Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zavod za primijenjenu fiziku

Saša Ilijić

Riješeni zadaci iz Fizike 1 i Fizike 2

Posljednja izmjena: 17. veljače 2021.

Pred vama je zbirka zadataka iz fizike među kojima se, osim uobičajenih zadataka kakvi se pojavljuju na ispitima iz *Fizike 1* i *Fizike 2* na FER-u (nastavni program FER2), nalaze i zahtjevniji zadaci koji bi u vama mogli probuditi istraživački duh i pomoći vam da bolje naučite fiziku. Ideje za neke od zadataka preuzete su s regionalnog studentskog natjecanja *Elektrijada* na kojem su studenti FER-a redovito postizali zavidne rezultate.

Uz svaki zadatak je u prvom dijelu ove zbirke navedeno konačno rješenje, a nalazi se i poveznica prema potpunom postupku rješavanja zadatka koji se nalazi u drugom dijelu zbirke. Nakon što pročitate zadatak, najprije dobro o njemu razmislite i pokušajte ga samostalno riješiti. Tek nakon toga pogledajte postupak, pritom imajući na umu da se do rješenja mnogih zadataka može doći različitim načinima razmišljanja i računanja. Prikazani postupci predstavljaju tek jednu od mogućnosti. Također imajte na umu da se u ovoj zbirci zadataka mogu naći veće i manje pogreške ili nejasnoće. Uočite li ih, molim javite mi (e-mail: `sasa.ilijic@fer.hr`).

Dobru zabavu!

Sadržaj

1 Kinematika

Z.1.1: Položaj čestice u x, y-ravnini opisan je vektorom

$$\mathbf{r}[t] = A(\sin[\omega t]\,\mathbf{i} + \sin[2\omega t]\,\mathbf{j}),$$

gdje su A i ω konstante. Skiciraj putanju čestice u x, y-ravnini, izvedi izraz za putanju čestice u obliku $y[x]$, te odredi najveću udaljenost od ishodišta koordinatnog sustava koju čestica postiže tokom gibanja.

R: $y[x] = \pm 2x\sqrt{1-(x/A)^2}$, $r_{\max} = 5A/4$ **[P]**

Z.1.2: Položaj čestice u ravnini $z = 0$ opisan je vektorom

$$\mathbf{r}[t] = v_0 t\,\mathbf{i} + A\sin[2\pi v_0 t/\lambda]\,\mathbf{j},$$

gdje su $v_0 = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $A = 1\,\mathrm{m}$ i $\lambda = 5\,\mathrm{m}$ konstante. Odredi maksimalne iznose brzine i akceleracije koje čestica postiže tokom ovog gibanja.

R: $v_{\max} = v_0\sqrt{1+(2\pi A/\lambda)^2} \simeq 3.212\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $a_{\max} = A(2\pi v_0/\lambda)^2 \simeq 6.316\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ **[P]**

Z.1.3: Položaj čestice u prostoru dan je vektorom

$$\mathbf{r}[t] = R\,(\cos[\omega t]\,\mathbf{i} + \sin[\omega t]\,\mathbf{j}) + V t\,\mathbf{k},$$

gdje je t vrijeme, R, ω i V su konstante, a $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$ su jedinični vektori pravokutnog koordinatnog sustava. Odredi duljinu puta koju čestica prevali duž vlastite putanje u vremenskom intervalu od $t_1 = 0$ do $t_2 = 2\pi/\omega$.

R: $s = (2\pi/\omega)\sqrt{(R\omega)^2 + V^2}$ **[P]**

Z.1.4: Fenjer koji proizvodi tanak vodoravan snop svjetlosti visi na niti te se jednoliko okreće oko uspravne osi čineći 30 okretaja u minuti. Snop svjetlosti pada na ravan uspravan zid koji je od fenjera udaljen $D = 2\,\mathrm{m}$. Odredi brzinu svijetle mrlje na zidu u trenutku kada snop pada na zid pod kutem $\phi = 45°$ u odnosu na okomicu.

R: $v = 2D\omega \simeq 12.57\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ **[P]**

Z.1.5: Nespretnom putniku koji se naginjao kroz prozor vlaka iz ruke je iskliznula pivska boca, pala na peron s visine $h = 2\,\mathrm{m}$ i razbila se. Činilo mu se da je boca pala vertikalno. Odredi kut koji je u referentnom sustavu promatrača koji je mirovao na peronu brzina boce zatvarala s okomicom na tlo u trenutku prije nego što se boca razbila ako se vlak u trenutku pada boce gibao brzinom $v_0 = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $\tan\alpha = v_0/\sqrt{2gh}$, $\alpha \simeq 32.56°$ **[P]**

Z.1.6: U vlaku koji se giba vodoravno ubrzavajući akceleracijom stalnog iznosa a ispustili smo s visine h "idealnu skočigumu" koja pri svakom svom udarcu o pod ostavlja mali trag. Izvedi izraz koji opisuje udaljenost između uzastopnih tragova na podu. (Pri udarcu "idealne skočigume" o pod djeluju isključivo sile uspravnog smjera, a nakon svakog udarca o pod ona dosiže početnu visinu.)

R: $s_{n+1} - s_n = 8ahn/g$ **[P]**

Z.1.7: Odredi najmanji mogući iznos početne brzine projektila i odgovarajući kut izbačaja (u odnosu na vodoravnu os) kojime možemo pogoditi metu koja se nalazi na visini $h = 5\,\mathrm{m}$ te na vodoravnoj udaljenosti $d = 12\,\mathrm{m}$ u odnosu na točku izbačaja. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $\tan\alpha = h/d + \sqrt{1+(h/d)^2} = 2/3$, $\alpha \simeq 56.31°$, $v_0^2 = gd\left(h/d + \sqrt{1+(h/d)^2}\right)$, $v_0 \simeq 13.28\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ **[P]**

Z.1.8: Klinac ima praćku kojom može izbaciti kamen brzinom početnog iznosa $v_0 = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ te stoji na udaljenosti $d = 5\,\mathrm{m}$ od uspravnog zida. On želi kamenom pogoditi što je moguće višu točku na zidu. Odredi kut u odnosu na vodoravnu ravninu pod kojim mora izbaciti kamen. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $\alpha = \arctan[v_0^2/gd] \simeq 63.87°$ **[P]**

Z.1.9: Odredi trajanje leta zračnog broda (zeppelina) od grada A do grada B koji se nalazi $d = 160\,\mathrm{km}$ sjeverno u odnosu na grad A, ako brzina broda u odnosu na zrak iznosi $v' = 80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, a prisutan je vjetar iz smjera sjeveroistoka brzine iznosa $V = 40\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

R: $t = (d/v')2\sqrt{2}/(\sqrt{7}-1) \simeq 3.43\,\mathrm{h}$ **[P]**

Z.1.10: Veslač želi preći nabujalu rijeku tako da ga rijeka tokom prelaska što je moguće manje 'odnese' nizvodno. Odredi kut koji s okomicom na obalu mora zatvarati smjer u kojem tokom prelaska 'gleda' njegov čamac ako je iznos brzine rijeke u odnosu na obalu dva puta veći od brzine čamca u odnosu na vodu.

R: $\alpha' = \pi/6$ **[P]**

2 Gibanje pod djelovanjem stalnih sila

Z.2.1: Sanduk smo vezali konopom i pokušavamo ga vući stalnom brzinom po vodoravnoj podlozi s kojom on ima koeficijent trenja μ. Odredi kut koji konop mora zatvarati s podlogom ako želimo da napetost konopa bude što je moguće manja.

R: $\alpha = \arctan\mu$ **[P]**

Z.2.2: Krenuvši iz mirovanja, sitno tijelo se spušta iz točke A prema točki B tako da prvi dio puta prevaljuje klizeći niz kosinu nagiba α, a ostatak puta prevaljuje klizeći po vodoravnoj polozi. Vodoravna udaljenost između točaka A i B veća je od visinske razlike među njima, a iznos brzine kojom tijelo klizi po vodoravnom dijelu puta jednak je iznosu brzine koju je tijelo imalo pri dnu kosine. Odredi nagib α tako da čitavo gibanje traje što je moguće kraće. Sile otpora smatramo zanemarivim.

R: $\alpha = \pi/3$ **[P]**

Z.2.3: Tijelo se nalazi na kosini na udaljenosti $s = 2\,\mathrm{m}$ od njena podnožja i miruje. Polagano povećavajući nagib kosine dolazimo do nagiba $\alpha = 30°$ pri kojem tijelo proklizne i nakon toga jednoliko ubrzano klizi niz kosinu. U podnožje kosine tijelo stiže $t = 3\,\mathrm{s}$ nakon što se pokrenulo. Odredi statički i dinamički koeficijent trenja tijela s kosinom. (Od trenutka kada se tijelo pokrenulo nagib kosine se više ne povećava. Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $\mu_{\mathrm{st.}} = \tan\alpha \simeq 0.577$, $\mu_{\mathrm{din.}} = \tan\alpha - 2s/(gt^2\cos\alpha) \simeq 0.525$ **[P]**

Z.2.4: Krenuvši iz mirovanja te klizeći niz kosinu nagiba α uz koeficijent trenja μ tijelo prevaljuje vodoravnu udaljenost b. Odredi visinu kosine h za koju će trajanje tog klizanja biti najkraće.

R: $h = b\left(\mu + (1+\mu^2)^{1/2}\right)$ **[P]**

Z.2.5: Tijelo se nalazi pri dnu kosine nagiba $\alpha = 30°$ s kojom ima koeficijent dinamičkog trenja $\mu_{\mathrm{din.}} = 0.2$. Pokrenemo li tijelo u gibanje (klizanje) uz kosinu početnom brzinom iznosa $v_0 = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ono će se nakon nekog vremena zaustaviti, a nakon toga će početi kliziti unazad. Odredi nakon koliko vremena će se tijelo vratiti u polaznu točku. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $t = (v_0/a_+)(1 + \sqrt{a_+/a_-})$, $a_\pm = g(\sin\alpha \pm \mu_{\mathrm{din.}}\cos\alpha)$, $t \simeq 1.844\,\mathrm{s}$. **[P]**

3 Kružno gibanje

Z.3.1: Svemirski brod mase $m = 10\,\mathrm{t}$ na koji ne djeluju sile giba se duž pravca brzinom stalnog iznosa $v = 1\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Skretanje broda bez promjene iznosa brzine ostvaruje se uključivanjem bočnog motora koji na brod djeluje silom stalnog iznosa $F = 10\,\mathrm{kN}$ i smjera koji je u svakom trenutku okomit na putanju broda. Po isključenju motora brod se nastavlja gibati duž (novog) pravca. Koliko dugo mora biti uključen motor kako bi brod skrenuo za kut $\Delta\phi = 60°$?

R: $\Delta t = mv\Delta\phi/F_{\mathrm{cp}} \simeq 17.45\,\mathrm{min}$ **[P]**

Z.3.2: Automobil se kreće brzinom stalnog iznosa po vodoravnoj podlozi kružnom putanjom, a za sobom povlači sanduk koji je za njega privezan nerastezljivim užetom duljine jednake polumjeru putanje automobila. Odredi polumjer kružnice duž koje se giba sanduk ako je iznos brzine automobila $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, polumjer putanje automobila $R = 50\,\mathrm{m}$, a sanduk s podlogom ima koeficijent trenja $\mu = 0.3$. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $R' = 2R\sqrt{1 - (\mu g R/2v^2)^2} \simeq 68\,\mathrm{m}$ **[P]**

Z.3.3: Tanki homogeni štap duljine $\ell = 1\,\mathrm{m}$ i mase $m = 10\,\mathrm{kg}$ vrti se kutnom brzinom $\omega = 10\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ oko osi koja prolazi njegovim polovištem i okomita je na njega. Odredi napetost štapa u njegovom polovištu.

R: $T = m\omega^2\ell/8 \simeq 1234\,\mathrm{N}$ **[P]**

Z.3.4: n sitnih tijela ukupne mase M povezano je s pomoću n bezmasenih nerastezljivih niti jednake duljine tako da tijela i niti čine pravilni n-terokut s polumjerom opisane kružnice R. Kad se taj n-terokut vrti oko osi koja je okomita na ravninu n-terokuta i prolazi njegovim središtem, napetosti niti tijelima osiguravaju potrebnu centripetalnu silu. Odredi napetost niti ako se n-terokut vrti kutnom brzinom ω te pronađi limes tog izraza kad n teži u beskonačno. (Traženi limes opisuje napetost tankog obruča mase M i polumjera R pri vrtnji kutnom brzinom ω.)

R: $T_n = M\omega^2 R/2n\sin[\pi/n]$, $T_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n = M\omega^2 R/2\pi$ **[P]**

Z.3.5: Sitno tijelo obješeno je s pomoću tanke nerastezljive niti duljine ℓ o čvrsto uporište i giba se opisujući kružnicu polumjera $r < \ell$ u vodoravnoj ravnini (tzv. stožasto njihalo). Odredi frekvenciju vrtnje te njen limes za $r/\ell \to 0$.

R: $\omega = \sqrt{g/\ell}\,(1 - (r/\ell)^2)^{-1/4}$, $\lim_{r/\ell\to 0}\omega = \sqrt{g/\ell}$ **[P]**

Z.3.6: Vodoravna platforma može se okretati oko vertikalne osi. Kut koji opisuje njen položaj u vremenu dan je izrazom

$$\phi[t] = \phi_0 \cos\Omega t,$$

gdje je $\phi_0 > 0$ amplituda (maksimalni kutni otklon od središnjeg položaja), a Ω je frekvencija titranja. Odredi minimalnu vrijednost koeficijenta trenja između platforme i tijela koje se nalazi na platformi na udaljenosti R od osi vrtnje ako želimo da tijelo ne proklizuje pri gibanju platforme.

R: $\mu \geq R\Omega^2\phi_0/g$ za $0 < \phi_0 \leq 1$, $\mu \geq R\Omega^2\phi_0^2/g$ za $\phi_0 > 1$ **[P]**

4 Zanimljive sile

Z.4.1: Raketni motor ubrzava raketu time što u suprotnom smjeru izbacuje plin brzinom iznosa v u odnosu na raketu. Masa rakete umanjuje se za masu izbačenog plina. Ako je raketa krenula iz mirovanja, odredi brzinu koju će imati u trenutku u kojem će njena masa iznositi jednu trećinu početne mase.

R: $V = v\ln 3$ **[P]**

Z.4.2: Laboratorijska vaga je baždarena tako da pokazuje $0\,\mathrm{g}$ kada se na njoj nalazi prazna epruveta. U nekom trenutku epruvetu počinjemo puniti štrcaljkom koja odozgo jednolikim mlazom ubrizgava $\Delta m = 5\,\mathrm{g}$ vode u $\Delta t = 3\,\mathrm{s}$. Brzina vode u mlazu je $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Odredi vrijednost mase koju vaga pokazuje jednu sekundu nakon što je počelo punjenje epruvete. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

R: $m'[t] = (\Delta m/\Delta t)(t + v/g) \simeq 3.366\,\mathrm{g}$ **[P]**

5 Rad i energija

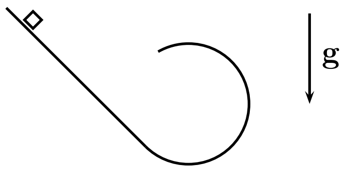
Z.5.1: Kako bi se automobil kretao vodoravnom cestom brzinom iznosa $v_0 = 60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ njegov motor mora raditi snagom $P_0 = 5\,\mathrm{kW}$. Pretpostavljajući da je sila otpora razmjerna kvadratu brzine automobila, odredi najveću brzinu koju automobil može postići na vodoravnoj cesti ako je najveća snaga njegovog motora $P_{\mathrm{max}} = 50\,\mathrm{kW}$.

R: $v_{\mathrm{max}} = v_0(P_{\mathrm{max}}/P_0)^{1/3} \simeq 129.3\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ **[P]**

Z.5.2: Sitno tijelo mase $m = 1\,\mathrm{kg}$ obješeno je s pomoću tanke bezmasene niti o čvrsto uporište, otklonjeno je iz ravnotežnog položaja tako da nit zatvara kut $\alpha_0 = 45°$ s uspravnim pravcem, te je pušteno u gibanje iz mirovanja (njihanje). Odredi napetost niti u trenutku u kojem tijelo prolazi ravnotežnim položajem. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $T = mg(3 - 2\cos\alpha_0) \simeq 15.56\,\mathrm{N}$ **[P]**

Z.5.3: Sitno tijelo klizi bez trenja niz kosinu koja u svom podnožju prelazi u kružnu petlju polumjera zakrivljenosti R. Po ulasku u petlju tijelo nastavlja kliziti po njenoj unutrašnjoj strani. Odredi najmanju visinu u odnosu na najnižu točku petlje s koje valja pustiti tijelo da klizi niz kosinu želimo li da pri prolasku kroz najvišu točku petlje ono ne izgubi kontakt s podlogom (stropom).

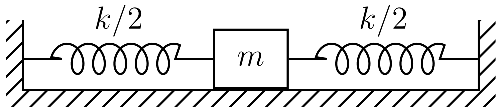


R: $H_{\mathrm{min}} = 5R/2.$ **[P]**

Z.5.4: Tijelo miruje na vodoravnoj podlozi po kojoj može klizati bez trenja, a vodoravnom oprugom konstante $k = 50\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ je povezano s čvrstim uporištem. U nekom trenutku na tijelo počne djelovati vodoravna sila stalnog iznosa $F_0 = 3\,\mathrm{N}$ usmjerena tako da rasteže oprugu. Odredi maksimalnu kinetičku energiju koju će tijelo postići prije nego što se zaustavi.

R: $E_{\mathrm{kin.}} = F_0^2/2k = 0.09\,\mathrm{J}$ **[P]**

Z.5.5: Tijelo mase m leži na vodoravnoj podlozi s kojom ima koeficijent trenja μ i dvjema je oprugama čije su konstante $k/2$ pričvršćeno za uporišta (vidi sliku). Tijelo puštamo u gibanje iz mirovanja s neke udaljenosti od središnjeg položaja. Odredi najveću dopuštenu udaljenost želimo li da tijelo, nakon što se prvi puta zaustavi, ostane mirovati.



R: $s_{\max} = 3mg\mu/k$ **[P]**

Z.5.6: Tijelo mase m klizi po vodoravnoj podlozi s kojom ima koeficijent trenja μ te brzinom iznosa v_0 udara u slobodni kraj vodoravne opruge konstante k koja djeluje kao zaustavni mehanizam. Odredi najveću dopuštenu vrijednost konstante k želimo li da tijelo, nakon što se zaustavi, ne krene u gibanje unazad, već da ostane mirovati. Također odredi duljinu zaustavnog puta koja odgovara najvećoj dopuštenoj vrijednosti konstante k.

R: $k_{\max} = 3\mu^2 mg^2/v_0^2$, $x_{\min} = v_0^2/\mu g$ **[P]**

Z.5.7: Na vodoravnu transportnu traku koja se kreće stalnom brzinom iznosa $v_0 = 0.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ odozgo sipi pijesak stalnim masenim tokom $\mu = 30\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$. Odredi snagu motora potrebnu za održavanje trake u gibanju zanemarujući sve sile otpora.

R: $P = \mu v_0^2 \simeq 10.8\,\mathrm{W}$. **[P]**

Z.5.8: Vlak mase $m = 500\,\mathrm{t}$ se u početnom trenutku gibao brzinom iznosa $v_0 = 10\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, a narednih ga je $\Delta t = 30\,\mathrm{s}$ lokomotiva ubrzavala duž vodoravne pruge djelujući stalnom snagom $P = 2\,\mathrm{MW}$. Odredi duljinu prevaljenog puta u tom intervalu vremena te iznos konačne brzine. Učinak svih sila otpora smatramo zanemarivim.

R: $s = (m/3P)((v_0^2 + (2P/m)\Delta t)^{3/2} - v_0^3) \simeq 323.1\,\mathrm{m}$,
$v_1 = (v_0^2 + (2P/m)\Delta t)^{1/2} \simeq 56.7\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ **[P]**

Z.5.9: Dvije čestice se gibaju duž dva usporedna pravca razmaknuta a u suprotnim smjerivima. Mase čestica su m_1 i m_2, a iznosi njihovih brzina su v_1 i v_2. Odredi iznos ukupne kutne količine gibanja čestica u referentnom sustavu središta mase.

R: $L_\Sigma^* = m_1 m_2 a(v_1 + v_2)/(m_1 + m_2)$ **[P]**

Z.5.10: Dva jednaka svemirska broda čije su mase $m = 100\,\mathrm{t}$ povezana su užetom zanemarive mase i kruže oko njihova središta mase brzinama iznosa $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (napetost užeta brodovima osigurava centripetalnu silu). Odredi rad koji posade brodova moraju obaviti ako polaganim zatezanjem užeta žele prepoloviti udaljenost među brodovima.

R: $W = 3mv^2 = 30\,\mathrm{MJ}$ **[P]**

Z.5.11: U vreću pijeska mase $M = 20\,\mathrm{kg}$ koja mirno visi na užetu tako da je udaljenost njena težišta od objesišta $\ell = 5\,\mathrm{m}$ vodoravno se prema težištu ispali puščano zrno mase $m = 15\,\mathrm{g}$. Zrno se “zaustavi” u vreći, a vreća se (sa zrnom u sebi) nastavi njihati s kutom maksimalnog otklona $\alpha = 4°$. Odredi brzinu puščanog zrna prije nego što se ono zabilo u vreću. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $v = ((M+m)/m)(2g\ell(1-\cos\alpha))^{1/2} \simeq 652.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ **[P]**

Z.5.12: Dva tijela čije su mase m_1 i m_2 mogu slobodno (bez trenja) klizati duž vodoravne tračnice. Ako se tijelo m_1 savršeno elastično sudari s tijelom mase m_2 koje je do tada mirovalo, tijela se nakon sudara gibaju u suprotnim smjerovima brzinama jednakih iznosa. Odredi omjer masa $q = m_1/m_2$.

R: $q = 1/3$ **[P]**

Z.5.13: Bilijarska kugla nalijeće na mirnu bilijarsku kuglu jednake mase. Ako se prva kugla odbije pod kutom θ_1 u odnosu na smjer svog gibanja prije sudara, odredi kut koji zatvara smjer gibanja druge kugle nakon sudara sa smjerom gibanja prve kugle prije sudara. Sudar smatramo savršeno elastičnim.

R: $\theta_2 = {}^{\pi}/_{2} - \theta_1$ **[P]**

Z.5.14: Tijelo mase $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ brzinom iznosa $v_1 = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ udara u mirno tijelo mase $m_2 = 4\,\mathrm{kg}$ te se od njega odbija unazad brzinom iznosa v_1'. U sudaru se oslobađa toplina u iznosu od $20\,\mathrm{J}$. Odredi iznos brzine v_1'.

R: $k^2 = 1 - 2(K-K')(m_1+m_2)/(m_1 m_2 v_1^2) = 0.5$,
$v_1' = |m_1 - k m_2| v_1/(m_1+m_2) \simeq 3.66\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. **[P]**

6 Mehanika krutog tijela

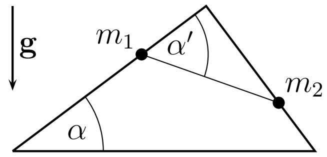
Z.6.1: Homogena vodoravna greda duljine $L = 6\,\mathrm{m}$ i mase $M = 80\,\mathrm{kg}$ leži na dvama osloncima, a na njoj stoji čovjek mase $m = 60\,\mathrm{kg}$. Udaljenost lijevog oslonca od lijevog kraja grede je $x_1 = 1.5\,\mathrm{m}$, udaljenost desnog oslonca od lijevog kraja grede je $x_2 = 5.5\,\mathrm{m}$, a čovjek je od lijevog kraja grede udaljen $x_3 = 4.5\,\mathrm{m}$. Odredi iznose sila kojima oslonci djeluju na gredu. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $F_{1,2} = \pm((M+m)x_{2,1} - ML/2 - mx_3)g/(x_2 - x_1)$, $F_1 \simeq 637.7\,\mathrm{N}$, $F_2 \simeq 735.7\,\mathrm{N}$ **[P]**

Z.6.2: Kvadar pritišćemo uz uspravan zid s kojim on ima koeficijent statičkog trenja $\mu = 0.5$ kako on ne bi klizio prema dolje. Primijenjujemo silu iznosa F čiji smjer s okomicom na zid zatvara kut α. Odredi kut α za koji je potreban najmanji iznos sile F.

R: $\tan\alpha = \mu^{-1}$, $\alpha \simeq 63.4°$. **[P]**

Z.6.3: Žičani okvir u obliku pravokutnog trokuta postavljen je u uspravnoj ravnini tako da je njegova hipotenuza vodoravna, a pravi kut gleda uvis. Mase m_1 i m_2 klize bez trenja po katetama, a povezane su bezmasenom niti (vidi sliku). Sustav miruje u ravnotežnom položaju. Odredi kut α' koji nit zatvara s katetom po kojoj klizi masa m_1, ako ta kateta s hipotenuzom zatvara kut α.



R: $\cos\alpha' = (1 + (m_2/m_1)^2 \cot^2\alpha)^{-1/2}$ **[P]**

Z.6.4: Odredi moment tromosti homogenog stošca polumjera baze R i mase M u odnosu na njegovu os simetrije.

R: $I = 3MR^2/10$ **[P]**

Z.6.5: Tanka homogena vodoravna greda mase m oslonjena je na dva oslonca koji se nalaze pod samim krajevima grede. U nekom trenutku jedan se od oslonaca naglo ukloni i greda se počne gibati. Odredi silu kojom preostali oslonac djeluje na gredu u trenutku netom nakon što je jedan oslonac uklonjen.

R: $F = mg/4$ **[P]**

Z.6.6: Neposredno nakon što je primila udarac štapom, homogena bilijarska kugla se giba kližući po vodoravnoj podlozi brzinom iznosa $v_0 = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ bez vrtnje. Odredi duljinu puta koji kugla prevali od trenutka u kojem primi udarac do trenutka u kojem nastupi kotrljanje bez klizanja ako je faktor trenja između kugle i podloge $\mu = 0.1$.

R: $s = 12v_0^2/(49\mu g) \simeq 1\,\mathrm{m}$ **[P]**

Z.6.7: Dva sitna tijela kojima su mase m_1 i m_2 pričvršćena su na krajevima tankog homogenog štapa duljine L i mase M. Na kojoj udaljenosti od kraja štapa na kojem se nalazi tijelo mase m_1 prolazi os okomita na štap, a u odnosu na koju čitav sustav ima najmanji moment tromosti?

R: $a = (M/2 + m_2)L/(M + m_1 + m_2)$ **[P]**

Z.6.8: Preko koloture koju možemo smatrati homogenim diskom polumjera R i mase M i koji se može bez otpora okretati oko nepomične vodoravne osi prebačena je nerastezljiva nit zanemarive mase na čijim su krajevima utezi masa m_1 i m_2. Pustimo li sustav u gibanje nit pokreće koloturu pri čemu ne dolazi do proklizavanja. Odredi napetost onog dijela niti na kojem visi masa m_1.

