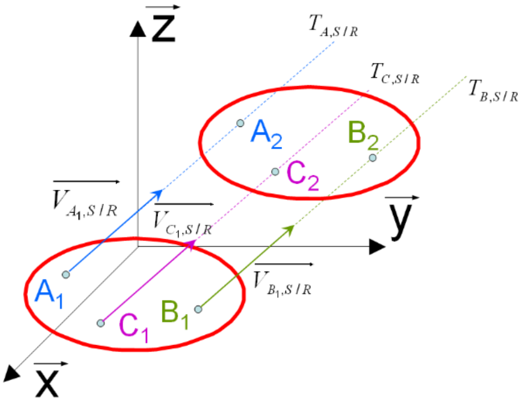
2.3. Champ des vecteurs accélérations :

Dans le mouvement de translation d'un solide (S) par rapport à un repère de référence (R), tous les points du solide (S) ont au même instant (t) ont des vecteurs accélérations par rapport à (R) équipollent entre eux.

On dit que **<u>le champ des vecteurs accélérations est UNIFORME</u>**.

Pour la suite du cours, on se limitera à l'étude des mouvements de translation rectiligne.

3. Mouvement de translation rectiligne.



Un mouvement de translation est dit rectiligne si la trajectoire de tous les points du solide (S) en mouvement sont des droites parallèles entre elles.

Il en résulte que :

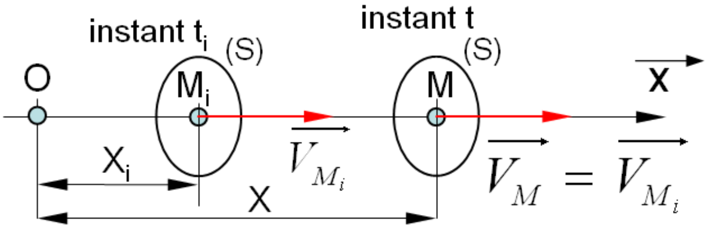
- ⇨ Le champ des vecteurs vitesses et celui des vecteurs accélération ont une direction constante au cours du temps, celle des trajectoires.
- ⇨ Les vecteurs accélérations sont des accélérations tangentielles (le rayon de courbure étant infini, l'accélération normale est nulle).

On choisit généralement un des axes du repère de référence de même direction que les trajectoires des points du solide (S).

3.1. Mouvement de translation rectiligne uniforme :

Un mouvement de translation rectiligne est **UNIFORME** si la vitesse est constante au cours du temps.

Il en résulte que l'accélération est donc nulle.



$$\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_{M_i}}$$

Équations paramétriques :

Accélération : (m/s²)

$$\gamma(t) = 0\ m/s^2$$

Vitesse : (m/s)

$$V(t) = Vi = constante$$

Avec :

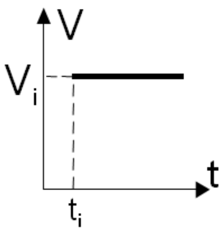
- ⇨ t_i : date du début de la phase étudiée (instant initial)
- ⇨ V_i : vitesse à l'instant t_i

Position (abscisse) : (m)

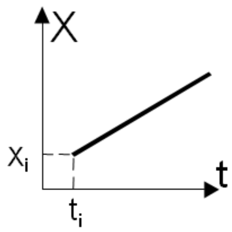
$$X(t) = Vi\,(t - ti) + Xi$$

Représentations graphiques :

Vitesse :

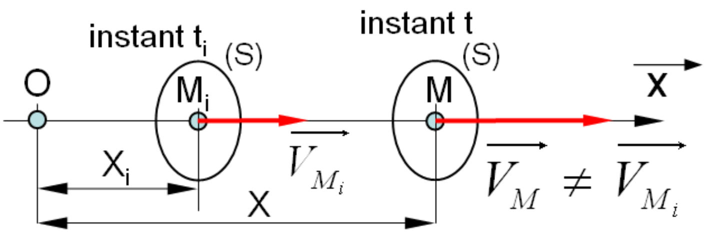


Position :



3.2. Mouvement de translation rectiligne uniformément varié :

Un mouvement de translation rectiligne est **UNIFORMÉMENT VARIÉ** si l'accélération est constante et non nulle au cours du temps.



Équations paramétriques :

Accélération : (m/s²)

$$\gamma(t) = \gamma i = constante$$

Vitesse : (m/s)

$$V(t) = \gamma i\,(t - ti) + Vi$$

Position (abscisse) : (m)

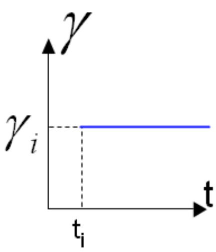
$$X(t) = ½\,\gamma i\,(t - ti)2 + Vi\,(t - ti) + Xi$$

Avec :

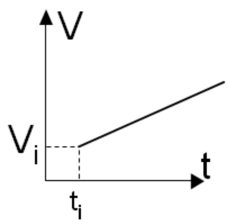
- ⇨ t_i : date du début de la phase étudiée (instant initial)
- ⇨ γ_i : accélération à l'instant t_i
- ⇨ V_i : vitesse à l'instant t_i
- ⇨ X_i : position à l'instant t_i

Représentations graphiques :

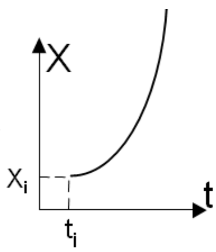
Accélération :



Vitesse :

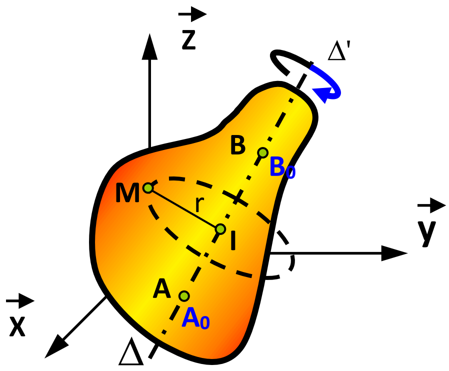


Position :



4. Mouvement de rotation autours d'un axe fixe :

Un solide (S) est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe ΔΔ' dans ($\Re_0$) s'il existe au moins deux points A et B liés au solide (S) qui coïncident constamment avec deux points fixes de A_0 et B_0 de ($\Re_0$) appartenant à l'axe.



Tous les points M du solide (S) ont des trajectoires circulaires.

Ces trajectoires circulaires :

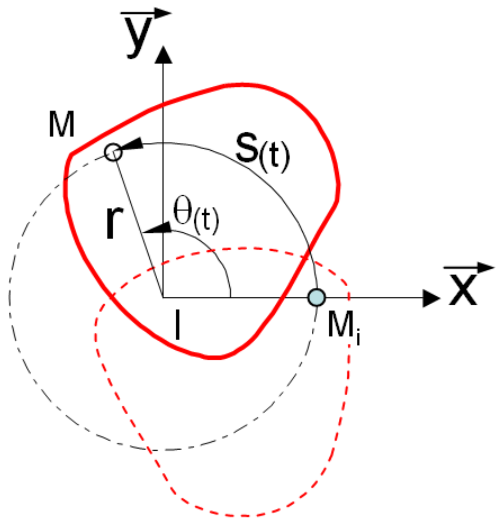
- Sont contenues dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation ΔΔ'.
- Ont pour centre un point I appartenant à l'axe de rotation ΔΔ'.
- Ont pour rayon r = IM.

On choisit généralement un des axes du repère de référence confondu avec l'axe de rotation ΔΔ'. Pour la suite du cours, ΔΔ' et l'axe des Z sont confondus.

5. Paramétrage du mouvement :

5.1. Position d'un point du solide :

La trajectoire d'un point M étant connu (on connaît le rayon r ou ρ constant, distance entre l'axe de rotation et le point M), on peut repérer la position du point M sur cette trajectoire (C) de deux façons :



Par son **<u>abscisse angulaire θ</u>** en fonction du temps.

- θ(t) = angle orienté ($\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM_i}$) (en radian)

Par son **<u>abscisse curviligne S</u>** en fonction du temps.

- S(t) = longueur de l'arc M_iM (en mètre)

<u>On a la relation :</u> $S(t) = r.\theta(t)$

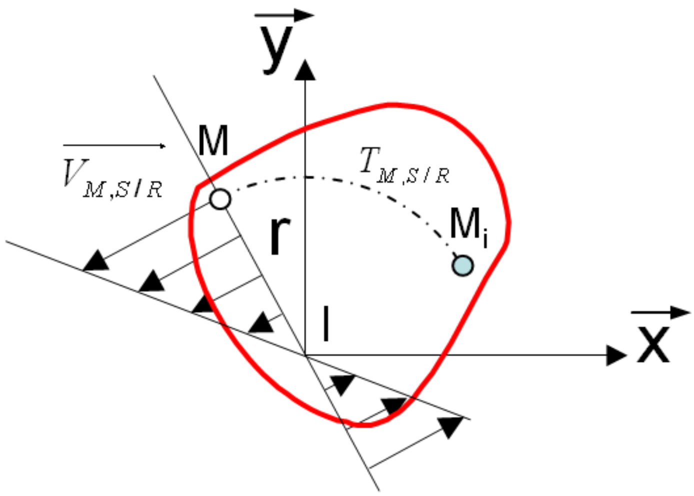
5.2. Vecteur vitesse d'un point M du solide :

Dans un mouvement de rotation d'un solide (S) autour d'un axe fixe, la vitesse d'un point M appartenant à (S) peut être définie de deux façons :

- Par sa **<u>vitesse angulaire</u>** ω(t) (rad/s).
  (Dérivée de θ(t) par rapport au temps).

