18. ***(4º ESO)*** Relaciona las razones trigonométricas seno y coseno de los ángulos siguientes, con las de un ángulo α del primer cuadrante:
a) $90^{o}+\alpha$ **b)** $270^{o}-\alpha$ **c)** $270^{o}+\alpha$

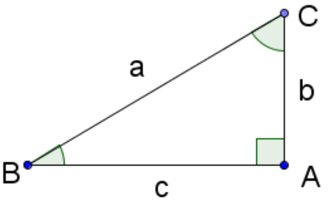
19. ***(4º ESO)*** Si α es un ángulo del segundo cuadrante y $\text{tg}\,\alpha=-4$, calcula:
a) $\text{sen}\,(180^{o}-\alpha)$ **b)** $\text{tg}(180^{o}+\alpha)$ **c)** $\cos(-\alpha)$
d) $\sec\,(90^{o}-\alpha)$ **e)** $\text{cosec}(270^{o}+\alpha)$ **f)** $\text{cotg}(360^{o}-\alpha)$.

20. ***(4º ESO)*** Calcula las razones trigonométricas de α si:
a) $\cos\,(\pi-\alpha)=\dfrac{1}{4}$, $\alpha\in$3r cuadrante.
b) $\text{tg}\,(\pi+\alpha)=-2$, $\alpha\in2^{o}$ cuadrante.

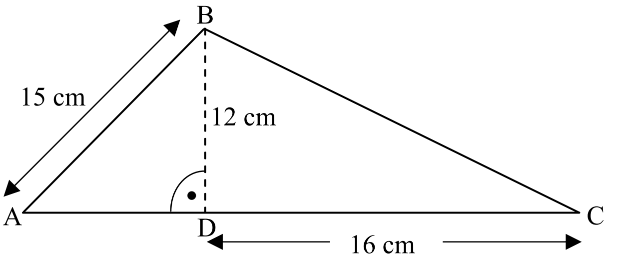
21. Calcula el valor de las siguientes razones trigonométricas sin utilizar la calculadora:
a) $\text{sen}\,150^{o}$ **b)** $\cos 225^{o}$ **c)** $\text{tg}\,330^{o}$ **d)** $\text{cosec}\,135^{o}$
e) $\text{sen}\,240^{o}$ **f)** $\text{cotg}\,300^{o}$ **g)** $\cos 120^{o}$ **h)** $\cos 210^{o}$

Resolución de triángulos rectángulos

22. ***(4º ESO)*** Resuelve los siguientes triángulos rectángulos, es decir, halla los lados y ángulos que faltan: (en todos ellos $\hat{A}=90^{o}$)
a) $b=4$ m, $\hat{B}=30^{o}$ **b)** $a=7$ m, $b=5$ m
c) $a=10$ m, $\hat{B}=40^{o}$ **d)** $c=5$ cm, $sen\,\hat{C}=0{,}25$



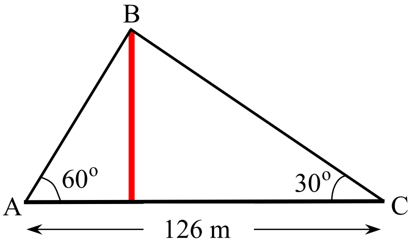
23. ***(4º ESO)*** Calcula las 6 razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\widehat{ABD}$ y $\widehat{CBD}$.
Después halla los ángulos con la calculadora.



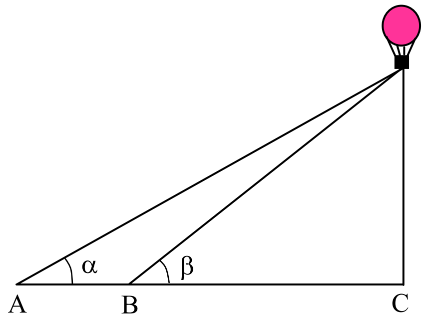
24. ***(4º ESO)*** En un triángulo rectángulo ABC, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 8 cm y 4,5 cm, respectivamente. Calcula las medidas de los catetos, de la altura sobre la hipotenusa y los ángulos.

Estrategia de la altura para resolver triángulos oblicuángulos (no rectángulos)

25. ***(4º ESO)*** Una antena de radio está sujeta al suelo por dos cables de acero, como indica la figura. Calcula:
a) La altura de la antena
b) La longitud de los cables.
c) El ángulo $A\hat{B}C$. Da los valores exactos.



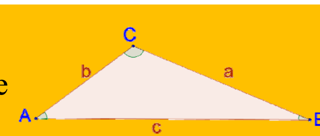
26. ***(4º ESO)*** Para encontrar la altura a la que se encuentra un globo, procedemos de la siguiente manera:
Rosa se coloca en un punto B, y yo en A, a 5 metros de ella, de manera que los puntos A, B y C quedan alineados.
Si los ángulos α y β miden 40° y 50°, respectivamente, ¿a qué altura se encuentra el globo?



Dos importantes teoremas para resolver triángulos cualesquiera. Teorema de los senos. Teorema del coseno.

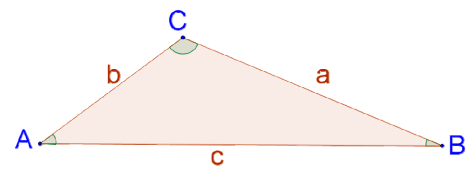
Teoría:

* Demuestra el **teorema de los senos** $\boxed{\dfrac{a}{sen\,\hat{A}}=\dfrac{b}{sen\,\hat{B}}=\dfrac{c}{sen\,\hat{C}}}$ y que esta razón coincide con el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

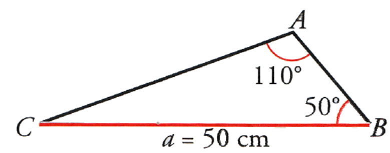


* Demuestra el **teorema del coseno** $\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}}$; $\boxed{b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}}$; $\boxed{c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}}$

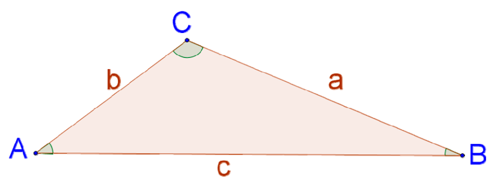
27. □ En un triángulo ABC, conocemos $a = 4$ cm y $\hat{B}=30^{\circ}$.
Halla $\hat{A}$ en los siguientes casos:
a) b = 1,5 cm **b)** b = 2 cm **c)** b = 3 cm **d)** b = 4 cm



28. Calcula los lados b y c del triángulo de la derecha.

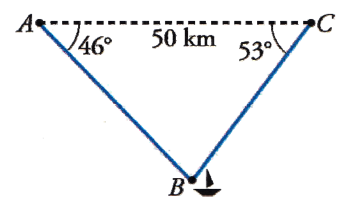


29. □ Resuelve los siguientes triángulos:
a) a = 12 cm; b = 16 cm; c = 10 cm
b) b = 22 cm; c = 7 cm; $\hat{C}=40^{\circ}$
c) b = 4 cm; c = 3 cm; $\hat{A}=105^{\circ}$
d) a = 4 m; $\hat{B}=45^{\circ}$; $\hat{C}=60^{\circ}$
e) b = 5 m; $\hat{A}=\hat{C}=35^{\circ}$
f) a = b = 10 cm; $\hat{C}=40^{\circ}$
g) a = 5 cm; $\hat{A}=75^{\circ}$; $\hat{B}=45^{\circ}$
h) a = 16 cm; $\hat{A}=90^{\circ}$; $\hat{C}=30^{\circ}$



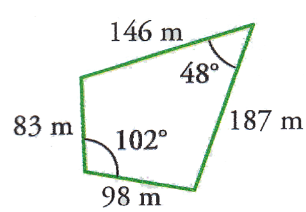
30. Dado un triángulo ABC, conocemos $\overline{AC}=172$; $\overline{BC}=183$ y $\hat{A}=68^{\circ}$. Calcula $\overline{AB}$.

31. Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: $B\hat{A}C=46^{\circ}$ y $B\hat{C}A=53^{\circ}$.
¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?



32. Halla el área del siguiente cuadrilátero irregular:

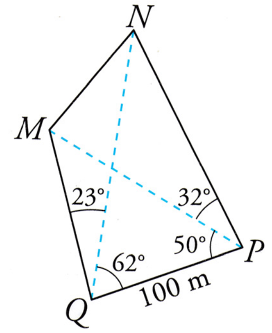
Observa que solo necesitamos uno de los ángulos



Ayuda: Pártelo en dos triángulos y utiliza la fórmula de Herón:

$A_{triang} = \sqrt{s\cdot(s-a).(s-b)\cdot(s-c)}$ siendo $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, a, b y c son los lados.

33. □ Cálculo de la distancia entre dos puntos inaccesibles.
Calcula la distancia $\overline{MN}$ de la figura:

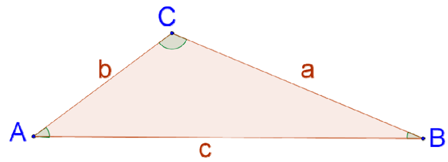


34. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos y calcula sus áreas:

a) $\hat{A} = 90^o$, $b = 15$ cm, $a = 20$ cm

b) $\hat{B} = 90^o$, $\hat{C} = 25^o$, $b = 10$ m

c) $\hat{C} = 90^o$, $b = 10$ cm, $a = 18$ cm



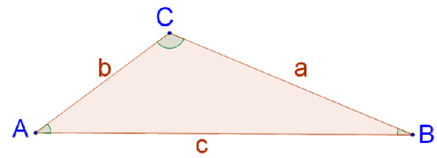
35. □ Resuelve los siguientes triángulos y calcula sus áreas:

a) $\hat{A} = 80^o$, $\hat{B} = 40^o$, $a = 8$ cm

b) $\hat{A} = 80^o$, $a = 10$ m, $b = 5$ m

c) $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $c = 20$ cm

d) $\hat{A} = 75^o$, $b = 8$ m, $c = 12$ m



Fórmulas trigonométricas

Teoría: Demuestra las fórmulas trigonométricas siguientes:
* Razones trigonométricas del ángulo suma $\alpha+\beta$.
* Razones trigonométricas del ángulo diferencia $\alpha-\beta$.
* Razones trigonométricas del ángulo doble 2α.
* Razones trigonométricas del ángulo mitad $\alpha/2$.
* Pasar sumas y diferencias de senos y cosenos a productos.

36. □ **a)** A partir de las razones trigonométricas de 30º y 45º, halla las razones trigonométricas de 75º.
□ **b)** A partir de las razones trigonométricas de 30º y 45º, halla las razones trigonométricas de 15º.
□ **c)** A partir de las razones trigonométricas de 30º y utilizando las fórmulas del ángulo doble, halla las razones trigonométricas de 60º. Observa que el resultado era el esperado al ser 30º y 60º ángulos complementarios.

□ **d)** Halla nuevamente las razones trigonométricas de 15º pero ahora utilizando solamente $\cos 30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

□ **e)** Transforma en producto y calcula:

e1) $sen\,75^o + sen\,15^o$ e2) $sen\,75^o - sen\,15^o$

e3) $\cos 75^o + \cos 15^o$ e4) $\cos 75^o - \cos 15^o$

□ **f)** Comprueba los resultados de los apartados anteriores con la calculadora.

37. Calcula el valor de las siguientes razones trigonométricas sin utilizar la calculadora:
a) sen 105º **b)** cos 15º **c)** tg 75º **d)** cotg 105º

38. Demuestra las siguientes igualdades utilizando las fórmulas de las razones trigonométricas del ángulo suma:

a) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-sen\alpha$ **b)** $sen\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$

39. Sabiendo que tg $\alpha = 3$, calcula las razones trigonométricas del ángulo 2α en los siguientes casos:

a) Si α es un ángulo del primer cuadrante.

b) Si α es un ángulo del tercer cuadrante.