R: $T_1 = (Mm_1 + 4m_1m_2)g/(M + 2m_1 + 2m_2)$ **[P]**

Z.6.9: Tanki homogeni štap duljine ℓ i mase M na čijem je jednom kraju pričvršćena čestica mase m vrti se kutnom brzinom iznosa ω oko čvrste osi koja prolazi njegovim polovištem. Čestica je zatim malom eksplozijom izbačena sa štapa u smjeru okomitom na štap i na os, nakon čega se štap nastavlja vrtjeti oko nepromijenjene osi u nepromijenjenom smjeru, ali kutnom brzinom dvostruko većeg iznosa. Odredi iznos brzine čestice u odnosu na kraj štapa netom nakon eksplozije.

R: $u' = (M/m + 3)\ell\omega/6$ **[P]**

7 Centralna sila i gravitacija

Z.7.1: Izvedi izraz koji opisuje jakost privlačne centralne sile te izraz za odgovarajuću potencijalnu energiju ako period gibanja tijela u kružnoj orbiti ne ovisi o polumjeru orbite, ali ovisi o masi tijela m te je dan izrazom $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, gdje je k konstanta. Zatim odredi ukupnu energiju tijela u kružnoj orbiti polumjera r.

R: $F[r] = kr$, $U[r] = \frac{1}{2}kr^2$, $E = kr^2$ **[P]**

Z.7.2: Pretpostavljajući da je jakost 'gravitacijske sile' (privlačne centralne sile) razmjerna s $r^{-(2+\epsilon)}$, gdje je r udaljenost čestice od središta sile, a $\epsilon > -1$ je konstanta ($\epsilon = 0$ odgovara Newtonovoj gravitaciji), odredi iznos 'gravitacijskog potencijala' na udaljenosti r_0 od centra sile ako je poznat iznos 'gravitacijskog polja' u toj točki g_0.

R: $\phi[r_0] = -g_0 r_0/(1+\epsilon)$ **[P]**

Z.7.3: Čestica mase m se giba u polju privlačne centralne sile (npr. gravitacijske sile). Neka su r_1 i r_2 najmanja i najveća udaljenost od centra sile koje čestica postiže tokom gibanja, a v_2 neka je iznos brzine čestice u trenutku u kojem se ona nalazi na udaljnosti r_2. Odredi rad koji centralna sila obavi nad česticom od trenutka u kojem se čestica nalazi na udaljenosti r_2 do trenutka u kojem se ona nalazi na udaljenosti r_1.

R: $W = mv_2^2\left((r_2/r_1)^2 - 1\right)/2$ **[P]**

Z.7.4: Dvije zvijezde se gibaju po kružnim orbitama oko središta mase čitavog sustava brzinama stalnih iznosa v_1 i v_2. Polumjer jedne od orbita je r_1. Odredite polumjer druge orbite i mase obiju zvijezda. (Rezultate izrazi preko v_1, v_2 i r_1.)

R: $r_2 = v_2 r_1/v_1$, $m_1 = r_1(v_2/v_1)(v_1+v_2)^2/G_\mathrm{N}$, $m_2 = r_1(v_1+v_2)^2/G_\mathrm{N}$ **[P]**

Z.7.5: Odredi jakost gravitacijskog polja u točki koja se nalazi na osi tankog homogenog diska mase M i polumjera R na udaljenosti z od njegova središta.

R: $g[z] = 2MG_\mathrm{N}R^{-2}\big(1 - 1/\sqrt{1+(R/z)^2}\big)$ **[P]**

8 Neinercijalni referentni okviri

Z.8.1: U automobilu koji se kreće duž zavoja brzinomjer pokazuje stalan iznos brzine $v = 100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, a dinamometar na kojem "mirno" visi uteg mase $m = 1\,\mathrm{kg}$ pokazuje silu iznosa $F = 12\,\mathrm{N}$. Odredi polumjer zakrivljenosti zavoja. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $R = mv^2/\sqrt{T^2 - (mg)^2} \simeq 111.6\,\mathrm{m}$ **[P]**

Z.8.2: Saonice klize niz kosinu uz faktor trenja μ, a u saonicama na niti “mirno” visi sitno tijelo. Odredi tangens kuta koji nit zatvara s okomicom na kosinu.

R: $\tan\beta = \mu$ **[P]**

Z.8.3: Homogena kugla miruje na vodoravnoj podlozi koja u nekom trenutku počne ubrzavati akceleracijom iznosa A u vodoravnom smjeru. Odredi akceleraciju središta kugle u odnosu na mirni referentni sustav ako pri njenu gibanju ne dolazi do proklizavanja po podlozi.

R: $a = 2A/7$ **[P]**

9 Specijalna teorija relativnosti

Z.9.1: Odredi iznos brzine i količine gibanja elektrona ubrzanog iz mirovanja razlikom električnog potencijala $U = 500\,\mathrm{kV}$. (Masa elektrona $m = 511\,\mathrm{keV}\,c^{-2}$.)

R: $v = 0.8629\,c$, $p = 872.3\,\mathrm{keV}\,c^{-1}$ **[P]**

Z.9.2: Putnička agencija oglasila je putovanje do zvijezde udaljene deset godina svjetlosti (D) koje za putnike prema njihovu vlastitu vremenu traje samo pet godina ($\Delta t'$). Odredi brzinu svemirskog broda s kojim bi se takvo putovanje moglo ostvariti.

R: $v = c/\sqrt{1+(c\,\Delta t'/D)^2} \simeq 0.894\,c$ **[P]**

Z.9.3: U nekom se referentnom sustavu dva svemirska broda gibaju brzinama jednakih iznosa $v = 0.75\,c$, ali duž međusobno okomitih pravaca. Odredi iznos relativne brzine jednog broda u odnosu na drugi, odnosno, iznos brzine jednog broda u referentnom sustavu u kojem onaj drugi miruje.

R: $u_2' = v\,\sqrt{2-(v/c)^2} \simeq 0.899\,c$ **[P]**

10 Mehanika fluida

Z.10.1: Odredi temperaturu do koje je potrebno zagrijati zrak u balonu kako bi on lebdio ako je ukupna masa opreme i letača (ne računajući masu zraka u balonu) $m_\mathrm{b} = 600\,\mathrm{kg}$, volumen balona je $V_\mathrm{b} = 2800\,\mathrm{m}^3$, a temperatura vanjskog zraka je $T_0 = 20°\mathrm{C}$. (Gustoća zraka pri temperaturi $20°\mathrm{C}$ je $\rho_0 = 1.2\,\mathrm{kg}\,\mathrm{m}^{-3}$. Tlak vrućeg zraka unutar balona jednak je atmosferskom tlaku.)

R: $T = T_0/(1 - m_\mathrm{b}/\rho_0 V_\mathrm{b}) \simeq 83.7°\mathrm{C}.$ **[P]**

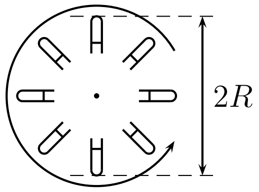
Z.10.2: Vaga na kojoj se nalazi posuda s vodom pokazuje vrijednost mase $m_1 = 3.8\,\mathrm{kg}$. Uronimo li u vodu kruto tijelo mase $m_\mathrm{t} = 1.1\,\mathrm{kg}$ obješeno o tanku nit tako da ono ne dodiruje dno posude, ali tako da bude u cijelosti potopljeno, vaga pokazuje vrijednost mase $m_2 = 4.2\,\mathrm{kg}$. Odredi gustoću krutog tijela. (Gustoća vode $\rho_\mathrm{v} = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.)

R: $\rho_\mathrm{t} = \rho_\mathrm{v} m_\mathrm{t}/(m_2 - m_1) = 2750\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ **[P]**

Z.10.3: U uspravno postavljenoj cilindričnoj posudi površine vodoravnog presijeka $S = 100\,\mathrm{cm}^2$ nalazi se voda na kojoj pluta komad stiropora, a na stiroporu se nalazi aluminijski uteg mase $m_\mathrm{Al} = 200\,\mathrm{g}$. U nekom se trenutku "čamac prevrne"; Uteg tone na dno posude, a stiropor ostaje plutati. Odredi za koliko se spustila razina vode u posudi. (Gustoća aluminija $\rho_\mathrm{Al} = 2.7\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, gustoća vode $\rho_\mathrm{voda} = 1.0\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$.)

R: $\Delta h = m_\mathrm{Al}(1/\rho_\mathrm{Al} - 1/\rho_\mathrm{voda})/S \simeq -1.259\,\mathrm{cm}$ **[P]**

Z.10.4: U laboratorijskom uređaju za centrifugu, epruvete s ispitivanim uzorcima tekućine se vrte u ravnini tako da dna epruveta gledaju "prema van", a njihovi otvori gledaju prema osi vrtnje. Odredi tlak pri dnu epruvete u kojoj se nalazi voda i koja u takvom uređaju čini 6000 okretaja u minuti ($\omega = 200\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$) ako dno epruvete opisuje kružnicu polumjera $R = 15\,\mathrm{cm}$, a "dubina" vode u epruveti iznosi $d = 5\,\mathrm{cm}$. Epruvete su tokom rada uređaja "odozgo" otvorene, a učinak gravitacijske sile se može zanemariti. (Gustoća vode $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, atmosferski tlak $p_\mathrm{atm.} = 101\,\mathrm{kPa}$.)



R: $p = p_\mathrm{atm.} + \rho\omega^2 d\,(2R - d)\,/2 \simeq 2.568 \times 10^6\,\mathrm{Pa}$ **[P]**

Z.10.5: Pri dnu cilindrične, uspravno postavljene, odozgo otvorene posude promjera $D = 0.4\,\mathrm{m}$ probušen je kružni otvor promjera $d = 1\,\mathrm{cm}$ kroz koji voda iz posude slobodno istječe u atmosferu. U početnom trenutku visina vode u posudi je $H_0 = 0.2\,\mathrm{m}$ iznad njezina dna. Odredi nakon koliko će vremena sva voda iz posude isteći. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $T = (D/d)^2\sqrt{2h/g} \simeq 323.1\,\mathrm{s}$ **[P]**

Z.10.6: Glatka unutrašnjost uspravno postavljenog, odozgo i odozdo otvorenog cilindra (cijevi) premazana je tankim slojem ulja. U cilindar odozgo umetnemo klip (valjak) mase $m = 3\,\mathrm{kg}$ čija je visina $h = 15\,\mathrm{cm}$ znatno manja od visine cijevi, a čiji je promjer $D = 10\,\mathrm{cm}$ samo malo manji od unutrašnjeg promjera cijevi te ga pustimo da klizi niz cijev pri čemu ulje ispunjava sav prostor između klipa i cilindra. Odredi viskoznost ulja ako je poznato da razlika između promjera unutrašnjosti cilindra i promjera klipa iznosi $\Delta D = 0.05\,\mathrm{mm}$, a mjerenje pokazuje da klip klizi niz cilindar brzinom stalnog iznosa $v = 5\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

R: $\eta = mg\,\Delta D/2D\pi hv \simeq 0.312\,\mathrm{Pa\,s}$ **[P]**

Z.10.7: Odredi koeficijent viskoznosti meda ako je izmjereno da kuglica mase $m = 20\,\mathrm{g}$ i promjera $2r = 2\,\mathrm{cm}$ u posudi s medom tone brzinom stalnog iznosa $v = 2\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$, a gustoća ispitivanog meda iznosi $\rho_\mathrm{m} = 1.36\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $\eta = (mg/6\pi r - 2r^2\rho_\mathrm{m} g/9)/v \simeq 37.2\,\mathrm{Pa\,s}$ **[P]**

Z.10.8: U stijenku uspravno postavljene, cilindrične, odozgo otvorene posude u kojoj se nalazi voda zabodemo medicinsku iglu kroz koju voda počne istjecati. Odredi vrijeme nakon kojeg će se razina vode u posudi nad iglom smanjiti na polovinu početne vrijednosti ako je promjer posude $2R = 10\,\mathrm{cm}$, unutarnji promjer igle je $2r = 0.6\,\mathrm{mm}$, a duljina igle je $\ell = 5\,\mathrm{cm}$. (Gustoća vode $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, viskozitet vode $\eta = 0.001\,\mathrm{Pa\,s}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

R: $T = 8\eta\ell R^2 \ln 2/r^4\rho g \simeq 2.42\,\mathrm{h}$ **[P]**

Z.10.9: Cilindrični uspravno postavljen spremnik za vodu ukupne visine $H = 5\,\mathrm{m}$ napunjen je vodom do visine $h_0 = 3\,\mathrm{m}$ u odnosu na dno, a u preostalom dijelu se nalazi zrak pri atmosferskom tlaku. Odredi visinu nad dnom spremnika do koje će se spustiti površina vode u spremniku ako pri dnu otvorimo maleni otvor, a spremnik je odozgo zatvoren. Pretpostavljamo da je temperatura zraka stalna. (Atmosferski tlak $p_0 = 101.325\,\mathrm{kPa}$, gustoća vode $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $h = (p_0/2\rho g + H/2)\left(1 - \sqrt{1 - (4\rho g h_0/p_0)/(1 + \rho g H/p_0)^2}\right) \simeq 2.396\,\mathrm{m}$ **[P]**

Z.10.10: Ronilac na dubini $d_1 = 30\,\mathrm{m}$ ispusti mjehurić zraka volumena $V_1 = 1\,\mathrm{cm^3}$. Odredi volumen tog mjehurića kada on stigne tik pod površinu vode uzimajući u obzir da temperatura vode na dubini d_1 iznosi $T_1 = 5°\mathrm{C}$, dok pod površinom ona iznosi $T_0 = 20°\mathrm{C}$, a pretpostavljajući da je temperatura zraka u mjehuriću jednaka temperaturi vode koja ga okružuje. (Gustoća vode $\rho = 1020\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, ubrzanje gravitascijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, atmosferski tlak $p_\text{atm.} = 101.325\,\mathrm{kPa}$.)

R: $V_0 = (T_0/T_1)\,(1 + \rho g d_1/p_\text{atm.})\,V_1 \simeq 4.176\,\mathrm{cm^3}$ **[P]**

11 Toplina i termodinamika

Z.11.1: Odredi masu leda temperature $T_1 = -10°\mathrm{C}$ i masu vode temperature $T_2 = 20°\mathrm{C}$ čijim se miješanjem, po supostavi termodinamičke ravnoteže, dobiva $m_\mathrm{uk.} = 10\,\mathrm{kg}$ vode temperature $T_\mathrm{kon.} = 5°\mathrm{C}$. (Specifični toplinski kapacitet vode $c_\mathrm{voda} = 4.20 \times 10^3\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, specifični toplinski kapacitet leda $c_\mathrm{led} = 2.11 \times 10^3\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, specifična toplina taljenja leda $\ell_\mathrm{t} = 3.34 \times 10^5\,\mathrm{J\,kg^{-1}}$.)

R: $m_\mathrm{led} = m_\mathrm{uk.} c_\mathrm{voda}(T_2 - T_\mathrm{kon.})/(c_\mathrm{led}(T_0 - T_1) + \ell_\mathrm{t} + c_\mathrm{voda}(T_2 - T_0)) \simeq 1.43\,\mathrm{kg}$ **[P]**

Z.11.2: Newcomenov atmosferski (parni) stroj obavlja rad tako što se u cilindar s pomočnim klipom ispunjen vodenom parom pri temperaturi $T = 100°\mathrm{C}$ i pri atmosferskom tlaku uštrca mala količina hladne vode koja dovodi do potpune kondenzacije pare, nakon čega atmosfera potiskuje klip do dna cilindra. Odredi efikasnost ovog stroja kao omjer obavljenog rada i topline potrebne da se cilindar ispuni parom ako je voda početno na temperaturi $T_0 = 10°\mathrm{C}$. (Specifični toplinski kapacitet vode $c = 4.19 \times 10^3\,\mathrm{J\,K^{-1}\,kg^{-1}}$, specifična toplina isparavanja vode $\ell_\mathrm{i} = 2.26 \times 10^6\,\mathrm{J\,kg^{-1}}$, molarna masa vode $M = 18\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$, plinska konstanta $R = 8.314\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$.)

R: $\eta = RT/M(c(T - T_0) + \ell_\mathrm{i}) \simeq 6.5\%$ **[P]**

Z.11.3: Termički izoliran cilindar, zatvoren na oba kraja, podijeljen je pomičnim klipom u dva dijela; A i B. U početnom stanju u oba dijela cilindra se nalazi idealni dvoatomni plin ($\kappa = 7/5$). Početno stanje plina u dijelu A je $p_\mathrm{A0} = 200\,\mathrm{kPa}$ i $V_\mathrm{A0} = 1\,\mathrm{L}$, u dijelu B je $p_\mathrm{B0} = 100\,\mathrm{kPa}$ i $V_\mathrm{B0} = 1\,\mathrm{L}$, a klip je zakočen kako se ne bi pomakao uslijed razlike tlakova. Preselimo li klip iz početnog položaja do položaja u kojem su tlakovi izjednačeni, odredi nove volumene dijelova A i B, te tlak plinova. Pretpostavljamo da je proces u plinovima adijabatski.

R: $V_\mathrm{A1} \simeq 1.243\,\mathrm{L}$, $V_\mathrm{B1} \simeq 0.7574\,\mathrm{L}$, $p_\mathrm{A1} = p_\mathrm{B1} \simeq 147.6\,\mathrm{kPa}$ **[P]**

Z.11.4: Idealni dvoatomni plin u početnom stanju pri tlaku $p_1 = 100\,\mathrm{kPa}$ zauzima volumen $V_1 = 10\,\mathrm{dm^3}$. Plin najprije adijabatski ekspandira do trostruko većeg volumena, a zatim se izobarno komprimira do volumena jednakog početnom. Odredi rad koji plin obavi u čitavom procesu.

R: $W = p_1V_1(45 - 19 \times 3^{3/5})/18 \simeq 459.4\,\mathrm{J}$ **[P]**

Z.11.5: U cilindru s pomičnim klipom se nalazi idealni plin adijabatske konstante κ, početnog volumena V_0, temperature T_0 i tlaka p_0. Plin se najprije pod djelovanjem klipa adijabatski komprimira do upola manjeg volumena nakon čega se pri stalnom volumenu hladi do temperature jednake početnoj. Nakon toga se plin izotermno ekspandira do početnog volumena. Odredi ukupan rad koji klip obavi nad plinom tokom ovog kružnog procesa.

R: $W_\text{klip} = p_0V_0\left((2^{\kappa-1} - 1)/(\kappa - 1) - \ln 2\right)$ **[P]**

Z.11.6: Masu $m = 10\,\mathrm{kg}$ vode želimo ohladili s temperature $T_\mathrm{C1} = 290\,\mathrm{K}$ na temperaturu $T_\mathrm{C2} = 280\,\mathrm{K}$. Odredi koliki bi rad trebalo obaviti kako bismo vodu ohladili pokrećući infinitezimalni Carnotov toplinski stroj koji kao topliji spremnik koristi okolinu temperature $T_\mathrm{H} = 300\,\mathrm{K}$. (Toplinski kapacitet tzv. infinitezimalnog Carnotovog stroja dovoljno je malen da temperaturu toplinskih spremnika tokom jednog ciklusa možemo smatrati stalnom. Specifični toplinski kapacitet vode $c = 4180\,\mathrm{J\,K^{-1}\,kg^{-1}}$.)

R: $W = mc(T_\mathrm{H}\ln[T_\mathrm{C2}/T_\mathrm{C1}] - (T_\mathrm{C1} - T_\mathrm{C2})) \simeq 22\,\mathrm{kJ}$ **[P]**

Z.11.7: Infinitezimalni Carnotov toplinski stroj (stroj u jednom ciklusu obavlja infinitezimalni rad $\mathrm{d}W$) djeluje crpeći toplinu iz toplinskog spremnika početne temperature T_H0 i predajući je toplinskom spremniku početne temperature $T_\mathrm{C0} < T_\mathrm{H0}$ gdje su spremnici tijela jednakih masa m i jednakih specifičnih toplinskih kapaciteta c. Stroj će raditi sve dok se temperature spremnika ne izjednače. Odredi konačnu temperaturu spremnika i ukupan rad koji će stroj obaviti.

R: $T = \sqrt{T_{\mathrm{H0}} T_{\mathrm{C0}}}$, $W = mc\left(\sqrt{T_{\mathrm{H0}}} - \sqrt{T_{\mathrm{C0}}}\right)^2$ **[P]**

Z.11.8: Dva tijela čije su mase m i specifični toplinski kapaciteti c, a početne temperature su im T_{10} i T_{20}, dovedena su u termički kontakt. Odredi konačnu temperaturu po supostavljanju termalne ravnoteže te promjenu entropije čitavog sustava pretpostavljajući da je on izoliran od okoline.

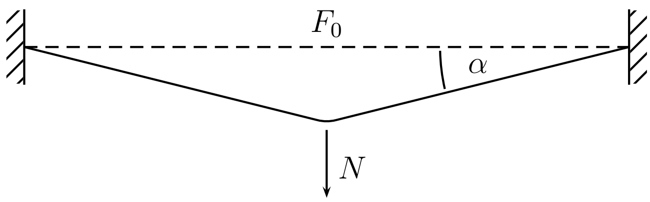
R: $T = (T_{10} + T_{20})/2$, $\Delta S = mc \ln[(1 + T_{20}/T_{10})(1 + T_{10}/T_{20})/4]$ **[P]**

12 Elastičnost

Z.12.1: Odredi rad koji je potrebno obaviti kako bismo čelični štap duljine $L = 2\,\mathrm{m}$, površine poprečnog presjeka $S = 1\,\mathrm{cm}^2$ i početne napetosti $F_0 = 5000\,\mathrm{N}$, dodatnim naprezanjem produljili za $\Delta L = 2\,\mathrm{mm}$. (Youngov modul čelika $E = 200\,\mathrm{GPa}$.)

R: $W = F_0 \Delta L + SE(\Delta L)^2/2L = 30\,\mathrm{J}$ **[P]**

Z.12.2: Čelična žica promjera $2r = 0.5\,\mathrm{mm}$ napeta je silom $F_0 = 100\,\mathrm{N}$ nakon čega su njeni krajevi učvršćeni. Odredi jakost sile N kojom treba djelovati okomito na žicu pri sredini njezina raspona kako bi ju se otklonilo za kut $\alpha = 5°$ od njezina prvobitna položaja (vidi sliku). (Youngov modul čelika $E = 200\,\mathrm{GPa}$.)



R: $N = 2\left(F_0 + r^2 \pi E\left(1/\cos\alpha - 1\right)\right)\sin\alpha \simeq 43.6\,\mathrm{N}$ **[P]**

Z.12.3: Uteg mase $m = 10\,\mathrm{kg}$ mirno visi na čeličnoj žici duljine $L = 5\,\mathrm{m}$ i promjera $2r = 0.5\,\mathrm{mm}$. Iz tog položaja uteg podižemo za visinu $\Delta h = 0.5\,\mathrm{m}$, čime je žica olabavljena, te ga puštamo da padne. Odredi najveću napetost žice koja nastupa tokom zaustavljanja utega. (Pretpostavljamo da se sva naprezanja nalaze unutar linearnog područja elastičnosti, Youngov modul čelika $E = 200\,\mathrm{GPa}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $F_{\max} = mg\left(1 + \sqrt{-1 + 2r^2\pi E\,\Delta h/mgL}\right) \simeq 970\,\mathrm{N}$ **[P]**

Z.12.4: Homogena gumena vrpca slobodno visi o jednom svom kraju te uslijed naprezanja izazvanog njezinom težinom dolazi do njezina produljenja. Odredi ukupno produljenje vrpce ako duljina nenapregnute vrpce iznosi $\ell = 25\,\mathrm{m}$, Youngov modul gume je $E = 4.00 \times 10^6\,\mathrm{Pa}$, a gustoća gume je $\rho = 1500\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $\Delta\ell = \rho g \ell^2/2E \simeq 1.15\,\mathrm{m}$ **[P]**

13 Jednostavni oscilatori

Z.13.1: Objesimo li uteg o oprugu br. 1 ona se produlji za $\Delta x_1 = 4\,\mathrm{cm}$. Objesimo li isti uteg o oprugu br. 2 ona se produlji za $\Delta x_2 = 6\,\mathrm{cm}$. Odredi periode kojima bi uteg titrao kad bismo ga objesili na te dvije opruge spojene u seriju i kad bismo ga objesili na te dvije opruge spojene paralelno. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $T_\mathrm{s} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{g}} \simeq 0.634\,\mathrm{s}$, $T_\mathrm{p} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{g\,(\Delta x_1+\Delta x_2)}} \simeq 0.311\,\mathrm{s}$ **[P]**

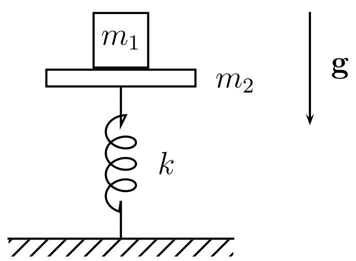
Z.13.2: Uteg je obješen o donji kraj dinamometra i titra u uspravnom smjeru. Najmanja i najveća vrijednost sile koju očitavamo na dinamometru tokom titranja su $T_\mathrm{min} = 3\,\mathrm{N}$ i $T_\mathrm{max} = 7\,\mathrm{N}$, a kružna frekvencija titranja iznosi $\omega_0 = 2\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Odredi masu utega i amplitudu titranja. (Dinamometar možemo smatrati oprugom zanemarive mase. Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $m = (T_\mathrm{max} + T_\mathrm{min})/2g \simeq 0.510\,\mathrm{kg}$, $A = g\omega_0^{-2}(T_\mathrm{max} - T_\mathrm{min})/(T_\mathrm{max} + T_\mathrm{min}) \simeq 9.94\,\mathrm{cm}$ **[P]**

Z.13.3: Najveći iznos brzine koju čestica postiže pri harmoničkom titranju je $v_\mathrm{max} = 5\ \mathrm{cm\,s^{-1}}$, a najveći iznos akceleracije koju postiže je $a_\mathrm{max} = 10\ \mathrm{cm\,s^{-2}}$. Odredi amplitudu A i kružnu frekvenciju titranja ω_0. Zatim odredi iznos brzine u trenutku u kojem otklon čestice od ravnotežnog (središnjeg) položaja iznosi $x = A/2$.

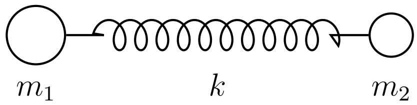
R: $\omega_0 = a_\mathrm{max}/v_\mathrm{max} = 2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $A = v_\mathrm{max}^2/a_\mathrm{max} = 2.5\,\mathrm{cm}$, $v_{x=A/2} = v_\mathrm{max}\sqrt{3}/2 \simeq 4.33\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ **[P]**

Z.13.4: Tijelo mase $m_1 = 3\,\mathrm{kg}$ položeno je na tijelo mase $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$ koje je s pomoću opruge konstante $k = 5\times10^3\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ oslonjeno o čvrsto tlo (vidi sliku). Odredi najveću amplitudu titranja sustava pri kojoj ne dolazi do međusobnog odvajanja tijela m_1 i m_2. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)



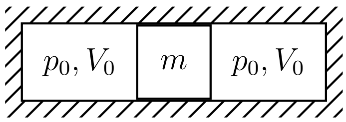
R: $A = g(m_1 + m_2)/k \simeq 0.98\,\mathrm{cm}$ **[P]**

Z.13.5: Čestica mase m_1 i čestica mase m_2 povezane su oprugom konstante k. Odredi kružnu frekvenciju titranja tog sustava.



