REPRESENTATION ET SIMPLIFICATION DES FONCTIONS LOGIQUES COMBINATOIRES

1. OBJECTIFS

- Etudier la représentation algébrique d'une fonction logique,
- Comprendre la simplification algébrique d'une fonction logique,
- Faire la synthèse des applications combinatoires.

2. REPRESENTATION D'UNE FONCTION LOGIQUE

Une fonction logique est une combinaison de variables binaires reliées par les opérateurs ET, OU et NON. Elle peut être représentée par une écriture algébrique ou une table de vérité ou un tableau de KARNAUGH ou un logigramme.

2.1 Représentation algébrique

Une fonction logique peut être représentée sous deux formes :

- S. D. P : $\Sigma(\Pi)$ somme des produits,
- P. D. S. : Π (Σ) produit des sommes,

2.1.1 Forme somme des produits (Forme disjonctive)

Elle correspond à une somme de produits logiques : $F=\Sigma(\Pi(e_i))$, ou e_i représente une variable logique ou son complément.

Exemple : $F_{1(A, B, C)}=AB+\overline{B}C$.

Si chacun des produits contient toutes les variables d'entrée sous une forme directe ou complémentée, alors la forme est appelée : **« première forme canonique »** ou forme **« canonique disjonctive »**. Chacun des produits est appelé **minterme.**

Exemple : $F_{1(A, B, C)}=AB\overline{C}+ABC+\overline{A}\overline{B}C+A\overline{B}C$.

2.1.2 Forme Produit de sommes (Forme conjonctive)

Elle correspond à un produit de sommes logiques : $F=\Pi(\Sigma(e_i))$, ou e_i représente une variable logique ou son complément.

Exemple : $F_{2(A,\ B,\ C)}=(A+B).(A+\overline{B}+C)$.

Si chacune des sommes contient toutes les variables d'entrée sous une forme directe ou complémentée, alors la forme est appelée : **« deuxième forme canonique »** ou forme **« canonique conjonctive »**. Chacun des produits est appelé **maxterme.**

Exemple : $F_{2(A,\ B,\ C)}=(A+B+C).(A+B+\overline{C}).(A+\overline{B}+C)$

2.2 Table de vérité

Une fonction logique peut être représentée par une table de vérité qui donne les valeurs que peut prendre la fonction pour chaque combinaison de variables d'entrées.

2.2.1 Fonction complètement définie

C'est une fonction logique dont la valeur est connue pour toutes les combinaisons possibles des variables.

Exemple : La fonction « Majorité de 3 variables » : MAJ(A, B, C)

La fonction MAJ vaut 1 si la majorité (2 ou 3) des variables sont à l'état 1.

Table de vérité				
Combinaison	**A**	**B**	**C**	**S=MAJ(A, B, C)**
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

2.2.2 Fonction incomplètement définie

Il s'agit d'une fonction dont sa valeur est non spécifiée pour certaines combinaisons de variables. On l'indique le symbole X ou ∅ ; c'est-à-dire la fonction est indifférente pour certaines combinaisons de variables d'entrées correspondants à des situations qui soient :

- Ne peuvent jamais suivent dans le système,
- Ne changent pas le comportement du système.

Exemple : Soit un clavier qui comporte 3 boutons poussoirs P_1, P_2 et P_3 qui commandent une machine et qui possèdent un verrouillage mécanique tel que 2 boutons adjacents ne peuvent pas être enfoncés simultanément :

P_1⦿	P_2⦿	P_3⦿
Marche manuelle	Arrêt	Augmenter la vitesse

On suppose que $\mathbf{P_i}$ appuyé vaut **1** et relâché vaut **0**. D'où la table de vérité de la fonction « **clavier** » qui détecte au moins un poussoir déclenché :

Table de vérité				
Combinaison	**A**	**B**	**C**	**Clavier**
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	$\varnothing$
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	$\varnothing$
7	1	1	1	$\varnothing$

2.2.3 Equivalence entre la table de vérité et les formes canonique

- Pour établir l'expression canonique disjonctive (la somme canonique) de la fonction : il suffit d'effectuer la somme logique (ou réunion) des mintermes associées aux états pour lesquels la fonction vaut « 1 ».