40. Calcula cosec 2a sabiendo que cosec a $=\frac{5}{3}$, $90^o < a < 180^o$.

41. a) Demuestra que sen 3α = 3sen $\alpha.\cos^2\alpha - \text{sen}^3\alpha$.

b) Calcula el sen 3α sabiendo que sen $\alpha = \frac{1}{2}$ (Utiliza la fórmula del apartado **a)**)

42. Desarrolla las expresiones de cos 3α (en función del sen α y cos α) y de tg 3α (en función de la tg α).

43. Si α es un ángulo del segundo cuadrante y sen $\alpha = \frac{3}{5}$ calcula el seno, el coseno y la tangente del ángulo $\frac{\alpha}{2}$.

44. Calcula el seno y el coseno del ángulo $\frac{\pi}{8}$ radianes sin calculadora. Comprueba el resultado con ella.

45. Si $tg\alpha=-\frac{4}{3}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, calcula $sen\frac{\alpha}{2}$ y $tg2\alpha$.

46. Sabiendo que $tg\,\alpha=\sqrt{8}$; $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, calcula:

a) $\cos(2\alpha)$ **b)** $tg\frac{\alpha}{2}$ **c)** $sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ **d)** $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$

47. □ Sabiendo que $sen\alpha=\frac{3}{10}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\cos\beta=-\frac{4}{5}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$, calcula:

a) sen$(\alpha+\beta)$ **b)** cos$(\alpha-\beta)$ **c)** $tg(2\alpha)$ **d)** $\cos\frac{\beta}{2}$.

48. □ Si $sen\,\alpha=\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, y $\cos\beta=\frac{1}{8}$, $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$, calcula el $sen\left(2\alpha+\frac{\beta}{2}\right)$.

49. □ Si $tg\frac{a}{2}=2$, calcula $sen\,a$ y $\cos a$.

50. Utilizando las fórmulas de transformación de sumas en productos, calcula el valor exacto de las expresiones:

a) $\text{sen}105^o+\text{sen}15^o$ **b)** $\cos195^o-\cos105^o$ **c)** $\text{sen}105^o-\cos75^o$

51. Transforma las siguientes sumas en productos:

a) $\text{sen}75^o-\text{sen}35^o$ **b)** $\cos125^o+\cos85^o$ **c)** $\cos220^o-\cos20^o$

52. Simplifica las siguientes expresiones utilizando las fórmulas de transformación de sumas en productos:

a) $\dfrac{\cos 2a+\cos a}{sen2a+sena}$ **b)** $\dfrac{sen8x+sen2x}{2\cos 3x}$ **c)** $\dfrac{2sen\alpha}{sen5\alpha-sen3\alpha}$

53. □ **a)** Demuestra esta igualdad $\dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{sen(a+b)+sen(a-b)}=\dfrac{1}{tga}$

□ **b)** Comprueba que la solución de las siguientes ecuaciones es cualquier número real (son igualdades)

b1) $\dfrac{2sen\,x-sen(2x)}{2sen\,x+sen(2x)}=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ **b2)** $2\,tg\,x\cdot sen^2\dfrac{x}{2}+sen\,x=tg\,x$

□ **c)** Expresa en forma de producto el numerador y el denominador de esta fracción y simplifica el resultado:

$$\frac{sen(4a)+sen(2a)}{\cos(4a)+\cos(2a)}$$

54. ***(4º ESO)*** Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

a) $(sen\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\cdot tg\alpha\cdot\cos^2\alpha$ **b)** $\dfrac{1}{1+\cot g^2\alpha}=sen^2\alpha$

c) $\dfrac{\cot g^2\alpha}{1+\cot g^2\alpha}=\cos^2\alpha$ **d)** $\dfrac{\cos\alpha+tg\alpha}{\cos\alpha\cdot tg\alpha}=\cot g\alpha+\sec\alpha$

e) $tg^2\alpha-sen^2\alpha=tg^2\alpha\cdot sen^2\alpha$ **f)** $\dfrac{1+tg\alpha}{\sec\alpha}=sen\alpha+\cos\alpha$

g) $\dfrac{tg\alpha}{tg^2\alpha-1}=\dfrac{sen\alpha\cdot\cos\alpha}{sen^2\alpha-\cos^2\alpha}$ **h)** $sen^2\alpha-\cos^2\alpha=sen^4\alpha-\cos^4\alpha$

55. Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\dfrac{sen\alpha-\cos\alpha}{tg\,\alpha-1}=\cos\alpha$ **b)** $\dfrac{1+\cot g\,\alpha}{sen\alpha+\cos\alpha}=\cos ec\,\alpha$

c) $tg^2\alpha-sen^2\alpha=tg^2\alpha\cdot sen^2\alpha$ **d)** $\dfrac{sen2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=tg\,\alpha$

e) $tg\,\alpha+\cot g\,\alpha=\dfrac{2}{sen2\alpha}$ **f)** $\dfrac{\cot g\,\alpha+tg\,\alpha}{\cot g\,\alpha-tg\,\alpha}=\sec 2\alpha$

g) $sen\alpha\,(sen\alpha+\cos\alpha)+\cos\alpha\,(sen\alpha+\cos\alpha)-1=sen2\alpha$

h) $tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-tg\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=2tg\,2\alpha$ **i)** $\dfrac{tg\,\alpha}{tg\,2\alpha-tg\,\alpha}=\cos 2\alpha$

j) $sen^2\alpha-sen^2\beta=sen(\alpha+\beta)\cdot sen(\alpha-\beta)$ **k)** $\dfrac{sen2\alpha+\cos 2\alpha+2.sen^2\alpha}{sen\alpha+\cos\alpha}=sen\alpha+\cos\alpha$

56. ***(4º ESO)*** Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\sec\alpha}{\cos\sec\alpha\cdot tg\alpha}$ **b)** $\dfrac{\sec\alpha}{1+tg^2\alpha}$ **c)** $\dfrac{sen^2\alpha}{1-\cos\alpha}$

d) $(sen\,\alpha+\cos\,\alpha)^2+(sen\,\alpha-\cos\,\alpha)^2$ **e)** $sen^3\alpha+sen\,\alpha\cdot\cos^2\alpha$

57. Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $2tg\,\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-sen\alpha$ **b)** $\dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

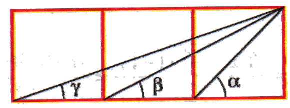
c) $tg\,\alpha\cdot tg\,\beta\,(\cot g\,\alpha+\cot g\,\beta)$ **d)** $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-sen\alpha}$

e) sen2α (tg α + cotg α) **f)** $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\frac{sen^2\alpha}{1-sen\alpha}$

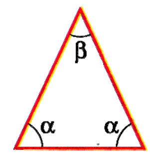
g) $\frac{sen\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-sen^2\alpha}\cdot\frac{1-tg^2\alpha}{tg\,\alpha}$ **h)** $sen\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+sen\alpha$

58. * Demuestra que si $\alpha+\beta+\gamma=180^o$, se verifica: $tg\,\alpha+tg\,\beta+tg\,\gamma=tg\,\alpha\cdot tg\,\beta\cdot tg\,\gamma$

59. Demuestra que en la siguiente figura (tres cuadrados unidos) es $\alpha=\beta+\gamma$



60. Si en este triángulo isósceles sabemos que $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$, calcula, sin hallar el ángulo α, el valor de $\cos\beta$.



Ecuaciones trigonométricas

61. ***(4º ESO)*** Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) sen x = 0 **b)** $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $tg\ x=-\sqrt{3}$

d) 2.sen x + 1 = 0 **e)** $\cos 2x=\frac{1}{2}$ **f)** $sen(3x-60^o)=0$

g) $sen(x+45^o)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **h)** 2.cos x = 3.tg x **i)** $\cos^2x-sen^2x+sen\ x=1$

j) $3.\cos x+2.sen^2x=2$ **k)** $tg^2x-\sec x=1$ **l)** $3sen^2x-4senx+1=0$

ll) $7.\cos^2x-sen^2x=5$ **m)** $tg^2x-2.tg\,x=-1$ **n)** $sen\ x+cosec\ x=\frac{5}{2}$

62. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas dando las soluciones en radianes:

a) sen 2x = −1 **b)** $\cos\frac{x}{3}=-\frac{1}{2}$ **c)** tg 3x = −1

d) $tg\,4x=0$ **e)** $sen\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **f)** $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

63. ***(4º ESO)*** Resuelve las ecuaciones trigonométricas, sabiendo que $0^o\le x<360^o$

a) $2\cos^2x-\cos x=0$ **b)** $sen^2x-2\cos^2x=1$ **c)** $sen^2x-senx=0$

d) $4\cos x+4(1-\cos^2x)=5$ **e)** $senx-tgx=0$ **f)** $3.\cos^2x+2.senx=2$

64. □ Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\cos^2(2\alpha+30^o)=1/4$ **b)** $\cos\alpha=sen(2\alpha)$ **c)** $sen(\alpha+30^o)=2\cos\alpha$

d) $tg^2\alpha-tg\,\alpha=2$ **e)** * $\sqrt{2}\cos(\alpha/2)-\cos\alpha=1$ **f)** $2sen\alpha\cos^2\alpha-6sen^3\alpha=0$

g) $4\cos(2\alpha)+3\cos\alpha=1$ **h)** $tg(2\alpha)+2\cos\alpha=0$ **i)** $sen(45^o-\alpha)+\sqrt{2}sen\alpha=\cos 90^o$

j) $sen(3\alpha)-sen\,\alpha=0$ **k)** $4sen\,\alpha+4\cos^2\alpha\ tg\,\alpha+tg\,\alpha=0$

65. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) sen 2x = 2.cos x **b)** $2.senx-\cos ecx=0$

c) sen 2x − sen x = 0
d) $2.sen^2x + \cos 2x = 4.\cos^2x$
e) $tg^2 x - \sec x = 1$
f) $\cos 2x = 5 - 6.\cos^2 x$
g) tg 2x = 3.tg x
h) tg 2x = cotg x
i) sen 6x + sen 3x = 0
j) cos 5x + cos 3x = cos x

66. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} senx + seny = 1 \\ senx - seny = 1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} sen^2x + \cos^2 y = \dfrac{5}{4} \\ sen^2x - \cos^2 y = \dfrac{3}{4} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \cos x + \cos y = 1 \\ x + y = 90^{\circ} \end{array}\right\}$

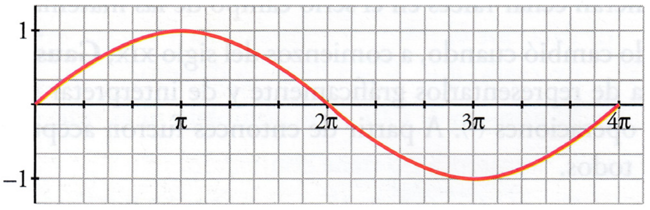
d) $\left.\begin{array}{r} sen^2x + 2.\cos^2 y = 2 \\ \cos x - \cos^2 y = 0 \end{array}\right\}$

Funciones trigonométricas

Teoría:
a) Define las funciones trigonométricas fundamentales ¿Cómo son sus gráficas?
b) Representa $y = a + bsen(cx + d)$ para distintos de a, b, c y d, con ayuda de ordenador

67. ***(4º ESO)*** **A)** Representa gráficamente las funciones trigonométricas:
a) y = sen x **b)** y = cos x **c)** y = tg x
B) Con un asistente matemático como desmos.com, representa $y = a + bsen(cx + d)$ para distintos de *a*, *b*, *c* y *d*, y comprueba como el parámetro "*b*" afecta a la amplitud de la función, "*c*" al periodo y "*d*" al desfase.
Comentario: La amplitud es el recorrido de la función, el periodo es cada cuanto se repite la porción principal de la gráfica y el desfase el punto desde donde inicia la gráfica de la porción que siempre se repite.
C) Representa $y = 2\cos(3x)$ hallando previamente el periodo y la amplitud. Halla la imagen de $x = 2$. Halla los valores de "x"del intervalo $[0, \pi]$ cuya imagen es 1. ¿Cuándo la imagen es 2?.