  C'est la variation de l'angle ϑ par unité de temps

  Cette vitesse est la même en tout point d'un même solide.



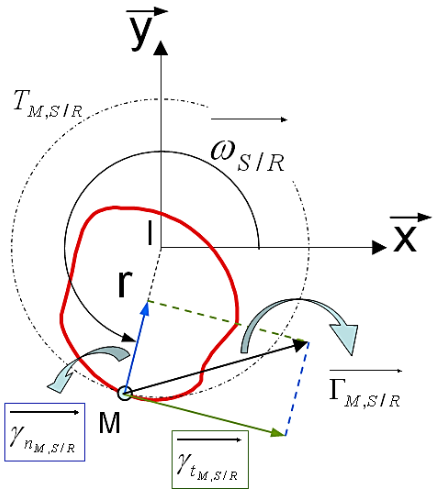
- Par sa vitesse instantanée algébrique v(t) (m/s).
  (Dérivée de S(t) par rapport au temps)

  C'est la distance parcourue sur la trajectoire par unité de temps

Ce vecteur vitesse est perpendiculaire au rayon IM, et l'intensité de ce vecteur vitesse est proportionnelle au rayon [IM].

On a la relation : $\left\|\overrightarrow{V_{M,S/R}}\right\| = r.\omega(t)$

5.3. Vecteur accélération d'un point M du solide :



Dans un mouvement de rotation d'un solide (S) autour d'un axe fixe, l'accélération d'un point M appartenant à (S) peut être définie de deux façons :

Par son **accélération angulaire** ω'(t) [rad/s²]. Dérivé de ω(t) par rapport au temps.

C'est la variation de la vitesse angulaire ω par unité de temps

À un instant donné, cette accélération est la même en tout point d'un même solide.

- Par son **vecteur accélération** $\overrightarrow{\Gamma_{M,S/R}}$ [m/s²]. Dérivée de $\overrightarrow{V_{M,S/R}}$ par rapport au temps.

Ce vecteur accélération se décompose en deux vecteurs :

- Vecteur accélération normale $\overrightarrow{\gamma_{nM,S/R}}$
- Vecteur accélération tangentielle $\overrightarrow{\gamma_{tM,S/R}}$

Avec les relations :

$$\left\|\overrightarrow{\gamma_{nM,S/R}}\right\| = |\gamma_n| = \frac{v^2}{r} \qquad \text{et} \qquad \left\|\overrightarrow{\gamma_{tM,S/R}}\right\| = |\gamma_t| = r.\omega'$$

5.4. Mouvement de rotation uniforme :

Un mouvement de rotation est **UNIFORME** si la vitesse angulaire est constante au cours du temps.

Il en résulte que l'accélération tangentielle est donc nulle.

Équations paramétriques :

Accélération : (rad/s²)

$$\omega'(t) = 0\, rad/s^2$$

Vitesse : (rad/s)

$$\omega(t) = \omega i = constante$$

Position (abscisse) : (rad)

$$\theta(t) = \omega i\,(t - ti) + \theta i$$

Avec :

- ⇨ t_i : date du début de la phase étudiée (instant initial)
- ⇨ ω_i : vitesse angulaire à l'instant t_i
- ⇨ θ_i : position angulaire à l'instant t_i

5.5. Mouvement de rotation uniformément varié :

Un mouvement de rotation est **UNIFORMÉMENT VARIÉ** si l'accélération tangentielle est constante et non nulle au cours du temps.

Équations paramétriques :

Accélération : (rad/s²)

$$\omega'(t) = \omega' i = constante$$

Vitesse : (rad/s)

$$\omega(t) = \omega' i\,(t - ti) + \omega i$$

Position (abscisse) : (rad)

$$\theta(t) = ½\, \omega' i\,(t - ti)2 + \omega i\,(t - ti) + \theta i$$

Avec :

- ⇨ t_i : date du début de la phase étudiée (instant initial)
- ⇨ ω'_i : accélération angulaire à l'instant t_i
- ⇨ ω_i : vitesse angulaire à l'instant t_i
- ⇨ θ_i : position angulaire à l'instant t_i

Statique

6. Définition

Une action mécanique est une cause capable :

- De modifier ou d'interdire le mouvement d'un corps,
- De déformer un corps.

7. Notion de force

Elle génère ou interdit un mouvement selon un axe. On représentera une force par un vecteur glissant défini par :

- Sa direction,
- Son sens,
- Sa norme (intensité ou module) dont l'unité est le newton (N).

8. Différents types de forces

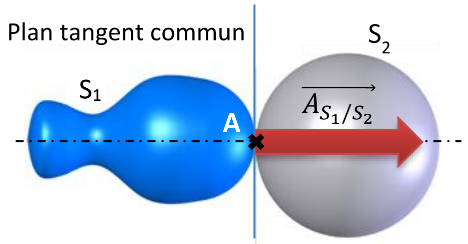
8.1. Action à distance :

- Les effets magnétiques, électriques ou électrostatiques.
- Les effets de la pesanteur : $\vec{P} = m.g.\vec{z}$

- $\vec{P}$ =Poids du corps en N
- m = masse du corps en kg.
- $g.\vec{z}$ = accélération de la pesanteur : 9,81m.s^{-2}

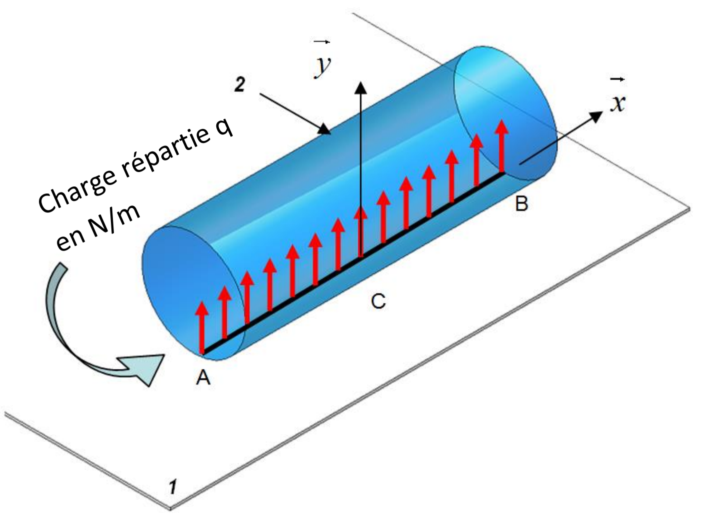
8.2. Action de contact :

Contact ponctuel

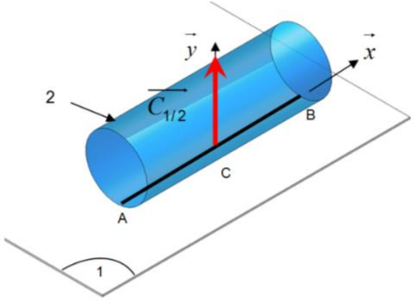


- L'action passe par le point de contact A.
- La direction de l'action de S1 sur S2 notée $\overrightarrow{A_{S_1/S_2}}$ est perpendiculaire au plan tangent commun si on néglige les frottements.
- Le sens est du solide S1 vers le solide S2.
- Le module $\left\|\overrightarrow{A_{S_1/S_2}}\right\|$ est défini par la longueur du vecteur $\overrightarrow{A_{S_1/S_2}}$, l'unité est le newton.

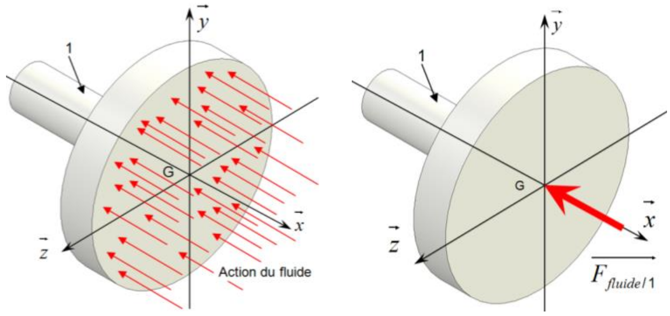
Contact linéique



- On supposera l'action répartie uniformément sur toute la ligne du contact.
- Dans le cas d'une répartition uniforme, on peut remplacer cette charge linéique par une action concentrée en C au milieu du contact [AB] telle que $\left\|\overrightarrow{C_{1/2}}\right\| = q.l$ avec l la longueur du segment [AB].



Contact surfacique



Dans le cas d'une répartition uniforme d'une pression sur une surface, ente deux solides ou entre un solide et un fluide, on modélisera l'ensemble des micro-actions mécaniques par une résultante globale au centre de gravité qui vaudra

$$\left\|\overrightarrow{F_{fluide/1}}\right\| = p.S$$

- p : pression du fluide en pascal (Pa).
- S : surface de contact en m^2.
- $\left\|\overrightarrow{F_{fluide/1}}\right\|$: Résultante des forces de pression en N

9. Écriture vectorielle de l'action mécanique

Nous pouvons adopter deux types d'écriture suivant le type de résolution adopté.