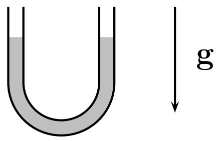
R: $\omega_0 = \sqrt{k(m_1+m_2)/m_1m_2}$ **[P]**

Z.13.6: U nepomičnom, s obje strane zatvorenom, toplinski izoliranom cilindru, nalazi se pomični klip mase $m = 3\,\mathrm{kg}$ i površine poprečnog presijeka $S = 10\,\mathrm{cm}^2$ (vidi sliku). Sa svake strane klipa nalazi se jednaka količina idealnog plina adijabatske konstante $\gamma = 1.4$. Kada je klip u ravnotežnom stanju, plin s jedne i s druge strane klipa je pri istoj temperaturi te zauzima obujam $V_0 = 5\,\mathrm{dm}^3$ pri tlaku $p_0 = 2\times10^5\,\mathrm{Pa}$. Pretpostavljajući da je proces sažimanja i širenja plina adijabatski, odredi frekvenciju malih titraja klipa oko ravnotežnog položaja. (Za $\epsilon \ll 1$ može se koristiti razvoj $(1\pm\epsilon)^\alpha \simeq 1\pm\alpha\epsilon$.)



R: $\omega_0 = \sqrt{2p_0\gamma S^2/mV_0} \simeq 6.11\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ **[P]**

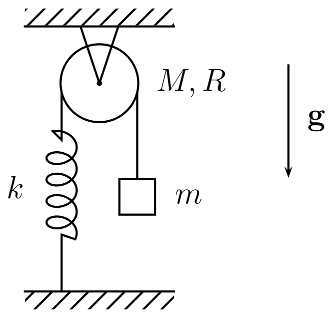
Z.13.7: U cijevi u obliku slova 'U' površine poprečnog presjeka $S = 1\,\mathrm{cm}^2$, s oba otvorena kraja, nalazi se $m = 20\,\mathrm{g}$ vode (vidi sliku). Odredite period titranja razine vode.



(Gustoća vode $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

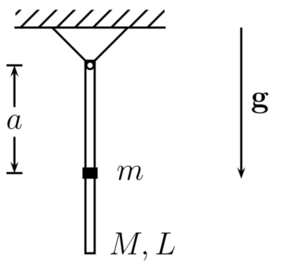
R: $T = 2\pi\sqrt{m/2\rho Sg} \simeq 0.634\,\mathrm{s}$ **[P]**

Z.13.8: Tanka nerastezljiva nit zanemarive mase prebačena je preko koloture mase M i polumjera R koju smatramo homogenim diskom. Jedan kraj niti oprugom je povezan s čvrstim uporištem, dok na drugom kraju visi uteg mase m. Odredi period malih oscilacija u ovom sustavu.



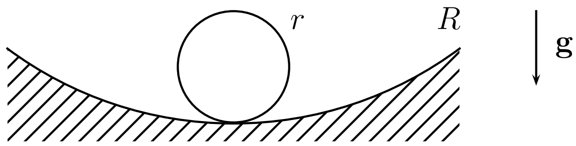
R: $T = 2\pi\sqrt{(m+M/2)/k}$ **[P]**

Z.13.9: Tanki homogeni štap duljine L i mase M poduprt je tako da može slobodno njihati oko jednog kraja. Odredi udaljenost a od gronjeg kraja štapa na kojoj treba pričvrstiti sitan uteg mase m (vidi sliku) kako bi period pri njihanju čitavog sustava malom amplitudom bio najkraći. Posebno razmotri granični slučaj $m/M \to 0$.



R: $a = (ML/2m)(-1 + \sqrt{1 + 4m/3M})$, $\lim_{m/M\to 0} a = L/3$ **[P]**

Z.13.10: Homogena kugla polumjera r položena je u dno sferne udubine polumjera zakrivljenosti $R > r$ (vidi sliku). Odredi frekvenciju malih titraja kada kugla kotrljajući se bez proklizavanja "njiše" oko ravnotežnog položaja.



R: $\omega_0 = \sqrt{5g/7(R-r)}$ **[P]**

Z.13.11: Čestica mase m se giba u x, y-ravnini pod djelovanjem sile $\mathbf{F} = -k\,(x\,\mathbf{i} + 4y\,\mathbf{j})$, a puštena u gibanje iz mirovanja u točki $\mathbf{r}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j}$. Napiši putanju čestice u obliku $y[x]$ te ju skiciraj. Zatim odredi najveću vrijednost iznosa brzine koju čestica postiže tokom gibanja.

R: $y[x] = y_0\,(2x^2/x_0^2 - 1)$, $v_{\max} = \omega_0(x_0^2 + 16y_0^2)/8y_0$ za $x_0^2/16y_0^2 \le 1$, $v_{\max} = \omega_0 x_0$ za $x_0^2/16y_0^2 > 1$ **[P]**

14 Prigušeni oscilator

Z.14.1: Otklon čestice koja prigušeno titra opisujemo izrazom $x[t] = A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos[\omega t + \phi]$. Odredi konstante $A > 0$ (amplitudu u $t = 0$) i ϕ (fazu) ako u trenutku $t = 0$ čestica ima brzinu $\dot{x} = v_0 > 0$ pri otklonu $x = x_0 > 0$.

R: $\phi = \arctan[-(\delta + v_0/x_0)/\omega] \in [-\pi/2, 0]$, $A = x_0\sqrt{1 + ((\delta + v_0/x_0)/\omega)^2}$ **[P]**

Z.14.2: Čestica prigušeno titra duž x-osi. Koordinate triju uzastopnih krajnjih položaja čestice (položaji pri kojima brzina čestice iščezava) su $x_1 = 20\,\mathrm{cm}$, $x_2 = 5.6\,\mathrm{cm}$ i $x_3 = 12.8\,\mathrm{cm}$. Odredi koordinatu ravnotežnog položaja.

R: $x_\infty = (x_1x_3 - x_2^2)/(x_1 - 2x_2 + x_3) = 10.4\,\mathrm{cm}$ **[P]**

Z.14.3: Čestica koja prigušeno titra s logaritamskim dekrementom prigušenja $\lambda = 0.002$ puštena je u gibanje iz mirovanja pri otklonu $x_0 = 1\,\mathrm{cm}$ u odnosu na ravnotežni položaj. Odredi ukupni put koji će čestica preći do "konačnog zaustavljanja".

R: $s = x_0\left(-1 + 2/(1 - \mathrm{e}^{-\lambda/2})\right) \simeq 4x_0/\lambda \simeq 20\,\mathrm{m}$ **[P]**

Z.14.4: Homogeni disk polumjera $R = 0.5\,\mathrm{m}$ prigušeno njiše oko vodoravne osi koja je okomita na njegovu površinu i prolazi njegovim rubom. Otklonimo li disk iz ravnotežnog položaja za kut $\vartheta_0 = 4^\circ$ i pustimo li ga u gibanje, njegov se krajnji otklon nakon $n = 6$ punih titraja smanji na vrijednost $\vartheta_6 = 1^\circ$. Odredi period prigušenog titranja diska te razliku između tog perioda i perioda kojim bi on titrao kada prigušenje ne bi bilo prisutno. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $T_0 = 2\pi\sqrt{3R/2g} \simeq 1.737\,\mathrm{s}$, $T = T_0\sqrt{1 + (\ln[\vartheta_0/\vartheta_n]/2\pi n)^2} \simeq 1.738\,\mathrm{s}$,
$\Delta T = T - T_0 \simeq (T_0/2)\left(\ln[\vartheta_0/\vartheta_n]/2\pi n\right)^2 \simeq 1.17 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$ **[P]**

Z.14.5: Muzička vilica u zraku titra frekvencijom $f = 440\,\mathrm{Hz}$, a amplituda titranja joj se smanji na jednu polovinu početne vrijednosti u vremenu $\tau_{1/2} = 4\,\mathrm{s}$. Odredi koliko bi se smanjila frekvencija titranja iste vilice kada bi ona titrala u sredstvu zbog kojeg bi se amplituda smanjila na jednu polovinu u vremenu $\tau'_{1/2} = 3\,\mathrm{s}$.

R: $\Delta f = f' - f = (\ln 2)^2\left(\tau_{1/2}^{-2} - {\tau'_{1/2}}^{-2}\right)/8\pi^2 f \simeq -6.72 \times 10^{-7}\,\mathrm{Hz}$ **[P]**

Z.14.6: Kritično prigušeni oscilator vlastite frekvencije ω_0 pokrenut je u gibanje iz ravnotežnog položaja početnom brzinom iznosa v_0. Odredi najveći otklon koji će ovaj oscilator postići. Zatim odredi najveći iznos brzine koji će oscilator postići tokom povratka iz najjače otklonjenog u ravnotežni položaj.

R: $x_{\max} = v_0/\mathrm{e}\omega_0$, $v_{\max} = v_0/\mathrm{e}^2$ **[P]**

Z.14.7: Mornarički top (16"/50 Mk VII) čija je masa $M = 120\,\mathrm{t}$ ispaljuje projektil mase $m_\mathrm{p} = 1\,\mathrm{t}$ brzinom iznosa $v_\mathrm{p} = 800\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Ovjes topa dopušta topu da se on po ispaljenju projektila pomakne unazad čime se ublaži djelovanje povratnog udarca na konstrukciju broda. Ovjes je podešen je tako da se top ponaša kao kritično prigušeni oscilator. Odredi vrijeme koje protječe od ispaljenja projektila do trenutka u kojem se top nalazi u najjače otklonjenom položaju ako udaljenost tog položaja od ravnotežnog položaja topa iznosi $x_{\max} = 1.5\,\mathrm{m}$. Zatim odredi najveći iznos sile kojom top nakon ispaljenja projektila djeluje na brod.

R: $t = \mathrm{e}Mx_{\max}/m_\mathrm{p}v_\mathrm{p} \simeq 0.612\,\mathrm{s}$, $F_{\max} = 2(m_\mathrm{p}v_\mathrm{p})^2/\mathrm{e}Mx_{\max} \simeq 2.61 \times 10^6\,\mathrm{N}$ **[P]**

15 Oscilator s vanjskom silom

Z.15.1: Kuglica mase $m = 12\,\mathrm{g}$ i polumjra $r = 1\,\mathrm{cm}$ vezana je oprugom za čvrsto uporište tako da kružna frekvencija njenog neprigušenog titranja iznosi $\omega_0 = 2\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Odredi logaritamski dekrement prigušenja, frekvenciju prigušenog titranja te rezonantnu frekvenciju tog oscilatora kada je on uronjen u ulje viskoznosti $\eta = 0.4\,\mathrm{Pa\,s}$. (Silu otpora pri gibanju kuglice kroz ulje opisati Stokesovim zakonom.)

R: $\lambda = 2\pi\big((\omega_0 m/3\pi\eta r)^2 - 1\big)^{-1/2} \simeq 3.63$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (3\pi\eta r/m)^2} \simeq 5.44\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $\omega_{\mathrm{rez.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2(3\pi\eta r/m)^2} \simeq 4.44\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ **[P]**

Z.15.2: Na jednom kraju opruge konstante k pričvršćeno je tijelo mase m. Drugi kraj opruge, pod utjecajem vanjske sile, titra duž osi opruge amplitudom R i frekvencijom ω_{p}. Odredi amplitudu titranja mase m te najveći iznos produljenja opruge do kojeg dolazi tokom gibanja ovog sustava.

R: $\omega_0^2 = k/m$, $A = R/|1-(\omega_{\mathrm{p}}/\omega_0)^2|$, $(\Delta\ell)_{\max} = R/|1-(\omega_0/\omega_{\mathrm{p}})^2|$ **[P]**

Z.15.3: Kada na prigušeni oscilator djeluje vanjska harmonička sila amplitude F_{p} i frekvencije jednake rezonantnoj frekvenciji oscilatora, on titra amplitudom $A_{\mathrm{rez.}}$. Kada na isti oscilator djeluje vanjska sila nepromijenjene amplitude F_{p}, ali frekvencije koja je znatno niža od rezonantne frekvencije (teži u nulu), oscilator titra amplitudom A_0. Izrazi logaritamski dekrement prigušenja oscilatora s pomoću omjera $q = A_{\mathrm{rez.}}/A_0$.

R: $\lambda = 2\pi\sqrt{\big(1-\sqrt{1-q^{-2}}\big)/\big(1+\sqrt{1-q^{-2}}\big)}$ **[P]**

Z.15.4: Ovjes (opruge i amortizeri) automobilske prikolice mase $m = 200\,\mathrm{kg}$ podešen je tako da se ona, kad nije opterećena, ponaša kao kritično prigušeni oscilator. Odredi rezonantnu frekvenciju prikolice opterećene teretom mase $M = 400\,\mathrm{kg}$ ako je opaženo da se ona pod tim opterećenjem spusti za $H = 10\,\mathrm{cm}$. (Prikolicu s teretom shvaćamo kao masu $m + M$ oslonjenu na oprugu s prigušenjem. Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $\omega_{\mathrm{rez.}} = (M/(M+m))\sqrt{(g/H)(1-m/M)} \simeq 4.67\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. **[P]**

Z.15.5: Automobil se kreće po neravninama koje možemo opisati visinom $y[x] = H\cos[2\pi x/\lambda]$, gdje je x vodoravna koordinata položaja, $H = 2\,\mathrm{cm}$ je “amplituda”, a λ je “valna duljina” neravnina. Ovjes automobila ima $q = 5$ puta slabije prigušenje od onog koji bi odgovarao kritičnom prigušenju. Odredi amplitudu titranja automobila duž uspravne osi kada se on kreće brzinom pri kojoj dolazi do rezonancije. (Automobil shvaćamo kao masu oslonjenu na oprugu s prigušenjem. Prijelazne pojave ne razmatramo.)

R: $A_{\mathrm{r}} = (H/2)\left(q^2/\sqrt{q^2-1}\right) \simeq 5.103\,\mathrm{cm}$ **[P]**

16 Mehanički valovi

Z.16.1: Gitarska žica 1E, promjera $2r = 0.01''$, načinjena od čelika Youngova modula elastičnosti $E = 2.2\times10^{11}\,\mathrm{Pa}$ i gustoće $\rho = 7700\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, razapeta je na rasponu duljine

$\ell = 25.5''$. Odredi silu napetosti i odgovarajuće relativno produljenje žice ako ona u osnovnom modu titra frekvencijom $f = 330\,\mathrm{Hz}$. $(1'' = 1\,\mathrm{in} = 2.54 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}.)$

R: $T = 4r^2\pi\rho\ell^2 f^2 \simeq 71.3\,\mathrm{N}$, $\delta_L = 4\rho\ell^2 f^2/E \simeq 6.40 \times 10^{-3}$ **[P]**

Z.16.2: Čelična žica promjera $d = 1\,\mathrm{mm}$ i duljine $\ell = 3\,\mathrm{m}$ s učvršćenim krajevima napeta je tako da joj frekvencija titranja transverzalnog stojnog vala u osnovnom modu iznosi $f = 200\,\mathrm{Hz}$. Odredi ukupnu energiju titranja te žice kada ona titra u osnovnom modu maksimalnom amplitudom $A = 2\,\mathrm{cm}$. (Gustoća čelika $\rho = 7800\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.)

R: $E = d^2\pi^3\rho f^2 A^2\ell/4 \simeq 2.90\,\mathrm{J}$ **[P]**

Z.16.3: Uteg mase $M = 2\,\mathrm{kg}$ mirno visi na užetu duljine $\ell = 10\,\mathrm{m}$ i mase $m = 0.5\,\mathrm{kg}$. Odredi trajanje putovanja transverzalnog valnog poremećaja s jednog na drugi kraj kraj užeta (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

R: $\tau = 2\sqrt{\ell/g}\left(\sqrt{1 + M/m} - \sqrt{M/m}\right) \simeq 0.477\,\mathrm{s}$ **[P]**

Z.16.4: Napetim užetom, brzinom iznosa $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, putuje transverzalni valni poremećaj oblika $y[x] = \alpha x \mathrm{e}^{-x^2/b^2}$, gdje su $\alpha = 0.1$ i b konstante. Odredi maksimalni iznos brzine kojom se gibaju čestice užeta.

R: $|\dot{y}|_{\max} = \alpha v = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ **[P]**

Z.16.5: Beskonačnim užetom napetosti $T = 2\,\mathrm{kN}$ putuje transverzalni valni poremećaj čiji je oblik u trnutku $t = 0$ opisan s $y[x] = A\mathrm{e}^{-x^2/b^2}$, gdje su $A = 1\,\mathrm{cm}$ i $b = 10\,\mathrm{cm}$ konstante. Odredi ukupnu energiju valnog poremećaja. (Koristi se integral $\int_{-\infty}^{\infty} u^2\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}/2$.)

R: $E = TA^2\sqrt{\pi}/b\sqrt{2} \simeq 2.507\,\mathrm{J}$ **[P]**

Z.16.6: Stojni valovi zvuka titraju u dvije cijevi s otvorenim krajevima. Duljina prve cijevi je $\ell = 1$ m, a druga cijev je za $\Delta\ell = 1\,\mathrm{mm}$ dulja od prve. Odredi frekvenciju udara koji se čuju kada obje cijevi istovremeno proizvode zvuk u osnovnom modu titranja. (brzina zvuka $v_\mathrm{z} = 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$)

R: $f_\mathrm{u} = v_\mathrm{z}\Delta\ell/2\ell(\ell + \Delta\ell) \simeq v_\mathrm{z}\Delta\ell/2\ell^2 \simeq 0.170$ Hz **[P]**

Z.16.7: Kada je omjer frekvencija dvaju tonova jednak $\sqrt[12]{2}$ glazbenici kažu da se oni razlikuju za “pola tona”. (Jednu “oktavu” čini dvanaest uzastopnih “polutonova”, dakle ona odgovara udvostručenju polazne frekvencije.) Odredi od koliko se “polutonova” sastoji prirast frekvencije koji nastupa kada titranje zraka u cijevi s jednim zatvorenim i jednim otvorenim krajem iz osnovnog moda pređe u prvi pobuđeni.

R: $m = 12 \times \ln 3/\ln 2 \simeq 19.02$ **[P]**

Z.16.8: Zvučnik se nalazi na vodoravnom tlu i emitira zvuk frekvencije $f = 1000\,\mathrm{Hz}$ ravnomjerno u svim smjerovima "gornjeg poluprostora". Odredi snagu zvučnika ako na udaljenosti $r = 30\,\mathrm{m}$ od njega jakost buke iznosi $L_{\mathrm{dB}} = 100\,\mathrm{dB}$. Zatim odredi amplitudu kojom osciliraju čestice zraka te amplitudu oscilacije tlaka zraka na udaljenosti r od izvora. (Za frekvenciju zvuka $f = 1000\,\mathrm{Hz}$ uzima se da granica čujnosti odgovara intenzitetu $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$. Gustoća zraka $\rho_{\mathrm{z}} = 1.22\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, brzina zvuka u zraku $v_{\mathrm{z}} = 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

R: $I = I_0 \times 10^{L_{\mathrm{dB}}/10} = 10^{-2}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$, $\langle P\rangle = 2r^2\pi I \simeq 56.5\,\mathrm{W}$, $A = (1/\pi f)\sqrt{I/2\rho_{\mathrm{z}}v_{\mathrm{z}}} \simeq 1.10 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$, $(\Delta p)_{\mathrm{max}} = \sqrt{2\rho_{\mathrm{z}}v_{\mathrm{z}}I} \simeq 2.88\,\mathrm{Pa}$ **[P]**

Z.16.9: Prvi automobil vozi ravnom cestom prema reflektirajućem zidu brzinom iznosa $v_{\mathrm{i}} = 60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ svo vrijeme trubeći frekvencijom $f_{\mathrm{i}} = 250\,\mathrm{Hz}$. Drugi automobil vozi istom cestom ususret prvom automobilu brzinom iznosa $v_{\mathrm{p}} = 120\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Odredi frekvenciju koju čuje vozač drugog automobila kada se radi o zvuku trube koji do njega stiže izravno od prvog automobila (a) prije njihova mimoilaženja, (b) nakon mimoilaženja, te (c) kada se radi o zvuku trube koji do njega stiže nakon što se reflektirao od zida. (Brzina zvuka $v_{\mathrm{z}} = 1240\,\mathrm{km\,h^{-1}}$)

R: (a) $f_{\mathrm{p}} = f_{\mathrm{i}}\,(1 + v_{\mathrm{p}}/v_{\mathrm{z}})/(1 - v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{z}}) \simeq 288\,\mathrm{Hz}$, (b) $f_{\mathrm{p}} = f_{\mathrm{i}}\,(1 - v_{\mathrm{p}}/v_{\mathrm{z}})/(1 + v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{z}}) \simeq 215\,\mathrm{Hz}$, (c) $f_{\mathrm{p}} = f_{\mathrm{i}}\,(1 - v_{\mathrm{p}}/v_{\mathrm{z}})/(1 - v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{z}}) \simeq 237\,\mathrm{Hz}$ **[P]**

Z.16.10: Avion leti duž vodoravnog pravca brzinom $v_{\mathrm{i}} = 0.8\,v_{\mathrm{z}}$, gdje je v_{z} brzina širenja zvuka, i odašilje zvuk frekvencije $f_{\mathrm{i}} = 100\,\mathrm{Hz}$. Izračunaj frekvenciju koju čuje mirni prijamnik na tlu u trenutku kada se avion nalazi točno iznad njega. (Potrebno je uzeti u obzir "kašnjenje" zvuka.)

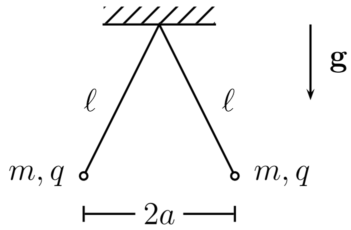
R: $f_{\mathrm{p}} = f_{\mathrm{i}}/(1 - (v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{z}})^2) \simeq 278\,\mathrm{Hz}$ **[P]**

Z.16.11: Izvor koji proizvodi zvuk frekvencije f i prijamnik se nalaze u istoj točki do trenutka $t = 0$ u kojem se izvor počninje gibati ubrzavajući duž pravca akceleracijom stalnog iznosa a, dok prijamnik i dalje miruje. Odredi frekvenciju koju čuje prijamnik u trenutku $t > 0$.

R: $f_{\mathrm{p}}(t) = f_{\mathrm{i}}/\sqrt{1 + 2at/v_{\mathrm{z}}}$ **[P]**

17 Elektromagnetizam

Z.17.1: Dvije metalne kuglice od kojih svaka ima masu $m = 10\,\mathrm{g}$ ovješene su jedna tik do druge o nevodljive niti duljine $\ell = 1\,\mathrm{m}$. Dovedemo li na kuglice ukupan naboj $2q$ koji se među njima ravnomjerno rasporedi, one će se zbog elektrostatskog odbijanja razmaknuti (vidi sliku). Odredi naboj q ako razmak među kuglicama iznosi $2a = 20\,\mathrm{cm}$ i izrazi ga u jedinicama elementarnog naboja q_{e}. (Permitivnost vakuuma $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, elementarni naboj $q_{\mathrm{e}} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.)



R: $q = \pm 4a^{3/2}\sqrt{\pi\epsilon_0\, mg/\sqrt{\ell^2 - a^2}} \simeq \pm 1.308 \times 10^{12}\, q_\mathrm{e}$ **[P]**

Z.17.2: Dvije čestice naboja q učvršćene su na x-osi pri koordinatama $x_{1,2} = \pm a$. Odredi frekvenciju kojom bi oko ravnotežnog položaja $x = y = 0$ titrala čestica mase m i naboja q, ako je njeno gibanje ograničeno na x-os. Zatim odredi frekvenciju kojom bi duž y-osi, oko istog ravnotežnog položaja, titrala čestica mase m i naboja $-q$. (Pretpostavlja se male oscilacije i koristiti se razvoj $(1 + \epsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\epsilon$.)

R: Titranje q duž x-osi: $\omega_0 = q/\sqrt{\pi\epsilon_0 a^3 m}$, titranje $-q$ duž y-osi: $\omega_0 = q/\sqrt{2\pi\epsilon_0 a^3 m}$ **[P]**

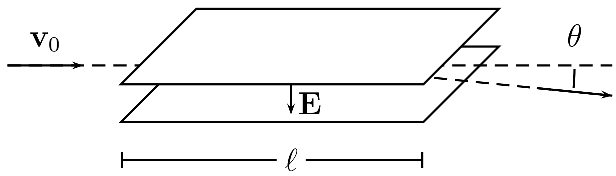
Z.17.3: Električno polje opisano je izrazom

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}] = \begin{cases} E_0(r/r_0)\,\hat{\mathbf{r}} & \text{za} \quad r \le r_0 \\ E_0(r_0/r)^2\,\hat{\mathbf{r}} & \text{za} \quad r > r_0, \end{cases}$$

gdje je $\mathbf{r}$ položaj točke u prostoru u odnosu na točku $\mathcal{O}$ (ishodište), r je udaljenost, $\hat{\mathbf{r}}$ je jedinični vektor, a E_0 i $r_0 > 0$ su konstante. Odredi količinu električnog naboja sadržanu unutar sfere polumjera r sa središtem u $\mathcal{O}$ te volumnu gustoću električnog naboja na udaljenosti r od točke $\mathcal{O}$.

R: Za $r \le r_0$: $q[r] = 4\pi\epsilon_0 E_0 r^3/r_0$, $\rho[r] = 3\epsilon_0 E_0/r_0$, za $r > r_0$: $q = 4\pi\epsilon_0 E_0 r_0^2$, $\rho = 0$ **[P]**

Z.17.4: Čestica mase m i naboja q ulijeće brzinom iznosa v_0 među paralelne ploče nabijenog kondenzatora. Prvobitan smjer gibanja čestice paralelan je s pločama, a duljina ploča u tom smjeru je ℓ (vidi sliku). Odredi kut otklona smjera gibanja čestice do kojeg dolazi uslijed prolaska kroz kondenzator ako je jakost homogenog električnog polja među pločama E. (Pretpostavljamo da čestica nije udarila u ploču kondenzatora.)



R: $\tan\theta = qE\ell/mv_0^2$ **[P]**

Z.17.5: Čestica mase m i naboja q se slobodno giba kroz prostor u kojem nije prisutno elektromagnetsko polje. U trenutku $t = 0$ uključuje se homogeno magnetsko polje jakosti B i smjera okomitog na brzinu čestice, a u trenutku $t = \tau$ polje se gasi. Odredi otklon pravca gibanja čestice koji je nastupio uslijed prisutnosti magnetskog polja u tom vremenskom intervalu.

R: $\theta = |q|B\tau/m$ **[P]**

Z.17.6: Električni naboj jednoliko je raspoređen duž tankog obruča polumjera R. Odredi udaljenost od središta obruča onih točaka na njegovoj osi u kojima je jakost električnog polja najveća.