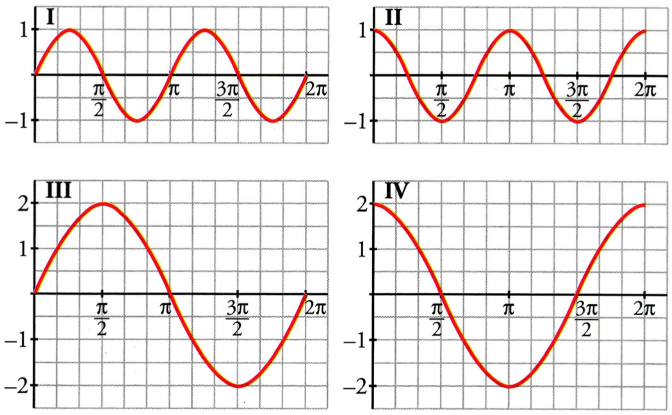
68. **A)** Asocia a esta gráfica una de las siguientes expresiones y di cuál es su periodo:



a) $y = \dfrac{sen\, x}{2}$ **b)** $y = sen(2x)$ **c)** $y = sen\dfrac{x}{2}$

B) ¿En qué puntos del intervalo $[0, 4\pi]$ corta al eje X cada una de las siguientes funciones?:
B1) $y = \cos(x/2)$ **B2)** $y = sen(x - \pi)$ **B3)** $y = \cos(x + \pi)$

69. Asocia a cada una de las siguientes funciones la gráfica que le correspone:
a) $y = 2sen\,x$ **b)** $y = \cos(2x)$ **c)** $y = 2\cos x$ **d)** $sen(2x)$



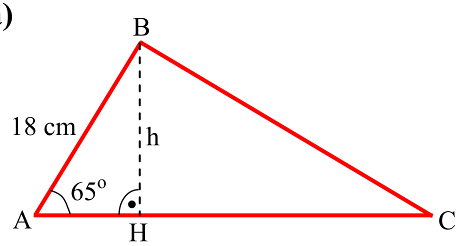
70. *(4º ESO)* El balancín de un reloj se mueve periódicamente separándose 5 cm del centro y volviendo a la posición original cada 0,5 sg. La ecuación que nos da la distancia al centro en cada segundo, medida en cm, es $s = 5sen(4\pi t)$.
a) Represéntala aproximadamente.
b) ¿Cuál es el periodo y recorrido de la función?
b) ¿A qué distancia del centro estará el balancín a los 10 sg? ¿Y a los 3,2 sg?
c) ¿Cuándo está a 3 cm del centro por primera vez desde que se pone en marcha $t = 0$?

71. *(4º ESO)* La altura (h), en metros, que se encuentra una cesta de una noria conforme pasa el tiempo (t), en minutos, sigue la ley $h(t) = 9 - 8\cos(18t)$.
a) ¿A qué altura estaba inicialmente la cesta?
b) ¿Cuánto dura una vuelta de la noria?
c) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada y en qué momento?.
d) ¿Cuál es la altura mínima alcanzada y en qué momento?
e) Representa la función en el primer minuto.
f) ¿Cuándo está por primera vez a 10 m de altura?

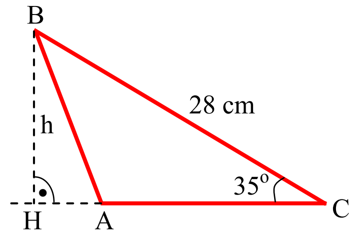
Problemas de trigonometría

72. *(4º ESO)* Calcula la altura, h, de los siguientes triángulos:

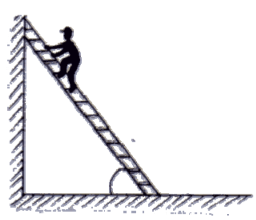
a)



b)



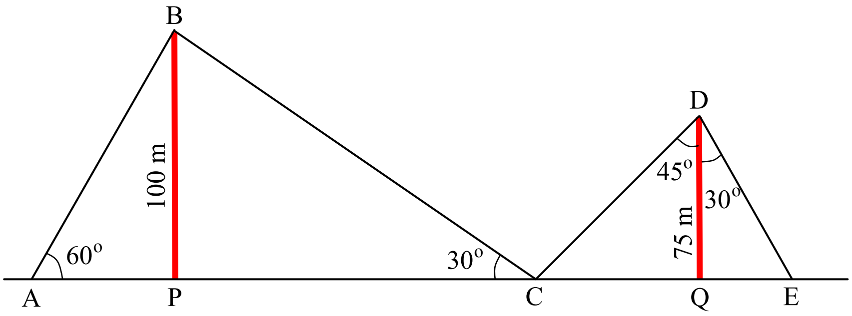
73. *(4º ESO)* Una escalera de 3 m está apoyada en una pared.
¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared?



74. *(4º ESO)* Un tronco de 6,2 m está apoyado en una pared y forma con el suelo un ángulo de 55°.
a) ¿A qué altura de la pared se encuentra apoyado?
b) Calcula la distancia desde el extremo inferior del tronco hasta la pared.

75. ***(4º ESO)*** En un triángulo isósceles su lado desigual mide 18 m, y la altura sobre el lado desigual, 10 m. ¿Qué miden sus ángulos?

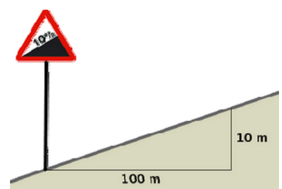
76. ***(4º ESO)*** Dos antenas de radio, de 100 m y 75 m, están sujetas al suelo como se indica en la figura



Calcula la longitud de cada uno de los tramos de cable y la distancia AE. (Da los resultados de forma exacta)

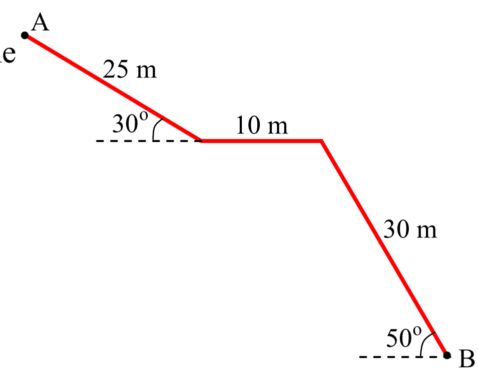
77. ***(4º ESO)*** Un señal de peligro en una carretera nos advierte que la pendiente es del 12%.
a) ¿Qué ángulo forma este tramo de carretera con la horizontal?
b) ¿Cuántos metros hemos descendido después de recorrer 7 km por esa carretera?

78. ***(4º ESO)*** Un coche sube una pendiente de un 10% a 45 Km/h, tardando un minuto.
Halla la longitud y el ángulo que forma este tramo de carretera con la horizontal.
¿Cuántos metros hemos ascendido?



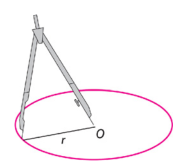
79. ***(4º ESO)*** Una escalera para acceder en un túnel tiene la forma y las dimensiones de la figura.

Calcula la profundidad a la que está el punto B del A.



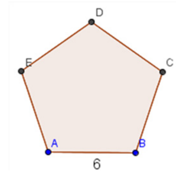
80. ***(4º ESO)*** En una ruta de montaña, una señal indica una altura de 785 metros. Tres kilómetros adelante, la altitud es de 1265 m. Encuentra la pendiente media de la ruta y el ángulo que forma con la horizontal.

81. ***(4º ESO)*** Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 50º. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que se puede trazar con esta abertura?.

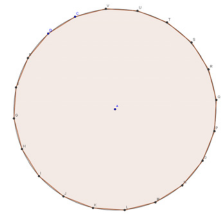


82. ***(4º ESO)*** Maria está haciendo volar su cometa. Ha soltado 36 m de hilo y mide el ángulo que forma la cuerda con la horizontal, 62º. ¿A qué altura se encuentra la cometa sabiendo que la mano de Maria que sostiene la cuerda está a 83 cm del suelo?

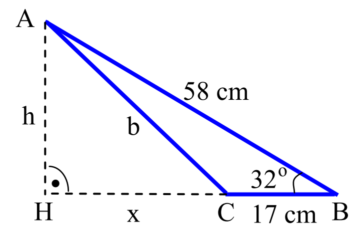
83. ***(4º ESO)*** Halla el área de un pentágono regular de lado 6 cm.



84. ***(4º ESO)*** Dada una circunferencia de radio 8 cm.
a) Halla el área del polígono regular de 100 lados inscrito en la circunfencia.
b) Halla el área del polígono regular de 100 lados circunscrito a la circunfencia.
c) Compara los resultados anteriores con el área del círculo de radio 8 cm.

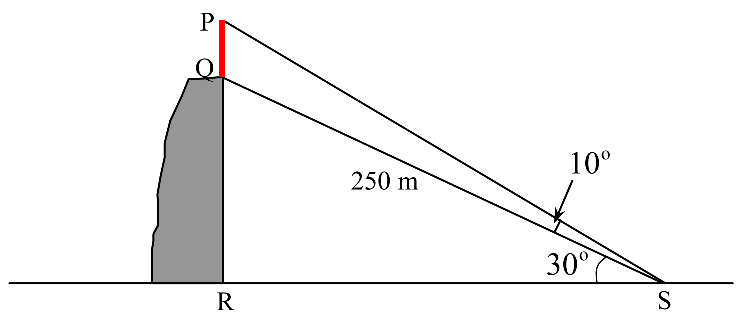


85. ***(4º ESO)*** Calcula h, x , b y el ángulo $A\hat{C}H$.



86. ***(4º ESO)*** Desde el lugar donde me encuentro, la visual hacia un campanario es de 32º con la horizontal. Si me acerco 25 m, el ángulo es ahora de 50º. ¿Cuál es la altura del campanario?

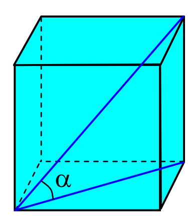
87. ***(4º ESO)*** Para calcular la altura de un edificio, $\overline{PQ}$, que se encuentra arriba de un montaña, se han medido los ángulos que indica la figura. Se sabe que hay un funicular para ir de S a Q, con una longitud de 250 m. Encuentra $\overline{PQ}$.



88. ***(4º ESO)*** Dos edificios distan entre ellos 150 metros. Desde un punto del suelo que está entre los dos edificios, las visuales a los puntos más altos de ellos forman con la horizontal ángulos de 35º y 20º. ¿Cuál es la altura de los edificios, si se sabe que tienen la misma altura?

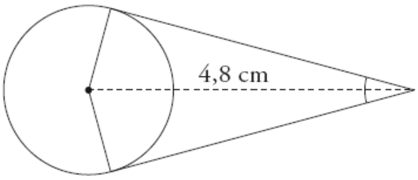
89. ***(4º ESO)*** Desde un satélite artificial se ve la Tierra bajo un ángulo de 140º. Calcula la distancia a la que se encuentra el satélite de la Tierra. Radio de la Tierra: R = 6366 km.

90. ***(4º ESO)*** Encuentra el ángulo que forma la diagonal del cubo de arista 6 cm con la diagonal de la base. Observa que si la arista del cubo hubiera sido distinta, el ángulo hubiera sido el mismo

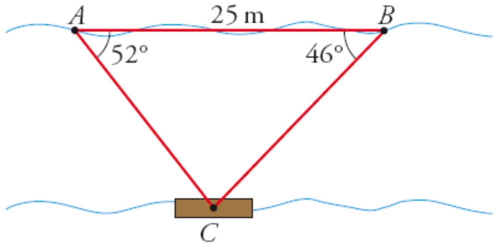


91. ***(4º ESO)*** Desde cierto punto del suelo se ve el punto más alto de una torre formando un ángulo de 33º con la horizontal. Si nos acercamos 78 m hacia el pie de la torre, ese ángulo mide 46º12'. Halla la altura de la torre.