La première utilise les coordonnées cartésiennes.

$$\overrightarrow{A_{S1/S2}} = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = (X_A\,\vec{x} + Y_A\,\vec{y} + Z_A\,\vec{z})$$

- Elle permet les résolutions analytiques ainsi que graphiques.
- On appelle $\overrightarrow{A_{S1/S2}}$ la résultante statique.

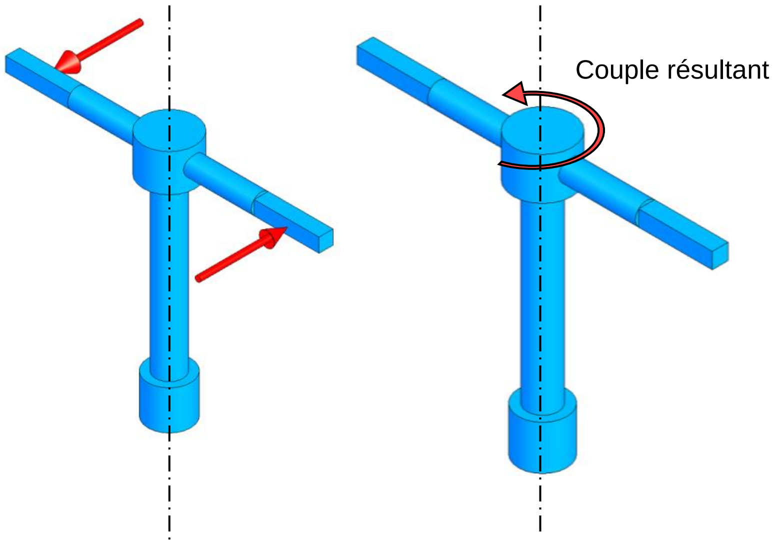
La deuxième utilise les coordonnées polaires.

$$\overrightarrow{A_{S1/S2}} = \left[\ \left\|\overrightarrow{A_{S1/S2}}\right\|\ ;\ \theta\right]$$

- Elle est utilisée lors des résolutions graphiques, donc sur les problèmes plans.
- Le module $\left\|\overrightarrow{A_{S1/S2}}\right\|$ est noté ρ en mathématiques.

10. Moment et couple d'une force par rapport à un point fixe

Un couple, en mécanique, désigne l'effort en rotation appliqué à un axe. Il est ainsi nommé en raison de la façon caractéristique dont on obtient ce type d'action : un bras qui tire, un bras qui pousse, les deux forces étant égales et opposées.

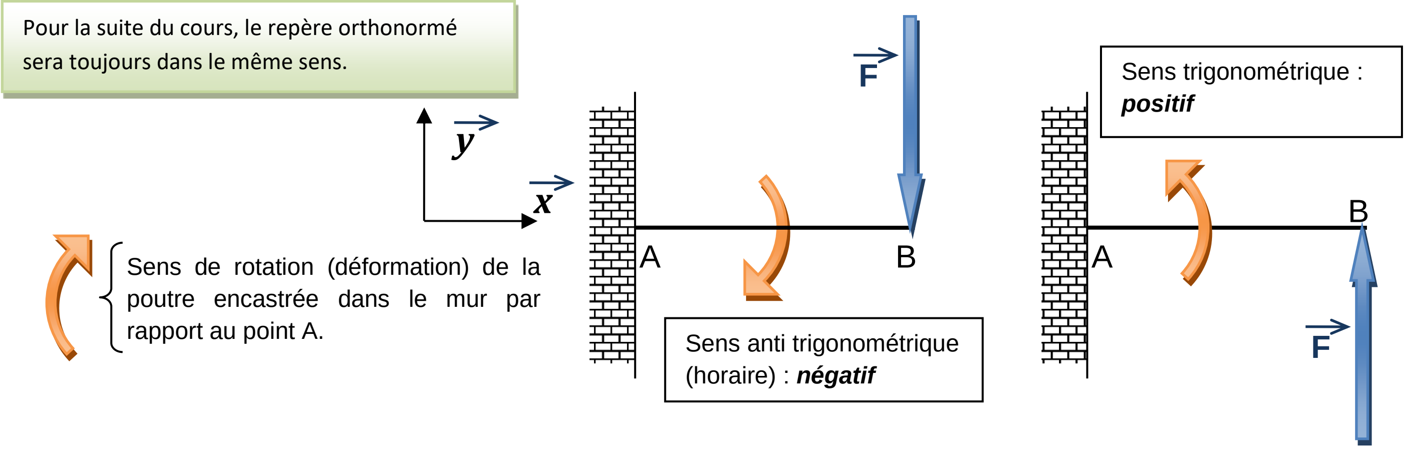


On mesure le couple en Newton.mètre (N.m). Il faut noter que l'unité de travail, le joule (J), est aussi homogène à un Newton.mètre : un couple de 1 N.m appliqué à un axe qui tourne d'un tour représente un ajout d'énergie de 2 pi J.

Un moment est le résultat du produit d'une force par le bras de levier (le bras de levier devant être perpendiculaire par rapport à la direction de la force). Son unité est le Newton mètre (Nm).

$$\boxed{M = \pm d \times F}$$

Lorsque l'on veut connaître le moment généré en A par la force F, on l'écrit de la manière suivante : $\boxed{M_{A(\vec{F})}}$

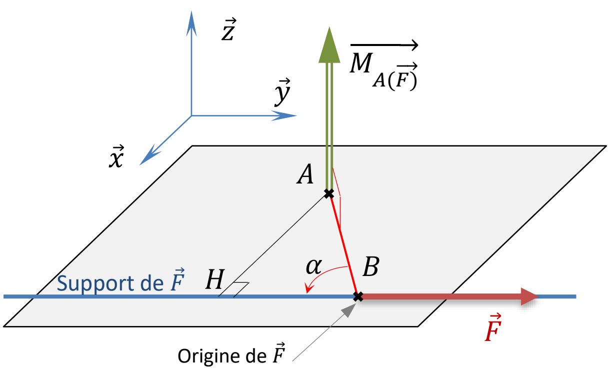


Le moment est porté dans les exemples par l'axe ***z***. Le signe du résultat se trouve en réfléchissant sur le « sens de rotation ».

Dans les exemples ci-dessus, la distance AB est perpendiculaire à la force F ce qui est le cas le plus simple pour trouver le moment.

10.1. Calcul du moment autours d'un point fixe

On appelle le moment de $\vec{F}$ par rapport au point A, $\overrightarrow{M_{A(\vec{F})}}$ le vecteur défini par $\overrightarrow{M_{A(\vec{F})}} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$.

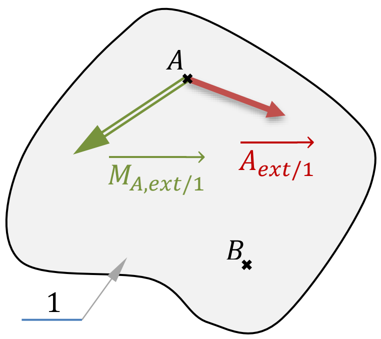


- Le support du vecteur $\overrightarrow{M_{A(\vec{F})}}$ est perpendiculaire au plan contenant A et $\vec{F}$.
- Le sens de $\overrightarrow{M_{A(\vec{F})}}$ est tel que le trièdre de référence soit direct, exemple : $\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z}$
- Le module est tel que $\left\|\overrightarrow{M_{A(\vec{F})}}\right\| = \left\|\vec{F}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AM}\right\| \times \sin\alpha$
- $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| \times \sin\alpha = [AH]$, cela correspond au bras de levier, à savoir la distance la plus courte par rapport au support de la ligne d'action.

Le produit vectoriel (symbole ∧) est abordé dans le cours de mathématiques.

- ➢ Un moment est nul si l'un des deux termes est nul, c'est-à-dire que la force est nulle ou qu'elle passe par le point A.

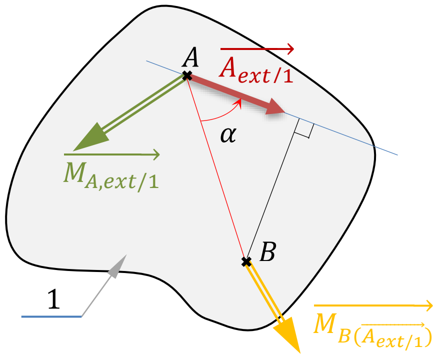
10.2. Transport de moment



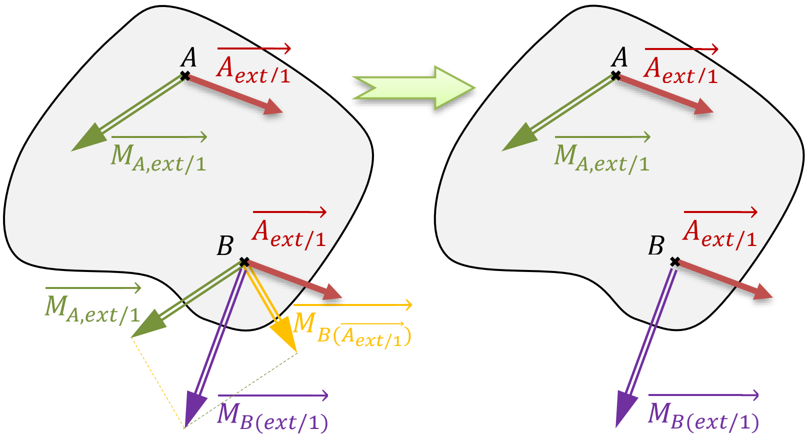
Soit le solide 1. Il est soumis, au point A, à une résultante $\overrightarrow{A_{ext/1}}$ ainsi qu'à un moment de l'extérieur sur 1, $\overrightarrow{M_{A,ext/1}}$.