R: $z = R/\sqrt{2}$ **[P]**

Z.17.7: Kvadratičnom petljom čija stranica ima duljinu $a = 10\,\mathrm{cm}$ teče struja jakosti $I = 1\,\mathrm{A}$. Primjenom Biot–Savartova pravila odredi jakost magnetskog polja B u sredini petlje. (Koristi se integral $\int (x^2+c^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}x = xc^{-2}(x^2+c^2)^{-1/2}$, permeabilnost vakuuma $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-1}}$.)

R: $B = 2\sqrt{2}\,\mu_0 I/\pi a \simeq 1.132 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$ **[P]**

Z.17.8: Kružnom petljom teče električna struja stalne jakosti. Odredi polumjer petlje s kojim se postiže najveća jakost magnetskog polja u točki na osi petlje koja je udaljena z od središta petlje.

R: $R = \sqrt{2}z$ **[P]**

Z.17.9: Duž pravca kojim teče struja stalne jakosti I također je raspoređen naboj linijske gustoće λ. Odredi iznos brzine kojom se usporedno s tim pravcem mora gibati nabijena čestica kako bi elektromagnetska (Lorentzova) sila na česticu iščezla.

R: $v = \lambda c^2/I$ **[P]**

Z.17.10: Pravokutnik sa stranicama duljine $a = 2\,\mathrm{cm}$ i $b = 3\,\mathrm{cm}$ i beskonačni ravni vodič duž kojeg teče stalna struja jakosti $I = 5\,\mathrm{A}$ nalaze se u istoj ravnini. Vodiču je najbliža stranica pravokutnika duljine b, paralelna je s njim i nalazi se na udaljenosti $d = 1\,\mathrm{cm}$ od njega. Odredi tok magnetskog polja kroz prevokutnik. (Permeabilnost vakuuma $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$.)

R: $\Phi_B = (\mu_0 I b/2\pi)\ln[(d+a)/d] \simeq 3.29 \times 10^{-6}\,\mathrm{T\,m^2}$ **[P]**

Z.17.11: Odredi moment elektromagnetske sile koja djeluje na kružnu petlju polumjera R kojom teče struja jakosti I kada se ona nalazi u homogenom magnetskom polju jakosti B i smjera koji zatvara kut θ s okomicom na ravninu petlje.

R: $M = R^2\pi I B \sin\theta$ **[P]**

Z.17.12: Tanki vodljivi štap duljine ℓ okreće se oko svog kraja kutnom brzinom ω u ravnini okomitoj na homogeno magnetsko polje jakosti B. Odredi iznos inducirane elektromotorne sile na krajevima štapa.

R: $\mathcal{E} = B\omega\ell^2/2$ **[P]**

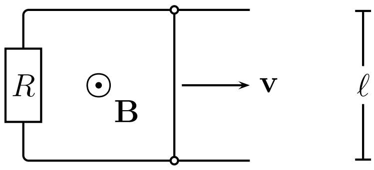
Z.17.13: Vodljiva žica duljine $L = 1\,\mathrm{m}$ s učvršćenim krajevima napeta je tako da frekvencija titranja transverzalnog stojnog vala u osnovnom modu iznosi $f_1 = 100\,\mathrm{Hz}$. Odredi amplitudu elektromotorne sile koja se inducira u toj žici kada na njoj titra stojni val amplitude $A = 1\,\mathrm{cm}$ u n-tom modu, a titranje se odvija u ravnini koja je okomita na homogeno magnetsko polje jakosti $B = 5 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$.

R: $\mathcal{E}_{1,3,\ldots} = 4ABf_1L = 2 \times 10^{-4}\,\mathrm{V}$, $\mathcal{E}_{2,4,\ldots} = 0$ **[P]**

Z.17.14: Homogeno ali o vremenu ovisno magnetsko polje ima stalan iznos B_0 te smjer koji leži u ravnini $z = 0$ i jednoliko se okreće kutnom brzinom ω. Odredi amplitudu titranja elektromotorne sile inducirane u zatvorenoj petlji koja leži u ravnini okomitoj na vektor $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ te omeđuje površinu S.

R: $\mathcal{E}_0 = \sqrt{5/14}\, B_0 S\omega$ **[P]**

Z.17.15: Dvije paralelne vodljive tračnice leže u ravnini okomitoj na homogeno magnetsko polje jakosti B. Tračnice su povezane električnim otporom R, razmak među njima je ℓ, te po njima klizi vodljivi štap (vidi sliku). Odredi jakost sile koja mora djelovati na štap kako bi se on gibao stalnom brzinom iznosa v.



R: $F = B^2\ell^2 v/R$ **[P]**

Z.17.16: Koaksijalni kabel se sastoji od vodljive jezgre polumjera $a = 1\,\mathrm{mm}$ i od vodljivog omotača polumjera $b = 2.5\,\mathrm{mm}$. Jezgra je nabijena linijskom gustoćom naboja $\lambda = 10^{-6}\,\mathrm{C\,m^{-1}}$, a omotač je nabijen linijskom gustoćom naboja jednakog iznosa ali suprotnog predznaka. Odredi energiju električnog polja po jedinici duljine kabla. (Permitivnost vakuuma $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$.)

R: $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\ell = (\lambda^2/4\pi\epsilon_0)\ln[b/a] \simeq 8.235 \times 10^{-3}\,\mathrm{J\,m^{-1}}$ **[P]**

Z.17.17: Koaksijalni kabel se sastoji od šuplje vodljive jezgre polumjera $a = 1\,\mathrm{mm}$ i vodljivog omotača polumjera $b = 5\,\mathrm{mm}$. Kroz vodiče u suprotnim smjerovima teku struje jednake jakosti $I = 1\,\mathrm{A}$. Odredi energiju magnetskog polja po jedinici duljine kabla. (Permeabilnost vakuuma $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$.)

R: $\lambda = (\mu_0 I^2/4\pi)\ln[b/a] \simeq 1.61 \times 10^{-7}\,\mathrm{J\,m^{-1}}$ **[P]**

Z.17.18: Ravni linearno polarizirani elektromagnetski val valne duljine λ širi se u vakuumu u smjeru jediničnog vektora $\mathbf{i}$. Amplituda titranja električnog polja tog vala je E_0, a smjer se podudara s vektorom $\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Sastavi izraze koji opisuju pripadajuće magnetsko polje $\mathbf{B}$ te Poyntingov vektor $\mathbf{S}$.

R: $\mathbf{B}[x,t] = \frac{E_0}{c}\frac{-\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}}\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+\phi]$, $\mathbf{S}[x,t] = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\,\mathbf{i}\,(1+\cos[\frac{4\pi}{\lambda}(x-ct)+2\phi])$ **[P]**

Z.17.19: Ukupna snaga Sunčeva zračenja je $L_\odot = 3.839\times10^{26}\,\mathrm{W}$ (tzv. luminozitet Sunca), a srednja udaljenost Zemlje od Sunca je $a = 149.6\times10^{9}\,\mathrm{m}$ (tzv. astronomska jedinica). Odredi srednju vrijednost iznosa Poyntingova vektora na Zemlji. Zatim, pretpostavljajući da je Sunčevo zračenje ravni linearno polarizirani val, odredi amplitude kojima titraju električno i magnetsko polje.

R: $\langle S\rangle = L_\odot/4a^2\pi \simeq 1365\,\mathrm{W\,m^{-2}}$, $E_0 = \sqrt{\mu_0 c L_\odot/2a^2\pi} \simeq 1014\,\mathrm{V\,m^{-1}}$, $B_0 = \sqrt{\mu_0 L_\odot/2ca^2\pi} \simeq 3.383\times10^{-6}\,\mathrm{T}$ **[P]**

Z.17.20: Ravni (eliptički polarizirani) elektromagnetski val čije je električno polje opisano izrazom

$$\mathbf{E}[z,t] = E_{0x}\,\mathbf{i}\,\cos[\kappa z-\omega t] + E_{0y}\,\mathbf{j}\,\sin[\kappa z-\omega t]$$

pada na polarizator koji propušta komponentu vala čije je električno polje usporedno s vektorom $3\mathbf{i}+\mathbf{j}$. Odredi amplitudu titranja električnog polja nakon prolaska vala kroz polarizator.

R: $E_0' = \sqrt{(9E_{0x}^2+E_{0y}^2)/10}$ **[P]**

18 Fotometrija i geometrijska optika

Z.18.1: Odredi prostorni kut koji baza stošca zauzima u odnosu na vrh stošca, ako je polumjer baze stošca R, a njegova visina je H. Zatim taj prostorni kut izrazi preko kuta θ koji plašt stošca zatvara s njegovom visinom (vrijedi $\tan\theta = R/H$).

R: $\Omega = 2\pi\big(1-H/\sqrt{H^2+R^2}\big) = 2\pi(1-\cos\theta)$ **[P]**

Z.18.2: Okrugli stol polumjera R osvijetljen je točkastim izotropnim izvorom svjetlosti koji se nalazi na visini h iznad njegova središta. Odredi visinu h kojom se postiže najveća osvijetljenost ruba stola.

R: $h = R/\sqrt{2}$ **[P]**

Z.18.3: Dva točkasta izvora svjetlosti jednake jakosti nalaze se na visini h iznad vodoravne ravnine, a razmak među njima je d. Za $d \gg h$ opaža se dva maksimuma osvijetljenosti ravnine, dok se za $d \ll h$ opaža samo jedan maksimum. Odredi graničnu vrijednost omjera h/d pri kojoj se dva maksimuma osvijetljenosti ravnine stapaju u jedan.

R: $h/d = 1$ **[P]**

Z.18.4: Traktor vozi ravnom cestom te u nekom trenutku silazi s nje i nastavlja vožnju poljem, kako bi u najkraćem mogućem vremenu stigao na odredište koje se nalazi u polju na nekoj udaljenosti od ceste. Odredi kut koji putanja traktora kroz polje zatvara s okomicom na cestu ako je iznos brzine traktora na cesti $v = 12\,\mathrm{km/h}$, dok je u polju iznos njegove brzine $v' = 6\,\mathrm{km/h}$.

R: $\alpha' = \arcsin[v'/v] = 30°$ **[P]**

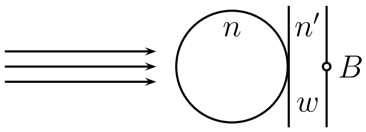
Z.18.5: Muha leti brzinom iznosa v prema konkavnom zrcalu duž njegove optičke osi. Kada muha uđe u područje u kojem je njena udaljenost od tjemena zrcala manja od $R/2$, gdje je R polumjer zakrivljenosti zrcala, ona vidi 'prividnu muhu' (vlastitu sliku) kako joj leti u susret. U trenutku u kojem udaljenost stvarne muhe od tjemena zrcala iznosi $a = R/3$, odredi (a) koliko se puta prividna muha pričinja većom od stvarne muhe, (b) udaljenost među muhama te (c) iznos (relativne) brzine prividne u odnosnu na stvarnu muhu.

R: (a) $m = R/(R-2a) = 3$, (b) $D = 2a(R-a)/(R-2a) = 4R/3$, (c) $v_{\mathrm{rel.}} = 2v((R-a)^2 + a^2)/(R-2a)^2 = 10v$ **[P]**

Z.18.6: Odredi najmanju udaljenost između predmeta i njegove realne slike koja može nastati u sfernom dioptru polumjera zakrivljenosti R ako su indeksi loma optičkih sredstava s dvaju strana dioptra n i n'.

R: $D_{\min} = R(\sqrt{n'} + \sqrt{n})/(\sqrt{n'} - \sqrt{n})$ **[P]**

Z.18.7: Snop paralelnih zraka svjetlosti pada na prozirnu kuglicu indeksa loma n koja dodiruje planparalelnu prozirnu ploču debljine w i indeksa loma n' (vidi skicu).



Odredi promjer kuglice želimo li da snop bude fokusiran na izlaznoj plohi planparalelne ploče (točka B na skici). Sustav se nalazi u zraku (indeks loma jednak jedinici).

R: $2R = 4w(n-1)/(2-n)n'$ **[P]**

Z.18.8: Dvije jednake konvergentne simetrične tanke leće načinjene od stakla indeksa loma $n_{\mathrm{s}} = 1.5$ postavljene su jedna iza druge na zajedničku optičku os tako da im se tjemena dodiruju. Kada se u prostoru među lećama nalazi zrak (indeks loma jednak jedinici) one u zraku čine sustav žarišne duljine $f = 1\,\mathrm{m}$. Odredi žarišnu duljinu ovog sustava u zraku kada se prostor među lećama umjesto zrakom ispuni tekućinom indeksa loma $n_{\mathrm{t}} = 1.35$.

R: $f' = 2f(n_{\mathrm{s}} - 1)/(2n_{\mathrm{s}} - n_{\mathrm{t}} - 1) \simeq 1.538\,\mathrm{m}$ **[P]**

Z.18.9: Konvergentna leća žarišne duljine $f = 50\,\mathrm{cm}$ stvara sliku predmeta koja je udaljena $b = 3\,\mathrm{m}$ od leće. Primaknemo li predmet leći za $\Delta a = -5\,\mathrm{cm}$, koliko će se duž optičke osi pomaknuti njegova slika?

R: $\Delta b = -\Delta a\,(b-f)^2/(f^2 + (b-f)\Delta a) = 2.5\,\mathrm{m}$ **[P]**

Z.18.10: Lećom žarišne duljine f i polumjera otvora $R_\mathrm{L} = f/4$ (fotoaparat), na zaslonu (filmu) okomitom na optičku os stvaramo (oštru) sliku Sunca. Odredi koliko je puta zaslon (film) u području te slike jače osvijetljen nego što bi bio osvijetljen kad bi bio jednostavno izložen Sunčevoj svjetlosti. (Polumjer Sunca $R_\odot = 6.963 \times 10^8\,\mathrm{m}$, srednja udaljenost Sunca od Zemlje $a = 1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$)

R: $E'/E = (R_\mathrm{L} a/R_\odot f)^2 (1 - f/a)^2 \simeq (R_\mathrm{L} a/R_\odot f)^2 \simeq 2.88 \times 10^3$ **[P]**

Z.18.11: S jedne strane tanke konvergentne leće kružnog otvora se na optičkoj osi na udaljenosti a nalazi izotropni točkasti izvor svjetlosti snage P. Sa suprotne strane na udaljenosti b od leće nastaje njegova realna slika. Postavimo li na slikovnoj strani leće na udaljenosti $d \neq b$ zastor okomit na optičku os, na njemu će nastati svijetla mrlja kružnog oblika. Odredi osvijetljenost zastora unutar svijetle mrlje pretpostavljajući da je udaljenost a znatno veća od polumjera otvora leće.

R: $E = (P/4a^2\pi)(1 - d/b)^{-2}$ **[P]**

Z.18.12: Predmet se nalazi na udaljenosti $a_1 = 20\,\mathrm{cm}$ ispred tanke konvergentne leće žarišne duljine $f_1 = 10\,\mathrm{cm}$. Iza te leće se na udaljenosti $D = 30\,\mathrm{cm}$ nalazi druga tanka konvergentna leća čija je žarišna duljina $f_2 = 12.5\,\mathrm{cm}$. Odredi karakter slike te njen položaj i lateralno povećanje u odnosu na predmet.

R: $b_2 = (a_1(D - f_1)f_2 - Df_1f_2)/(a_1(D - f_1 - f_2) - f_1(D - f_2)) = -50\,\mathrm{cm}$ (slika je virtuelna, njen se položaj podudara s položajem predmeta), $m = f_1f_2/(a_1(D - f_1 - f_2) - f_1(D - f_2)) = -5$ (slika je uvećana i preokrenuta) **[P]**

Z.18.13: Fotografski teleobjektiv se sastoji od (prednje) konvergentne leće žarišne duljine $f_1 = 30\,\mathrm{cm}$ iza koje se na udaljenosti $D = 27.5\,\mathrm{cm}$ nalazi (stražnja) divergentna leća žarišne duljine $f_2 = -10\,\mathrm{cm}$. Odredi udaljenost između prednje leće teleobjektiva i slike predmeta, ako udaljenost predmeta od fotografskog aparata teži u beskonačno. Zatim odredi žarišnu duljinu leće koja daje jednako povećanje slike vrlo udaljenog predmeta kao i opisani teleobjektiv. (Sve leće smatramo tankim lećama.)

R: $x = D + (D - f_1)f_2/(D - f_1 - f_2) \simeq 30.83\,\mathrm{cm}$, $f = f_1f_2/(f_1 + f_2 - D) \simeq 40\,\mathrm{cm}$ **[P]**

19 Valna optika

Z.19.1: Bijela svjetlost pada okomito na tanku opnu od sapunice indeksa loma $n = 4/3$. Odredi najmanju debljinu opne pri kojoj istovremeno dolazi do najslabije moguće refleksije plave svjetlosti (valna duljina u vakuumu $\lambda_\mathrm{B} = 480\,\mathrm{nm}$) i do najjače moguće refleksije crvene svjetlosti ($\lambda_\mathrm{R} = 640\,\mathrm{nm}$).

R: $d_\mathrm{min} = 360\,\mathrm{nm}$ **[P]**

Z.19.2: Odašiljač radio-valova valne duljine $\lambda = 10\,\mathrm{m}$ nalazi se na visini $h = 8\,\mathrm{m}$ iznad mirne površine mora. Uzimajući u obzir da površina mora reflektira radio-valove, odredi kuteve u odnosu nju pod kojima se, s velike udaljenosti, opaža maksimume i minimume jakosti radio-signala.

R: Maksimumi: $\sin\alpha_{\mathrm{max}} = (\lambda/4h)(2m-1)$, $m = 1, 2$, $\alpha_{\mathrm{max}} \simeq 18.21°, 69.64°$, minimumi: $\sin\alpha_{\mathrm{min}} = (\lambda/2h)m$, $m = 0, 1$, $\alpha_{\mathrm{min}} \simeq 0°, 38.68°$. **[P]**

Z.19.3: Na vodi pluta sloj ulja debljine d i indeksa loma n koji je veći od indeksa loma vode. Odredi razliku u fazi između svjetlosti valne duljine λ reflektirane na graničnoj plohi zrak–ulje i one reflektirane na graničnoj plohi ulje–voda, ako svjetlost upada iz zraka pod kutom α. (Indeks loma zraka jednak je jedinici.)

R: $\Delta\phi = (4\pi d/\lambda)\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \pi$ **[P]**

Z.19.4: Dva odašiljača radio valova valne duljine $\lambda = 100\,\mathrm{m}$ leže na pravcu istok–zapad na razmaku $d = 200\,\mathrm{m}$. Odredi fazni pomak među odašiljačima s pomoću kojega se maksimum intenziteta odašilje u smjeru sjeveroistoka.

R: Zapadni odašiljač prethodi s $\Delta\phi = 2\pi(\sqrt{2} - 1)$ **[P]**

Z.19.5: Tri koherentna izvora zračenja valne duljine λ leže na pravcu. Odredi namanji razmak d među susjednim izvorima kojime se postiže iščezavanje zračenja u točkama koje leže na istom pravcu kao i izvori na velikoj udaljenosti od izvora. (Podrazumijeva se da su izvori jednake jakosti te da titraju u fazi.)

R: $d_{\mathrm{min}} = \lambda/3$ **[P]**

Z.19.6: Kontinuirani spektar zračenja s valnim duljinama u području od $\lambda_{\mathrm{B}} = 420\,\mathrm{nm}$ do $\lambda_{\mathrm{R}} = 680\,\mathrm{nm}$ (bijela svjetlost) pada okomito na optičku rešetku s razmakom $d = 5\,\mu\mathrm{m}$ među pukotinama. Odredi kutnu širinu razmaka (tamnog područja) između kraja prvog i početka drugog spektra u kutnoj raspodjeli zračenja rešetke. Zatim odredi valnu duljinu drugog spektra pri kojoj nastupa preklop s početkom trećeg spektra.

R: $\Delta\alpha = \arcsin[2\lambda_{\mathrm{B}}/d] - \arcsin[\lambda_{\mathrm{R}}/d] \simeq 1.85°$, $\lambda = 3\lambda_{\mathrm{B}}/2 = 630\,\mathrm{nm}$ **[P]**

Z.19.7: Monokromatska svjetlost upada okomito na optičku rešetku koja se sastoji od niza pukotina širine a raspoređenih tako da je razmak među središtima susjednih pukotina d. Na zastoru promatramo svijetle i tamne pruge. Na mjestu gdje bismo očekivali treći po redu interferencijski maksimum pojavljuje se prvi po redu difrakcijski minimum. Odredi omjer širine pukotina a i razmaka među njihovim središtima d.

R: $a/d = 1/3$ **[P]**

Z.19.8: Snop prirodne svjetlosti intenziteta I_0 upada na niz od tri polarizatora. Propusni smjer trećeg i propusni smjer prvog polarizatora zatvaraju kut θ_{31} dok se kut θ_{21} što ga zatvara propusni smjer drugog polarizatora s propusnim smjerom prvog polarizatora može podešavati. Odredi kut

θ_{21} kojime se postiže najveći intenzitet snopa nakon njegova prolaska trećim polarizatorom te iznos najvećeg intenziteta.

R: $\theta_{21} = \theta_{31}/2$, $I_{\max} = I_0 \cos^4[\theta_{31}/2]/2$ **[P]**

20 Moderna fizika

Z.20.1: Snaga zračenja točkastog izotropnog izvora monokromatske svjetlosti valne duljine $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$ je $P = 10\,\mathrm{W}$. Odredi najveću udaljenost na kojoj čovjek može primijetiti taj izvor ako njegovo oko reagira na svjetlosni tok od najmanje 60 fotona u sekundi, a promjer širom otvorene zjenice oka je $2r = 5\,\mathrm{mm}$. (Planckova konstanta $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$, brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

R: $d_{\max} = (r/2)\sqrt{P\lambda/hcf_{\min}} \simeq 809\,\mathrm{km}$ **[P]**

Z.20.2: Žica duljine $\ell = 1\,\mathrm{m}$ i promjera $2r = 1\,\mathrm{mm}$ priključena je na napon $U = 6\,\mathrm{V}$ te njome teče struja $I = 0.2\,\mathrm{A}$, a nalazi se u okolini temperature $T_0 = 300\,\mathrm{K}$. Odredi temperaturu žice pretpostavljajući da ona apsorbira i emitira termalno zračenje kao crno tijelo. (Štefan–Boltzmannova konstanta $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$.)

R: $T = (T_0^4 + UI/2r\pi\ell\sigma)^{1/4} \simeq 349\,\mathrm{K}$ **[P]**

Z.20.3: Čelična kuglica promjera $2r = 1\,\mathrm{cm}$ zagrijana je do temperature $T_0 = 1000\,\mathrm{K}$ i ostavljena je da se hladi termalnim zračenjem. Pretpostavljajući da kuglica zrači kao crno tijelo te zanemarujući apsorpciju zračenja iz okoline odredi za koliko vremena se temperatura kuglice spusti na $T_1 = 900\,\mathrm{K}$. (Toplinski kapacitet čelika $c = 466\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, gustoća čelika $\rho = 7800\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, Štefan–Boltzmannova konstanta $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$.)

R: $\Delta t = (\rho c r/9\sigma)(T_1^{-3} - T_0^{-3}) \simeq 13.3\,\mathrm{s}$ **[P]**

Z.20.4: Srednja udaljenosti Zemlje od Sunca (tzv. astronomska jedinica) iznosi $a = 1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$, a ukupna snaga Sunčeva zračenja (tzv. luminozitet Sunca) je $P = L_\odot = 3.846 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$. Procijeni srednju temperaturu Zemlje na osnovu pretpostavke da ona apsorbira i emitira zračenje kao crno tijelo. (Štefan–Boltzmannova konstanta $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$.)

R: $T = (L_\odot/16\pi\sigma a^2)^{1/4} \simeq 278.7\,\mathrm{K} \simeq 5.5°\mathrm{C}$ **[P]**

Z.20.5: Na osnovu izraza za raspodjelu gustoće energije zračenja crnog tijela temperature T po valnim duljinama (Planckov zakon),

$$u_\lambda[\lambda] = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1},$$

izvedi izraz za raspodjelu gustoće energije zračenja po frekvencijama, $u_f[f]$, te odredi frekvenciju pri kojoj ta raspodjela ima maksimum. (Postupak zahtijeva pronalaženje nultočke funkcije numeričkim putem.)

R: $u_f[f] = (8\pi h f^3/c^3)/(e^{hf/kT} - 1)$, $f_{\max} \simeq 2.82144 \times kT/h$ **[P]**

Z.20.6: Odredi silu kojom Sunčevo zračenje djeluje na Zemlju pretpostavljajući da Zemlja apsorbira svo zračenje koje na nju pada te koristeći podatke o ukupnoj snazi Sunčeva zračenja (luminozitet Sunca) $P = L_\odot = 3.846 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$, polumjeru Zemlje $R = 6371\,\mathrm{km}$ te srednjoj udaljenosti Zemlje od Sunca (astronomska jedinica) $a = 1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$. (Brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

R: $F = R^2 L_\odot/4a^2 c \simeq 5.817 \times 10^8\,\mathrm{N}$. **[P]**

Z.20.7: Pri raspršenju fotona na mirnom elektronu (Comptonovo raspršenje), energija fotona raspršenih pod kutem $\theta'_{\mathrm{fot.}} = 60^\circ$ je $E'_{\mathrm{fot.}} = 0.7$ MeV. Odredi energiju fotona prije raspršenja. (Masa elektrona $m_e = 0.511\ \mathrm{MeV}/c^2$.)

R: $E_{\mathrm{fot.}} = E'_{\mathrm{fot.}}/\big(1 - (E'_{\mathrm{fot.}}/m_e c^2)(1 - \cos\theta'_{\mathrm{fot.}})\big) \simeq 2.222\ \mathrm{MeV}$ **[P]**

Z.20.8: Odredi najveću energiju koju elektron može primiti u Comptonovu raspršenju ako je valna duljina fotona prije raspršenja $\lambda = 0.1\,\mathrm{nm}$. (Planckova konstanta $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js}$, masa elektrona $m_e = 9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, elementarni naboj $e = 1.602 \times 10^{-19}$.)

R: $(\Delta E)_{\max} = 2h^2 c/\lambda(\lambda m_e c + 2h) \simeq 573.9\,\mathrm{eV}$ **[P]**

Z.20.9: Proučavanjem fotoelektričnog efekta na uzorku nekog metala uočeno je da svjetlost valne duljine $\lambda_1 = 410\,\mathrm{nm}$ s njegove površine izbacuje elektrone koji savladavaju zaustavni potencijal do $\Delta U_1 = 1\,\mathrm{V}$. Odredi gornju granicu na valnu duljinu svjetlosti koja bi proizvela fotone koji savladavaju zaustavni potencijal $\Delta U_2 = 2\,\mathrm{V}$. (Planckova konstanta $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$, brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, elementarni naboj $e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.)

R: $\lambda_2 \le (1/\lambda_1 + (e/hc)(\Delta U_2 - \Delta U_1))^{-1} \simeq 308.1\,\mathrm{nm}$ **[P]**

Z.20.10: Pri prelasku elektrona iz stanja više u stanje niže energije u vodikovu atomu emitiran je foton valne duljine $\lambda \simeq 486\,\mathrm{nm}$. Odredi glavne kvantne brojeve tih dvaju stanja. (Energija ionizacije vodika $E_{\mathrm{I}} = 13.6\,\mathrm{eV}$)

R: $n = 4$, $n' = 2$ **[P]**

Z.20.11: Čestica μ^- (mion) i proton mogu činiti vezano stanje nalik vodikovu atomu. Koristeći Bohrov model atoma procijeni energiju fotona emitiranog prilikom prelaska miona iz prvog pobuđenog u osnovno energijsko stanje na osnovu podataka da energija ionizacije vodikova atoma iznosi približno $13.6\,\mathrm{eV}$ te da je masa miona približno 207 puta veća od mase elektrona.