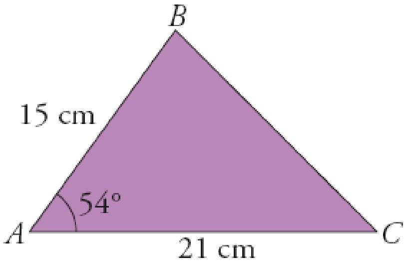
92. ***(4º ESO)*** El diámetro de una circunferencia es 2,5 cm. Averigua el ángulo que forman sus tangentes trazadas desde una distancia de 4,8 cm al centro como indica la figura.



93. ***(4º ESO)*** Para calcular la distancia de *A* al embarcadero *C*, tomamos las medidas que indica la figura. Halla *AC*.

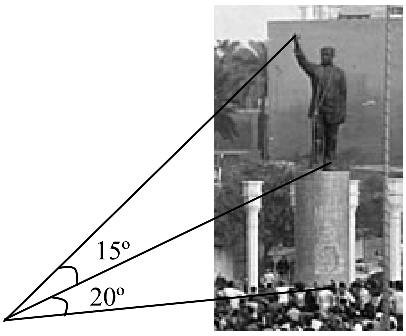


94. ***(4º ESO)*** Calcula el área del triángulo ABC



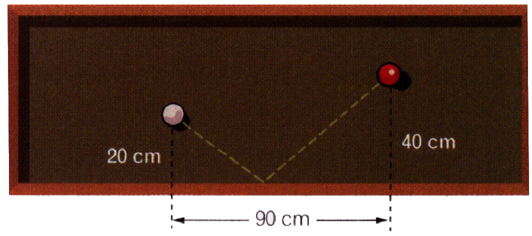
95. ***(4º ESO)*** Dos caminos rectos que se cortan forman un ángulo de 75º. En uno de los caminos y a 1 Km del cruce, hay una gasolinera. Encontrar la menor distancia desde dicha gasolinera hasta el otro camino.

96. ***(4º ESO)*** Una escultura de Sadam está colocada sobre un pedestal de 6 m de altura. Desde un punto del suelo se ve la escultura bajo un ángulo de 15º y el pedestal bajo un ángulo de 20º.Calcula la altura de la escultura de Sadam.



97. ***(4º ESO)*** Halla la cantidad de chapa necesaria para fabricar una señal de STOP de forma octogonal, sabiendo que la diagonal marcada mide 1,25 m

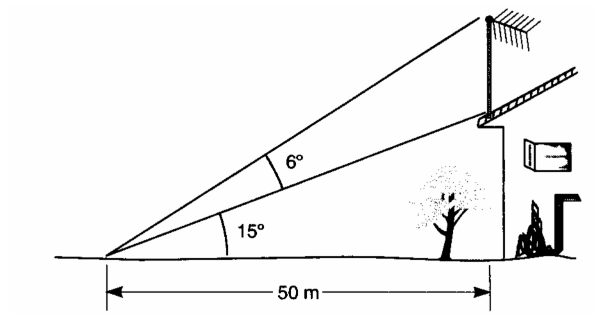
98. ***(4º ESO)*** **a)** ¿En qué punto debe golpear la bola blanca a la banda para que el rebote dé a la bola roja?.
b) ¿Cuál es el ángulo en que golpea la bola blanca a la banda?



99. ***(4º ESO)*** Calcula los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 14 cm y 8 cm.

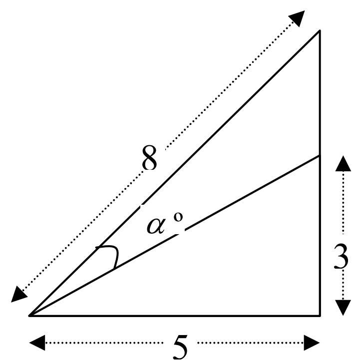
100. ***(4º ESO)*** El lado desigual de un triángulo isósceles mide 64 cm, y el ángulo que se forma entre los lados iguales es de 40º. Calcula el perímetro y el área del triángulo.

101. ***(4º ESO)*** Calcula la altura de la antena que está sobre el tejado de la casa.

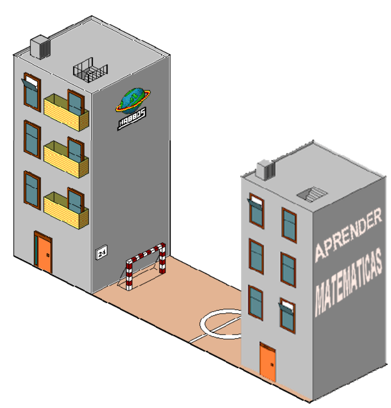


102. ***(4º ESO)*** Se quiere medir la altura de una estatua colocada en el centro de un lago circular. Para ello, se mide la visual al extremo superior de la estatua desde el borde del lago y resulta ser de 50°; nos alejamos 45 dm y volvemos a medir la visual, obteniendo un ángulo de 35°. Averigua la altura de la estatua y la superficie del lago.

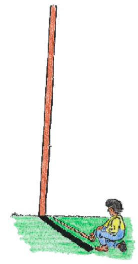
103. ***(4º ESO)*** Halla el ángulo α de la figura siguiente:



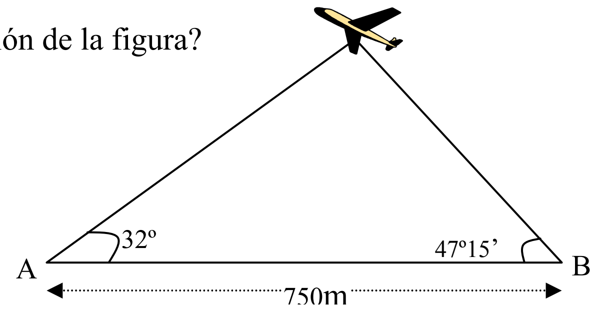
104. ***(4º ESO)*** La anchura de una calle es de 20 m. Colocándose en el centro se observa los puntos más altos de los edificios con ángulos de 45º y 65º respectivamente.
a) ¿Cuál es la altura de cada edificio?
b) Hay una miga de pan en la calle y dos pájaros se lanzan a por ella desde lo alto de cada edificio.
¿A qué distancia se encuentra la miga de pan de la base del edificio más alto si llegan al mismo tiempo y llevan la misma velocidad?



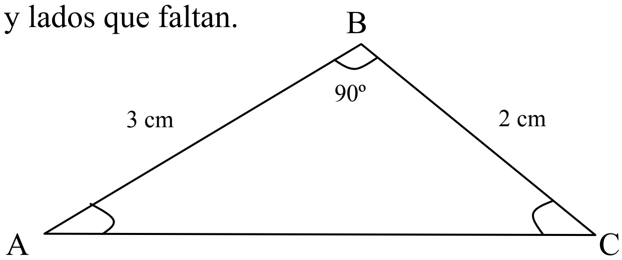
105. ***(4º ESO)*** Si la sombra de un poste es la cuarta parte de su altura. ¿Qué ángulo forman los rayos del Sol con el horizonte?



106. ***(4º ESO)*** ¿A qué altura vuela el avión de la figura?



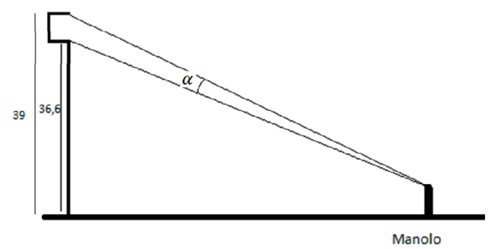
107. ***(4º ESO)*** Halla los ángulos y lados que faltan.



108. ***(4º ESO)*** La resultante de dos fuerzas perpendiculares es de 12 Newtons. Sabiendo que la resultante forma con dichas fuerzas ángulos de 30º y 60º , respectivamente, calcula dichas fuerzas.

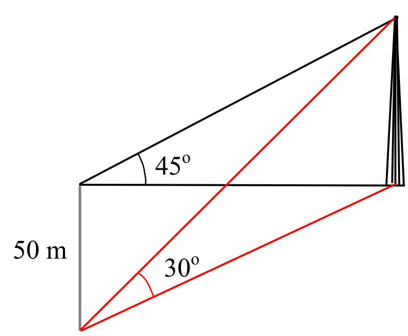
109. ***(4º ESO)*** Una escalera de bomberos de 10 m de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forman un ángulo con el suelo de 45º y si se apoya sobre la otra, un ángulo de 30º.
a) Halla la anchura de la calle.
b) ¿Qué altura alcanzamos con la escalera en cada una de las fachadas?

110. ***(4º ESO)*** Hay una ventana en un edificio a 36,6 m. El edificio mide 39 m. Manolo está a 53 m y mide 1,80 m. ¿Cuál es el ángulo con el que ve Manolo la ventana?

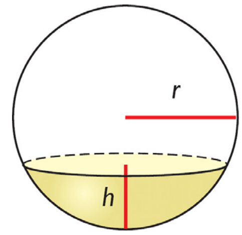


111. ***(4º ESO)*** Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42º.
a) ¿Bajo qué ángulo se verá colocándose a distancia doble?
b) ¿Bajo qué ángulo se verá colocándose a distancia triple?

112. ***(4º ESO)*** Un hombre que está situado al oeste de una emisora de radio observa que su ángulo de elevación es de 45º. Camina 50 m hacia el sur y observa que el ángulo de elevación es ahora de 30º. Halla la altura de la antena.



113. ***(4º ESO)*** Desde un satélite artificial se ve la Tierra bajo un ángulo de 140°.
Calcular:
a) La distancia a la que se encuentra la Tierra.
b) El área de la porción de la Tierra visible desde el satélite.
Ayuda: el radio de la Tierra es 6366 km y el área de un casquete esférico es $A = 2\pi \cdot r \cdot h$



114. ***(4º ESO)*** ¿A qué altura sobre la superficie terrestre hemos de subir para ver un lugar situado a 1000 km de distancia?
Ayuda: el radio de la Tierra es 6366 km y un cuadrante de meridiano terrestre tiene 10000 Km.

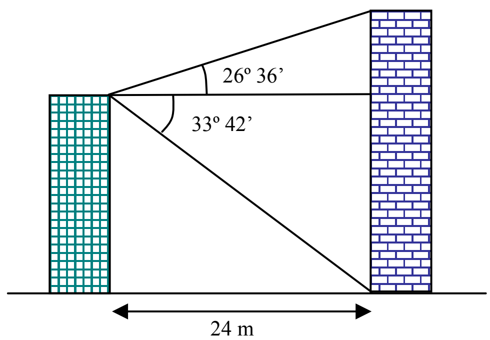
115. Un globo está sujeto a una cuerda de 10 m de longitud. Por la acción del viento, el globo se encuentra a una altura de 8 m. Calcula la inclinación de la cuerda con respecto a la línea del piso.

116. En cierta ciudad, al mediodía del solsticio de verano, los rayos del sol tienen una inclinación de $73^o\ 3'$. Calcula la longitud de la sombra de un edificio de 52 m de altura.

117. Una señal de tráfico indica que la inclinación de un tramo de carretera es del 8%, lo cual quiere decir que en un desplazamiento horizontal de 100 m se realiza una subida de 8 m de altura.
a) ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal?
b) ¿Cuántos metros han de recorrer para subir 125 m?