On désire par commodité d'étude se placer au niveau du point B. Les actions existantes en A, force et moment, vont « se translater » jusqu'au point B mais l'on génère un bras de levier entre la force en A et le point B.

Ceci va nous rajouter un deuxième moment qui aura pour expression : $\overrightarrow{M_{B(\overrightarrow{A_{ext/1}})}} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{A_{ext/1}}$.



Le moment final sera donc la somme des deux moments :
$\overrightarrow{M_{B(ext/1)}} = \overrightarrow{M_{A(ext/1)}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{A_{ext/1}}$



11. Modélisation des actions associées à un solide

Afin de ne pas oublier les différents éléments pouvant s'appliquer à un solide, on peut écrire les résultantes et les moments dans un tableau.

Ce tableau peut s'écrire soit en ligne ou en colonne.

Exemple :

Soit les actions mécaniques au point A de S1 sur S2.

$\overrightarrow{A_{S1/S2}} = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = (X_A\,\vec{x} + Y_A\,\vec{y} + Z_A\,\vec{z})$ et un moment $\overrightarrow{M_{A(S1/S2)}} = \begin{pmatrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{pmatrix} = (L_A\,\vec{x} + M_A\,\vec{y} + N_A\,\vec{z})$.

Sa notation globale sans spécifier les composantes se fera ainsi : ${}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{A_{S1/S2}} \\ \hline \overrightarrow{M_{A(S1/S2)}} \end{array} \right\}_{Rg}$ avec $Rg = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

En écriture en ligne : ${}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{A_{S1/S2}} = X_A\vec{x} + Y_A\vec{y} + Z_A\vec{z} \\ \hline \overrightarrow{M_{A(S1/S2)}} = L_A\vec{x} + M_A\vec{y} + N_A\vec{z} \end{array} \right\}_{Rg}$; En écriture en colonne : ${}_A\left\{ \begin{array}{cc} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{array} \right\}_{Rg}$

Ce tableau s'appelle le torseur des actions transmissibles en A de S1 sur S2 : $\{\mathcal{T}_{S1/S2}\}_A$

Remarque

- Un torseur dont le moment est nul est appelé glisseur.
- Un torseur dont la résultante est nulle est appelé torseur couple.
- Un torseur dont les deux composantes sont nulles est appelé torseur nul.

12. Actions transmissibles par les liaisons cinématiques

Une liaison est constituée de deux classes d'équivalences qui n'autorisent que certains mouvements. Chaque translation ou rotation bloquée permet de transmettre un effort.

- Pour les translations bloquées on peut transmettre une des composantes de la résultante.
- Pour les rotations bloquées on peut transmettre une des composantes du moment.

Exemple :

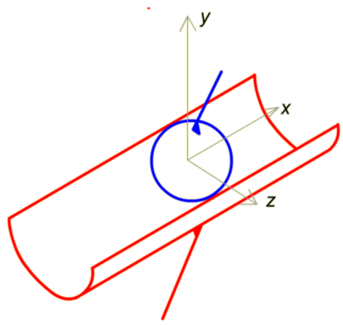
Soit une liaison linéaire annulaire d'axe $\vec{x}$.

Mobilités

$$\begin{Bmatrix} Tx & Rx \\ 0 & Ry \\ 0 & Rz \end{Bmatrix}$$

Actions transmissibles

$$_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{Rg}$$



13. But d'une étude statique

- Pour une position donnée du système, chercher la valeur des A.M des pièces les unes par rapport aux autres.
- Chercher la ou les positions où ces A.M sont maximales.
- Étudier les conditions d'équilibre d'un système…

15.1. Principe fondamental de la statique (P.F.S)

La notion d'équilibre se traduit par une relation fondamentale en termes d'actions mécaniques appliquées à un système S (un seul solide isolé ou un ensemble de solides isolés).

Cela se traduit de la manière suivante :

- La somme des actions mécaniques extérieures au système étudié appliqués au même point doit être nulle.
  - $\sum_{\bar{s}=1}^{n} \{\mathcal{T}_{\bar{s}/s}\}_A = \{0\}$

15.2. Théorème de la résultante statique

La somme des forces extérieures s'appliquant sur le solide isolé est nulle :

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \ldots = \vec{0}$$

Ce qui se traduit en projection de la manière suivante :

$F_{1_x} + F_{2_x} + F_{3_x} + \ldots = 0$
Sur l'axe des x

$F_{1_y} + F_{2_y} + F_{3_y} + \ldots = 0$
Sur l'axe des y

$F_{1_z} + F_{2_z} + F_{3_z} + \ldots = 0$
Sur l'axe des z

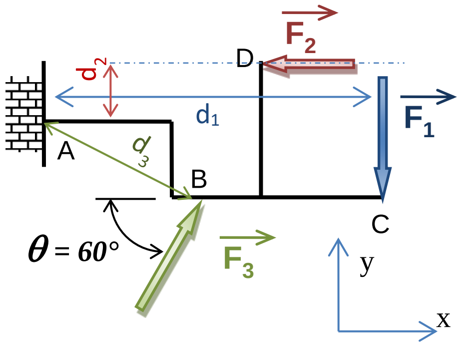
15.3. Théorème du moment statique

La somme des moments extérieurs s'appliquant au solide isolé et ramené au même point est nulle.

Ce qui se traduit de la manière suivante :

$$M_{A(\vec{F}_1)} + M_{A(\vec{F}_2)} + M_{A(\vec{F}_3)} + \ldots = \vec{0}$$

Si l'on considère que l'on travaille dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$ les différents moments ne seront portés que par l'axe des $\vec{z}$.



$$-d_1.F_1 + d_2.F_2 + d_3.F_3 = 0$$

Dynamique

La dynamique est l'étude des relations qui existent entre les déplacements d'un système matériel et les causes de ces déplacements (A.M.E.).

Dans le cadre de ce cours il sera principalement traité le principe fondamental de la dynamique pour des solides ayant un mouvement de translation rectiligne ou de rotation.

14. Introduction

16.1. Repère : absolu ou galiléen.

- Un repère fixe serait un repère fixe par rapport à l'ensemble de l'Univers
- En mécanique classique (c'est à dire non relativiste) où les vitesses envisagées sont négligeables devant la vitesse de la lumière (≈ 300 000 km/s) on admet que le repère de Copernic, dont l'origine est le centre d'inertie du système solaire (voisin du centre du Soleil) et dont les axes passent par des étoiles fixent les unes par rapport aux autres, est un repère absolu.
- Tout référentiel animé par rapport à celui de Copernic d'un mouvement de translation rectiligne uniforme est dit galiléen.
- Nous ferons l'approximation qu'un repère lié au centre de la terre est sur une très courte période considérée comme un repère galiléen.

16.2. Temps relatif et temps absolu.

Dans l'équation de Newton, le temps est considéré comme une grandeur absolue, s'écoulent inexorablement d'arrière en avant au rythme régulier indiqué par les pendules et les calendriers.

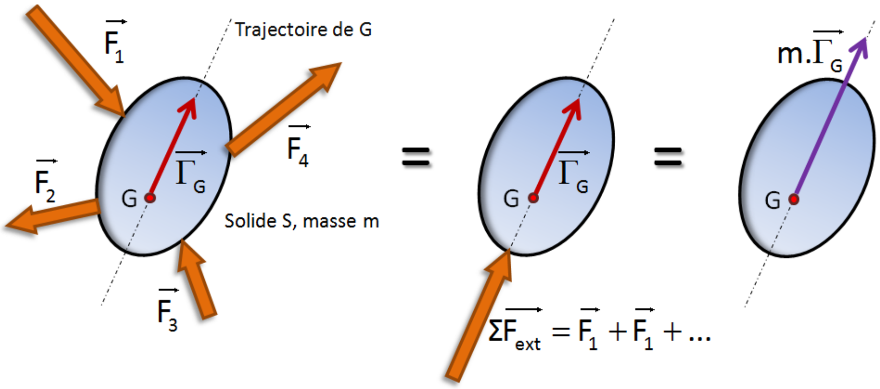
D'après Einstein, le temps n'est pas mais relatif et dépend de la vitesse propre de l'observateur et de la position finale de celui-ci. Cependant, la notion de temps relatif n'est sensible que pour des particules se déplaçant à de très hautes vitesses (proches de la vitesse de la lumière : 300 000 km/s)

15. Principe fondamental (PFD) : Cas d'une translation rectiligne.

L'énoncé proposé s'applique indifféremment à un point matériel de masse m ou à un solide en translation rectiligne de masse m et centre de gravité G.

L'accélération $\overrightarrow{\Gamma_G}$ (ou $\overrightarrow{a_G}$) du centre de gravité G du solide en translation rectiligne par rapport à un repère (ou solide) absolue est proportionnelle à la résultante ($\sum \overrightarrow{F_{ext}}$) des forces ou actions extérieures agissant sur le solide et a même direction et même sens que celle-ci.