- Pour établir l'expression canonique conjonctive (le produit canonique) de la fonction : il suffit d'effectuer le produit logique (ou intersection) des maxtermes associées aux états pour lesquels la fonction vaut « 0 ».

Exemple : La fonction « Majorité de 3 variables » : MAJ(A, B, C)

Table de vérité						
Combinaison	**A**	**B**	**C**	**S=MAJ(A, B, C)**	**Minterme**	**Maxterme**
0	0	0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$A+B+C$
1	0	0	1	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,C$	$A+B+\overline{C}$
2	0	1	0	0	$\overline{A}\,B\,\overline{C}$	$A+\overline{B}+C$
3	0	1	1	1	$\overline{A}\,B\,C$	$A+\overline{B}+\overline{C}$
4	1	0	0	0	$A\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}+B+C$
5	1	0	1	1	$A\,\overline{B}\,C$	$\overline{A}+B+\overline{C}$
6	1	1	0	1	$A\,B\,\overline{C}$	$\overline{A}+\overline{B}+C$
7	1	1	1	1	$A\,B\,C$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

- On remarque que **MAJ(A,B,C)=1** pour les combinaisons 3, 5, 6, 7. On écrit la fonction ainsi spécifiée sous une forme dite numérique : **MAJ= R(3,5,6,7)**, Réunion des états 3, 5, 6, 7. La première forme canonique de la fonction **NAJ** s'en déduit directement :

$$MAJ_{(A,\,B,\,C)}=\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC.$$

- On remarque que **MAJ(A,B,C)=0** pour les combinaisons 0, 1, 2, 4. On écrit la fonction ainsi spécifiée sous une forme dite numérique : **MAJ= I(0,1,2,4)**, Intersection des états 0, 1, 2, 4. La deuxième forme canonique de la fonction **NAJ** s'en déduit directement :

$$MAJ_{(A,\,B,\,C)}=(A+B+C).(A+B+\overline{C}).(A+\overline{B}+C).(\overline{A}+B+C)$$

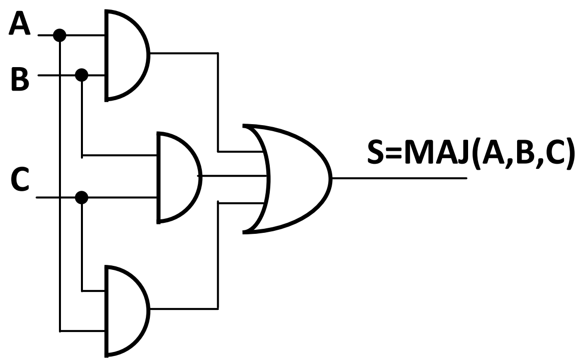
- **NB** : On s'intéresse généralement à la représentation d'une fonction sous la forme d'une somme ou somme canonique (forme disjonctive).

2.3 Logigramme

C'est une méthode graphique basée sur les symboles ou les portes.

Exemple : La fonction « Majorité de 3 variables » : MAJ(A,B,C)

$$MAJ_{(A,B,C)}=AB+BC+AC.$$



2.4 Le tableau de KARNAUGH (TK)

La méthode du tableau de KARNAUGH permet de visualiser une fonction et d'en tirer intuitivement une fonction simplifiée. L'élément de base de cette méthode est la table de KARNAUGH qui est représenté sous forme d'un tableau formé par des lignes et des colonnes.