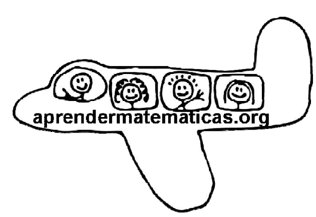
118. Desde un punto del suelo se ve la copa de un pino bajo un ángulo de 42º. Si nos alejamos 2,5 m hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie del pino, vemos la copa bajo un ángulo de 24º. Calcula la altura del pino.

119. Calcula la altura de los dos edificios de la figura:

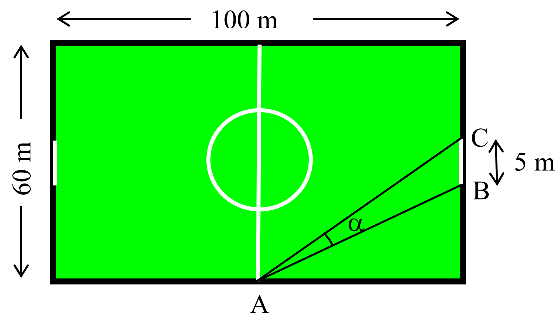


120. Dos coches parten a la vez de un cruce donde salen dos carreteras: una con dirección norte y la otra con dirección nordeste. Uno de los coches toma la primera de ellas con una velocidad uniforme de 70 km por hora, y el otro la segunda con una velocidad constante de 90 km por hora.
¿A qué distancia se encontrarán al cabo de 30 minutos?

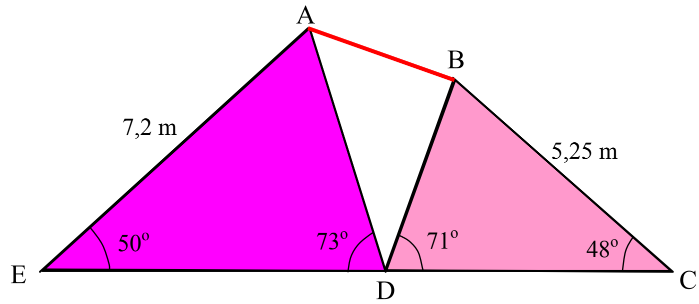
121. Un avión vuela entre dos ciudades, A y B, que distan entre sí 75 km. Las visuales desde A y B hacia el avión forman con la horizontal ángulos de 36º y 12º de amplitud, respectivamente. Calcula la altura a la que vuela el avión y las distancias a las que se encuentra de A y B, suponiendo que el avión y las ciudades están sobre el mismo plano vertical.



122. Calcula el ángulo de tiro α del jugador que está situado al punto A del campo:

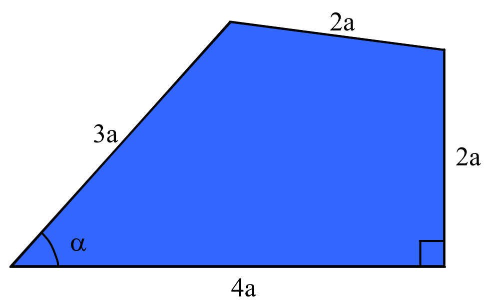


123. Calcula la distancia entre los puntos A y B:

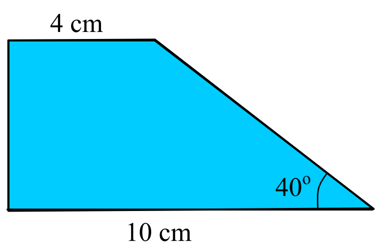


124. Calcula la longitud de las diagonales y el área del paralelogramo de lados 10 y 15 cm, sabiendo que uno de sus ángulos 35º.

125. Calcula la amplitud del ángulo α de la figura:



126. Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio de la figura:

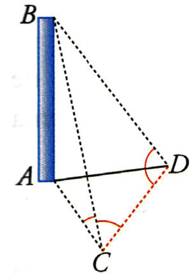


127. □ Ana y Pablo juegan a la petanca. Ana lanza su bola y esta queda a 25 cm de la bola de muestra. Lanza Pablo y su bola queda a 10 cm de la de Ana, de modo que el ángulo que forma la bola de muestra con las otras dos es de 20°. ¿Podemos saber, con estos datos, cuál de las dos bolas está más cerca de la bola de muestra?

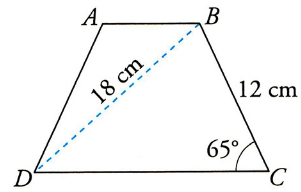
128. La resultante de dos fuerzas $F_1 = 16\ N$ y $F_2 = 12\ N$, aplicadas en un mismo punto es de $R = 25\ N$. ¿Qué angulo forman entre sí?¿Y cada una de ellas con la resultante?

129. □ Desde un punto P observamos los puntos A y B, situados en las orillas opuestas de una laguna, bajo un ángulo de 68°. Sabemos que $\overline{PA} = 70\,m$ y $\overline{PB} = 115\,m$
Calcular la distancia $\overline{AB}$ y los ángulos $P\hat{A}B$ y $P\hat{B}A$.

130. Para medir la altura de la torre AB, nos situamos en los puntos C y D y tomamos estas medidas:
$\overline{CD} = 15m$; $A\hat{C}B = 40^{\circ}$; $B\hat{C}D = 58^{\circ}$; $B\hat{D}C = 70^{\circ}$
¿Qué altura tiene la torre?

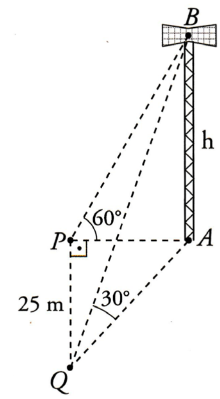


131. □ Hallar el perímetro y el área de este trapecio isósceles



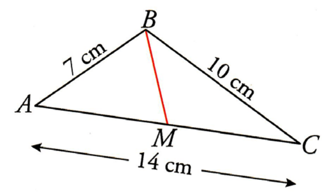
132. Las tangentes trazadas desde el punto P a una circunferencia de centro O y de 14 cm de radio forman un ángulo de 32°. Calcular:
a) La distancia de P al centro de la circunferencia.
b) La longitud de la cuerda que une los puntos de tangencia.

133. □ Para medir la altura de una antena, cuyo pie es inaccesible, nos situamos en un punto P al oeste de la antena y la observamos bajo un ángulo de 60°. Caminamos unos 25 metros hacia el sur y desde Q el ángulo de observación es de 30°. Halla la altura de la antena.



134. □ Uno de los lados de un triángulo mide el doble que otro, y el ángulo comprendido entre ellos mide 60°. Halla los otros ángulos.

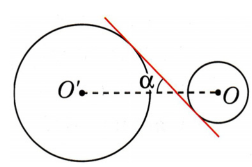
135. En un triángulo ABC de lados a = 10 cm, b = 14 cm y c = 7 cm, halla la longitud de la mediana que parte de B.



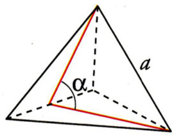
136. □ De un triángulo ABC conocemos los tres lados, a = 14 cm, b = 16 cm y c = 9 cm. Halla la longitud de la bisectriz del ángulo $\hat{A}$.

137. En el cuadrilátero ABCD sabemos que AB = a, AD = 2a, BC = 3a, $B\hat{A}D = 90^{\circ}$ y $\cos D\hat{B}C = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Calcula $\overline{DC}$ en función de a.

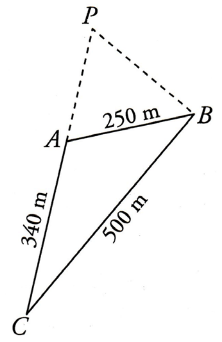
138. □Halla el ángulo que forma la tangente a estas circunferencias con la recta que une sus centros. Los radios miden 4 cm y 9 cm, y la distancia entre sus centros es de 16 cm.



139. □ Halla el ángulo α que forman dos caras contiguas de un tetraedro regular de arista a.

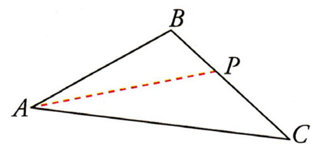


140. □ Queremos calcular la distancia desde A y B a un punto inaccesible P. Para ello, fijamos un punto C de modo que $P\hat{B}C = 90°$ y tomamos las medidas indicadas en la figura. Calcula $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$.

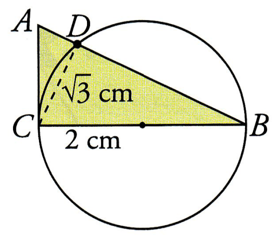


141. Demuestra que la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto al ángulo en segmentos proporcionales a los otros lados.

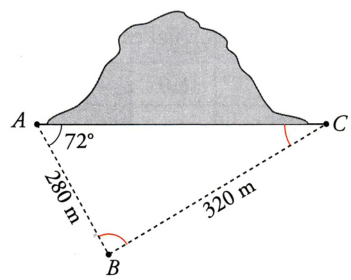
Ayuda: Debes probar que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{PC}}$. Aplica el teorema de los senos en los triángulos ABP y ACP.



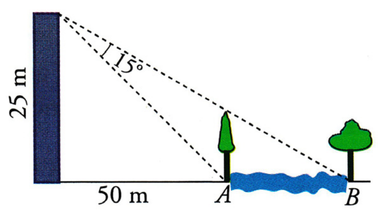
142. El triángulo ABC es rectángulo en C. Sabemos que el radio de la circunferencia mide 2 cm y $\overline{CD} = \sqrt{3}\ cm$. Calcula $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$.



143. Para construir un túnel entre A y C necesitamos saber su longitud y dirección. Para ello, fijamos un punto B y tomamos las medidas indicadas en la figura. Calcula $\overline{AC}$ y los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$.



144. Desde una torre de vigilancia de 25 m, observamos dos árboles situados en orillas opuestas de un río bajo un ángulo de 15°. Los dos árboles están alineados con el pie de la torre y la distancia de esta al río es de 50 m. Calcula la anchura del río.



145. **Medición de la circunferencia de La Tierra utilizando el método de Eratóstenes de Cirene (273-194 a.C.)**
Este sencillo experimento es considerado como uno de los mejores de la historia de la humanidad y demuestra lo que puede llegar a realizarse con un poco de curiosidad por avanzar en el conocimiento de lo que nos rodea.

La longitud del meridiano que pasa por los polos terrestres es de 39.942 km. La mejor medida del meridiano en la antigüedad data del año 235 a.C. y la llevó a cabo Eratóstenes, uno de los directores más ilustres de la Biblioteca de Alejandría. Eratóstenes era de Cirene (Shahhat en la actualidad, en Libia). Nació en el año 273 a.C. en una rica familia, gracias a lo cual pudo tener una educación exquisita en Atenas. Amigo y admirador de Arquímedes fue el tercer director de la Biblioteca de Alejandría, cargo que ocupó más de 40 años. Esta Biblioteca era el mayor centro científico y cultural del mundo con casi 800.000 pergaminos (equivalentes a unos 100.000 libros).