R: $E_{21}^{(\mu)} \simeq 2.1\,\mathrm{keV}$ **[P]**

Z.20.12: Pretpostavimo da se čestica mase m giba u kružnim orbitama pod djelovanjem privlačne centralne sile kojoj odgovara potencijalna energija čestice opisana izrazom

$$E_{\text{pot.}}[r] = \frac{1}{2}kr^2,$$

gdje je k konstanta, a r je udaljenost čestice od središta. U skladu s postulatom o kvantizaciji kutne količine gibanja, $L_n = n\hbar$, $n = 1, 2, \ldots$, izvedi izraz za energijske nivoe čestice.

R: $E_n = n\hbar\sqrt{k/m}$, $n = 1, 2, \ldots$ **[P]**

Z.20.13: Pretpostavljajući da sva energija Sunčeva zračenja potiče iz pretvorbe vodika ${}^1_1\mathrm{H}$ u helij ${}^4_2\mathrm{He}$, pritom zanemarujući energiju nastalih neutrina, procijeni masu vodika koju Sunce troši u jedinici vremena. (Ukupna snaga Sunčeva zračenja (tzv. luminozitet sunca) $P = L_\odot = 3.846 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$, masa vodikova atoma $m^*[{}^1_1\mathrm{H}] = 1.007825\,\mathrm{u}$, masa helijeva atoma $m^*[{}^2_4\mathrm{He}] = 4.002603\,\mathrm{u}$, brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

R: $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = (1 - m^*[{}^4_2\mathrm{He}]/4m^*[{}^1_1\mathrm{H}])^{-1}L_\odot/c^2 \simeq 6.01 \times 10^{11}\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ **[P]**

Z.20.14: Nekim fizikalnim procesom čija aktivnost A_1 je stalna u vremenu nastaju jezgre aktivnog izotopa 2 s konstantom raspada λ_2. Odredi ovisnost aktivnosti izotopa 2 o vremenu ako je ona u početnom trenutku bila jednaka nuli.

R: $A_2[t] = A_1\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right)$ **[P]**

Z.20.15: Pri raspadu jezgre aktivnog izotopa 1 nastaje jezgra aktivnog izotopa 2. Odgovarajuće konstante raspada su λ_1 i λ_2. Ako je u početnom trenutku aktivnost izotopa 1 u nekom uzorku različita od nule, a aktivnost izotopa 2 je jednaka nuli, odredi vrijeme nakon kojeg će aktivnost izotopa 2 doseći svoj maksimum.

R: $t = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}\ln[\lambda_1/\lambda_2]$. **[P]**

Z.20.16: U Zemljinoj atmosferi, a time i u svim živim organizmima, udio aktivnog izotopa ${}^{14}\mathrm{C}$ u ukupnoj populaciji ugljikovih atoma iznosi $\epsilon = (1.0 \pm 0.1) \times 10^{-12}$. Prestankom života organizma, izotop ${}^{14}\mathrm{C}$ se raspada s vremenom poluraspada $T_{1/2} = (5730 \pm 40)\,\mathrm{god}$, dok su preostali izotopi ugljika stabilni. Izvedi izraz s pomoću kojeg se, na osnovu mjerenja specifične aktivnosti uzorka čistog ugljika, $a = A/m$, gdje je A aktivnost, a m je masa uzorka, može odrediti vrijeme koje je proteklo nakon prestanka života organizma. Zatim procijeni standardnu pogrešku pri određivanju "starosti uzorka" ako je standardna relativna pogreška pri određivanju specifične aktivnosti $\sigma_a/a = 0.001$, a očekivana starost je približno $T_{1/2}/\ln 2$.

R: $t = \lambda^{-1}\ln[\lambda\epsilon/am^*[\mathrm{C}]]$, $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$, $\sigma_t \sim T_{1/2}\sigma_\epsilon/(\ln 2)\epsilon \sim 800\,\mathrm{god}$ **[P]**

A Rješenja zadataka

Zadatak 1.1: Položaj čestice u x, y-ravnini opisan je vektorom

$$\mathbf{r}[t] = A(\sin[\omega t]\,\mathbf{i} + \sin[2\omega t]\,\mathbf{j}),$$

gdje su A i ω konstante. Skiciraj putanju čestice u x, y-ravnini, izvedi izraz za putanju čestice u obliku $y[x]$, te odredi najveću udaljenost od ishodišta koordinatnog sustava koju čestica postiže tokom gibanja.

Postupak: Koordinate položaja čestice su

$$x[t] = A\sin[\omega t] \qquad \text{i} \qquad y[t] = A\sin[2\omega t].$$

Koristeći $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ možemo napisati

$$y[t] = 2A\sin[\omega t]\cos[\omega t] = \pm 2x[t]\sqrt{1-(x[t]/A)^2}$$

gdje gornji predznak $(+)$ vrijedi za $\cos[\omega t] > 0$, a donji $(-)$ za $\cos[\omega t] < 0$, odnosno,

$$y[x] = \pm 2x\sqrt{1-(x/A)^2}.$$

Kvadrat udaljenosti čestice od ishodišta je

$$r^2 = x^2 + y^2 = x^2 + 4x^2\big(1-(x/A)^2\big).$$

Ekstreme te veličine pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2 = 2x + 8x\big(1-(x/A)^2\big) + 4x^2\big(-2x/A^2\big) = 2x\big(5 - 8x^2/A^2\big),$$

što je ispunjeno za $x = 0$ te za $x^2 = 5A^2/8$. Za $x = 0$ dobivamo $r^2 = 0$ što je minimum, dok za $x^2 = 5A^2/8$ dobivamo maksimum

$$r^2 = \frac{5}{8}A^2 + 4\frac{5}{8}A^2\left(1-\frac{5}{8}\right) = \frac{25}{16}A^2.$$

Slijedi da je najveća udaljenost čestice od ishodišta

$$r_{\max} = \frac{5}{4}A.$$

Rješenje: $y[x] = \pm 2x\sqrt{1-(x/A)^2}$, $r_{\max} = 5A/4$

Zadatak 1.2: Položaj čestice u ravnini $z = 0$ opisan je vektorom

$$\mathbf{r}[t] = v_0 t\,\mathbf{i} + A\sin[2\pi v_0 t/\lambda]\,\mathbf{j},$$

gdje su $v_0 = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $A = 1\,\mathrm{m}$ i $\lambda = 5\,\mathrm{m}$ konstante. Odredi maksimalne iznose brzine i akceleracije koje čestica postiže tokom ovog gibanja.

Postupak: Vektor brzine čestice je derivacija vektora položaja po vremenu,

$$\mathbf{v}[t] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}[t] = v_0\,\mathbf{i} + A(2\pi v_0/\lambda)\cos[2\pi v_0 t/\lambda]\,\mathbf{j},$$

a iznos brzine je modul tog vektora,

$$v[t] = |\mathbf{v}[t]| = \sqrt{\mathbf{v}[t]\cdot\mathbf{v}[t]} = \sqrt{v_0^2 + A^2(2\pi v_0/\lambda)^2\cos^2[2\pi v_0 t/\lambda]}.$$

Iznos brzine je najveći kad je $\cos[2\pi v_0 t/\lambda] = \pm 1$, odnosno

$$v_{\mathrm{max}} = v_0\sqrt{1 + (2\pi A/\lambda)^2} \simeq 3.212\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Vektor akceleracije je derivacija vektora brzine po vremenu,

$$\mathbf{a}[t] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}[t] = -A(2\pi v_0/\lambda)^2\sin[2\pi v_0 t/\lambda]\,\mathbf{j},$$

a iznos akceleracije je

$$a[t] = |\mathbf{a}[t]| = \sqrt{\mathbf{a}[t]\cdot\mathbf{a}[t]} = A(2\pi v_0/\lambda)^2\,\big|\sin[2\pi v_0 t/\lambda]\big|.$$

Iznos akceleracije ne najveći pri $\sin[2\pi v_0 t/\lambda] = \pm 1$, odnosno

$$a_{\mathrm{max}} = A(2\pi v_0/\lambda)^2 \simeq 6.316\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Rješenje: $v_{\mathrm{max}} = v_0\sqrt{1 + (2\pi A/\lambda)^2} \simeq 3.212\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $a_{\mathrm{max}} = A(2\pi v_0/\lambda)^2 \simeq 6.316\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

Zadatak 1.3: Položaj čestice u prostoru dan je vektorom

$$\mathbf{r}[t] = R\,(\cos[\omega t]\,\mathbf{i} + \sin[\omega t]\,\mathbf{j}) + V t\,\mathbf{k},$$

gdje je t vrijeme, R, ω i V su konstante, a $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$ su jedinični vektori pravokutnog koordinatnog sustava. Odredi duljinu puta koju čestica prevali duž vlastite putanje u vremenskom intervalu od $t_1 = 0$ do $t_2 = 2\pi/\omega$.

Postupak: Element prevaljenog puta je

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\mathbf{r}| = |\mathbf{v}\,\mathrm{d}t| = |\mathbf{v}|\,\mathrm{d}t = v\,\mathrm{d}t.$$

Brzina čestice je

$$\mathbf{v}[t] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}[t] = R\omega\,(-\sin[\omega t]\,\mathbf{i} + \cos[\omega t]\,\mathbf{j}) + V\,\mathbf{k},$$

a njen je iznos

$$v[t] = |\mathbf{v}[t]| = \sqrt{\mathbf{v}[t]\cdot\mathbf{v}[t]} = \sqrt{(R\omega)^2 + V^2}.$$

Prevaljeni put u intervalu od t_1 do t_2 je

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} v[t]\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi/\omega} \sqrt{(R\omega)^2 + V^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{\omega}\,\sqrt{(R\omega)^2 + V^2}.$$

Rješenje: $s = (2\pi/\omega)\sqrt{(R\omega)^2 + V^2}$

Zadatak 1.4: Fenjer koji proizvodi tanak vodoravan snop svjetlosti visi na niti te se jednoliko okreće oko uspravne osi čineći 30 okretaja u minuti. Snop svjetlosti pada na ravan uspravan zid koji je od fenjera udaljen $D = 2\,\mathrm{m}$. Odredi brzinu svijetle mrlje na zidu u trenutku kada snop pada na zid pod kutem $\phi = 45^\circ$ u odnosu na okomicu.

Postupak: Tokom vrtnje fenjera svijetla se mrlja na zidu giba duž vodoravnog pravca koji uzimamo kao x-os. Ishodište $x = 0$ neka je točka pravca koja je najbliža fenjeru. Opišemo li orijentaciju fenjera kutom ϕ, pri čemu $\phi = 0$ odgovara orijentaciji frnjera pri kojoj snop svjetlosti pada okomito na zid (svijetla mrlja pri $x = 0$), onda se svijetla mrlja za općenit kut ϕ nalazi pri

$$x = D\,\tan\phi.$$

S obzirom da se fenjer vrti stalnom kutnom brzinom

$$\omega = 30 \times 2\pi\,\mathrm{rad}\,\mathrm{min}^{-1} = \pi\,\mathrm{rad}\,\mathrm{s}^{-1},$$

kut možemo napisati kao $\phi = \omega t$, odnosno, položaj svijetle mrlje je

$$x = D\,\tan\omega t.$$

Brzina svijetle mrlje je

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{D\omega}{\cos^2\omega t}.$$

Za $\phi = 45^\circ$ imamo $\cos\omega t = \cos\phi = 2^{-1/2}$, odnosno

$$v = \frac{D\omega}{1/2} = 2D\omega,$$

što za zadane vrijednosti daje $v \simeq 12.57\,\mathrm{m}\,\mathrm{s}^{-1}$.

Rješenje: $v = 2D\omega \simeq 12.57\,\mathrm{m}\,\mathrm{s}^{-1}$

Zadatak 1.5: Nespretnom putniku koji se naginjao kroz prozor vlaka iz ruke je iskliznula pivska boca, pala na peron s visine $h = 2\,\mathrm{m}$ i razbila se. Činilo mu se da je boca pala vertikalno. Odredi kut koji je u referentnom sustavu promatrača koji je mirovao na peronu brzina boce zatvarala s okomicom na tlo u trenutku prije nego što se boca razbila ako se vlak u trenutku pada boce gibao brzinom $v_0 = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: U referentnom sustavu vlaka postavljamo pravokutni koordinatni sustav tako da se ishodište nalazi u točki iz koje boca počinje padati, x'-os je vodoravna i gleda "prema naprijed", a y'-os je uspravna i gleda uvis. Položaj boce tokom pada opisan je izrazom

$$\mathbf{r}'[t] = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2\,\mathbf{j},$$

a njena brzina je

$$\mathbf{v}'[t] = -g(t - t_0)\,\mathbf{j}.$$

Trenutak $t = t_1$ u kojem boca udara o pod slijedi iz uvjeta $\mathbf{r}'[t_1] = -h$ kao

$$t_1 = t_0 + \sqrt{2h/g},$$

te je brzina boce neposredno prije udara o pod

$$\mathbf{v}'[t_1] = -\sqrt{2gh}\,\mathbf{j}.$$

U referentnom sustavu promatrača koji miruje na peronu postavljamo koordinatni sustav tako da se on u trenutku $t = t_0$ podudara s koordinatnim sustavom koji se giba s vlakom. položaj čestice u sustavu vlaka $\mathbf{r}'$ i položaj iste čestice u sustavu mirnog promatrača $\mathbf{r}$ povezani su izrazom

$$\mathbf{r}[t] = v_0(t - t_0)\,\mathbf{i} + \mathbf{r}'[t],$$

dok su brzine povezane izrazom

$$\mathbf{v}[t] = v_0\,\mathbf{i} + \mathbf{v}'[t].$$

U trenutku neposredno prije udara predmeta o pod imamo

$$\mathbf{v}[t_1] = v_0\,\mathbf{i} - \sqrt{2gh}\,\mathbf{j}.$$

Kut α koji vektor $v[t_1]$ zatvara s uspravnim pravcem možemo odrediti iz

$$\tan\alpha = -\frac{\mathbf{v}[t_1]\cdot\mathbf{i}}{\mathbf{v}[t_1]\cdot\mathbf{j}} = \frac{v_0}{\sqrt{2gh}}.$$

Za zadane vrijednosti $\tan\alpha \simeq 0.6385$, $\alpha \simeq 32.56°$

Rješenje: $\tan\alpha = v_0/\sqrt{2gh}$, $\alpha \simeq 32.56°$

Zadatak 1.6: U vlaku koji se giba vodoravno ubrzavajući akceleracijom stalnog iznosa a ispustili smo s visine h "idealnu skočigumu" koja pri svakom svom udarcu o pod ostavlja mali trag. Izvedi izraz koji opisuje udaljenost između uzastopnih tragova na podu. (Pri udarcu "idealne skočigume" o pod djeluju isključivo sile uspravnog smjera, a nakon svakog udarca o pod ona dosiže početnu visinu.)

Postupak: Gibanje možemo promatrati u referentnom sustavu koji se u odnosu na tračnice kreće stalnom brzinom koja je jednaka brzini koju je vlak imao u trenutku $t = 0$ kad je loptica ispuštena. U tom je sustavu gibanje skočigume isključivo vertikalno dok vlak ubrzava akceleracijom zadanog iznosa krenuvši iz mirovanja u $t = 0$. Pad kuglice na pod s visine h traje

$$\tau = \sqrt{2h/g},$$

gdje je g ubrzanje slobodnog pada, pa prvi udarac kuglice o tlo imamo u trenutku $t_1 = \tau$. Idući udarac se događa nakon što se kuglica uspne na početnu visinu te ponovo padne, pa kao trenutak n-tog udarca o pod imamo

$$t_n = \tau + (n-1)2\tau = (2n-1)\tau = (2n-1)\sqrt{2h/g}.$$

Put koji vlak prevaljuje u referentnom sustavu koji koristimo počevši od trenutka $t = 0$ može se napisati kao

$$s[t] = \frac{a}{2}t^2,$$

pa tragove udaraca kuglice na podu očekujemo na udaljenosti

$$s_n = s[t_n] = \frac{ah}{g}(2n-1)^2$$

od točke koja se nalazila ispod skočigume u trenutku $t = 0$. Konačno, udaljenost između uzastopnih tragova na podu su

$$s_{n+1} - s_n = \frac{8ah}{g}\,n.$$

Rješenje: $s_{n+1} - s_n = 8ahn/g$

Zadatak 1.7: Odredi najmanji mogući iznos početne brzine projektila i odgovarajući kut izbačaja (u odnosu na vodoravnu os) kojime možemo pogoditi metu koja se nalazi na visini $h = 5\,\mathrm{m}$ te na vodoravnoj udaljenosti $d = 12\,\mathrm{m}$ u odnosu na točku izbačaja. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Putanja projektila izbačenog brzinom iznosa v_0 iz točke $x = y = 0$ pod kutem α u odnosu na vodoravnu x-os (y-os je uspravna) opisana je poznatim izrazom

$$y = xu - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1+u^2), \quad \text{gdje je} \quad u = \tan\alpha.$$

Ako projektil pogađa metu pri $x = d$, $y = h$, na osnovu gornjeg izraza imamo

$$h = du - \frac{gd^2}{2v_0^2}(1+u^2),$$

iz čega slijedi izraz za brzinu izbačaja

$$v_0^2 = \frac{gd}{2}\,\frac{1+u^2}{u-h/d}.$$

Minimum v_0^2 u odnsou na u pronalazimo uvjetom

$$0 \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}v_0^2 = \frac{gd}{2}\,\frac{u^2-2(h/d)u-1}{(u-h/d)^2},$$

koji je ispunjen za

$$u_{1,2} = \tan\alpha_{1,2} = h/d \pm \sqrt{1+(h/d)^2}.$$

Odabiremo pozitivno rješenje, u_1, te uvrštavanjem istoga u izraz za v_0^2 slijedi

$$(v_0^2)_{\min} = gd\left(h/d + \sqrt{1+(h/d)^2}\right).$$

Za zadane vrijednosti

$$u_1 = 2/3, \qquad \alpha_1 \simeq 56.31^\circ, \qquad (v_0)_{\min} \simeq 13.28\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Rješenje: $\tan\alpha = h/d + \sqrt{1+(h/d)^2} = 2/3$, $\alpha \simeq 56.31^\circ$, $v_0^2 = gd\left(h/d + \sqrt{1+(h/d)^2}\right)$, $v_0 \simeq 13.28\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Zadatak 1.8: Klinac ima praćku kojom može izbaciti kamen brzinom početnog iznosa $v_0 = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ te stoji na udaljenosti $d = 5\,\mathrm{m}$ od uspravnog zida. On želi kamenom pogoditi što je moguće višu točku na zidu. Odredi kut u odnosu na vodoravnu ravninu pod kojim mora izbaciti kamen. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Ishodište pravokutnog koordinatnog sustava neka se nalazi tamo gdje je praćka, x-os neka je vodoravna i usmjerena prema zidu, a y-os neka je uspravna i usmjerena prema gore. Putanja kamena izbačenog iz ishodišta brzinom iznosa v_0 pod kutom α u odnosu na x-os dana je izrazom

$$y = xu - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1+u^2), \quad \text{gdje je} \quad u = \tan\alpha.$$

Kamen pogađa zid u točki $x = d$, $y = h$, pa imamo

$$h = du - \frac{gd^2}{2v_0^2}(1+u^2).$$

Za danu udalnost do zida d i početnu brzinu kamena v_0 visina h na kojoj kamen pogađa zid ovisi o kutu izbačaja pa tražimo maksimum h u odnosu na $u = \tan\alpha$,

$$0 \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}h = d\Big(1 - \frac{gd}{v_0^2}\,u\Big),$$

što je ispunjeno za

$$u = \frac{v_0^2}{gd}.$$

Za zadane vrijednosti

$$u \simeq 2.039, \qquad \alpha \simeq 63.87^\circ.$$

Rješenje: $\alpha = \arctan[v_0^2/gd] \simeq 63.87^\circ$

Zadatak 1.9: Odredi trajanje leta zračnog broda (zeppelina) od grada A do grada B koji se nalazi $d = 160\,\mathrm{km}$ sjeverno u odnosu na grad A, ako brzina broda u odnosu na zrak iznosi $v' = 80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, a prisutan je vjetar iz smjera sjeveroistoka brzine iznosa $V = 40\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

Postupak: Neka je $\mathbf{v}'$, $v' = |\mathbf{v}'|$, brzina broda u odnosu na zrak, a $\mathbf{V}$, $V = |\mathbf{V}|$, neka je brzina zraka u odnosu na tlo. Brzina broda u odnosu na tlo može se napisati kao zbroj tih dviju brzina,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}.$$

Odredimo li iznos te brzine, $v = |\mathbf{v}|$, trajanje putovanja biti će

$$t = d/v.$$

Kako bismo odredili v pišemo

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}.$$

Jednakost kvadrata modula vektora s lijeve i s desne strane daje

$$v'^2 = v^2 - 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{V} + V^2.$$

Označimo li s θ kut što ga zatvaraju vektori $\mathbf{v}$ (smjer brzine broda u odnosu na tlo, dakle prema sjeveru) i vektor $\mathbf{V}$ (smjer gibanja zraka u odnosu na tlo, dakle prema jugoistoku) možemo pisati

$$v'^2 = v^2 - 2vV\cos\theta + V^2,$$

iz čega rješavanjem kvadratne jednadžbe slijedi

$$v_{1,2} = V\cos\theta \pm \sqrt{v'^2 - (V\sin\theta)^2} = v'\left(\beta\cos\theta \pm \sqrt{1-(\beta\sin\theta)^2}\right),$$

gdje smo uveli oznaku

$$\beta = V/v'.$$

U našem slučaju $\theta = {}^{3\pi}\!/_4$, $\beta = 1/2$, pa vidimo da jedino rješenje s pozitivnim predznakom ispred korijena (v_1) ima pozitivnu vrijednost. Konačno, trajanje putovanja je

$$t = \frac{d}{v_1} = \frac{d}{v'}\,\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}-1},$$

što za zadane vrijednosti daje $t \simeq 3.43\,\mathrm{h}$.

Rješenje: $t = (d/v')2\sqrt{2}/(\sqrt{7}-1) \simeq 3.43\,\mathrm{h}$

Zadatak 1.10: Veslač želi preći nabujalu rijeku tako da ga rijeka tokom prelaska što je moguće manje 'odnese' nizvodno. Odredi kut koji s okomicom na obalu mora zatvarati smjer u kojem tokom prelaska 'gleda' njegov čamac ako je iznos brzine rijeke u odnosu na obalu dva puta veći od brzine čamca u odnosu na vodu.

Postupak: Neka je $\mathbf{v}'$, $v = |\mathbf{v}'|$, brzina čamca u odnosu na vodu, a $\mathbf{V}$, $V = |\mathbf{V}|$ neka je brzina vode u odnosu na obalu. Smjer u kojem čamac 'gleda' podudara se sa smjerom njegova gibanja u odnosu na vodu. Označimo li s θ' kut što ga zatvaraju $\mathbf{v}'$ i $\mathbf{V}$, smjer u kojem čamac 'gleda' i okomica na obalu zatvaraju (traženi) kut

$$\alpha = \theta' - \pi/2$$

Brzinu čamca u odnosu na obalu možemo napisati kao

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}.$$

Rijeka će tim manje 'odnijeti' čamac nizvodno, čim je veći kut θ što ga zatvaraju vektor $\mathbf{V}$ (smjer toka rijeke) i vektor $\mathbf{v}$ (smjer gibanja čamca u odnosu na obalu). Koristeći definiciju skalarnog produkta kosinus kuta θ napisat ćemo kao

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{V}}{vV} = \frac{(\mathbf{v}'+\mathbf{V})\cdot\mathbf{V}}{|\mathbf{v}'+\mathbf{V}|V} = \frac{\mathbf{v}'\cdot\mathbf{V}+V^2}{(v'^2+2\mathbf{v}'\cdot\mathbf{V}+V^2)^{1/2}V}.$$

Nadalje, pišući $\mathbf{v}'\cdot\mathbf{V} = v'V\cos\theta'$,

$$\cos\theta = \frac{v'V\cos\theta'+V^2}{(v'^2+2v'V\cos\theta'+V^2)^{1/2}V} = \frac{\cos\theta'+\beta}{(1+2\beta\cos\theta'+\beta^2)^{1/2}},$$

gdje je

$$\beta = V/v'.$$

Traženom maksimumu kuta θ odgovara minimum funkcije $\cos\theta$. Uz oznake $y = \cos\theta$ i $x = \cos\theta'$ problem se svodi na nalaženje minimuma funkcije

$$y[x] = \frac{x+\beta}{\sqrt{1+2\beta x+\beta^2}}$$

u intervalu $x \in (-1, 1)$. Ekstrem nalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cdots = \frac{1+\beta x}{(1+2\beta x+\beta^2)^{3/2}},$$

koji je ispunjen za $x = -1/\beta$, odnosno za $\theta' = \arccos[-1/\beta]$. Slijedi da je traženi kut između smjera u kojem gleda čamac i okomice na obalu

$$\alpha = \arccos[-1/\beta] - \pi/2.$$

Ovdje je $\beta = 2$ te slijedi $\alpha = \pi/6 = 30°$.

Rješenje: $\alpha' = \pi/6$

Zadatak 2.1: Sanduk smo vezali konopom i pokušavamo ga vući stalnom brzinom po vodoravnoj podlozi s kojom on ima koeficijent trenja μ. Odredi kut koji konop mora zatvarati s podlogom ako želimo da napetost konopa bude što je moguće manja.

Postupak: Na sanduk djeluju gravitacijska sila iznosa mg usmjerena prema dole, reakcija podloge iznosa N usmjerena prema gore, sila trenja iznosa μN usmjerena suprotno smjeru gibanja, te napetost konopa iznosa T. Kako bi se sanduk gibao stalnom brzinom te sile moraju biti u ravnoteži. Za vertikalnu komponentu imamo

$$\sum F_y = -mg + N + T\sin\alpha = 0$$

gdje je α kut koji konop zatvara s podlogom. Za horizontalnu komponentu imamo

$$\sum F_x = T\cos\alpha - \mu N = 0.$$

Eliminacijom N iz gornjeg sustava slijedi napetost konopa

$$T = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Minimum napetosti T u odnosu na kut α pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{\mu mg}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)^2}(-\sin\alpha + \mu\cos\alpha),$$

koji je ispunjen za

$$\mu = \tan\alpha.$$

Rješenje: $\alpha = \arctan\mu$

Zadatak 2.2: Krenuvši iz mirovanja, sitno tijelo se spušta iz točke A prema točki B tako da prvi dio puta prevaljuje klizeći niz kosinu nagiba α, a ostatak puta prevaljuje klizeći po vodoravnoj polozi. Vodoravna udaljenost između točaka A i B veća je od visinske razlike među njima, a iznos brzine kojom tijelo klizi po vodoravnom dijelu puta jednak je iznosu brzine koju je tijelo imalo pri dnu kosine. Odredi nagib α tako da čitavo gibanje traje što je moguće kraće. Sile otpora smatramo zanemarivim.