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \text{m}.\overrightarrow{\Gamma_G} \quad \begin{cases} \overrightarrow{\Gamma_G} : \text{ accélération (absolue) du solide en m.s}^{-2} \\ \text{m : masse du solide en kg} \\ \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} : \text{ résultante des forces extérieures en N.} \end{cases}$$



Principe de d'Alembert

La loi du principe fondamental peut aussi s'écrire sous la forme du principe de d'Alembert :

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} - \text{m}.\overrightarrow{\Gamma_G} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} + \overrightarrow{F_1} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{F_1} = (-\text{m}.\overrightarrow{\Gamma_G})$ est appelé force d'inertie, cette force est opposée à l'accélération$\overrightarrow{\Gamma_G}$.

Remarque : écrit sous cette forme, l'exploitation du principe se ramène aux cas abordés en statique, la force d'inertie étant assimilée à une force extérieure. Toutes les méthodes et théorèmes abordés en statique sont utilisables : isolement du solide, etc.

16. Principe fondamental : Cas d'un solide en rotation

On ne considérera que des rotations par rapport à un axe fixe.

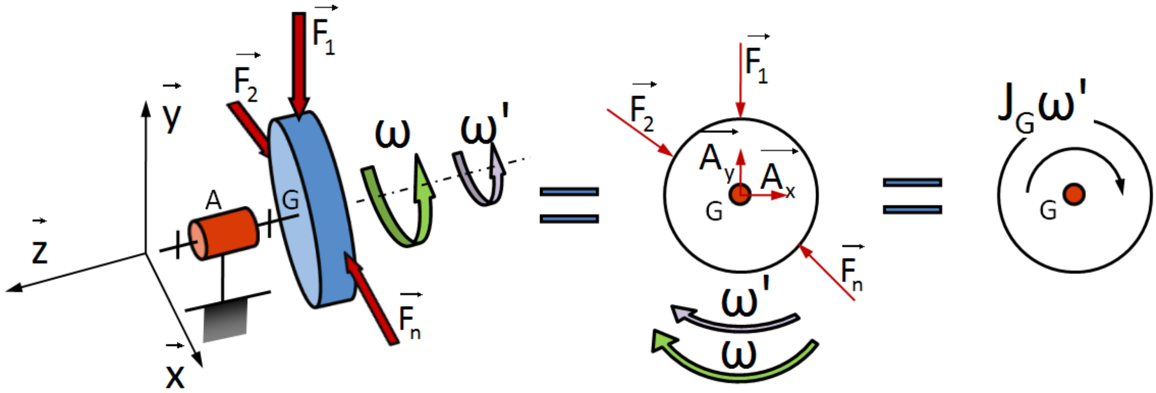
16.1. Cas où le centre de gravité est situé sur l'axe de rotation

Le solide tourne à la vitesse angulaire ω autour de l'axe de rotation (A, z), le centre de gravité G est sur cet axe et ω' est l'accélération angulaire du mouvement.

A_x et A_y sont les actions exercées par la liaison pivot sur le solide. J_G est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (G, z).

Les lois auxquelles répondent ces solides sont :

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} \dots + \overrightarrow{F_n} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum M_G(\overrightarrow{F_{\text{ext}}}) = \sum M_A(\overrightarrow{F_{\text{ext}}}) = J_G.\omega'$$



$$\sum F_{\text{ext}} \text{ en } N \qquad J_G \text{ en } m^2.\text{kg}$$

$$\sum M_G(F_{\text{ext}}) \text{ en Nm} \qquad \omega' \text{ en rad.s}^{-2}$$

Remarque : $\sum M_G(\overrightarrow{F_{\text{ext}}}) = M_G(\overrightarrow{F_1}) + M_G(\overrightarrow{F_2}) + \dots$

Pour un système de forces planes, on dispose de trois équations de projection :

$$\sum F_x = 0 ; \sum F_y = 0 ; \sum M_G(\overrightarrow{F_{\text{ext}}}) = J_G.\omega'$$

Le théorème du moment dynamique, en projection sur l'axe Oz, peut être écrit de la manière suivante :

$$\text{Cm} - \text{Cr} = \text{J}\omega'$$

Cm rassemble tous les termes de moment ***moteurs*** ; J est le ***moment d'inertie de S par rapport à Oz***.

Cr rassemble tous les termes de moment ***résistants*** ; ω' est l'accélération angulaire de S dans Rg (rad/s²).

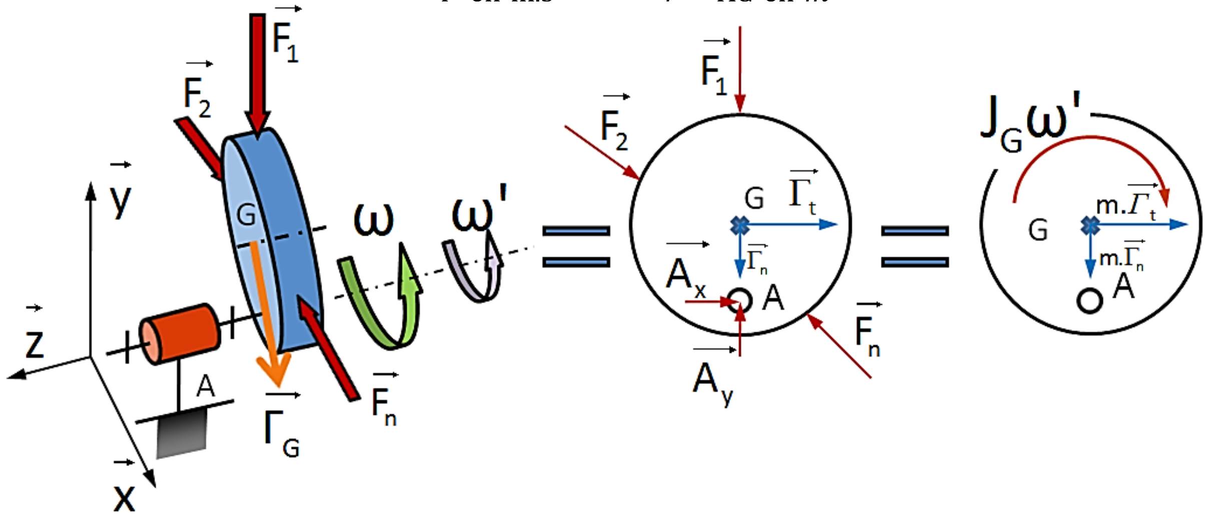
16.2. Cas où le centre de gravité G n'est pas sur l'axe de rotation

$\overrightarrow{\Gamma_G}$ est l'accélération du point G (Γ_n est l'accélération normale et Γ_t l'accélération tangentielle) ;ω' est l'accélération angulaire du mouvement ; J_G et J_A sont des moments d'inertie en G et en A.

L'application du P.F.D. devient :

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \dots + \overrightarrow{F_n} = \text{m}.\overrightarrow{\Gamma_G} \text{ avec } \overrightarrow{\Gamma_G} = \overrightarrow{\Gamma_n} + \overrightarrow{\Gamma_t} \ ; \ \Gamma_n = \omega^2 r \ ; \ \Gamma_t = \omega'.\text{r}$$
$$\sum M_G(\overrightarrow{F_{\text{ext}}}) = J_G.\omega'$$

$$\sum F_{\text{ext}} \text{ en } N \qquad m \text{ en kg}$$
$$\sum M_G(F_{\text{ext}}) \text{ en Nm} \qquad J_G \text{ en } m^2.\text{kg}$$
$$\Gamma \text{ en m.s}^{-2} \qquad r = \text{AG en } m$$



Remarque :

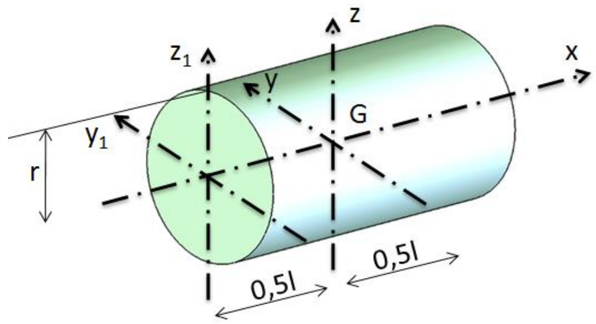
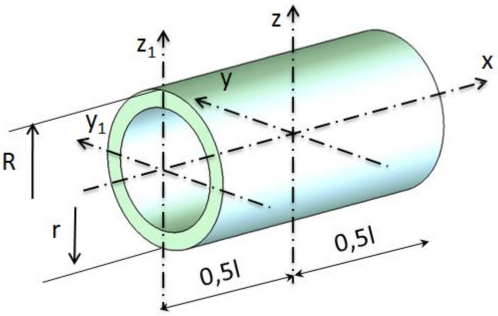
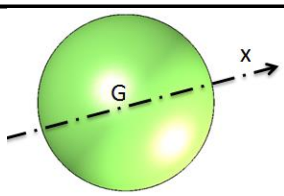
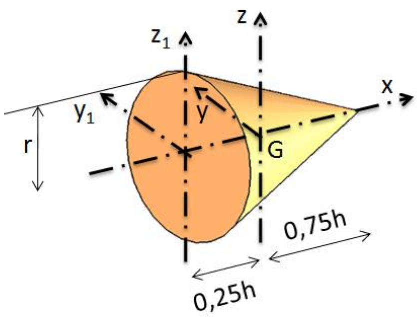
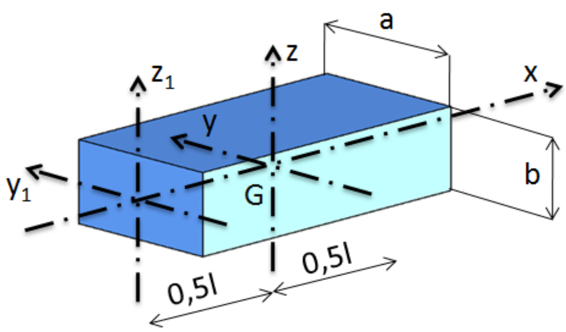
- en projection sur AG ou n : $\sum F_N = -\text{m}.\omega^2 r$
- en projetant sur t (perpendiculaire à n) : $\sum F_t = \text{m}.\omega'.\text{r}$