SOLUCIONES:

1. **a)** Triángulo 1 es obtusángulo, triángulo 2 es rectángulo y el triángulo 3 es acutángulo; **b)** $sen\,\alpha = 8/17 \approx 0{,}47$; $\cos\alpha = 15/17 \approx 0{,}88$; $tg\,\alpha = 8/15 \approx 0{,}53$; $\sec\alpha = 17/15 \approx 1{,}13$; $\cos ec\,\alpha = 17/8 \approx 2{,}125$; $\cot g\,\alpha = 15/8 \approx 1{,}875$. El ángulo $\alpha = 28^o\ 4'\ 20{,}95''$

2. **a)** $sen\,\alpha = 2/3$; $tg\,\alpha = 2\sqrt{5}/5$; $\sec\alpha = 3\sqrt{5}/5$; $\cos ec\,\alpha = 3/2$; $\cot g\,\alpha = \sqrt{5}/2$
   b) $sen\,\beta = 3/5$; $\cos\beta = 4/5$; $tg\,\beta = 3/4$; $\sec\beta = 5/4$; $\cot g\,\beta = 4/3$
   c) $sen\,\gamma = 3\sqrt{10}/10$; $\cos\gamma = \sqrt{10}/10$; $\sec\gamma = \sqrt{10}$; $\cos ec\,\gamma = \sqrt{10}/3$; $\cot g\,\gamma = 1/3$
   $\alpha = 41{,}8103^o$; $\beta = 36{,}8699^o$; $\gamma = 71{,}5651$

3. **A) a)** coseno **b)** seno **c)** tangente

B)

	0^o	90^o	180^o	270^o	360^o
sen	0	1	0	−1	0
cos	1	0	−1	0	1
tan	0	No existe	0	No existe	0

4. **a)** sen $\alpha = \frac{3}{5}$, tg $\alpha = \frac{3}{4}$, cosec $\alpha = \frac{5}{3}$, sec $\alpha = \frac{5}{4}$, cotg $\alpha = \frac{4}{3}$
   b) cos $\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$, tg $\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{12}$, cosec α = 5, sec $\alpha = -\frac{5\sqrt{6}}{12}$, cotg $\alpha = -2\sqrt{6}$
   c) sen $\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, cos $\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, cosec $\alpha = -\sqrt{5}$, sec $\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, cotg α = 2
   d) sen $\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$, cos $\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, tg $\alpha = -\frac{1}{4}$, cosec $\alpha = -\sqrt{17}$, sec $\alpha = \frac{\sqrt{17}}{4}$
   e) sen $\alpha = \frac{5}{13}$, tg $\alpha = -\frac{5}{12}$, cosec $\alpha = \frac{13}{5}$, sec $\alpha = -\frac{13}{12}$, cotg $\alpha = -\frac{12}{5}$
   f) sen $\alpha = -\frac{4}{5}$, cos $\alpha = -\frac{3}{5}$, tg $\alpha = \frac{4}{3}$, sec $\alpha = -\frac{5}{3}$, cotg $\alpha = \frac{3}{4}$

5. $sen\,\alpha = -0{,}9$; $tg\,\alpha = 3$; $\alpha = 252^o\,32'32{,}6''$

6. $sen\,\alpha = 0{,}848$; $\cos\alpha = 0{,}53$; $\alpha = 57^o\,59'40{,}62''$

7. **a)** sen $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$; tg $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$; sec $\alpha = \frac{3}{2}$; cosec $\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{5}$; cotg $\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ **b)** cos $\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; tg $\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$; sec $\alpha = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$; cosec α = 4; cotg $\alpha = -\sqrt{15}$ **c)** sen $\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$; cos $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; sec $\alpha = -\sqrt{3}$;
   cosec $\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{2}$; cotg $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **d)** sen $\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; cos $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; tg $\alpha = -1$; cosec $\alpha = -\sqrt{2}$; cotg α = −1
   e) sen $\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$; cos $\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$; tg $\alpha = -\frac{1}{3}$; sec $\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{3}$; cosec $\alpha = \sqrt{10}$ **f)** sen $\alpha = -\frac{2}{5}$; cos $\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$; tg $\alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$; sec $\alpha = -\frac{5\sqrt{21}}{21}$; cotg $\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$ **g)** sen $\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$; cos $\alpha = -\frac{1}{5}$; tg $\alpha = -2\sqrt{6}$; cosec $\alpha = \frac{5\sqrt{6}}{12}$; cotg $\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{12}$ **h)** sen $\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; cos $\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; tg $\alpha = \frac{1}{2}$; sec $\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; cosec $\alpha = -\sqrt{5}$

8. a) 365º=35º; b) 492º=132º; c) 645º=285º=–75º; 3845º=245º=–115º; 7612º=52º; 1980º=180º; –512º=208º=–152º

9. **a1)** 0; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$ **a2)** $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{6}$ **a3)** π; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{4\pi}{3}$ **a4)** $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{6}$ **; b)** 57º 17' 44,81"; 171º 53' 14,4"; 135^o; 300^o; 270^o; 162^o; 240^o; **c)** 0^o; 180^o; 330^o; 0^o

10. a) 1,498 rad; b) $\beta = 114^o\,35'\,29{,}6''$; $\gamma = 30^o$; $\gamma < \alpha < \beta$

11. a) 24 cm; b) 4,8 cm; c) 1,25 rad = 71º 37' 11,01"

12.

Grados	30º	45º	60º	120º	135º	150º	210º	225º	300º	330º	57º17'44,81''	114º35'29,6''	3º
Radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	1	2	$\frac{8\pi}{45}$

13. A)

α	15º	55º 20′	72º 25′40″	85,5º	23º 34' 41,44"	63,43495º	No existe
sen α	0,2588	0,8225	0,9533	0,9969	0,4	0,8944	-
cos α	0,9659	0,5688	0,3019	0,0785	0,9165	0,4472	2
tg α	0,2679	1,4460	3,1577	12,7062	0,4364	2	-

B) sen(2 rad)=0,90929; cos(2 rad)= –0,4161; tg(2 rad)= –2,185

14. a) $sen 31^o = 0{,}5150$, $\cos(-200^o) = -0{,}9397$, tg(21150º) no existe, $\cos(\pi\, rad) = -1$, $sen(1\ rad) = 0{,}8415$
b) 63º 26' 5,82" y 243º 26' 5,82" ; c) $\alpha = 205{,}5310^o$, $\cos\alpha = -0{,}9024$, $tg\alpha = 0{,}4776$

15. **a)** sen 150º=$\frac{1}{2}$, cos 150º=$-\frac{\sqrt{3}}{2}$, tg 150º=$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
b) sen 240º=$-\frac{\sqrt{3}}{2}$, cos 240º=$-\frac{1}{2}$, tg 240º=$\sqrt{3}$
c) sen 300º=$-\frac{\sqrt{3}}{2}$, cos 300º=$\frac{1}{2}$, tg 300º=$-\sqrt{3}$ **d)** sen 225º=$-\frac{\sqrt{2}}{2}$, cos 225º=$-\frac{\sqrt{2}}{2}$, tg 225º= 1
e) sen 1920º=$\frac{\sqrt{3}}{2}$, cos 1920º=$-\frac{1}{2}$, tg 1920º=$-\sqrt{3}$
f) sen –30º=$-\frac{1}{2}$, cos –30º=$\frac{\sqrt{3}}{2}$, tg –30º=$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

16. **a)** sen 55º=0,82, cos 55º=0,57, tg 55º=1,43 **b)** sen 125º=0,82, cos 125º=–0,57, tg 125º=–1,43
c) sen 145º=0,57, cos 145º=–0,82, tg 145º=–0,70
d) sen 215º=–0,57, cos 215º=–0,82, tg 215º= 0,70
e) sen 235º=–0,82, cos 235º=–0,57, tg 235º=1,43
f) sen 305º=0,82, cos 305º=–0,57, tg 305º=–1,43
g) sen 325º=–0,57, cos 325º=0,82, tg 325º=–0,70

17. **a)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{6}-3}{2}$

18. **a)** sen(90º+α) = cos α; cos(90º+α) = − sen α **b)** sen(270º−α) = −cos α; cos(270º−α) =− sen α
c) sen(270º+α) = −cos α; cos(270º+α) = sen α

19. **a)** $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ **b)** −4 **c)** $-\frac{\sqrt{17}}{17}$ **d)** $\frac{\sqrt{17}}{4}$ **e)** $\sqrt{17}$ **f)** $\frac{1}{4}$

20. **a)** sen α =$-\frac{\sqrt{15}}{4}$; cos α =$-\frac{1}{4}$; tg α =$\sqrt{15}$ **b)** sen α =$\frac{2\sqrt{5}}{5}$; cos α =$-\frac{\sqrt{5}}{5}$; tg α =− 2

21. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **d)** $\sqrt{2}$ **e)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **f)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **g)** $-\frac{1}{2}$ **h)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

22. **a)** a = 8 m, c = $4\sqrt{3}$ m, $\hat{C} = 60^o$ **b)** c = $2\sqrt{6}$ m, $\hat{B} = 45^o\ 35'\ 5''$, $\hat{C} = 44^o\ 24'\ 55''$ **c)** b = 6,42 m, c = 7,66 m, $\hat{C} = 50^o$ **d)** a = 20 cm, b = 19,36 cm, $\hat{C} = 14^o\ 28'\ 39''$, $\hat{B} = 75^o\ 31'\ 21''$

23. $sen\hat{A} = \frac{4}{5}$, $\cos\hat{A} = \frac{3}{5}$, $tg\hat{A} = \frac{4}{3}$, $\operatorname{cosec}\hat{A} = \frac{5}{4}$, $\sec\hat{A} = \frac{5}{3}$, $\operatorname{cotg}\hat{A} = \frac{3}{4}$

$sen\hat{C} = \frac{3}{5}$, $\cos\hat{C} = \frac{4}{5}$, $tg\hat{C} = \frac{3}{4}$, $\operatorname{cosec}\hat{C} = \frac{5}{3}$, $\sec\hat{C} = \frac{5}{4}$, $\operatorname{cotg}\hat{C} = \frac{4}{3}$

$sen\, C\hat{B}D = \frac{4}{5}$; $\cos C\hat{B}D = \frac{3}{5}$; $tg\, C\hat{B}D = \frac{4}{3}$;

$\operatorname{cosec} C\hat{B}D = \frac{5}{4}$; $\sec C\hat{B}D = \frac{5}{3}$; $\operatorname{cotg} C\hat{B}D = \frac{3}{4}$

$sen\, A\hat{B}D = \frac{3}{5}$; $\cos A\hat{B}D = \frac{4}{5}$; $tg\, A\hat{B}D = \frac{3}{4}$;

$\cos ec\, A\hat{B}D=\frac{5}{3}$; $\sec A\hat{B}D=\frac{5}{4}$; $\cot g\, A\hat{B}D=\frac{4}{3}$
$\hat{A}=53{,}1301^o$, $\hat{C}=36{,}8699^o$, $A\hat{B}D=36{,}8699^o$ y $C\hat{B}D=53{,}1301^o$

24. Catetos: 7,5 cm y 10 cm, altura: 6 cm; ángulos: B= 36º 52’ 11,63’’ C=53º 7’ 48,37’’

25. **a)** $\frac{63\sqrt{3}}{2}$ m **b)** $\overline{AB}=63$ m, $\overline{BC}=63\sqrt{3}$ m **c)** 90^o

26. 14,18 m

27. a) Imposible; b) $\hat{A}=90^o$; c) $\hat{A}=41^o48'37{,}13''$ o $\hat{A}=138^o11'22{,}87''$; d) $\hat{A}=30^o$

28. $b=40{,}76\ cm$; $c=18{,}20\ cm$

29. a) $\hat{A}=48^o30'33{,}06''$; $\hat{B}=92^o51'57{,}54''$; $\hat{C}=38^o37'29{,}4''$; b) Imposible; c) $a=5{,}59\ cm$; $\hat{C}=31{,}2443^o$; $\hat{B}=43{,}7557^o$; d) $\hat{A}=75^o$; $b=2{,}9282\ m$; $c=3{,}5863\ m$; e) $\hat{B}=110^o$, $a=c=3{,}05\ m$; f) $c=6{,}84\ cm$, $\hat{A}=\hat{B}=70^o$; g) $\hat{C}=60^o$, $c=4{,}48\ cm$, $b=3{,}66\ cm$; h) $\hat{B}=60^o$, $c=8\ cm$, $b=13{,}86\ cm$

30. $\overline{AB}=154{,}19$

31. $\overline{AB}=40{,}4295\ Km$, $\overline{BC}=36{,}4153\ Km$

32. 3977,82+10174,55 = 14152,38 m^2.