Postupak: Neka je h visinska razlika između točaka A i B, a $d > h$ neka je vodoravna udaljenost među njima. Označimo li s b duljinu baze kosine tada je duljina puta koji tijelo prevaljuje klizeći niz kosinu

$$s_1 = \sqrt{h^2 + b^2},$$

dok je duljina vodoravnog dijela puta

$$s_2 = d - b.$$

Za vrijeme klizanja niz kosinu prisutna je akceleracija iznosa

$$a_1 = g \sin\alpha = gh/s_1,$$

gdje je α nagib kosine, a koristili smo $\sin\alpha = h/s_1$. S obzirom da tijelo kreće iz mirovanja trajanje klizanja niz kosinu je

$$t_1 = \sqrt{2s_1/a_1} = \sqrt{2(b^2 + h^2)/gh}.$$

Iznos brzine pri dnu kosine, a time i na vodoravnom dijelu putanje je

$$v_2 = a_1 t_1 = \sqrt{2gh},$$

te je trajanje gibanja po vodoravnom dijelu putanje

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{d - b}{\sqrt{2gh}}.$$

Ukupno trajanje putovanja je

$$t = t_1 + t_2 = \frac{1}{\sqrt{2gh}} \left(2\sqrt{b^2 + h^2} + (d - b) \right),$$

Ekstremalnu vrijednost gornjeg izraza pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} t = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2gh}} \left(\frac{2b}{\sqrt{b^2 + h^2}} - 1 \right),$$

koji je ispunjen za duljinu baze kosine

$$b = h/\sqrt{3}.$$

Da je riječ o minimumu potvrđuje druga derivacije vremena t po parametru b,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}b^2} t = \cdots = \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\frac{h}{b^2 + h^2} \right)^{3/2},$$

koja je veća od nule za sve vrijednosti $b \geq 0$. Nadalje, s obzirom da dobivena duljina baze kraća od ukupne vodoravne udaljenosti, t.j. za dobivenu vrijednost vrijedi $b < h$ dok prema zadatku imamo $h < d$, smatramo ju rješenjem zadanog problema. Konačno, traženi kut nagiba kosine je

$$\alpha = \arctan \frac{h}{b} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

Rješenje: $\alpha = \pi/3$

Zadatak 2.3: Tijelo se nalazi na kosini na udaljenosti $s = 2\,\mathrm{m}$ od njena podnožja i miruje. Polagano povećavajući nagib kosine dolazimo do nagiba $\alpha = 30^\circ$ pri kojem tijelo proklizne i nakon toga jednoliko ubrzano klizi niz kosinu. U podnožje kosine tijelo stiže $t = 3\,\mathrm{s}$ nakon što se pokrenulo. Odredi statički i dinamički koeficijent trenja tijela s kosinom. (Od trenutka kada se tijelo pokrenulo nagib kosine se više ne povećava. Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Kad tijelo mase m miruje na kosini nagiba α sila statičkog trenja $F_{\mathrm{st.}}$ u ravnoteži je s projekcijom gravitacijske sile na kosinu. Jednakost iznosa tih sila glasi

$$F_{\mathrm{st.}} = mg\sin\alpha.$$

Najveći mogući iznos sile statičkog trenja jednak je umnošku koeficijenta statičkog trenja $\mu_{\mathrm{st.}}$ i sile pritiska N tijela i kosine čiji je iznos jednak iznosu projekcije gravitacijske sile na okomicu na kosinu. Pišemo

$$(F_{\mathrm{st.}})_{\mathrm{max}} = \mu_{\mathrm{st.}} N = \mu_{\mathrm{st.}} mg\cos\alpha.$$

Uvrštavanjem maksimalnog iznosa sile trenja u gornji uvjet ravnoteže slijedi da je najveći nagib kosine pri kojem tijelo može mirovati određen koeficijentom statičkog trenja,

$$(\tan\alpha)_{\mathrm{max}} = \mu_{\mathrm{st.}}.$$

Kad tijelo klizi niz kosinu na njega djeluje projekcija gravitacijske sile na smjer gibanja te sila dinamičkog trenja suprotnog smjera i iznosa jednakog umnošku koeficijenta $\mu_{\mathrm{din.}}$ i sile pritiska N. Akceleraciju tijela možemo napisati kao

$$a = \frac{F}{m} = \frac{mg\sin\alpha - \mu_{\mathrm{din.}} mg\cos\alpha}{m} = g\,(\sin\alpha - \mu_{\mathrm{din.}}\cos\alpha).$$

Ako tijelo krenuvši iz mirovanja uz stalnu akceleraciju a prevaljuje put s u vremenu t vrijedi $s = (a/2)t^2$. Koristeći gornji izraz za akceleraciju slijedi

$$\mu_{\mathrm{din.}} = \frac{1}{\cos\alpha}\left(\sin\alpha - \frac{2s}{gt^2}\right) = \tan\alpha - \frac{2s}{gt^2\cos\alpha}.$$

Za zadanu vrijednost nagiba α pri kojoj je uvjet ravnoteže granično ispunjen (statičko trenje), ali tijelo može i kliziti niz kosinu (dinamičko trenje), imamo $\mu_{\mathrm{st.}} \simeq 0.577$, $\mu_{\mathrm{din.}} = 0.525$.

Rješenje: $\mu_{\mathrm{st.}} = \tan\alpha \simeq 0.577$, $\mu_{\mathrm{din.}} = \tan\alpha - 2s/(gt^2\cos\alpha) \simeq 0.525$

Zadatak 2.4: Krenuvši iz mirovanja te klizeći niz kosinu nagiba α uz koeficijent trenja μ tijelo prevaljuje vodoravnu udaljenost b. Odredi visinu kosine h za koju će trajanje tog klizanja biti najkraće.

Postupak: Uvijek je moguće odabrati dovoljno malenu visinu h (odn. nagib kosine α) tako da tijelo ili ne krene u klizanje, ili da njegovo ubrzanje bude toliko maleno da klizanje proizvoljno dugo traje. S druge strane, odaberemo li dovoljno veliku visinu h (odn. $\alpha \to \pi/2$) gibanje će sve više nalikovati slobodnom padu i njegovo trajanje će biti razmjerno s korijenom iz visine, što također teži u beskonačno. Očigledno je da negdje između ovih krajnjih slučajeva postoji traženi minimum. Duljina puta koji tijelo prelazi kližući niz kosinu je

$$s = \sqrt{b^2 + h^2},$$

a akceleracija tijela je

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Iz geometrije imamo odnos

$$h = b\tan\alpha,$$

te koristeći opće identitete $\sin\alpha = \tan\alpha(1+\tan^2\alpha)^{-1/2}$ i $\cos\alpha = (1+\tan^2\alpha)^{-1/2}$, trajanje klizanja niz kosinu možemo napisati kao

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \cdots = \sqrt{\frac{2b(1+u^2)}{g(u-\mu)}}, \qquad u = \tan\alpha.$$

Ekstrem gornjeg izraza pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}t = \cdots = \frac{b}{gt}\,\frac{u^2 - 2u\mu - 1}{(u-\mu)^2}$$

koji je ispunjen za

$$u_{1,2} = \mu \pm \sqrt{1+\mu^2}.$$

Rješenje s negativnim predznakom (u_2) manje je od nule te ga ovdje odbacujemo, a kao rješenje odabiremo ono s pozitivnim predznakom za koje vrijedi $u_1 \geq 1$. Njemu odgovara tražena visina

$$h = bu_1 = b\left(\mu + \sqrt{1+\mu^2}\right).$$

Rješenje: $h = b\left(\mu + (1+\mu^2)^{1/2}\right)$

Zadatak 2.5: Tijelo se nalazi pri dnu kosine nagiba $\alpha = 30^\circ$ s kojom ima koeficijent dinamičkog trenja $\mu_{\text{din.}} = 0.2$. Pokrenemo li tijelo u gibanje (klizanje) uz kosinu početnom brzinom iznosa $v_0 = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ono će se nakon nekog vremena zaustaviti, a nakon toga će početi kliziti unazad. Odredi nakon koliko vremena će se tijelo vratiti u polaznu točku. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Koordinatni sustav postavljamo tako da je x-os paralelna kosini i usmjerena je niz nju, a ishodište se nalazi u točki u kojoj u trenutku $t = t_0$ počinje gibanje. x-komponenta akceleracije tijela dana je poznatim izrazima

$$a_\pm = g(\sin\alpha \pm \mu_{\text{din.}} \cos\alpha),$$

gdje gornji predznak $(+)$ odgovara klizanju tijela uz kosinu, a donji predznak $(-)$ odgovara klizanju niz kosinu. x-komponentu brzine i x-koordinatu položaja tijela za vrijeme klizanja tijela uz kosinu možemo napisati kao

$$v[t] = v[t_0] + a_+(t - t_0), \qquad x[t] = x[t_0] + v[t_0](t - t_0) + \frac{a_+}{2}(t - t_0)^2,$$

gdje je $v[t_0] = -v_0$ i $x[t_0] = 0$. Trenutak $t = t_1$ u kojem se tijelo zaustavlja slijedi iz uvjeta $v[t_1] = 0$,

$$t_1 = t_0 + \frac{v_0}{a_+},$$

te za položaj tijela u tom trenutku imamo

$$x[t_1] = -\frac{v_0^2}{2a_+}.$$

Za vrijeme klizanja tijela niz kosinu imamo

$$x[t] = x[t_1] + v[t_1](t - t_1) + \frac{a_-}{2}(t - t_1)^2 = -\frac{v_0^2}{2a_+} + \frac{a_-}{2}(t - t_1)^2.$$

Trenutak $t = t_2$ u kojem se tijelo nalazi u početnom položaju slijedi iz uvjeta $x[t_2] = 0$,

$$t_2 = t_1 + \frac{v_0}{\sqrt{a_+ a_-}}.$$

Konačno, ukupno trajanje uspinjanja i silaska je

$$t_2 - t_0 = \frac{v_0}{a_+} + \frac{v_0}{\sqrt{a_+ a_-}} = \frac{v_0}{a_+}\left(1 + \sqrt{\frac{a_+}{a_-}}\right).$$

Za zadane vrijednosti $t_2 - t_0 \simeq 1.844\,\mathrm{s}$.

Rješenje: $t = (v_0/a_+)(1 + \sqrt{a_+/a_-})$, $a_\pm = g(\sin\alpha \pm \mu_{\text{din.}} \cos\alpha)$, $t \simeq 1.844\,\mathrm{s}$.

Zadatak 3.1: Svemirski brod mase $m = 10\,\mathrm{t}$ na koji ne djeluju sile giba se duž pravca brzinom stalnog iznosa $v = 1\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Skretanje broda bez promjene iznosa brzine ostvaruje se uključivanjem bočnog motora koji na brod djeluje silom stalnog iznosa $F = 10\,\mathrm{kN}$ i smjera koji je u svakom trenutku okomit na putanju broda. Po isključenju motora brod se nastavlja gibati duž (novog) pravca. Koliko dugo mora biti uključen motor kako bi brod skrenuo za kut $\Delta\phi = 60°$?

Postupak: Motor djeluje silom okomitom na smjer putanje što znači da ta sila ima ulogu centripetalne sila. Označavamo

$$F = F_{\mathrm{cp}}.$$

S obzirom da je ovdje centripetalna sila stalnog iznosa, te pretpostavljajući da se gibanje odvija u ravnini, putanja broda je segment kružnice. Pravac početnog (konačnog) gibanja broda tangenta je na kružnicu u točki u kojoj se motor uključuje (isključuje). Kut koji odgovara segmentu kružnice jednak je kutu što ga zatvaraju pravac početnog i pravac konačnog gibanja broda. Masa broda m, iznos brzine v, kutna brzina gibanja po kružnici

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t},$$

polumjer kružnice R, te iznos centripetalne sile, povezani su poznatom relacijom

$$F_{\mathrm{cp}} = m\omega^2 R = \frac{mv^2}{R}.$$

Slijedi

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{F_{\mathrm{cp}}}{mv},$$

odnosno

$$\Delta\phi = \int_0^{\Delta t} \frac{F_{\mathrm{cp}}}{mv}\,\mathrm{d}t = \frac{F_{\mathrm{cp}}}{mv}\,\Delta t.$$

Traženo vrijeme je

$$\Delta t = \frac{mv}{F_{\mathrm{cp}}}\,\Delta\phi.$$

Za zadane vrijednosti $\Delta t \simeq 17.45\,\mathrm{min}$.

Rješenje: $\Delta t = mv\Delta\phi/F_{\mathrm{cp}} \simeq 17.45\,\mathrm{min}$

Zadatak 3.2: Automobil se kreće brzinom stalnog iznosa po vodoravnoj podlozi kružnom putanjom, a za sobom povlači sanduk koji je za njega privezan nerastezljivim užetom duljine jednake polumjeru putanje automobila. Odredi polumjer kružnice duž koje se giba sanduk ako je iznos brzine automobila $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, polumjer putanje automobila $R = 50\,\mathrm{m}$, a sanduk s podlogom ima koeficijent trenja $\mu = 0.3$. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Pretpostavljamo da se sanduk giba duž kružnice polumjera R' kutnom brzinom koja je jednaka kutnoj brzini automobila,

$$\omega = v/R,$$

a pod djelovanjem sile trenja iznosa $F_{\mathrm{tr.}} = \mu mg$ i napetosti užeta iznosa T. Tangencijalna komponenta zbroja sila na sanduk mora biti jednaka nuli, dok radijalna komponenta zbroja sila mora biti jednaka centripetalnoj sili,

$$F_{\mathrm{tang.}} = T\sin\alpha - \mu mg = 0, \qquad F_{\mathrm{rad.}} = T\cos\alpha = F_{\mathrm{CP}} = m\omega^2 R', \tag{1}$$

gdje je α kut koji zatvaraju uže i pravac sanduk–središte. Iz razmatranja geometrije jednakokračnog trokuta čiji su vrhovi središte kružnice, položaj automobila i položaj sanduka imamo

$$R' = 2R\cos\alpha. \tag{2}$$

Eliminacijom T iz sustava (1) te korištenjem (2) slijedi

$$\frac{\mu g}{\omega^2 R'} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-(R'/2R)^2}}{R'/2R},$$

odnosno,

$$R' = 2R\sqrt{1-\left(\frac{\mu g}{2\omega^2 R}\right)^2} = 2R\sqrt{1-\left(\frac{\mu g R}{2v^2}\right)^2}.$$

Za zadane vrijednosti

$$R' \simeq 68\,\mathrm{m}.$$

Rješenje: $R' = 2R\sqrt{1-(\mu g R/2v^2)^2} \simeq 68\,\mathrm{m}$

Zadatak 3.3: Tanki homogeni štap duljine $\ell = 1\,\mathrm{m}$ i mase $m = 10\,\mathrm{kg}$ vrti se kutnom brzinom $\omega = 10\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ oko osi koja prolazi njegovim polovištem i okomita je na njega. Odredi napetost štapa u njegovom polovištu.

Postupak: Napetost štapa u njegovu polovištu prisutna je kako bi osigurala potrebnu centripetalnu silu za kružno gibanje obaju polovica štapa. Izračunat ćemo potrebnu centripetalnu silu. Element mase štapa možemo napisati kao

$$\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}r,$$

gdje je

$$\mu = m/\ell$$

linijska gustoća mase štapa, a $\mathrm{d}r$ je element duljine štapa. Kako bi se element mase štapa $\mathrm{d}m$ gibao po kružnici polumjera r kutnom brzinom ω na njega mora djelovati centripetalna sila iznosa

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{cp}} = a_{\mathrm{cp}}\mathrm{d}m = \omega^2 r\,\mathrm{d}m.$$

Štap ćemo zamisliti kao niz elemenata mase $\mathrm{d}m$ te ćemo integracijom izračunati ukupnu centripetalnu na jednu polovicu štapa,

$$F_{\mathrm{cp}} = \int \mathrm{d}F_{\mathrm{cp}} = \int \omega^2 r\,\mathrm{d}m = \int_{r=0}^{\ell/2} \omega^2 r\,\mu\,\mathrm{d}r = \frac{\mu\omega^2 r^2}{2}\bigg|_0^{\ell/2} = \frac{\mu\omega^2\ell^2}{8} = \frac{m\omega^2\ell}{8}.$$

Centripetalna sila koju smo izračunali odgovara napetosti štapa u njegovu polovištu. Za zadane vrijednosti $T = F_{\mathrm{cp}} \simeq 1234\,\mathrm{N}$.

Rješenje: $T = m\omega^2\ell/8 \simeq 1234\,\mathrm{N}$

Zadatak 3.4: n sitnih tijela ukupne mase M povezano je s pomoću n bezmasenih nerastezljivih niti jednake duljine tako da tijela i niti čine pravilni n-terokut s polumjerom opisane kružnice R. Kad se taj n-terokut vrti oko osi koja je okomita na ravninu n-terokuta i prolazi njegovim središtem, napetosti niti tijelima osiguravaju potrebnu centripetalnu silu. Odredi napetost niti ako se n-terokut vrti kutnom brzinom ω te pronađi limes tog izraza kad n teži u beskonačno. (Traženi limes opisuje napetost tankog obruča mase M i polumjera R pri vrtnji kutnom brzinom ω.)

Postupak: Kako bi se tijelo mase $m = M/n$ vrtjelo kutnom brzinom ω putanjom polumjera zakrivljenosti R na njega mora djelovati centripetalna sila iznosa

$$F_{\text{cp.}} = m\omega^2 R = M\omega^2 R/n.$$

Tu silu osiguravaju dvije napete niti koje, svaka sa svoje strane, s tangentom na kružnicu zatvaraju kut $\alpha = \pi/n$. Slijedi da iznos zbroja projekcija dvaju sila u smjeru središta n-terokuta možemo napisati kao

$$F_{\text{cp}} = 2T_n \sin[\pi/n],$$

gdje je T_n napetost niti. Slijedi

$$T_n = \frac{M\omega^2 R}{2n \sin[\pi/n]}.$$

Kad n teži u beskonačno imamo

$$T_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \frac{M\omega^2 R}{2n \sin[\pi/n]} = \frac{M\omega^2 R}{2\pi}.$$

Rješenje: $T_n = M\omega^2 R/2n \sin[\pi/n]$, $T_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n = M\omega^2 R/2\pi$

Zadatak 3.5: Sitno tijelo obješeno je s pomoću tanke nerastezljive niti duljine ℓ o čvrsto uporište i giba se opisujući kružnicu polumjera $r < \ell$ u vodoravnoj ravnini (tzv. stožasto njihalo). Odredi frekvenciju vrtnje te njen limes za $r/\ell \to 0$.

Postupak: Na tijelo djeluju gravitacijska sila iznosa mg i napetost niti iznosa T koje zajedno daju centripetalnu silu iznosa $m\omega^2 r$, gdje je ω kutna brzina, a r je polumjer putanje. S obzirom da tijelo ne akcelerira u uspravnom smjeru projekcija ukupne sile na uspravni pravac jednaka je nuli,

$$T\cos\phi - mg = 0,$$

dok je projekcija ukupne sile na vodoravnu ravninu po iznosu jednaka centripetalnoj sili,

$$T\sin\phi = m\omega^2 r,$$

gdje je ϕ kut koji nit zatvara s uspravnim pravcem. Eliminacijom T iz gornjih jednadžbi slijedi

$$\tan\phi = \frac{\omega^2 r}{g},$$

a s obzirom da iz geometrije imamo

$$\tan\phi = \frac{r}{\sqrt{\ell^2 - r^2}},$$

slijedi

$$\omega^2 = \frac{g}{\sqrt{\ell^2 - r^2}} = \frac{g}{\ell}\left(1 - (r/\ell)^2\right)^{-1/2}.$$

Za $r/\ell \to 0$ imamo

$$\lim_{r/\ell\to 0} \omega^2 = \frac{g}{\ell}.$$

Rješenje: $\omega = \sqrt{g/\ell}\,\left(1 - (r/\ell)^2\right)^{-1/4}$, $\lim_{r/\ell\to 0}\omega = \sqrt{g/\ell}$

Zadatak 3.6: Vodoravna platforma može se okretati oko vertikalne osi. Kut koji opisuje njen položaj u vremenu dan je izrazom

$$\phi[t] = \phi_0 \cos \Omega t,$$

gdje je $\phi_0 > 0$ amplituda (maksimalni kutni otklon od središnjeg položaja), a Ω je frekvencija titranja. Odredi minimalnu vrijednost koeficijenta trenja između platforme i tijela koje se nalazi na platformi na udaljenosti R od osi vrtnje ako želimo da tijelo ne proklizuje pri gibanju platforme.

Postupak: Sila koja osigurava gibanje tijela zajedno s akcelerirajućom podlogom je sila statičkog trenja čiji je maksimalni iznos $(F_{\text{tr.}})_{\max} = \mu N = \mu m g$. Tijelo će proklizati po podlozi koja akcelerira s akceleracijom iznosa a ako maksimalan iznos sile trenja nije dovoljan da osigura tijelu istu takvu akceleraciju. Uvjet $ma \leq (F_{\text{tr.}})_{\max}$ vodi na

$$\mu \geq a/g.$$

Akceleraciju podloge u točki u kojoj se nalazi tijelo računamo kao akceleraciju točke koja se giba po kružnici polumjera R pri čemu je kutna koordinata ϕ opisana zadanim izrazom. Iznos centripetalne i tangencijalne komponente akceleracije dani su poznatim izrazima

$$a_{\text{cp.}} = \omega^2 R, \qquad a_{\text{tang.}} = |\alpha| R,$$

gdje su

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\phi_0 \Omega \sin \Omega t, \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\phi_0 \Omega^2 \cos \Omega t,$$

kutna brzina i kutna akceleracija. S obzirom da su centripetalna i tangencijalna akceleracija međusobno okomite, kvadrat iznosa akceleracije možemo napisati kao

$$a^2 = a_{\text{cp.}}^2 + a_{\text{tang.}}^2 = R^2 \Omega^4 \phi_0^2 (\cos^2 \Omega t + \phi_0^2 \sin^4 \Omega t).$$

Ekstreme kvadrata iznosa akceleracije pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}a^2}{\mathrm{d}t} = \cdots = -R^2 \phi_0^2 \Omega^5 \big(1 - \phi_0^2 + \phi_0^2 \cos 2\Omega t\big) \sin 2\Omega t$$

koji je ispunjen u dva slučaja. Prvi slučaj nastupa pri $\sin 2\Omega t = 0$ i na $\Omega t = 0, \pm\pi/2, \pm\pi, \pm 3\pi/2, \ldots$, što naizmjence odgovara trenucima u kojima platforma prolazi središnjim položajem (tangencijalna akceleracija iščezava, a centripetalna komponenta je u svom maksimumu) te trenucima u kojima platforma miruje pri maksimalnom otklonu (centripetalna akceleracija iščezava, tangencijalna je maksimalna). To daje dvije ekstremalne vrijednosti iznosa akceleracije:

$$a_1 = (a_{\text{cp.}})_{\max} = R\Omega^2 \phi_0^2, \qquad a_2 = (a_{\text{tang.}})_{\max} = R\Omega^2 \phi_0.$$

Uočavamo da za $0 < \phi_0 < 1$ vrijedi $a_2 > a_1$, dok za $\phi_0 > 1$ vrijedi obrnuto. Drugi slučaj nastupa pri $\cos 2\Omega t = 1 - \phi_0^{-2}$. Koristeći $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ dobivamo treću ekstremalnu vrijednost iznosa akceleracije,

$$a_3 = R\Omega^2 (\phi_0^2 - 1/4)^{1/2},$$

koja je prisutna jedino za $\phi_0 > 1/2$, a s obzirom da vrijedi $a_3 < a_2$, ona ne može predstavljati apsolutni maksimum. Konačno, koeficijent trenja potreban da tijelo "izdrži" akceleraciju podloge određen je njenim maksimumima a_1 i a_2,

$$\mu \geq \frac{a_{\max}}{g} = \begin{cases} a_2/g = (a_{\text{tang.}})_{\max}/g = R\Omega^2 \phi_0/g & \text{za} \quad 0 < \phi_0 \leq 1 \\ a_1/g = (a_{\text{cp.}})_{\max}/g = R\Omega^2 \phi_0^2/g & \text{za} \quad \phi_0 > 1 \end{cases}$$

Rješenje: $\mu \geq R\Omega^2 \phi_0/g$ za $0 < \phi_0 \leq 1$, $\mu \geq R\Omega^2 \phi_0^2/g$ za $\phi_0 > 1$

Zadatak 4.1: Raketni motor ubrzava raketu time što u suprotnom smjeru izbacuje plin brzinom iznosa v u odnosu na raketu. Masa rakete umanjuje se za masu izbačenog plina. Ako je raketa krenula iz mirovanja, odredi brzinu koju će imati u trenutku u kojem će njena masa iznositi jednu trećinu početne mase.

Postupak: Promjena količine gibanja plina mora biti suprotna promjeni količine gibanja rakete (Newtonovi zakoni). Promjenu količine gibanja mase koja pri izbacivanju plina mase Δm ostaje u raketi možemo napisati kao

$$\Delta \mathbf{p}_{\text{raketa}} = (M - \Delta m)(\mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}) - (M - \Delta m)\mathbf{V} \simeq M\,\Delta \mathbf{V},$$

gdje je M masa rakete, $\mathbf{V}$ je brzine rakete, a zanemarili smo član $\Delta m\,\Delta \mathbf{V}$. Tome odgovara promjena količine gibanja izbačenog plina

$$\Delta \mathbf{p}_{\text{plin}} = \Delta m\,(\mathbf{V} + \mathbf{v}) - \Delta m\,\mathbf{V} = \Delta m\,\mathbf{v},$$

gdje je $\mathbf{v}$ relativna brzina izbacivanja plina. S obzirom da mora biti $\Delta \mathbf{p}_{\text{raketa}} = -\Delta \mathbf{p}_{\text{plin}}$ slijedi

$$M\,\Delta \mathbf{V} = -\Delta m\,\mathbf{v}.$$

Također moramo uvažiti da izbacivanje plina smanjuje masu rakete pa pišemo

$$\Delta m = -\Delta M.$$

Pišući u diferencijalnom obliku, ograničavajući razmatranje isključivo na pravac duž kojeg se raketa giba, te uz separaciju varijabli dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\mathrm{d}V_x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}M}{M}$$

koju ćemo integrirati od početnog (0) do konačnog (1) stanja. Slijedi

$$V_{1x} = V_{0x} + v_x \ln\left[\frac{M_1}{M_0}\right].$$

U našem slučaju $V_{0x} = 0$, $M_0/M_1 = 3$, te slijedi $V_{1x} = -v_x \ln 3$

Rješenje: $V = v \ln 3$

Zadatak 4.2: Laboratorijska vaga je baždarena tako da pokazuje $0\,\mathrm{g}$ kada se na njoj nalazi prazna epruveta. U nekom trenutku epruvetu počinjemo puniti štrcaljkom koja odozgo jednolikim mlazom ubrizgava $\Delta m = 5\,\mathrm{g}$ vode u $\Delta t = 3\,\mathrm{s}$. Brzina vode u mlazu je $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Odredi vrijednost mase koju vaga pokazuje jednu sekundu nakon što je počelo punjenje epruvete. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

Postupak: Tokom punjenja epruvete vaga pokazuje zbroj mase vode koja se u tom trenutku nalazi u epruveti i mase čija bi težina bila jednaka sili kojom vaga zaustavlja vodu koja brzinom iznosa v ulazi u epruvetu. Ako je punjenje epruvete počelo u trenutku $t = 0$ onda je masa vode u epruveti

$$m[t] = \mu t,$$

gdje je

$$\mu = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

maseni tok vode u mlazu (brzina punjenja). Iznos promjene količine gibanja elementa vode mase $\mathrm{d}m$ koji se gibao brzinom iznosa v, a zatim se zaustavio, je

$$\mathrm{d}p = \mathrm{d}m\, v.$$

Prema Newtonovom zakonu tome odgovara sila

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m\, v}{\mathrm{d}t} = \mu v.$$

Slijedi da tokom punjenja epruvete vaga prikazuje masu

$$m'[t] = m[t] + \frac{F}{g} = \mu t + \frac{\mu v}{g} = \frac{\Delta m}{\Delta t}\left(t + \frac{v}{g}\right).$$

U trenutku $t = 1\,\mathrm{s}$ vaga pokazuje $m' \simeq 3.366\,\mathrm{g}$.