2.4.1 Adjacence des cases

Deux mots binaires sont dits adjacents s'ils ne diffèrent que par la complémentaire d'une et d'une seule variable. Si deux mots adjacents sont sommés, ils peuvent être fusionnés et la variable qui en diffère sera éliminée. Les mots ABC et $AB\overline{C}$ sont adjacents puisqu'ils ne diffèrent que par la complémentarité de la variable C. Le théorème d'adjacence stipule donc qu'ABC et $AB\overline{C}= AB$.

2.4.2 Construction du tableau :

Le tableau de KARNAUGH a été construit de façon à faire ressortir l'adjacence logique visuelle.

- Chaque case représente une combinaison des variables (minterme),
- La table de vérité est transportée dans le tableau en mettant dans chaque case la valeur de la fonction correspondante.

La fonction représentée par un tableau de KARNAUGH s'écrit comme la somme des produits associés aux différentes cases contenant la valeur 1.

2.4.3 Règles à suivre pour un problème à n variables : (n>2)

Le tableau de KARNAUGH comporte 2^n cases ou combinaisons, L'ordre des variables n'est pas important mais il fait que respecter la règle suivante :

- Les monômes repérant les lignes et les colonnes sont attribués de telle manière que 2 monômes consécutifs ne diffèrent que de l'état d'une variable, il en résulte que 2 cases consécutives en ligne ou en colonne repèrent des combinaisons adjacentes, on utilise donc le code GRAY.

Exemple

- n=2

A \ B	$\overline{B}$(0)	B(1)
$\overline{A}$(0)	00	01
A(1)	10	11

- n=3

A \ BC	$\overline{B}\,\overline{C}$(00)	$\overline{B}$C(01)	BC(11)	B$\overline{C}$(10)
$\overline{A}$(0)	000	001	011	010
A(1)	100	101	111	110

- n=4

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$(00)	$\overline{C}$D(01)	CD(11)	C$\overline{D}$(10)
$\overline{A}\,\overline{B}$(00)	0000	0001	0011	0010
$\overline{A}$B(01)	0100	0101	0111	0110
AB(11)	1100	1101	1111	1110
A$\overline{B}$(10)	1000	1001	1011	1010

NB : Le Tableau de KARNAUGH à une structure enroulée sur les lignes et les colonnes. Il a une forme sphérique.

2.4.4 *Exemple de remplissage du tableau de KARNAUGH à partir de la table de vérité :*

Table de vérité

Combinaison	A	B	C	D	$F_{(A,B,C,D)}$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

Tableau de KARNAUGH

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$(00)	$\overline{C}$D(01)	CD(11)	C$\overline{D}$(10)
$\overline{A}\,\overline{B}$(00)	0	1	0	0
$\overline{A}$B(01)	1	1	1	0
AB(11)	0	1	0	0
A$\overline{B}$(10)	0	0	1	0

3. SIMPLIFICATION DES FONCTIONS LOGIQUES

L'objectif de la simplification des fonctions logiques est des minimiser le nombre de termes afin d'obtenir une réalisation matérielle plus simple donc plus facile à construire et à dépanner et moins couteuse.

Deux méthodes de simplification sont utilisées :

- La simplification algébrique.
- La simplification graphique par tableau de KARNAUGH.

3.1 Simplification algébrique des expressions logiques

Pour obtenir une expression plus simple de la fonction par cette méthode, il faut utiliser :

- Les théorèmes et les propriétés de l'algèbre de Boole (voir chapitre 2).
- La multiplication par 1 ($X+\overline{X}$).
- L'addition d'un terme nul ($X\overline{X}$).

Exemple : Simplification de La fonction « Majorité» : MAJ(A,B,C)

$$MAJ_{(A,B,C)}=\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC.$$

$$MAJ_{(A,B,C)}=\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC+ABC+ABC.$$

$$MAJ_{(A,B,C)}=BC(\overline{A}+A)+AB(\overline{C}+C)+AC(\overline{B}+B).$$

$$MAJ_{(A,B,C)}=BC+AB+AC$$

NB : Les règles et propriétés de l'algèbre de Boole permettent de simplifier les fonctions mais reste une méthode relativement lourde. Elle ne permet jamais de savoir si l'on aboutit ou pas à une expression minimale de la fonction.