33. $\overline{MN}=80{,}7378\ m$

34. **a)** c = 13,23 cm; $\hat{B}=48^o\,35'\,25''$; $\hat{C}=41^o\,24'\,35''$; S = 99,22 cm^2 **b)** a = 9,06 m; c = 4,23 m; $\hat{A}=65^o$; S = 19,16 m^2 **c)** c = 20,59 cm; $\hat{A}=60^o\,56'\,43''$; $\hat{B}=29^o\,3'17''$; S = 90 cm^2

35. **a)** $\hat{C}=60^o$; b = 5,22 cm; c = 7,04 cm; S = 18,1 cm^2 **b)** $\hat{B}=29^o\,29'$; $\hat{C}=70^o\,31'$; c = 9,57 m; S = 23,6 m^2 **c)** $\hat{A}=28^o\,57'$; $\hat{B}=46^o\,34'$; $\hat{C}=104^o\,29'$; S = 72,6 cm^2 **d)** $\hat{B}=37^o\,53'$; $\hat{C}=67^o\,7'$; a = 12,58 m; S = 46,4 m^2

36. a) $sen\,75^o=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos 75^o=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $tg\,75^o=2+\sqrt{3}$; b) $sen\,15^o=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 15^o=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $tg\,15^o=2-\sqrt{3}$; c) $sen\,60^o=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^o=\frac{1}{2}$, $tg\,60^o=\sqrt{3}$; d) $sen\,15^o=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 15^o=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $tg\,15^o=2-\sqrt{3}$; e) e1) $\frac{\sqrt{6}}{2}$, e2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, e3) $\frac{\sqrt{6}}{2}$, e4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

37. **a)** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **b)** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **c)** $\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$ **d)** $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2$

38. Ver vídeo

39. **a)** sen 2α $=\frac{3}{5}$; cos 2α $=-\frac{4}{5}$; tg 2α $=-\frac{3}{4}$ **b)** sen 2α $=\frac{3}{5}$; cos 2α $=-\frac{4}{5}$; tg 2α $=-\frac{3}{4}$

40. cosec 2a = $-\frac{25}{24}$

41. a) Ver vídeo; b) sen 3α = 1

42. cos 3α = cos^{3}α − 3·sen^{2}α.cos α; tg 3α $=\frac{3.tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3.tg^2\alpha}$

43. $sen\frac{\alpha}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$; $tg\frac{\alpha}{2}=3$

44. $sen\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

45. $sen\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $tg\,2\alpha=\frac{24}{7}$

46. **a)** $-\frac{7}{9}$ **b)** $-\sqrt{2}$ **c)** $-\frac{1}{3}$ **d)** $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

47. **a)** $\frac{3\sqrt{91}-12}{50}$ **b)** $\frac{4\sqrt{91}-9}{50}$ **c)** $-\frac{3\sqrt{91}}{41}$ **d)** $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

48. $\frac{72+7\sqrt{7}}{100}$

49. sen a $=\frac{4}{5}$; cos a $=-\frac{3}{5}$

50. **a)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **b)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

51. **a)** 2.cos 55^o.sen 20^o **b)** 2.cos 105^o.cos 20^o **c)** −2.sen 120^o.sen 100^o

52. **a)** $\cot g\frac{3a}{2}$ **b)** sen 5x **c)** $\frac{1}{\cos 4\alpha}$

53. a) Ver vídeo; b) ver vídeo; c) $tg(3a)$

54. Ver vídeo.

55. Ver vídeo.

56. **a)** 1 **b)** cos α **c)** 1 + cos α **d)** 2 **e)** sen α

57. **a)** tg α **b)** cos 2α **c)** tg α + tg β **d)** 1 + sen α **e)** 2 **f)** (1 + cos α)(1 + sen α) **g)** 1 **h)** $sen\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$

58. Ver vídeo.

59. Ver vídeo.

60. $\cos\beta = 1-2\cos^2\alpha = 3/4$

61. **a)** $x = 0^o + k.360^o$; $x = 180^o + k.360^o$ **b)** $x = 150^o + k.360^o$; $x = 210^o + k.360^o$ **c)** $x = 120^o + k.360^o$; $x = 300^o + k.360^o$ **d)** $x = 210^o + k.360^o$; $x = 330^o + k.360^o$ **e)** $x = 30^o + k.180^o$; $x = 150^o + k.180^o$ **f)** $x = 20^o + k.120^o$; $x = 80^o + k.120^o$ **g)** $x = 180^o + k.360^o$; $x = 270^o + k.360^o$ **h)** $x = 30^o + k.360^o$; $x = 150^o + k.360^o$ **i)** $x = 0^o + k.360^o$; $x = 180^o + k.360^o$; $x = 30^o + k.360^o$; $x = 150^o + k.360^o$ **j)** $x = 90^o + k.360^o$; $x = 270^o + k.360^o$; **k)** $x = 60^o + k.360^o$;
$x = 300^o + k.360^o$; $x = 180^o + k.360^o$ **l)** $x = 90^o + k.360^o$; $x = 19^o 28'16{,}39'' + k.360^o$; $x = 160^o 31'43{,}6'' + k.360^o$;
ll) $x = 30^o + k.360^o$; $x = 330^o + k.360^o$; $x = 150^o + k.360^o$; $x = 210^o + k.360^o$
m) $x = 45^o + k.360^o$; $x = 225^o + k.360^o$ **n)** $x = 30^o + k.360^o$; $x = 150^o + k.360^o$

62. **a)** $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ **b)** x = 2π + k.6π; x = 4π + k.6π

c) $x = \frac{\pi}{4} + k.\frac{2\pi}{3}$; $x = \frac{7\pi}{12} + k.\frac{2\pi}{3}$ **d)** $x = 0 + k\frac{\pi}{4}$;

e) $x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$ **f)** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

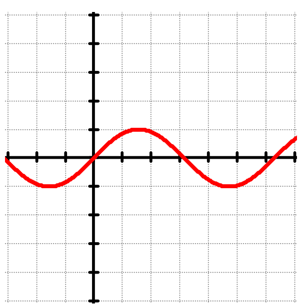
63. a) 0º; 270º; 60º; 300º; b) 0º; 270º; c) 0º; 90º; 180º; d) 60º; 300º; e) 0º; 180º; f) x = 90º; x = $199^o\ 28'16''$; x = $340^o\ 31'44''$

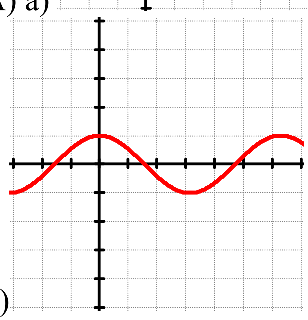
64. *a)* $\alpha = 15^o + 180^o k$, $\alpha = 45^o + 180^o k$, $\alpha = 105^o + 180^o k$, $\alpha = 135^o + 180^o k$; b) $\alpha = 90^o + 360^o k$, $\alpha = 270^o + 360^o k$, $\alpha = 30^o + 360^o k$, $\alpha = 150^o + 360^o k$ c) $\alpha = 60^o + 180^o k$; d) $\alpha = 135^o + 180^o k$, $\alpha = 63{,}43^o + 180^o k$; e) $\alpha = 90^o + 720^o k$, $\alpha = 630^o + 720^o k$, $\alpha = 180^o + 360^o k$; f) $\alpha = 0^o + 180^o k$, $\alpha = 30^o + 360^o k$, $\alpha = 150^o + 360^o k$, $\alpha = 210^o + 360^o k$, $\alpha = 330^o + 360^o k$; g) $\alpha = 180^o + 360^o k$, $\alpha = 51{,}31^o + 360^o k$, $\alpha = 308{,}68^o + 360^o k$; h) $\alpha = 90^o + 180^o k$, $\alpha = 210^o + 360^o k$, $\alpha = 330^o + 360^o k$; i) $\alpha = 135^o + 180^o k$; j) $\alpha = 0^o + 180^o k$, $\alpha = 45^o + 90^o k$; k) $\alpha = 0^o + 180^o k$, $\alpha = 120^o + 360^o k$, $\alpha = 240^o + 360^o k$.

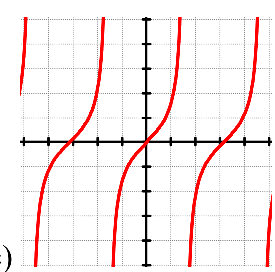
65. **a)** $x = 90^o + k.180^o$; $x = 90^o + k.360^o$ **b)** $x = 45^o + k.90^o$ **c)** $x = 60^o + k.360^o$; $x = 300^o + k.360^o$; $x = 0^o + k.180^o$ **d)** $x = 60^o + k.360^o$; $x = 300^o + k.360^o$; $x = 120^o + k.360^o$; $x = 240^o + k.360^o$ **e)** $x = 60^o + k.360^o$; $x = 300^o + k.360^o$; $x = 180^o + k.360^o$ **f)** $x = 30^o + k.360^o$; $x = 150^o + k.360^o$; $x = 330^o + k.360^o$; $x = 210^o + k.360^o$ **g)** $x = 0^o + k.180^o$; $x = 30^o + k.360^o$; $x = 150^o + k.360^o$; $x = 330^o + k.360^o$; $x = 210^o + k.360^o$ **h)** $x = 30^o + k.360^o$; $x = 150^o + k.360^o$; $x = 330^o + k.360^o$; $x = 210^o + k.360^o$; **i)** $x = 0^o + k.40^o$, $x = 60^o + k.120^o$ **j)** $x = 90^o + k.180^o$; $x = 15^o + k.90^o$; $x = 75^o + k.90^o$

66. **a)** $x = 90^o + k.360^o$; $y = 0^o + k'.180^o$ **b)** $x = 90^o + k.180^o$; $y = \{60^o, 120^o, 240^o, 300^o\} + k'.360^o$ **c)** $x = 90^o + 360k,\ y = -360^o k$; $x = 360^o + 360k,\ y = -270^o - 360^o k$; Si $x, y \ge 0^o \Rightarrow$ $x = 90^o$; $y = 0^o$ **d)** $x = 0^o + 360k,\ y = 0^o + 180k'$; Si $0^o \le x, y < 360^o \Rightarrow$ $x = 0^o$; $y = \{0^o, 180^o\}$

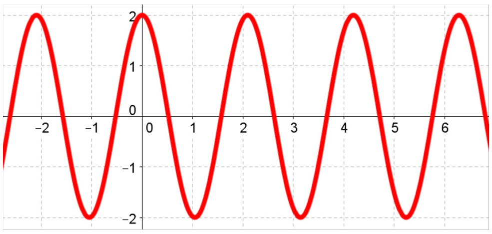
67.


A) a)


b)


c)

C) Periodo $T=\frac{2}{3}\pi$; $\operatorname{Im} g(f)=[-2,\ 2]$

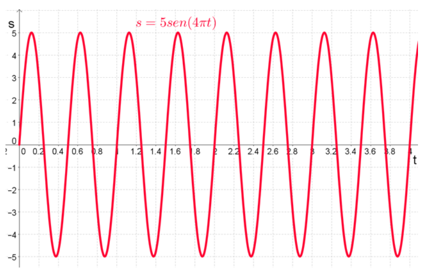


La imagen de 2 es $2\cos(6)\approx 1{,}92$. La imagen es 1 cuando $x=\frac{\pi}{9}$, $x=\frac{5\pi}{9}$, $x=\frac{7\pi}{9}$. La imagen es 2 cuando $x=\frac{2}{3}\pi\cdot k$ siendo $k\in\mathbb{Z}$.

68. A) Es la gráfica de la función c) $y=sen\frac{x}{2}$ y su periodo es $T=4\pi$; B) B1) $x=\pi,\ x=3\pi$; B2) $x=0,\ x=\pi,\ x=2\pi,\ x=3\pi,\ x=4\pi$; B3) $x=\pi/2,\ x=3\pi/2,\ x=5\pi/2,\ x=7\pi/2$

69. La función a) es la gráfica III, la función b) es la gráfica II, la función c) es la gráfica IV, la función d) es la gráfica I.