L'équation de moment en G peut être remplacée par l'équation alternative en A : $\sum M_A\,(\overrightarrow{F_{\text{ext}}}) = J_A.\omega'$

avec $J_A = J_G + \text{m.r}^2$

17. Inertie en rotation

17.1. Moments d'inertie pour des solides homogènes, géométriquement parfaits

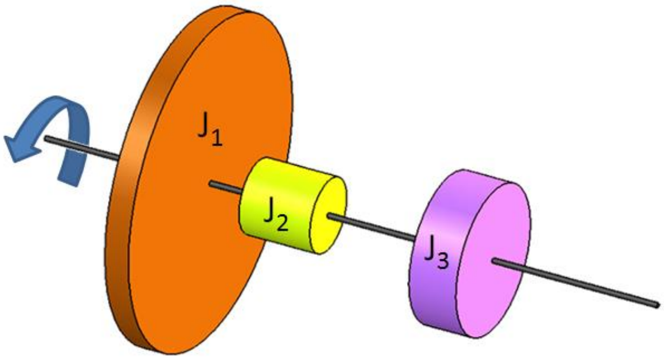
Cylindre plein		$J_x = \frac{m.r^2}{2}$; m : masse du cylindre $J_z = J_y = \frac{m.r^2}{4} + \frac{m.l^2}{12}$ $J_{z_1} = J_{y_1} = \frac{m.r^2}{4} + \frac{m.l^2}{3}$
Cylindre creux		$J_x = \frac{m.(R^2+r^2)}{2} \approx m.r_m^2$; $r_m = \frac{R+r}{2}$ $J_z = J_y = \frac{m.(R^2+r^2)}{4} + \frac{m.l^2}{12}$ $J_{z_1} = J_{y_1} = \frac{m.(R^2+r^2)}{4} + \frac{m.l^2}{3}$
Tige pleine	C'est le même principe que le cylindre plein avec pour les formules r = 0.	
Sphère		$J_x = J_y = J_z = \frac{2.m.r^2}{5}$
Cône plein		$J_x = \frac{3.m.r^2}{10}$ $J_z = J_y = \frac{3.m.r^2}{20} + \frac{3.m.h^2}{5}$ $J_{z_1} = J_{y_1} = \frac{3.m.r^2}{20} + \frac{m.h^2}{10}$
Parallélépipède rectangle		$J_x = \frac{m}{12}(a^2+b^2)$ $J_y = \frac{m}{12}(b^2+l^2)$; $J_{y_1} = \frac{m.b^2}{12} + \frac{m.l^2}{3}$ $J_z = \frac{m}{12}(a^2+l^2)$

17.2. Inertie d'un ensemble de solides possédant le même axe de symétrie

Soit un ensemble de solides tournants autour du même axe de rotation, cet axe étant axe de symétrie pour chacun d'entre eux.

Le moment d'inertie total de l'ensemble est la somme des moments d'inertie de chacun des solides par rapport à cet axe :

$$J_E = J_1 + J_2 + J_3$$

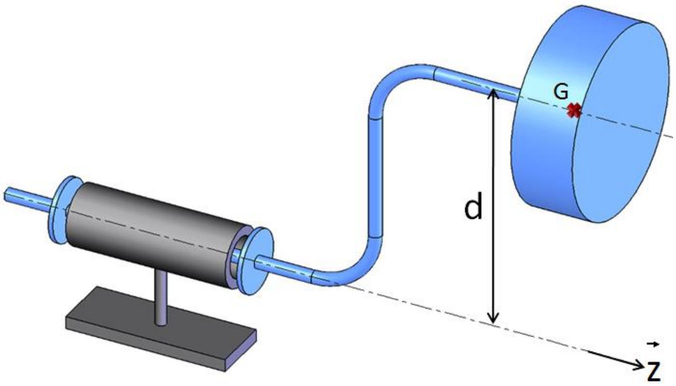


17.3. Moment d'inertie autour d'un axe parallèle à Gz

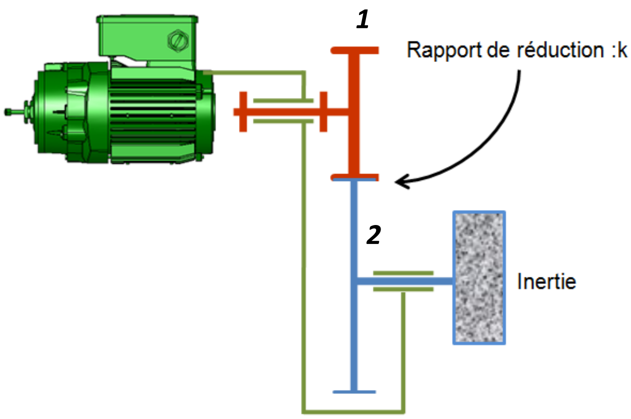
Il est possible de démontrer que :

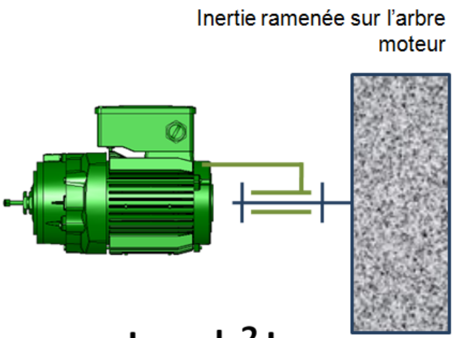
$$J_\Delta = J_{Gz} + md^2$$

(Théorème de Huygens)



17.4. Inertie équivalente ramenée à l'arbre moteur





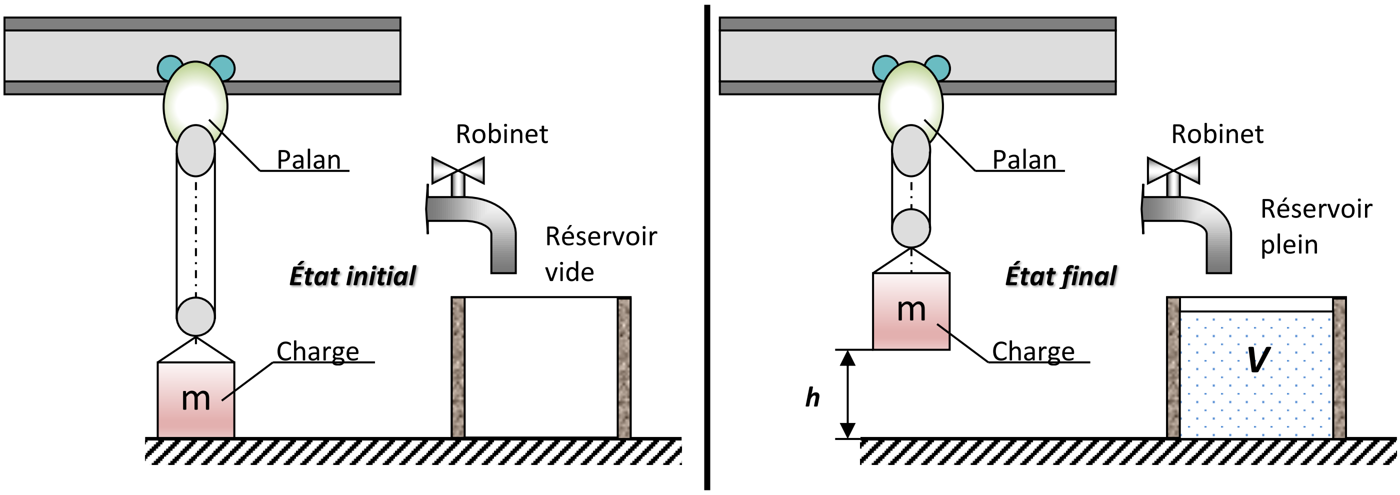
$$J_{equi} = J_1 + k^2 J_2$$

k est le rapport de réduction du réducteur

Énergie – Puissance

18. Introduction

L'énergie et la puissance sont deux notions qui, bien que liées, sont différentes. Mettons ces différences en évidence à partir des deux dispositifs de la figure suivante :



Pour remplir le réservoir, il faut fournir un certain volume V d'eau. De la même manière pour lever la charge de masse m sur la hauteur h, il faut fournir une certaine quantité d'énergie W.

Quelle que soit l'ouverture du robinet, c'est-à-dire quel que soit le débit d'eau, la quantité d'eau nécessaire au remplissage est toujours la même V.

De la même façon, si l'on ne tient pas compte du rendement (des pertes ou des fuites d'énergie), la quantité d'énergie à fournir pour lever la charge est la même quelle que soit la vitesse de levage.

Plus le débit d'eau délivré par le robinet est élevé, plus vite le réservoir sera rempli. De même, plus la vitesse de levée de la charge est grande, plus la puissance fournie instantanément est grande et plus vite la charge sera levée.