Rješenje: $m'[t] = (\Delta m/\Delta t)(t + v/g) \simeq 3.366\,\mathrm{g}$

Zadatak 5.1: Kako bi se automobil kretao vodoravnom cestom brzinom iznosa $v_0 = 60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ njegov motor mora raditi snagom $P_0 = 5\,\mathrm{kW}$. Pretpostavljajući da je sila otpora razmjerna kvadratu brzine automobila, odredi najveću brzinu koju automobil može postići na vodoravnoj cesti ako je najveća snaga njegovog motora $P_{\max} = 50\,\mathrm{kW}$.

Postupak: Snaga je jednaka umnošku iznosa brzine tijela i komponente sile u smjeru gibanja. Na vodoravnoj cesti pri brzini v_0 imamo

$$P_0 = F_0 v_0,$$

dok je prema pretpostavci zadatka

$$F_0 = k v_0^2.$$

Pri maksimalnoj snazi motora imamo

$$P_{\max} = F_{\max} v_{\max}, \qquad F_{\max} = k v_{\max}^2.$$

Eliminacijom k, F_0 i $F_{\max}$ iz gornjeg sustava jednadžbi slijedi

$$v_{\max} = v_0 \left(\frac{P_{\max}}{P_0} \right)^{1/3}.$$

Za zadane vrijednosti $v_{\max} \simeq 129.3\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

Rješenje: $v_{\max} = v_0 (P_{\max}/P_0)^{1/3} \simeq 129.3\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

Zadatak 5.2: Sitno tijelo mase $m = 1\,\mathrm{kg}$ obješeno je s pomoću tanke bezmasene niti o čvrsto uporište, otklonjeno je iz ravnotežnog položaja tako da nit zatvara kut $\alpha_0 = 45^\circ$ s uspravnim pravcem, te je pušteno u gibanje iz mirovanja (njihanje). Odredi napetost niti u trenutku u kojem tijelo prolazi ravnotežnim položajem. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: U trenutku kada tijelo prolazi ravnotežnim položajem ono se giba kružnom putanjom polumjera ℓ brzinom iznosa v_0 pri čemu na njega napetost niti iznosa T usmjerena prema središtu zakrivljenosti putanje te gravitacijska sila iznosa mg suprotnog smjera. Zbroj tih dviju sila mora po iznosu biti jednak potrebnoj centripetalnoj sili,

$$F_{\mathrm{cp}} = \frac{mv_0^2}{\ell} = T - mg,$$

odnosno

$$T = m\left(\frac{v_0^2}{\ell} + g\right).$$

Brzinu v_0 odredit ćemo na osnovu očuvanja mehaničke energije,

$$E = U + K = mgh + \frac{mv_0^2}{2} = mg\ell(1 - \cos\alpha) + \frac{mv_0^2}{2}.$$

gdje je $h = \ell(1 - \cos\alpha)$ visina tijela u odnosu na ravnotežni položaj pri otklonu α. Pri maksimalnom otklonu $v = 0$ pa imamo

$$E = mg\ell(1 - \cos\alpha_0),$$

dok u ravnotežnom položaju $h = 0$ pa imamo

$$E = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Izjednačavanjem gornjih energija slijedi

$$v_0^2 = 2g\ell(1 - \cos\alpha_0).$$

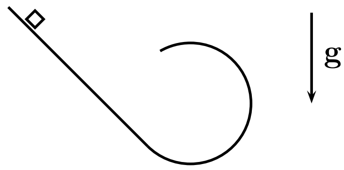
Konačno,

$$T = mg(3 - 2\cos\alpha_0).$$

Za zadane vrijednosti $T \simeq 15.56\,\mathrm{N}$.

Rješenje: $T = mg(3 - 2\cos\alpha_0) \simeq 15.56\,\mathrm{N}$

Zadatak 5.3: Sitno tijelo klizi bez trenja niz kosinu koja u svom podnožju prelazi u kružnu petlju polumjera zakrivljenosti R. Po ulasku u petlju tijelo nastavlja kliziti po njenoj unutrašnjoj strani. Odredi najmanju visinu u odnosu na najnižu točku petlje s koje valja pustiti tijelo da klizi niz kosinu želimo li da pri prolasku kroz najvišu točku petlje ono ne izgubi kontakt s podlogom (stropom).



Postupak: Ako tijelo pri prolasku kroz najvišu točku petlje ne gubi kontakt s podlogom ono se giba kružnom putanjom te zbroj reakcije podloge i gravitacijske sila koja djeluje na tijelo (obje sile okomite na putanju) mora biti po iznosu biti jednak potrebnoj centripetalnoj sili,

$$F_{\text{cp}} = \frac{mv^2}{R} = N + mg,$$

gdje je v brzina kojom se tijelo giba. Pustimo li tijelo u gibanje s visine H u odnosu na najnižu točku petlje, njegovu brzinu pri visini $h < H$ možemo odrediti na osnovu očuvanja mehaničke energije energije,

$$E = U + K = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = mgH,$$

iz čega slijedi

$$v^2 = 2g(H - h),$$

odnosno u najvišoj točki petlje gdje je $h = 2R$,

$$v^2 = 2g(H - 2R).$$

Iznos sile reakcije podloge u toj točki slijedi kao

$$N = \frac{2mg(H - 2R)}{R} - mg = \frac{mg}{R}(2H - 5R).$$

Nas zanima granični slučaj u kojem reakcija podloge iščezava. Slijedi

$$H_{\text{min}} = \frac{5R}{2}.$$

Rješenje: $H_{\text{min}} = 5R/2$.

Zadatak 5.4: Tijelo miruje na vodoravnoj podlozi po kojoj može klizati bez trenja, a vodoravnom oprugom konstante $k = 50\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ je povezano s čvrstim uporištem. U nekom trenutku na tijelo počne djelovati vodoravna sila stalnog iznosa $F_0 = 3\,\mathrm{N}$ usmjerena tako da rasteže oprugu. Odredi maksimalnu kinetičku energiju koju će tijelo postići prije nego što se zaustavi.

Postupak: Neka se ishodište x-osi podudara s početnim položajem tijela, a njen smjer sa smjerom u kojem se tijelo počinje gibati (smjerom rastezanja opruge). Ukupnu silu koja djeluje na tijelo pri položaju x možemo napisati kao

$$F[x] = F_0 - kx.$$

Radi se o konzervativnoj sili kojoj odgovara potencijalna energija

$$E_{\mathrm{pot.}}[x] = -\int_0^x F[x']\,\mathrm{d}x' = -F_0 x + \frac{1}{2}\,kx^2.$$

Ukupna energija je očuvana veličina čiju vrijednost određujemo na osnovu početnih uvjeta $x[t_0] = 0$ i $v_x[t_0] = 0$,

$$E = E_{\mathrm{kin.}} + E_{\mathrm{pot.}} = \frac{1}{2}mv_x^2 - F_0 x + \frac{1}{2}\,kx^2 = 0.$$

Kinetička energija postiže svoj maksimum pri položaju pri kojem potencijalna energija ima minimum,

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}E_{\mathrm{pot.}}[x] = -F_0 + kx,$$

koji je ispunjen kada se tijelo nalazi pri položaju

$$x = \frac{F_0}{k}.$$

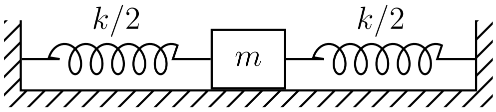
Kinetička energija pri tom položaju je

$$E_{\mathrm{kin.}} = -E_{\mathrm{pot.}} = F_0\frac{F_0}{k} - \frac{1}{2}\,k\left(\frac{F_0}{k}\right)^2 = \frac{F_0^2}{2k}.$$

Za zadane vrijednosti $E_{\mathrm{kin.}} = 0.09\,\mathrm{J}$.

Rješenje: $E_{\mathrm{kin.}} = F_0^2/2k = 0.09\,\mathrm{J}$

Zadatak 5.5: Tijelo mase m leži na vodoravnoj podlozi s kojom ima koeficijent trenja μ i dvjema je oprugama čije su konstante $k/2$ pričvršćeno za uporišta (vidi sliku). Tijelo puštamo u gibanje iz mirovanja s neke udaljenosti od središnjeg položaja. Odredi najveću dopuštenu udaljenost želimo li da tijelo, nakon što se prvi puta zaustavi, ostane mirovati.



Postupak: Neka se gibanje tijela odvija duž x-osi gdje $x = 0$ odgovara središnjem položaju sustava (opruge djeluju silama jednakog iznosa). Silu kojom opruge djeluju na tijelo te potencijalnu energiju opruga možemo napisati kao

$$F_{\rm opr}[x] = -kx, \qquad U[x] = \frac{1}{2}kx^2.$$

Kako bi tijelo koje miruje pri $x = x_0$ krenulo u gibanje, sila kojom na njega djeluju opruge mora biti po iznosu veća od najvećeg mogućeg iznosa sile trenja. Koristeći izraz za silu opruga te $F_{\rm tr} = \mu mg$ slijedi $k|x_0| > \mu mg$, odnosno

$$|x_0| > \mu mg/k.$$

Koordinatu točke u kojoj će se tijelo zaustaviti dobit ćemo razmatranjem energije u sustavu. U početnom trenutku energija se sastoji isključivo od potencijalne energine opruga,

$$E = U[x_0] = \frac{1}{2}kx_0^2,$$

dok u trenutku kada se tijelo nakon gibanja zaustavi pri $x = x_1$ imamo

$$E = U[x_1] + \mu mg|x_1 - x_0|,$$

gdje drugi član na desnoj strani opisuje rad obavljen savladavajući silu trenja. Pretpostavimo li da je $x_1 > x_0$, odnosno $x_0 < 0$, slijedi

$$x_1 = -x_0 - 2mg\mu/k.$$

Kako bi tijelo u tom položaju nastavilo mirovati, sila opruga mora biti manja ili jednaka najvećem iznosu sile trenja, $k|x_1| \le \mu mg$, što vodi na

$$|-x_0 - 2mg\mu/k| \le mg\mu/k.$$

Napišemo li sada $x_0 = -s$ (ranije smo pretpostavili $x_0 < 0$), gdje je s tražena udaljenost, gornje se razmatranje svodi na sustav nejednakosti

$$s > b > 0, \qquad |s - 2b| \le b,$$

gdje je $b = mg\mu/k$. Sustav se svodi na

$$0 < b < s \le 3b.$$

Slijedi da je najveća dopuštena udaljenost

$$s_{\rm max} = 3b = 3mg\mu/k.$$

Rješenje: $s_{\rm max} = 3mg\mu/k$

Zadatak 5.6: Tijelo mase m klizi po vodoravnoj podlozi s kojom ima koeficijent trenja μ te brzinom iznosa v_0 udara u slobodni kraj vodoravne opruge konstante k koja djeluje kao zaustavni mehanizam. Odredi najveću dopuštenu vrijednost konstante k želimo li da tijelo, nakon što se zaustavi, ne krene u gibanje unazad, već da ostane mirovati. Također odredi duljinu zaustavnog puta koja odgovara najvećoj dopuštenoj vrijednosti konstante k.

Postupak: Tijelo će se zaustaviti kada kinetičku energiju koju je imalo u trenutku u kojem je dotaknulo oprugu "pretvori" u potencijalnu energiju sabijene opruge i rad obavljen savladavanjem sile trenja duž zaustavnog puta. Pišemo $K = F_{\text{tr.}}x + U[x]$, odnosno

$$\frac{mv_0^2}{2} = \mu mgx + \frac{k}{2}x^2,$$

gdje je x duljina zaustavnog puta. Rješavanjem kvadratne jednadžbe slijedi

$$x_{1,2} = \frac{\mu mg}{k}\left(-1 \pm \sqrt{1 + kv_0^2/\mu^2 mg^2}\right),$$

gdje uočavamo da je $x_2 < 0$ te odabiremo $x = x_1 > 0$ kao rješenje. Pri tom položaju opruga djeluje silom iznosa

$$F_{\text{opruga}} = kx = \mu mg\left(-1 + \sqrt{1 + kv_0^2/\mu^2 mg^2}\right),$$

a tijelo se neće pokrenuti unazad ukoliko je iznos te sile manji od maksimalnog iznosa kojeg može poprimiti sila trenja,

$$F_{\text{opruga}} \leq (F_{\text{tr.}})_{\max} = \mu mg.$$

Uvrštavanjem izraza za F_{opruga} u gornju nejednakost slijedi

$$k \leq 3\mu^2 mg^2/v_0^2.$$

Najvećoj dopuštenoj vrijednosti, $k_{\max} = 3\mu^2 mg^2/v_0^2$, odgovara najkraći zaustavni put,

$$x_{\min} = v_0^2/\mu g.$$

Rješenje: $k_{\max} = 3\mu^2 mg^2/v_0^2$, $x_{\min} = v_0^2/\mu g$

Zadatak 5.7: Na vodoravnu transportnu traku koja se kreće stalnom brzinom iznosa $v_0 = 0.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ odozgo sipi pijesak stalnim masenim tokom $\mu = 30\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$. Odredi snagu motora potrebnu za održavanje trake u gibanju zanemarujući sve sile otpora.

Postupak: Snaga je umnožak iznosa brzine i komponente sile u smjeru gibanja. Ovdje je, prema Newtonovom aksiomu, vodoravna sila jednaka promjeni vodoravne komponente količine gibanja pijeska u jedinici vremena,

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta m\, v_0}{\Delta t},$$

gdje je Δm masa pijeska koja je u vremenu Δt pala na traku i biva ubrzana do brzine iznosa v_0. Slijedi

$$F = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\, v_0 = \mu v_0,$$

gdje je μ zadani maseni tok pijeska. Konačno, snaga je

$$P = F v_0 = \mu v_0^2.$$

Za zadane vrijednosti $P \simeq 10.8\,\mathrm{W}$.

Rješenje: $P = \mu v_0^2 \simeq 10.8\,\mathrm{W}$.

Zadatak 5.8: Vlak mase $m = 500\,\mathrm{t}$ se u početnom trenutku gibao brzinom iznosa $v_0 = 10\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, a narednih ga je $\Delta t = 30\,\mathrm{s}$ lokomotiva ubrzavala duž vodoravne pruge djelujući stalnom snagom $P = 2\,\mathrm{MW}$. Odredi duljinu prevaljenog puta u tom intervalu vremena te iznos konačne brzine. Učinak svih sila otpora smatramo zanemarivim.

Postupak: Rad koji lokomotiva obavlja počevši od trenutka $t = t_0$ povećava kinetičku energiju vlaka. Možemo pisati

$$W = P(t - t_0) = K[t] - K[t_0] = \frac{m}{2}\left(v^2[t] - v^2[t_0]\right),$$

gdje je $v[t_0] = v_0$ početna brzina vlaka. Slijedi

$$v[t] = \sqrt{v_0^2 + \frac{2P}{m}(t - t_0)},$$

te kao konačnu brzinu u trenutku $t_1 = t_0 + \Delta t$ imamo

$$v_1 = v[t_1] = v[t_0 + \Delta t] = \sqrt{v_0^2 + \frac{2P}{m}\Delta t}.$$

Prevaljeni put računamo integrirajući $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}
s = \int_{t_0}^{t_1} v\,\mathrm{d}t &= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left(v_0^2 + \frac{2P}{m}(t - t_0)\right)^{1/2} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\Delta t} \left(v_0^2 + \frac{2P}{m}t'\right)^{1/2} \mathrm{d}t' \\
&= \frac{2}{3}\,\frac{m}{2P}\left(v_0^2 + \frac{2P}{m}t'\right)^{3/2}\Bigg|_0^{\Delta t} \\
&= \frac{m}{3P}\left(\left(v_0^2 + \frac{2P}{m}\Delta t\right)^{3/2} - v_0^3\right)
\end{aligned}$$

Za zadane vrijednosti $v_1 \simeq 56.7\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, $s \simeq 323.1\,\mathrm{m}$.

Rješenje: $s = (m/3P)((v_0^2 + (2P/m)\Delta t)^{3/2} - v_0^3) \simeq 323.1\,\mathrm{m}$, $v_1 = (v_0^2 + (2P/m)\Delta t)^{1/2} \simeq 56.7\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

Zadatak 5.9: Dvije čestice se gibaju duž dva usporedna pravca razmaknuta a u suprotnim smjerivima. Mase čestica su m_1 i m_2, a iznosi njihovih brzina su v_1 i v_2. Odredi iznos ukupne kutne količine gibanja čestica u referentnom sustavu središta mase.

Postupak: Položaje i brzine čestica u referentnom sustavu laboratorija možemo napisati kao

$$\mathbf{r}_1 = v_1 t\,\mathbf{i}\,, \qquad \mathbf{v}_1 = v_1\,\mathbf{i}\,, \qquad \mathbf{r}_2 = -v_2 t\,\mathbf{i} + a\,\mathbf{j}\,, \qquad \mathbf{v}_2 = -v_2\,\mathbf{i}.$$

čemu odgovaraju položaj i brzina središta mase

$$\mathbf{r}_{\rm cm}[t] = \frac{m_1\mathbf{r}_1[t] + m_2\mathbf{r}_2[t]}{m_1+m_2} = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1+m_2}\,t\,\mathbf{i} + \frac{m_2a}{m_1+m_2}\,\mathbf{j}\,,$$

$$\mathbf{v}_{\rm cm} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1+m_2}\,\mathbf{i}\,.$$

Položaje i brzine čestica u odnosu na središte mase sada možemo napisati kao

$$\mathbf{r}_1^* = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\rm cm} = \frac{m_2(v_1+v_2)}{m_1+m_2}\,t\,\mathbf{i} - \frac{m_2a}{m_1+m_2}\,\mathbf{j}\,, \qquad \mathbf{v}_1^* = \frac{m_2(v_1+v_2)}{m_1+m_2}\,\mathbf{i}\,,$$

$$\mathbf{r}_2^* = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{\rm cm} = -\frac{m_1(v_1+v_2)}{m_1+m_2}\,t\,\mathbf{i} + \frac{m_2a}{m_1+m_2}\,\mathbf{j}\,, \qquad \mathbf{v}_1^* = -\frac{m_1(v_1+v_2)}{m_1+m_2}\,\mathbf{i}\,.$$

Ukupna količina gibanja u referentnom sustavu središta mase je

$$\mathbf{L}_\Sigma^* = \mathbf{L}_1^* + \mathbf{L}_2^* = \mathbf{r}_1^* \times \mathbf{p}_1^* + \mathbf{r}_2^* \times \mathbf{p}_2^* = \mathbf{r}_1^* \times m_1\mathbf{v}_1^* + \mathbf{r}_2^* \times m_2\mathbf{v}_2^*.$$

Koristeći gornje izraze za $\mathbf{r}_{1,2}^*$ i $\mathbf{v}_{1,2}^*$ slijedi

$$\mathbf{L}_\Sigma^* = \frac{m_1m_2a(v_1+v_2)}{m_1+m_2}\,\mathbf{k}.$$

Traženi iznos ukupne količine gibanja je modul gornjeg vektora,

$$L_\Sigma^* = \frac{m_1m_2a(v_1+v_2)}{m_1+m_2}.$$

Rješenje: $L_\Sigma^* = m_1m_2a(v_1+v_2)/(m_1+m_2)$

Zadatak 5.10: Dva jednaka svemirska broda čije su mase $m = 100\,\mathrm{t}$ povezana su užetom zanemarive mase i kruže oko njihova središta mase brzinama iznosa $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (napetost užeta brodovima osigurava centripetalnu silu). Odredi rad koji posade brodova moraju obaviti ako polaganim zatezanjem užeta žele prepoloviti udaljenost među brodovima.

Postupak: U ovom sustavu očuvana veličina je ukupna kutna količina gibanja, a rad koji posada obavlja zatezanjem užeta jednak je promjeni kinetičke energije gibanja svemirskih brodova. Iznos ukupne količine gibanja dvaju brodova mase m koji su povezani užetom duljine ℓ te se gibaju po kružnici polumjera $r = \ell/2$ brzinama iznosa v možemo napisati kao

$$L = 2rp = 2(\ell/2)mv = \ell mv.$$

S obzirom na očuvanje kutne količine gibanja slijedi

$$\ell v = \ell' v',$$

gdje su s lijeve strane veličine u početnom, a s desne (označene s $'$) strane su veličine u konačnom stanju sustava. Rad možemo pisati

$$W = \Delta K = K' - K = 2\,\frac{mv'^2}{2} - 2\,\frac{mv^2}{2} = m(v'^2 - v^2).$$

Koristeći

$$v' = \frac{\ell}{\ell'}\,v = 2v,$$

slijedi

$$W = m\left((2v)^2 - v^2\right) = 3mv^2.$$

Za zadane vrijednosti $W = 30\,\mathrm{MJ}$.

Rješenje: $W = 3mv^2 = 30\,\mathrm{MJ}$

Zadatak 5.11: U vreću pijeska mase $M = 20\,\mathrm{kg}$ koja mirno visi na užetu tako da je udaljenost njena težišta od objesišta $\ell = 5\,\mathrm{m}$ vodoravno se prema težištu ispali puščano zrno mase $m = 15\,\mathrm{g}$. Zrno se "zaustavi" u vreći, a vreća se (sa zrnom u sebi) nastavi njihati s kutom maksimalnog otklona $\alpha = 4^\circ$. Odredi brzinu puščanog zrna prije nego što se ono zabilo u vreću. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Zabijanje zrna mase m i brzine v u mirnu vreću mase M shvaćamo kao savršeno neelastični sudar te na osnovu očuvanja količine gibanja imamo

$$p = mv = (M+m)V,$$

gdje je V brzina vreće sa zrnom nakon što se zrno u njoj "zaustavilo". Na osnovu očuvanja mehaničke energije slijedi da maksimalni otklon vreće sa zrnom nastupa kada se početna kinetička energija u cijelosti pretvori u gravitacijsku potencijalnu energiju. Možemo pisati

$$E = \frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)gh = (M+m)g\ell(1-\cos\alpha).$$

Eliminacijom V iz gornjeg sustava slijedi

$$v^2 = 2g\ell\left(\frac{M+m}{m}\right)^2(1-\cos\alpha) \simeq 2g\ell\left(\frac{M}{m}\right)^2(1-\cos\alpha).$$

Za zadane vrijednosti $v \simeq 652.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Rješenje: $v = ((M+m)/m)(2g\ell(1-\cos\alpha))^{1/2} \simeq 652.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Zadatak 5.12: Dva tijela čije su mase m_1 i m_2 mogu slobodno (bez trenja) klizati duž vodoravne tračnice. Ako se tijelo m_1 savršeno elastično sudari s tijelom mase m_2 koje je do tada mirovalo, tijela se nakon sudara gibaju u suprotnim smjerovima brzinama jednakih iznosa. Odredi omjer masa $q = m_1/m_2$.

Postupak: U savršeno elastičnom čeonom sudaru u referentnom sustavu središta mase vrijedi

$$\mathbf{v}^{*}_{1,2}{}' = -\mathbf{v}^{*}_{1,2}.$$

Prelaskom u laboratorijski sustav gornja relacija glasi

$$\mathbf{v}_{1,2}{}' - \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = -(\mathbf{v}_{1,2} - \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}),$$

odnosno

$$\mathbf{v}'_{1,2} = 2\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} - \mathbf{v}_{1,2},$$

gdje je $\mathbf{v}_{\mathrm{cm}}$ brzina središta mase. Ovdje imamo

$$\mathbf{v}'_1 = 2\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} - \mathbf{v}_1, \qquad \mathbf{v}'_2 = 2\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = -\mathbf{v}'_1.$$

Eliminacijom $\mathbf{v}'_{1,2}$ slijedi

$$\mathbf{v}_1 = 4\mathbf{v}_{\mathrm{cm}}.$$

Koristeći

$$\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1\mathbf{v}_1}{m_1 + m_2}$$

slijedi

$$q = \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}.$$

Rješenje: $q = 1/3$

Zadatak 5.13: Bilijarska kugla nalijeće na mirnu bilijarsku kuglu jednake mase. Ako se prva kugla odbije pod kutom θ_1 u odnosu na smjer svog gibanja prije sudara, odredi kut koji zatvara smjer gibanja druge kugle nakon sudara sa smjerom gibanja prve kugle prije sudara. Sudar smatramo savršeno elastičnim.

Postupak: Sudar promatramo u sustavu u kojem druga kugla miruje prije sudara. U svakom sudaru očuvana je količina gibanja pa imamo

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_1 = m\mathbf{v}_1' + m\mathbf{v}_2',$$

a u savršeno elastičnom sudaru očuvana je i kinetička energija

$$E_{\text{kin.}} = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{mv_1'^2}{2}$$

(veličine označene s $'$ odnose se na stanje nakon sudara.) Gornji izrazi čine sustav

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2', \qquad v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2.$$

Kvadriranjem prve jednadžbe dobivamo

$$v_1^2 = v_1'^2 + 2\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2' + v_2'^2,$$

te oduzimanjem druge jednadžbe slijedi

$$\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2' = 0,$$

što znači da su brzine $\mathbf{v}_1'$ i $\mathbf{v}_2'$ međusobno okomite, odnosno, ako $\mathbf{v}_1'$ s $\mathbf{v}_1$ zatvara kut θ_1, onda $\mathbf{v}_2'$ s $\mathbf{v}_1$ zatvara kut

$$\theta_2 = {}^{\pi}\!/_{2} - \theta_1.$$

Može se razmotriti i slučaj u kojem je uvjet $\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2' = 0$ ispunjen time što je jedna od brzina nakon sudara jednaka nuli. Ako $\mathbf{v}_1' = 0$, onda $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_1$, što odgovara čeonom savršeno elastičnom sudaru čestica jednakih masa, te kut θ_1 nije dobro definiran. Ako $\mathbf{v}_2' = 0$, onda $\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1$, dakle sudar se "nije dogodio," te kut θ_2 nije dobro definiran.