70.

a) 

b) Periodo $T=1/2$. $\operatorname{Im} g(f)=[-5{,}5]$ c) 0m; 2,93 m; c) A los 0.0512 sg

71. a) 1 metro; b) Dura $\frac{2\pi}{18}\min\approx 0{,}349\min$. c) 17 metros a los $t=\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{18}k$ ($k\in\mathbb{N}$), es decir, a los 0,175 min y después cada vez que pasa 0,349 min y da una vuelta completa. d) La mínima altura es 1m y se alcanza inicialmente y cada vez que pasa 0,349 min y da una vuelta completa

f) A los 0,0942 min

72. **a)** h = 16,3135 cm **b)** h = 16,6058 cm

73. α = $66^{o}\ 25'\ 19''$

74. a) ≈ 5,0787 m; b) ≈3,5562 m

75. Ángulos iguales $=48^{o}\ 46''$, Ángulo desigual $=83^{o}\ 58'\ 28''$

76. $\overline{AB}=\frac{200\sqrt{3}}{3}$ m, $\overline{BC}=200$ m, $\overline{CD}=75\sqrt{2}$ m, $\overline{DE}=50\sqrt{3}$ m, $\overline{AE}=\frac{225+475\sqrt{3}}{3}$ m

77. **a)** $6^{o}\ 50'\ 34''$ **b)** 834 metros

78. 750 m. Ángulo = 5,7106º. Hemos ascendido 74,6 m

79. 35,48 m

80. Pendiente media = 16,2%; α = $9^{o}\ 12'\ 25''$

81. 10,14 cm

82. 32,62 m

83. ≈ 61,94 cm^2.

84. a) ≈ 200,93 cm^2, b) ≈ 201,13 cm^2, c) ≈ 201,06 cm^2; $A_{poli\ inscrito}<A_{circulo}<A_{Poli\ circunscrito}$

85. h = 30,74 cm, x = 32,19 cm, b = 44,51 cm, $A\hat{C}H=43{,}68^{o}$

86. 32,84 m

87. $\overline{PQ}$= 56,67 m

88. 35,92 m

89. 408,556 km

90. α = $35^{o}\ 15'\ 52''$

91. ≈ 128,76 m

92. 30º 11’ 22,47’’

93. $\overline{AC}=18{,}16\,m$

94. A=127,42 cm^2.

95. ≈ 0,9659 Km

96. h= 5,54 m

97. A=1,1049 m^2.

98. a) A 30 cm de la proyección perpendicular de la bola blanca sobre la banda. B) 33,69º.

99. 120,5102º y 59,4997º

100. P≈147,546 cm y A=859,238 cm^2.

101. h≈5,7957 m

102. h=7,639 m; A=129,09 m^2.

103. $\alpha=20{,}354^{o}$

104. a) Uno 10 m y el otro 21,45 m; b) ≈1 m
105. ≈75,9638º
106. h = 475,40 m
107. $\hat{A} = 33º41'24{,}24''$; $\hat{C} = 56º18'36{,}76''$
108. 10,3923 N y 6 N
109. a) ≈15,7313 m; b) ≈7,071 m y 5 m
110. ≈1,7755º
111. a) ≈24,2373º; b) ≈16,7063º
112. ≈35,3553 m
113. a) $r \approx 408{,}56\ Km$, b) Área Casquete ≈ 15356323 Km^2.
114. Deberíamos elevarnos 79353 m
115. $53^o\ 7'\ 48''$
116. 15,85 m
117. **a)** $4^o\ 34'\ 26''$ **b)** 1567,43 m
118. 2,20 m
119. 16m y 28,02 m
120. 31,978 km
121. h = 12,333 km; a = 59,321 km; b = 20,984 km
122. $4^o\ 6'\ 25''$
123. $\overline{AB} = 3{,}43$ m
124. D = 23,89 cm; d = 8,90 cm; S = 86,1 cm^2
125. $\alpha = 47^o\ 51'52''$
126. h = 5,03 cm; P = 26,86 cm; S = 35,21 cm^2
127. No podemos saber si la distancia a la bola de Pablo a la bola de muestra es de 28,7 cm o de 18,3 cm
128. El ángulo que forman las fuerzas entre sí es 54º 5' y los otros dos ángulos pedidos son 31º 14' y 22º 54'
129. $\overline{AB} = 110\,m$, $P\hat{A}B = 75º46'22''$, $P\hat{B}A = 36º9'32''$
130. $\overline{AB} = 11{,}5\,m$
131. Perímetro=52,6 m; Área=155,9 cm^2.
132. a) $\overline{PO} = 50{,}8\ cm$; b) $\overline{TT'} = 26{,}9\ cm$
133. 15,31 m
134. 30º y 90º
135. 5,05 cm
136. 9,93 cm
137. $\overline{DC} = a\sqrt{8}$
138. 54º 20’ 27’’
139. 70º 31’ 44’’
140. PA = 220,9 m y PB = 254,1 m
141. Teoría. Demostración:

En el triángulo ABP se cumple: $\dfrac{BP}{\mathrm{sen}\,\frac{A}{2}} = \dfrac{AB}{\mathrm{sen}B\hat{P}A}$.

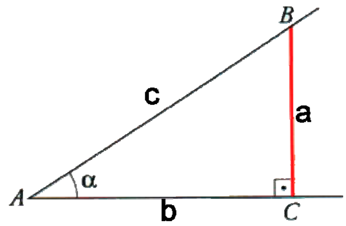
En el triángulo ACP se cumple: $\dfrac{PC}{\mathrm{sen}\,\frac{A}{2}} = \dfrac{AC}{\mathrm{sen}C\hat{P}A}$.

De la primera: $\mathrm{sen}\,\dfrac{A}{2} = \dfrac{BP\cdot \mathrm{sen}B\hat{P}A}{AB}$. De la segunda $\mathrm{sen}\,\dfrac{A}{2} = \dfrac{PC\cdot \mathrm{sen}C\hat{P}A}{AC}$

Igualando: $\dfrac{BP\cdot \mathrm{sen}B\hat{P}A}{AB} = \dfrac{PC\cdot \mathrm{sen}C\hat{P}A}{AC}$. Pero como los ángulos $B\hat{P}A$ y $C\hat{P}A$ son suplementarios, el valor del seno es el mismo para los dos, por lo que la igualdad anterior se puede simplificar quedando: $\dfrac{BP}{AB} = \dfrac{PC}{AC}$ o lo que es lo mismo: $\dfrac{AB}{BP} = \dfrac{AC}{PC}$

142. DB = $\sqrt{13}$ cm AD = 0,83 cm
143. $\overline{AC} = 264\,m$; $\hat{B} = 51{,}6774º$; $\hat{C} = 56{,}3226º$
144. 72,17 m
145. Ver la web http://celestia.albacete.org/celestia/taller/feria1.htm y busca más información en internet sobre este fantástico descubriminto

Definiciones: Razones trigonométricas de un ángulo agudo (0º a 90º).



seno de α $= \dfrac{longitud\ \ del\ \ cateto\ \ opuesto\ \ a\ \ \alpha}{longitud\ \ de\ \ la\ \ hipotenusa} \Leftrightarrow sen\,\alpha = \dfrac{a}{c}$

coseno de α $= \dfrac{longitud\ \ del\ \ cateto\ \ contiguo\ \ a\ \ \alpha}{longitud\ \ de\ \ la\ \ hipotenusa} \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{b}{c}$

tangente de α $= \dfrac{longitud\ \ del\ \ cateto\ \ opuesto\ \ a\ \ \alpha}{longitud\ \ del\ \ cateto\ \ contiguo\ \ a\ \ \alpha} \Leftrightarrow tg\,\alpha = \dfrac{a}{b}$

secante de α $= \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ **cosecante** de α $= \cos ec\,\alpha = \dfrac{1}{sen\,\alpha}$ **cotangente** de α $= \cot g\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{sen\,\alpha}$

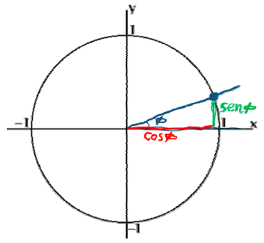
Teorema de Pitágoras:

En triángulos rectángulos $(hipotenusa\ )^2 = (cateto_1)^2 + (cateto_2)^2$

Razones trigonométricas de 30º y 45º.

$sen\,30^o = \dfrac{1}{2}$; $\cos 30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $tg\,30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $sen\,45^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 45^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $tg\,45^o = 1$

Definiciones: Razones trigonométricas de un ángulo cualesquiera (0º a 360º)



$(\cos\alpha,\ sen\,\alpha)$ son las coordenadas del punto en el que el segundo lado de un ángulo cualquiera, **α,** corta a la circunferencia goniométrica.

Según en qué cuadrante esté el ángulo α, las razones trigonométricas son positivas o negativas.

Las razones trigonométricas de 0º, 90º, 180º, 270º se deducen de la definición anterior.

Unidades de medida de ángulos: grado sexagesimal y radián:

Pasamos de una unidad a otra, teniendo en cuenta que $180^o = \pi\ rad$ y aplicando reglas de tres directas.

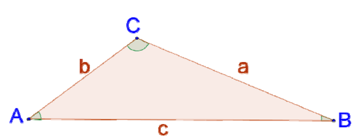
Relaciones entre las razones trigonométricas de algunos ángulos:

En ángulos complementarios el seno de un ángulo es el coseno del otro y viceversa.
La relación entre ángulos suplementarios, opuestos, etc, se deducen de la circunferenia goniométrica.

Teoremas para resolver cualquier triángulo.

Teorema de los senos:

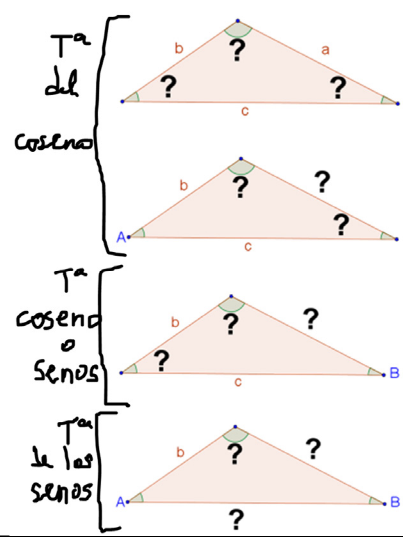
$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$



Teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$ (similar para otros lados)

En la imagen de la derecha tiene consejos para saber cómo empezar a resolver un triángulo según la información que tenemos a priori.



Relaciones fundamentales:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \qquad (sen\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1 \qquad 1 + (tg\,\alpha)^2 = \frac{1}{(\cos\alpha)^2}$$

Razones trigonométricas de la suma de dos ángulos

$$sen(\alpha+\beta) = sen\,\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot sen\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - sen\,\alpha\cdot sen\beta$$
$$tg\,(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Razones trigonométricas de la diferencia de dos ángulos

$$sen(\alpha-\beta) = sen\,\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot sen\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + sen\,\alpha\cdot sen\beta$$
$$tg\,(\alpha-\beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Razones trigonométricas del ángulo doble

$$sen(2\alpha) = 2\cdot sen\,\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\,\alpha$$
$$tg\,(2\alpha) = \frac{2\cdot tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Razones trigonométricas del ángulo mitad

$$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

(Según en qué cuadrante está $\alpha/2$ la razón es + o –)

Pasar sumas y diferencias de senos y cosenos a productos

$$sen\,A + sen\,B = 2\cdot sen\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$
$$sen\,A - sen\,B = 2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot sen\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A + \cos B = 2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A - \cos B = -2\cdot sen\frac{A+B}{2}\cdot sen\frac{A-B}{2}$$

Gráficas de las funciones trigonométricas elementales.