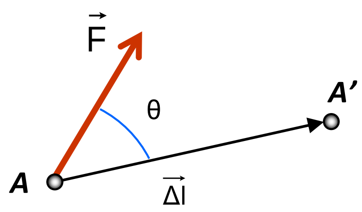
Le **travail** ou l'énergie représente ce qu'il faut fournir globalement à un système pour l'amener d'un état initial à un état final. La manière dont le chemin est parcouru entre ces deux états n'a pas d'importance.

La puissance caractérise le débit d'énergie fourni à chaque instant. Elle ne dépend ni de l'état initial ni de l'état final du système, mais permet de décrire les flots d'énergie entre ces deux états.

19. Travail

19.1. Travail élémentaire d'une force

Le travail élémentaire ΔW de la force $\vec{F}$ dont le point d'application A se déplace de $\vec{\Delta l}$ entre A et A' ($\vec{\Delta l} = \vec{AA'}$) est égal au produit scalaire de $\vec{F}$ par $\vec{\Delta l}$.

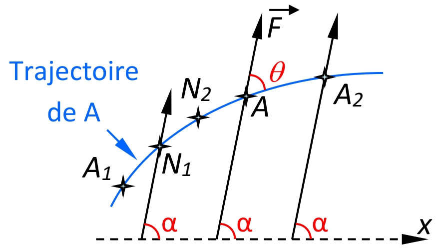


Unités : W en J (joules) ; F en N ; Δl en m.

Remarque :

- si $0 < \theta < 90$; $\cos\theta > 0$; $\Delta W > 0$; le travail de $\vec{F}$ est moteur ;
- si $\theta = 90°$; $\cos\theta = 0$; $\Delta W = 0$; le travail de $\vec{F}$ est nul ;
- si $90° < \theta < 180°$; $\cos\theta < 0$; $\Delta W < 0$; le travail de $\vec{F}$ est résistant.

19.2. Travail d'une force constante ou invariable



La force $\vec{F}$ se déplace de A_1 à A_2 en conservant la même direction (angle α constant) et une intensité constante.

La trajectoire A_1A_2 peut être divisée en une infinité de petits déplacements élémentaires A_1N_1, N_1N_2, ….., N_nA_2 tel que :

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1N_1} + \overrightarrow{N_1N_2} + \dots + \overrightarrow{N_nA_2}$$

Le travail entre A_1 et A_2 s'exprime par :

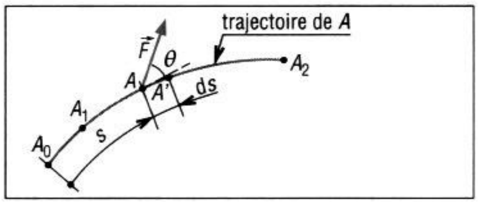
$$W_{1/2} = \vec{F}\,.\overrightarrow{A_1N_1} + \vec{F}\,.\overrightarrow{N_1N_2} + \dots + \vec{F}\,.\overrightarrow{N_nA_2} = \vec{F}\,.(\overrightarrow{A_1N_1} + \overrightarrow{N_1N_2} + \dots + \overrightarrow{N_nA_2}) = \vec{F}\,.\overrightarrow{A_1A_2}$$

Le travail de $\vec{F}$ de A_1 à A_2 se ramène au produit scalaire de $\vec{F}$ par la distance $\overrightarrow{A_1A_2}$.

$$W = \vec{F}\,.\overrightarrow{A_1A_2}$$

19.3. Travail d'une force dans le cas général

s, abscisse curviligne, mesure le déplacement du point d'application A de la force $\vec{F}$ sur sa trajectoire, $s=s_1$ en A_1 et $s=s_2$ A_2. AA'=ds est le déplacement élémentaire de A ; entre A et A' :



$$\mathrm{dW} = \vec{F}\,.\vec{\mathrm{ds}} = \mathrm{f.ds.cos\theta}$$

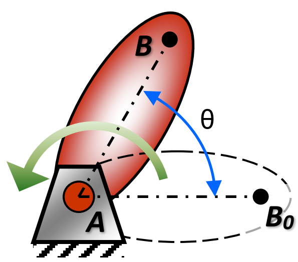
entre A_1 et A_2

$$W_{1/2} = \sum_{S1}^{S2} \mathrm{F.ds.cos\theta} = \int_{S1}^{S2} \mathrm{F.cos\theta.ds}$$

19.4. Travail d'un couple constant

Le travail d'un couple constant C se déplaçant de l'angle θ est égal au produit de C par θ.

$W = \mathrm{C}.\theta$ avec ***W*** en J (Joules), ***θ*** en rad et ***C*** en Nm.



19.5. Cas des ressorts de torsion

Pour les ressorts de torsion (barre de torsion, cylindre à spire et à spirale), le couple C supporté est fonction de l'angle d'enroulement α.

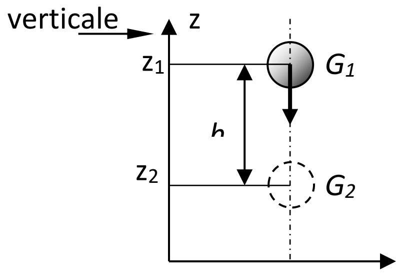
$C = \mathrm{k}.\alpha$ $\quad$ $W = \frac{1}{2}\mathrm{C}.\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{k}.\alpha^2$ $\quad$ ***C*** en Nm ; ***k*** en Nm.rad^{-1} ; ***α*** en rad ; ***W*** en J

__Remarque :__ k est la raideur du ressort, W le travail réalisé est aussi de l'énergie potentielle stockée ou restituée par le ressort.

20. Énergie

20.1. Énergie potentielle

Dans le cas d'un travail effectué par les forces de pesanteur ou par des forces engendrées par des ressorts, on parle d'énergie potentielle. Cette notion simplifie l'analyse des problèmes. Pour ces cas, le travail réalisé est indépendant des trajectoires et dépend uniquement des positions initiale et finale des forces encore appelées forces conservatives.



20.1.1. Pesanteur

L'énergie potentielle dépend de l'attitude z de l'objet, plus l'objet est haut et plus il y a d'énergie potentielle.

$$E_p = \mathrm{mgz}$$
$$E_{\mathrm{p1}} - E_{\mathrm{p2}} = \mathrm{mg}(z_1 - z_2) = \mathrm{mgh}$$

20.1.2. Ressort (élastique)

Charge du ressort : $F = \mathrm{kf} = k(l_0 - x)$

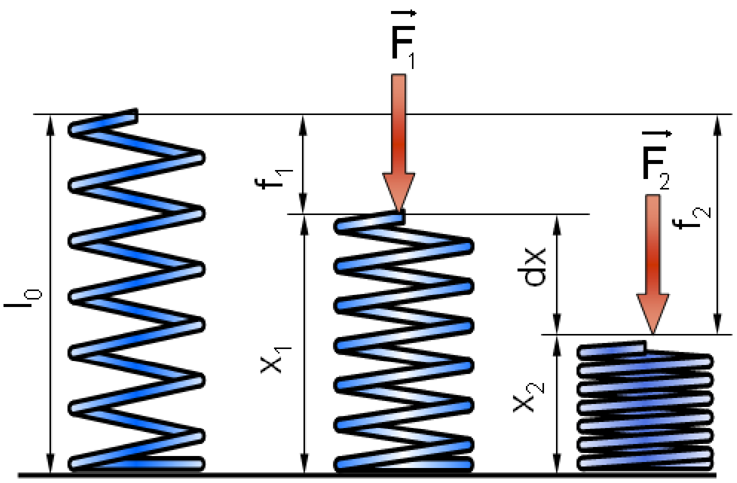
Avec ***l_0*** longueur libre ou longueur au repos ; ***x*** longueur du ressort sous charge ; ***f*** déformation ou flèche du ressort ; ***k*** raideur du ressort.

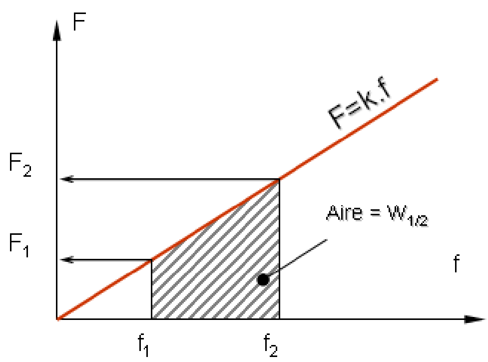
Travail élémentaire développé par une charge ***F*** comprimant le ressort. Si $x_1 - x_2 = \mathrm{dx}$ est très petit $F_1 \approx F_2 = F$ varie très peu et le travail élémentaire s'exprime par : $\Delta\mathrm{W} = F \times \mathrm{dx} = k(l_0 - x)\mathrm{dx}$

- Le travail total est donné par : $W_{1/2} = \int k(l_0 - x)\mathrm{dx} = \frac{k}{2}(f_2^2 - f_1^2)$
- Énergie potentielle du ressort $E_p = \frac{\mathrm{kf}^2}{2}$; $E_{\mathrm{p2}} - E_{\mathrm{p1}} = \frac{k}{2}(f_2^2 - f_1^2)$ (***E_p*** en J ; ***k*** en N.m^{-1} ; ***f*** en m)

La compression du ressort permet d'accumuler de l'énergie potentielle.