Nous pourrons alors utiliser la méthode du tableau de KARNAUGH

3.2 Simplification graphique des expressions logiques (par tableau de KARNAUGH)

Le tableau de KARNAUGH permet de visualiser une fonction et d'en tirer intuitivement une fonction simplifiée

3.2.1 Regroupement des cases adjacentes

La méthode consiste à réaliser des groupements des cases adjacentes. Ces groupements des case doivent être de taille maximale (nombre max de casse) et égale à 2^k (c'est-à-dire 2, 4, 8, 16, …). On cesse d'effectuer les groupements lorsque tous les uns appartiennent au moins à l'un d'eux.

NB : Avant de tirer les équations du tableau de KARNAUGH il faut respecter les règles suivantes :

- Grouper tous les uns.
- Grouper le maximum des uns dans un seul groupement.
- Un groupement a une forme un rectangulaire.
- Le nombre des uns dans un groupement est une puissance de 2 est égal à 2^k.
- Un 1 peut figurer dans plus qu'un groupement.
- Un groupement doit respecter les axes de symétries du T. K.

Regroupement des 2 cases adjacentes

Simplification de la fonction Majorité de 3 variables (MAJ(A,B.C))

A \ BC	$\overline{B}\,\overline{C}$(00)	$\overline{B}C$(01)	BC(11)	$B\overline{C}$(10)
$\overline{A}$(0)	0	0	1	0
A(1)	0	1	1	1

$G_1=ABC+A\overline{B}C=AC$

$G_3=ABC+AB\overline{C}=AB$

$G_2=\overline{A}BC+ABC=BC$

$$\boxed{MAJ(A,B,C)=G_1+G_2+G_3=AB+BC+AC}$$

Règle : La réunion de deux cases adjacentes contenant 1 chacune élimine une seule variable celle qui change d'état en passant d'une case à l'autre.

Regroupement des 4 cases adjacentes

Fonction F_1

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$(00)	$\overline{C}D$(01)	CD(11)	$C\overline{D}$(10)
$\overline{A}\,\overline{B}$(00)	0	0	0	1
$\overline{A}B$(01)	1	1	0	1
AB(11)	1	1	0	1
$A\overline{B}$(10)	0	0	0	1

Fonction F_2

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$(00)	$\overline{C}D$(01)	CD(11)	$C\overline{D}$(10)
$\overline{A}\,\overline{B}$(00)	1	0	0	1
$\overline{A}B$(01)	0	0	0	0
AB(11)	1	0	0	1
$A\overline{B}$(10)	1	0	0	1

$F_{1(A,B,C,D)}=B\overline{C}+C\overline{D}$

$F_{2(A,B,C,D)}=A\overline{D}+\overline{B}\,\overline{D}$

Fonction F_3

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$(00)	$\overline{C}D$(01)	CD(11)	$C\overline{D}$(10)
$\overline{A}\,\overline{B}$(00)	1	0	1	1
$\overline{A}B$(01)	1	0	0	0
AB(11)	1	1	1	1
$A\overline{B}$(10)	1	0	1	1

$$F_{3(A,B,C,D)}=\overline{C}\,\overline{D}+AB+\overline{B}C$$

Règle : 2 variables disparaissent quand on regroupe 4 cases adjacentes, on peut alors remplacer la somme des 4 cases (4 mintermes à 4 variables chacun) par un seul terme qui comporte que 2 variables uniquement.