- Pour les ressorts de torsion : $E_p = \frac{1}{2}k \times \alpha^2$ (***α*** en rad ; ***k*** en Nm.rad^{-1})



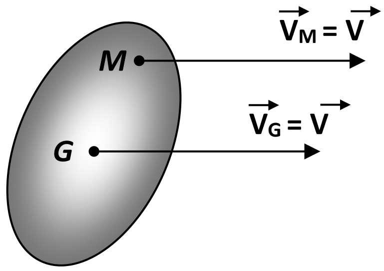


20.2. Énergie cinétique

On peut considérer l'énergie cinétique comme étant une sorte d'énergie potentielle liée à la vitesse de déplacement. Plus un solide se déplace rapidement, plus il accumule de l'énergie cinétique.

20.2.1. Solide en translation

Tous les points du solide se déplacent à la même vitesse : $\vec{V} = \vec{V_G} = \vec{V_M} = \ldots$

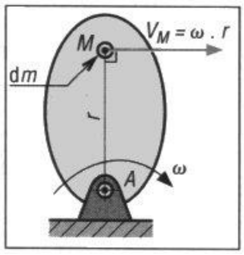


L'énergie cinétique d'un solide en translation rectiligne est égale à la moitié du produit de la masse m du solide par le carré de sa vitesse V.

$E_c = T = \frac{1}{2} m \times V^2$ avec $\boldsymbol{E_c}$ en J (Joules) ; ***m*** en kg ; ***V*** en m.s^{-1}

20.2.2. Solide en rotation par rapport à un axe fixe

Pour l'élément M de masse dm dont la vitesse est $V_M = \omega \times r$, l'énergie cinétique est



$$E_c = \frac{1}{2}(\omega^* \mathrm{r})^2 \mathrm{dm} = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \mathrm{dm}$$

Pour l'ensemble du solide :$E_c = {}^1\!/_2\, \omega^2 \sum r^2 \mathrm{dm}$.

Le terme $J = \sum r^2 \mathrm{dm}$ représente le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation. L'énergie cinétique d'un solide en rotation est égale à la moitié du produit du moment d'inertie J du solide (par rapport à son axe de rotation) par le carré de sa vitesse angulaire ω.

$E_c = \frac{1}{2} \mathrm{J}\omega^2$ avec ***Ec*** en J (Joules) ; ***J*** en m².kg ; ***ω*** en rad.s^{-1}

20.2.3. Solide en mouvement plan

Définition 1

Ec : énergie cinétique en J (joules).

$$E_c = \frac{1}{2}\mathrm{m}V_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2$$

- ***V_G :*** vitesse (absolue) du centre de gravité G du solide (m.s^{-1})
- ***ω :*** vitesse angulaire du solide (rad.s-1)
- ***m :*** masse du solide (kg)
- ***J_G :*** moment d'inertie du solide par rapport à un axe perpendiculaire au plan du mouvement et passant par G (m².kg)

Définition 2

$E_c = \frac{1}{2} J_I \omega^2$ avec $J_I = J_G + \mathrm{m.AG}^2$

Le point I est le centre instantané de rotation du mouvement et J, le moment d'inertie par rapport à l'axe instantané de rotation (axe passant part et perpendiculaire au plan du mouvement).

20.2.4. Solide en mouvement quelconque

L'énergie cinétique est le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique :

21. Puissance

La puissance définit la quantité de travail effectué par unité de temps (par seconde) ou autrement dit le débit d'énergie.

21.1. Puissance moyenne

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

- ***P_m*** : puissance moyenne en ***W*** (Watts) ;
- ***ΔW*** : quantité de travail ;
- ***Δt*** : intervalle de temps

21.2. Puissance instantanée

$$P = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta W}{\Delta t}\right) = \frac{dW}{dt}$$

Unité : le Watt (W) $\rightarrow$ $1 \text{ Watt} = \frac{1 \text{ joule}}{1 \text{ seconde}} = 1 \text{ J.s}^{-1}$

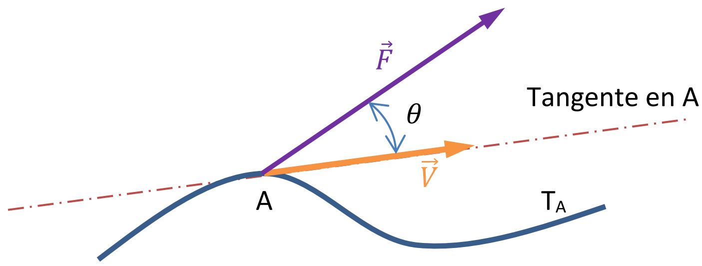
Autre unité usuelle : le cheval (cv) $1\text{cv} = 736$ W

21.3. Puissance développée par une force

La puissance instantanée P développée par une force $\vec{F}$ dont le point d'application A se déplace à la vitesse $\vec{V}$ sur sa trajectoire T_A est égale au produit scalaire de $\vec{F}$ par $\vec{V}$.

$$P = \vec{F}\,.\vec{V}$$
$$P = F.V.\cos\theta$$

P en Watt ; F en N ; V en $m.s^{-1}$



Remarque :

- Si P>0, la puissance est motrice (force motrice) ;
- Si P<0, la puissance est résistante ou réceptive (force résistante).
- La vitesse $\vec{V}$ doit être une vitesse absolue (repère de référence lié à la Terre).

21.4. Puissance développée par un couple

La puissance développée par un couple C se déplaçant à la vitesse angulaire ω est égale au produit de C par ω.

$$P = C.\omega$$

- *P :* **puissance en W ;**
- *C :* **couple en Nm ;**
- *ω :* **vitesse de rotation en rad.s^{-1}**

21.5. Formule générale de la puissance

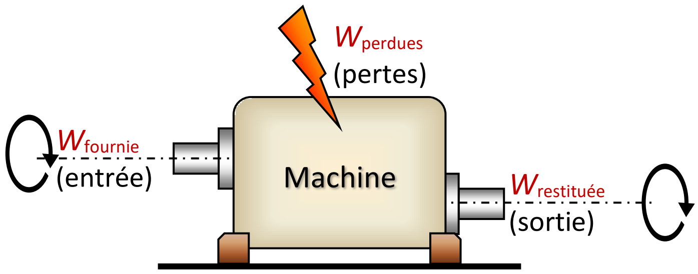
La puissance, de manière générale, est le résultat du comoment du torseur des actions transmissibles par le torseur cinématique.

$$P_{\bar{\Sigma}/\Sigma} = \left\{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma}/\Sigma}\right\}_A \otimes \left\{\mathcal{C}_{\Sigma/Rg}\right\}_A$$

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{\bar{\Sigma}/\Sigma}} \\ \overrightarrow{M_{A,\bar{\Sigma}/\Sigma}} \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{\Sigma/Rg}} \\ \overrightarrow{V_{A,\Sigma/Rg}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}_A$$

22. Rendement

Le rendement η (éta) d'une machine est égal au rapport de l'énergie restituée sur l'énergie fournie ou reçue.



$$\eta = \frac{W_{\text{restituée}}}{W_{\text{fournie}}} \leq 1$$

$$\eta = \frac{W_{\text{fournie}} - W_{\text{perdue}}}{W_{\text{fournie}}} = 1 - \frac{W_{\text{perdue}}}{W_{\text{fournie}}}$$

23. Théorie de l'énergie-puissance ou théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Pour un système matériel formé de deux solides indéformables Σ = 1 et 2, la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique galiléenne est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à ce système et de la puissance des inter-efforts entre 1 et 2.

$$\frac{dEc_{\Sigma/Rg}}{dt} = \Sigma P_{\overline{\Sigma}/\Sigma} + \Sigma P_{2/1}$$

Pour un système matériel Σ formé de n solides indéformables, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique galiléenne d'un système matériel formé de n solides indéformables est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à ce système et de la puissance des inter-efforts entre les n solides.

$$\frac{dEc_{\Sigma/Rg}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} P_{\overline{\Sigma}/i} + \sum_{j>k} P_{j/k}$$

Avec :

$$\begin{cases} P_{\overline{\Sigma}/i} = \mathcal{F}_{\overline{\Sigma}/i} \otimes \mathcal{V}_{i/Rg} \\ P_{j/k} = \mathcal{F}_{j/k} \otimes \mathcal{V}_{k/j} \end{cases}$$

En conclusion il faut lister :

- La puissance à l'entrée d'un mécanisme,
- La puissance à la sortie d'un mécanisme,
- La puissance dissipée par échauffement,
- Les puissances stockées par des accumulateurs (ressort, énergie potentielle, etc…)

24. Comparaison entre PFD et TEC

Objectifs des deux théorèmes :

- Obtenir des actions de liaisons
- Obtenir des équations différentielles du mouvement liées aux actions entrée/sortie

PFD	TEC
• Obtention de 6 équations par isolement, • Équations donnant les actions à travail nul, • Équations différentielles du mouvement sur la/les équation(s) de mobilité donnant les actions à travail non nul et les lois d'accélérations des pièces. • On obtient toutes les actions du système, et donc la loi entrée/sortie en effort, • Application lourde s'il y a beaucoup de solides. • Difficultés d'applications s'il y a des pertes. • Penser à ne déterminer que l'équation utile au problème (ex : Moment suivant $\vec{z}$)	• Équations différentielles du mouvement sur la/les équation(s) de mobilité donnant les actions à travail non nul et les lois d'accélérations des pièces. • On obtient en particulier la relation entrée/sortie en effort. • Impossibilité de déterminer les actions à travail non nul. • Très adapté aux problèmes à 1 DDL. • Fonctionne très bien qu'il y ait peu ou beaucoup de solides.