- *Regroupement des 8 cases adjacentes*

Fonction F_4

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$(00)	$\overline{C}D$(01)	CD(11)	$C\overline{D}$(10)
$\overline{A}\,\overline{B}$(00)	1	0	0	1
$\overline{A}B$(01)	1	0	0	1
AB(11)	1	0	0	1
$A\overline{B}$(10)	1	0	0	1

$$F_{4(A,B,C,D)}=\overline{D}$$

Règle : 2 variables disparaissent quand on regroupe 8 cases adjacentes, on peut alors remplacer la somme des 8 cases (8 mintermes à 4 variables chacun) par un seul terme qui comporte que 1 variable uniquement.

Remarque : On se limitera à des tableaux de 4 variables, pour résoudre par exemple des problèmes à 5 variables, on les décompose chacun a deux problèmes a 4 variables.

3.2.2 Traitement des problèmes à 5 variables

Pour résoudre ce problème on va le décomposer en 2 problèmes à 4 variables en appliquant le théorème d'expansion (SHANNON).

$$\text{on a : } F_{(A,B,C,D,E)}=\overline{E}\,F_{(A,B,C,D,0)}+E\,F_{(A,B,C,D,1)}$$

NB : Le théorème d'expansion de SHANNON reste applicable quelque soit le nombre de variables on a :

$$F_{(A,B,C,\ldots,Z)}=\overline{Z}\,F_{(A,B,C,\ldots,0)}+Z\,F_{(A,B,C,\ldots,1)}$$

Exemple : Simplifier la fonction $F_{(A,B,C,D,E)}=\Sigma(4, 5, 6, 7, 24, 25, 26, 27)$

$F_{(A,B,C,D,0)}$

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$(00)	$\overline{C}D$(01)	CD(11)	$C\overline{D}$(10)
$\overline{A}\,\overline{B}$(00)	0	0	0	1
$\overline{A}B$(01)	0	0	0	1
AB(11)	0	0	0	1
$A\overline{B}$(10)	0	0	0	1

$F_{(A,B,C,D,1)}$

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$(00)	$\overline{C}D$(01)	CD(11)	$C\overline{D}$(10)
$\overline{A}\,\overline{B}$(00)	0	1	0	0
$\overline{A}B$(01)	0	1	0	0
AB(11)	0	1	0	0
$A\overline{B}$(10)	0	1	0	0

$F_{(A,B,C,D,0)}=C\overline{D}$ $\quad\quad$ $F_{(A,B,C,D,1)}=\overline{C}D$

Ce qui en résulte : $F_{(A,B,C,D,E)}=\overline{E}C\overline{D}+E\overline{C}D$

3.2.3 Les valeurs indifférentes on indéfinies

Le symbole ∅ (ou X) peut prendre indifféremment la valeur 0 ou 1 : on remplace donc par 1 uniquement ceux qui permettent d'augmenter le nombre des case d'un regroupement et ceux qui réduit le nombre de regroupement.

Exemple

Table de vérité				
Combinaison	**A**	**B**	**C**	**F(A,B,C)**
0	0	0	0	$\varnothing$
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	$\varnothing$
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	$\varnothing$
7	1	1	1	1

$F_{(A,B,C)}$

A \ BC	$\overline{B}\,\overline{C}$(00)	$\overline{B}C$(01)	BC(11)	$B\overline{C}$(10)
$\overline{A}$(0)	$\varnothing$	0	$\varnothing$	1
A(1)	0	0	1	$\varnothing$

$F_{(A,B,C)} = B$

4. RESUME : SYNTHESE D'UNE FONCTION LOGIQUE

- **Etape 1** : Lecture et analyse de l'énoncée de la fonction.
- **Etape 2** : écriture de la fonction sous forme canonique d'une table de vérité.
- **Etape 3** : Simplification de l'expression de la fonction par la méthode algébrique ou par la méthode du T. K.
- **Etape 3** : Réalisation du logigramme :
  - Avec un seul types des opérateurs en utilisant les fonctions logiques universelles.
  - Avec un minimum des opérateurs en utilisant les fonctions logiques de base