Rješenje: $\theta_2 = {}^{\pi}\!/_{2} - \theta_1$

Zadatak 5.14: Tijelo mase $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ brzinom iznosa $v_1 = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ udara u mirno tijelo mase $m_2 = 4\,\mathrm{kg}$ te se od njega odbija unazad brzinom iznosa v_1'. U sudaru se oslobađa toplina u iznosu od $20\,\mathrm{J}$. Odredi iznos brzine v_1'.

Postupak: Oslobođena toplina odgovara gubitku kinetičke energije u sustavu. Koristeći opću relaciju

$$K - K' = (1 - k^2)\frac{m_1 m_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2}{2(m_1 + m_2)}$$

računamo koeficijent restitucije,

$$k^2 = 1 - \frac{2(K - K')(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2} = 1 - \frac{2(K - K')(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 v_1^2}.$$

brzinu $\mathbf{v}_1'$ računamo iz opće relacije za čeoni sudar

$$\mathbf{v}_1' = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} - k\frac{m_2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{m_1 + m_2}.$$

Slijedi

$$\mathbf{v}_1' = \frac{m_1\mathbf{v}_1}{m_1 + m_2} - k\frac{m_2\mathbf{v}_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - k m_2}{m_1 + m_2}\,\mathbf{v}_1.$$

Za zadane vrijednosti

$$k^2 = 0.5, \qquad \mathbf{v}_1' \simeq -0.366\,\mathbf{v}_1, \qquad v_1' = |\mathbf{v}_1'| \simeq 3.66\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Rješenje: $k^2 = 1 - 2(K - K')(m_1 + m_2)/(m_1 m_2 v_1^2) = 0.5$, $v_1' = |m_1 - k m_2| v_1/(m_1 + m_2) \simeq 3.66\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Zadatak 6.1: Homogena vodoravna greda duljine $L = 6\,\mathrm{m}$ i mase $M = 80\,\mathrm{kg}$ leži na dvama osloncima, a na njoj stoji čovjek mase $m = 60\,\mathrm{kg}$. Udaljenost lijevog oslonca od lijevog kraja grede je $x_1 = 1.5\,\mathrm{m}$, udaljenost desnog oslonca od lijevog kraja grede je $x_2 = 5.5\,\mathrm{m}$, a čovjek je od lijevog kraja grede udaljen $x_3 = 4.5\,\mathrm{m}$. Odredi iznose sila kojima oslonci djeluju na gredu. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Pravokutni koordinatni sustav postavljamo tako da se ishodište podudara s lijevim krajem grede koja leži na pozitivnom dijelu x-osi, a y-os je uspravna i usmjerena prema gore. Uz tako postavljen koordinatni sustav oslinci se nalaze pri $x = x_1$ i $x = x_2$, čovjek stoji pri $x = x_3$, a težište (središte mase) grede se nalazi pri $x = L/2$. Prema prvom uvjetu statike zbroj svih vanjskih sila koje djeluju na tijelo jednak je nuli. Ovdje razmotrimo samo uspravnu komponentu zbroja vanjskih sila koje djeluju na gredu,

$$\sum \left(\mathbf{F}^{(\mathrm{ext.})}\right)_y = -Mg - mg + F_1 + F_2 = 0,$$

gdje su F_1 i F_2 traženi iznosi sila kojima oslonci djeluju na gredu. Prema drugom uvjetu statike tijela zbroj momenata svih vanjskih sila koje na njega djeluju djeluju jednak je nuli. Ovdje je dovoljno razmotriti z-komponentu momenata,

$$\sum \left(\mathbf{M}^{(\mathrm{ext.})}\right)_z = -MgL/2 - mgx_3 + F_1x_1 + F_2x_2 = 0.$$

Iz gornjeg sustava slijedi

$$F_{1,2} = \pm\frac{(M+m)x_{2,1} - ML/2 - mx_3}{x_2 - x_1}\,g.$$

Za zadane vrijednosti

$$F_1 \simeq 637.7\,\mathrm{N}, \qquad F_2 \simeq 735.7\,\mathrm{N}.$$

Rješenje: $F_{1,2} = \pm((M+m)x_{2,1} - ML/2 - mx_3)g/(x_2 - x_1)$, $F_1 \simeq 637.7\,\mathrm{N}$, $F_2 \simeq 735.7\,\mathrm{N}$

Zadatak 6.2: Kvadar pritišćemo uz uspravan zid s kojim on ima koeficijent statičkog trenja $\mu = 0.5$ kako on ne bi klizio prema dolje. Primijenjujemo silu iznosa F čiji smjer s okomicom na zid zatvara kut α. Odredi kut α za koji je potreban najmanji iznos sile F.

Postupak: Osim sile iznosa F kojom djelujemo na kvadar, na njega djeluju gravitacijska sila iznosa mg, reakcija zida iznosa N, te sila statičkog trenja iznosa $F_{\text{tr.}}$ za koju uzimamo da djeluje prema gore, tj. pretpostavljamo da sila trenja pomaže pri savladavanju gravitacijske sile. Prema prvom uvjetu statike zbroj svih vanjskih sila koje djeluju na tijelo mora iščezavati. Zbroj vodoravnih komponenata vanjskih sila je

$$F\cos\alpha - N = 0,$$

gdje je N iznos sile reakcije kojom zid djeluje na kvadar. Zbroj uspravnih komponenata vanjskih sila je

$$F\sin\alpha + F_{\text{tr.}} - mg = 0,$$

gdje je

$$F_{\text{tr.}} \le \mu N$$

iznos sile statičkog trenja. Koristeći najveći mogući iznos sile trenja, $F_{\text{tr.}} = \mu N$, iz gornjeg sustava slijedi

$$F = \frac{mg}{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}.$$

Kut α za koji sila F ima minimum nalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{mg(\mu\sin\alpha - \cos\alpha)}{(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)^2},$$

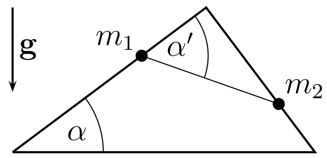
koji je ispunjen za

$$\tan\alpha = \mu^{-1}.$$

Za zadanu vrijednost koeficijenta trenja imamo $\alpha \simeq 63.4^\circ$.

Rješenje: $\tan\alpha = \mu^{-1}$, $\alpha \simeq 63.4^\circ$.

Zadatak 6.3: Žičani okvir u obliku pravokutnog trokuta postavljen je u uspravnoj ravnini tako da je njegova hipotenuza vodoravna, a pravi kut gleda uvis. Mase m_1 i m_2 klize bez trenja po katetama, a povezane su bezmasenom niti (vidi sliku). Sustav miruje u ravnotežnom položaju. Odredi kut α' koji nit zatvara s katetom po kojoj klizi masa m_1, ako ta kateta s hipotenuzom zatvara kut α.



Postupak: Ravnotežni položaj masa je onaj u kojem je gravitacijska potencijalna energija minimalna. Najprije ćemo izraziti potencijalnu energiju preko odgovarajućeg parametra, a zatim pronaći minimum. Neka je $a_{1,2}$ udaljenosti masa $m_{1,2}$ od gornjeg vrha žičanog trokuta, a ℓ neka je duljina niti. Položaji masa $m_{1,2}$ i gornji vrh žičanog trokuta čine pravkutan trokut te vrijedi

$$a_1^2 + a_2^2 = \ell^2.$$

Gravitacijsku potencijalnu energiju masa sada možemo napisati kao

$$\begin{aligned} U &= -m_1 g\, a_1 \sin\alpha - m_2 g\, a_2 \sin[\pi/2 - \alpha] \\ &= -m_1 g\, a_1 \sin\alpha - m_2 g \sqrt{\ell^2 - a_1^2}\, \cos\alpha. \end{aligned}$$

Ekstrem pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a_1} = -m_1 g\, \sin\alpha + \frac{m_2 g\, a_1 \cos\alpha}{\sqrt{\ell^2 - a_1^2}},$$

koji je ispunjen za

$$a_1 = \frac{m_1 \ell \sin\alpha}{\sqrt{m_2^2 \cos^2\alpha + m_1^2 \sin^2\alpha}}.$$

Konačno iz geometrije trokuta imamo

$$\cos\alpha' = \frac{a_1}{\ell} = \frac{m_1 \sin\alpha}{\sqrt{m_2^2 \cos^2\alpha + m_1^2 \sin^2\alpha}} = \left(1 + (m_2/m_1)^2 \cot^2\alpha\right)^{-1/2}.$$

Rješenje: $\cos\alpha' = (1 + (m_2/m_1)^2 \cot^2\alpha)^{-1/2}$

Zadatak 6.4: Odredi moment tromosti homogenog stošca polumjera baze R i mase M u odnosu na njegovu os simetrije.

Postupak: Moment tromosti tijela u odnosu na neku os definiran je izrazom

$$I = \int s^2 \, \mathrm{d}m = \int s^2 \rho \, \mathrm{d}V,$$

gdje je s udaljenost elementa mase $\mathrm{d}m = \rho \, \mathrm{d}V$ od osi. Stožac visine H i polumjera base R možemo shvatiti kao niz šupljih cilindara tankih stijenki koji su umetnuti jedan u drugog tako da u potpunosti ispunjuju unutrašnjost stošca. Visina stošca čiji polumjera je s može se napisati kao

$$h = H(1 - s/R).$$

Ako je debljina njegove stijenke $\mathrm{d}s$, onda njegov volumen možemo napisati kao umnožak njegovog oplošja $2s\pi h$ i debljine stijenke,

$$\mathrm{d}V = 2s\pi h \, \mathrm{d}s = 2s\pi H(1 - s/R) \, \mathrm{d}s.$$

Volumen stošca dobivamo integralom

$$V = \int \mathrm{d}V = \int_0^R 2s\pi H(1 - s/R) \, \mathrm{d}s = \cdots = \frac{1}{3} R^2 \pi H,$$

što je poznati rezultat iz geometrije, a omogućuje nad da volumnu gustoću mase stošca izrazimo kao

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{R^2 \pi H}.$$

Sada možemo pristupiti integriranju momenta tromosti,

$$I = \int_0^R s^2 \, \frac{3M}{R^2 \pi H} \, 2s\pi H(1 - s/R) \, \mathrm{d}s = \cdots = \frac{3}{10} M R^2.$$

Rješenje: $I = 3MR^2/10$

Zadatak 6.5: Tanka homogena vodoravna greda mase m oslonjena je na dva oslonca koji se nalaze pod samim krajevima grede. U nekom trenutku jedan se od oslonaca naglo ukloni i greda se počne gibati. Odredi silu kojom preostali oslonac djeluje na gredu u trenutku netom nakon što je jedan oslonac uklonjen.

Postupak: Netom nakon uklanjanja oslonca pod jednim krajem grede, gibanje grede možemo shvatiti kao njenu vrtnju oko suprotnog kraja. Jednadžbu gibanja za vrtnju grede duljine ℓ oko njenog kraja možemo napisati kao

$$I\alpha = M,$$

gdje je $I = m\ell^2/3$ moment tromosti u odnosu na os koja prolazi krajem grede, α je iznos kutne akceleracije, a $M = mg(\ell/2)$ je iznos momenta gravitacijske sile u odnosu na kraj grede. Slijedi

$$\alpha = \frac{3g}{2\ell}.$$

Prema tome je iznos akceleracije središta mase

$$a_{\mathrm{cm}} = \alpha \frac{\ell}{2} = \frac{3g}{4}.$$

S druge strane, jednadžbu gibanja središta mase može se napisati kao

$$ma_{\mathrm{cm}} = mg - F,$$

gdje je F iznos sile u osloncu. Izjednačavanjem akceleracije središta mase dobivene iz dviju jednadžbi gibanja slijedi

$$F = mg - ma_{\mathrm{cm}} = mg\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{mg}{4}.$$

Rješenje: $F = mg/4$

Zadatak 6.6: Neposredno nakon što je primila udarac štapom, homogena bilijarska kugla se giba klizući po vodoravnoj podlozi brzinom iznosa $v_0 = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ bez vrtnje. Odredi duljinu puta koji kugla prevali od trenutka u kojem primi udarac do trenutka u kojem nastupi kotrljanje bez klizanja ako je faktor trenja između kugle i podloge $\mu = 0.1$.

Postupak: Sila trenja uslijed klizanja kugle po podlozi dovodi do vrtnje kugle oko vodoravne osi okomite na smjer gibanja. Istovremeno, ta sila usporava gibanje središta mase kugle. Sila trenja nestaje u trenutku u kojem se zadovoljava uvjet kotrljanja bez klizanja; Kutna brzina vrtnje kugle više ne raste, a brzina središta mase više se ne smanjuje. Postavimo li koordinatni sustav tako da x-os gleda u smjeru gibanja, a y os gleda uvis, jednadžba gibanja središta kugle glasi u vremenskom intervalu od trenutka t_0 kada je kugla primila udarac do trenutka t_1 kada klizanje prestaje, jednadžba gibanja središta mase glasi

$$ma_x = -F_{\text{tr.}} = -\mu mg,$$

gdje je m masa kugle, a $F_{\text{tr.}} = \mu mg$ je iznos sile trenja. Tome odgovara brzina središta mase

$$v_x[t] = v_x[x_0] + a(t - t_0) = v_0 - \mu g(t - t_0),$$

odnosno položaj

$$x[t] = x[t_0] + v_0(t - t_0) - \frac{\mu g}{2}(t - t_0)^2.$$

Jednadžba gibanja za vrtnju kugle oko osi kroz njeno središte glasi

$$I^* \alpha_z = M_z = -RF_{\text{tr.}} = -R\mu mg,$$

gdje je $I^* = \frac{2}{5}mR^2$ moment tromosti homogene kugle mase m i polumjera R u odnosu na os kroz njeno središte. Tome odgovara kutna brzina

$$\omega_z[t] = \omega_z[t_0] + \alpha_z(t - t_0) = -\frac{R\mu mg}{I^*}(t - t_0) = -\frac{5\mu g}{2R}(t - t_0).$$

Klizanje kugle prestaje u trenutku $t = t_1$ u kojem se zadovoljava uvjet kotrljanja bez klizanja,

$$v_x[t_1] = -\omega_z[t_1]R,$$

odnosno

$$v_0 - \mu g(t_1 - t_0) = \frac{5\mu g}{2}(t_1 - t_0),$$

iz čega slijedi

$$t_1 - t_0 = \frac{2v_0}{7\mu g}.$$

Prevaljeni put od trenutka t_0 do trenutka t_1 je

$$s = x[t_1] - x[t_0] = v_0\,\frac{2v_0}{7\mu g} - \frac{\mu g}{2}\left(\frac{2v_0}{7\mu g}\right)^2 = \frac{12v_0^2}{49\mu g}.$$

Za zadane vrijednosti $s \simeq 1\,\mathrm{m}$.

Rješenje: $s = 12v_0^2/(49\mu g) \simeq 1\,\mathrm{m}$

Zadatak 6.7: Dva sitna tijela kojima su mase m_1 i m_2 pričvršćena su na krajevima tankog homogenog štapa duljine L i mase M. Na kojoj udaljenosti od kraja štapa na kojem se nalazi tijelo mase m_1 prolazi os okomita na štap, a u odnosu na koju čitav sustav ima najmanji moment tromosti?

Postupak: Moment tromosti štapa u odnosu na os koja je okomita na štap i prolazi njegvim središtem mase (polovištem) je

$$I^* = \frac{1}{12}ML^2.$$

Primjenom teorema o paralelnim osima računamo moment tromosti štapa u odnosu na paralelnu os udaljenu a od njgova kraja,

$$I[a] = M\left(\frac{L}{2} - a\right)^2 + I^*,$$

a dodamo li mase na njegove krajeve, moment tromosti je

$$\begin{aligned} I_{12}[a] &= I[a] + m_1 a^2 + m_2(L-a)^2 \\ &= (M + m_1 + m_2)a^2 - (M + 2m_2)La + \frac{1}{3}(M + 3m_2)L^2 \end{aligned}$$

Minimum gornjeg momenta tromosti nalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} I_{12}[a] = 2(M + m_1 + m_2)a - (M + 2m_2)L,$$

iz čega slijedi

$$a = \frac{(M + 2m_2)L}{2(M + m_1 + m_2)}.$$

Rješenje: $a = (M/2 + m_2)L/(M + m_1 + m_2)$

Zadatak 6.8: Preko koloture koju možemo smatrati homogenim diskom polumjera R i mase M i koji se može bez otpora okretati oko nepomične vodoravne osi prebačena je nerastezljiva nit zanemarive mase na čijim su krajevima utezi masa m_1 i m_2. Pustimo li sustav u gibanje nit pokreće koloturu pri čemu ne dolazi do proklizavanja. Odredi napetost onog dijela niti na kojem visi masa m_1.

Postupak: Postavimo li koordinatni sustav tako da vodoravna x-os gleda udesno, y-os gleda uvis, a os vrtnje koloture se podudara sa z-osi jednadžbe gibanja utega glase

$$m_1 a_{1y} = T_1 - m_1 g, \qquad m_2 a_{2y} = T_2 - m_2 g,$$

gdje su $T_{1,2}$ napetosti dijelova niti na kojima utezi vise. Uzimajući da tijelo mase m_1 visi s lijeve strane jednadžbu gibanja za vrtnju koloture možemo napisati kao

$$I^* \alpha_z^* = M_{1z}^* + M_{2z}^* = RT_1 - RT_2 = R(T_1 - T_2),$$

gdje je $I^* = MR^2/2$ moment tromosti homogenog diska u odnosu na os. S obzirom na uvjet nerastezljivosti niti te na uvjet da nit ne proklizuje po koloturi imamo

$$-a_{1y} = R\alpha_z^* = a_{2y}.$$

Eliminacijom $a_{1,2}$, α, I^* i T_2 iz gornjih jednadžbi slijedi

$$T_1 = \frac{Mm_1 + 4m_1 m_2}{M + 2m_1 + 2m_2}\, g.$$

Rješenje: $T_1 = (Mm_1 + 4m_1 m_2)g/(M + 2m_1 + 2m_2)$

Zadatak 6.9: Tanki homogeni štap duljine ℓ i mase M na čijem je jednom kraju pričvršćena čestica mase m vrti se kutnom brzinom iznosa ω oko čvrste osi koja prolazi njegovim polovištem. Čestica je zatim malom eksplozijom izbačena sa štapa u smjeru okomitom na štap i na os, nakon čega se štap nastavlja vrtjeti oko nepromijenjene osi u nepromijenjenom smjeru, ali kutnom brzinom dvostruko većeg iznosa. Odredi iznos brzine čestice u odnosu na kraj štapa netom nakon eksplozije.

Postupak: Riječ je o vrtnji štapa i čestice oko čvrste osi bez prisustva vanjskih sila pa zaključujemo da je projekcija kutne količine gibanja na tu os očuvana veličina. Koordinatni sustav postavljamo tako da se z-os podudara s osi vrtnje te tako da se u trenutku eksplozije kraj štapa s česticom mase m nalazi na pozitivnoj strani x-osi. Takvim smo izborom osigurali da neposredno prije eksplozije, te nakon nje, čestica mase m ima isključivo y-komponentu brzine različitu od nule. Neposredno prije eksplozije, pišući kutnu brzinu štapa kao $\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{k}$, gdje je iznos $\omega = |\omega_z|$ zadana veličina, zatim pišući položaj kraja štapa s masom m kao $\mathbf{r} = (\ell/2)\mathbf{i}$ te njegovu brzinu kao $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, ukupna kutna količina gibanja je

$$\mathbf{L} = I^* \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = I^* \omega_z \mathbf{k} + (\ell/2)\mathbf{i} \times m(\omega_z \mathbf{k} \times (\ell/2)\mathbf{i}) = (I^* + m\ell^2/4)\omega_z \mathbf{k},$$

gdje je $I^* = M\ell^2/12$ moment tromosti štapa u odnosu na os koja prolazi njegovim polovištem. Očivana z-komponenta ukupne kutne količine gibanja slijedi kao

$$L_z = \frac{M + 3m}{12}\,\ell^2 \omega_z.$$

Netom nakon eksplozije imamo

$$\mathbf{L}' = I^* \boldsymbol{\omega}' + \mathbf{r} \times m\mathbf{v}',$$

gdje je $\boldsymbol{\omega}'$ kutna brzina štapa, a brzinu čestice $\mathbf{v}'$ možemo napisati kao

$$\mathbf{v}' = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r} + \mathbf{u}',$$

gdje je $\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r} = (\omega_z' \ell/2)\mathbf{j}$ brzina kraja štapa, a $\mathbf{u}' = u_y' \mathbf{j}$ je tražena brzina čestice u odnosu na kraj štapa. Za z-komponentu dobivamo

$$L_z' = \frac{M + 3m}{12}\omega_z' + \frac{m\ell}{2} u_y',$$

a na osnovu očuvanja, $L_z = L_z'$, imamo

$$u_y' = (M/m + 3)\ell(\omega_z - \omega_z')/6.$$

Ovdje imamo $\omega_z' = 2\omega_z$, te iznos vektora slijedi kao

$$u' = |u_y'| = (M/m + 3)\ell\omega/6.$$

Rješenje: $u' = (M/m + 3)\ell\omega/6$

Zadatak 7.1: Izvedi izraz koji opisuje jakost privlačne centralne sile te izraz za odgovarajuću potencijalnu energiju ako period gibanja tijela u kružnoj orbiti ne ovisi o polumjeru orbite, ali ovisi o masi tijela m te je dan izrazom $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, gdje je k konstanta. Zatim odredi ukupnu energiju tijela u kružnoj orbiti polumjera r.

Postupak: U kružnoj orbiti polumjera r privlačna centralna sila čija je jakost $F[r]$ ima ulogu centripetalne sile te mora vrijediti jednakost

$$\frac{mv^2}{r} = F[r],$$

gdje je v brzina tijela u orbiti polumjera r koju možemo napisati kao

$$v = \frac{2r\pi}{T} = r\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Uvrštavanjem gornjeg izraza u izraz za jakost sile slijedi

$$F[r] = kr,$$

a s obzirom da se radi o privlačnoj sili, radijalnu komponentu sile možemo napisati kao

$$F_r[t] = -kr.$$

(Ovakvu silu prepoznajemo kao silu opruge s konstantom k.) Potencijalnu energiju računamo računamo na osnovu definicije

$$U[r] = U[0] + \int_0^r (-F_r[r'])\,\mathrm{d}r' = U[0] + \int_0^r kr'\,\mathrm{d}r' = U[0] + \frac{1}{2}kr^2.$$

Uočavamo da potencijalna energija divergira za $r \to \infty$ te odabiremo $U[0] = 0$, nakon čega imamo

$$U[r] = \frac{1}{2}kr^2.$$

(Ponovo prepoznajemo potencijalnu energiju opruge s konstantom k.) Ukupna mehanička energija tijela zbroj je kinetičke i potencijalne energije,

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kr^2 = \cdots = kr^2.$$

Rješenje: $F[r] = kr$, $U[r] = \frac{1}{2}kr^2$, $E = kr^2$

Zadatak 7.2: Pretpostavljajući da je jakost 'gravitacijske sile' (privlačne centralne sile) razmjerna s $r^{-(2+\epsilon)}$, gdje je r udaljenost čestice od središta sile, a $\epsilon > -1$ je konstanta ($\epsilon = 0$ odgovara Newtonovoj gravitaciji), odredi iznos 'gravitacijskog potencijala' na udaljenosti r_0 od centra sile ako je poznat iznos 'gravitacijskog polja' u toj točki g_0.

Postupak: U skladu s pretpostavkom, radijalnu komponentu privlačne centralne sile koja djeluje na česticu mase m pri udaljenosti r od centra sile pišemo kao

$$F_r[r] = -\gamma \frac{m}{r^{2+\epsilon}},$$

gdje je γ konstanta (za $\epsilon = 0$ imamo $\gamma = MG_\mathrm{N}$ gdje je M masa središnjeg tijela, a G_N je Newtonova gravitacijska konstanta). Toj sili odgivara gravitacijsko polje čiju radijalnu komponentu pišemo kao

$$g_r[r] = \frac{1}{m} F_r[r] = -\frac{\gamma}{r^{2+\epsilon}}.$$

Pri udaljenosti $r = r_0$ imamo

$$g_r[r_0] = -\frac{\gamma}{r_0^{2+\epsilon}} = -g_0.$$

Potencijalna energija čestice mase m je

$$U[r] = -\int_\infty^r F_r[r']\,\mathrm{d}r' = -\gamma m \int_r^\infty \frac{\mathrm{d}r'}{r'^{2+\epsilon}} = -\frac{\gamma m}{(1+\epsilon) r^{1+\epsilon}},$$

čemu odgovara gravitacijski potencijal

$$\phi[r] = \frac{1}{m} U[r] = -\frac{\gamma}{(1+\epsilon) r^{1+\epsilon}}.$$

Potencijal pri udaljenosti r_0 možemo napisati kao

$$\phi[r_0] = -\frac{\gamma}{r_0^{2+\epsilon}} \frac{r_0}{1+\epsilon} = -\frac{g_0 r_0}{1+\epsilon}.$$

Rješenje: $\phi[r_0] = -g_0 r_0/(1+\epsilon)$

Zadatak 7.3: Čestica mase m se giba u polju privlačne centralne sile (npr. gravitacijske sile). Neka su r_1 i r_2 najmanja i najveća udaljenost od centra sile koje čestica postiže tokom gibanja, a v_2 neka je iznos brzine čestice u trenutku u kojem se ona nalazi na udaljnosti r_2. Odredi rad koji centralna sila obavi nad česticom od trenutka u kojem se čestica nalazi na udaljenosti r_2 do trenutka u kojem se ona nalazi na udaljenosti r_1.

Postupak: Prema teoremu o radu i kinetičkoj energiji obavljeni rad jednak je promjeni kinetičke energije čestice,

$$W = (K)_1 - (K)_2 = \frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2),$$

gdje je v_1 za sada nepoznat iznos brzine čestice u trenutku u kojem se ona nalazi na udaljnosti r_1. Iznos brzine v_1 odredit ćemo na osnovu očuvanja kutne količine gibanja čestice u polju centralne sile,

$$L = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = |\mathbf{r} \times (m\mathbf{v})| = konst.$$

S obzirom da je u trenutku kada se čestica nalazi bilo na najmanjoj bilo na najvećoj udaljenosti od centra sile njena brzina $\mathbf{v}$ okomita na vektor $\mathbf{r}$, vrijedi

$$L = mr_1v_1 = mv_2r_2,$$

iz čega slijedi

$$v_1 = \frac{r_2}{r_1}v_2.$$

Obavljeni rad slijedi kao

$$W = \frac{mv_2^2}{2}\left((r_2/r_1)^2 - 1\right).$$

Rješenje: $W = mv_2^2\left((r_2/r_1)^2 - 1\right)/2$

Zadatak 7.4: Dvije zvijezde se gibaju po kružnim orbitama oko središta mase čitavog sustava brzinama stalnih iznosa v_1 i v_2. Polumjer jedne od orbita je r_1. Odredite polumjer druge orbite i mase obiju zvijezda. (Rezultate izrazi preko v_1, v_2 i r_1.)

Postupak: Iz jednakosti perioda slijedi polumjer orbite druge zvijezde,

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1} = \frac{2\pi r_2}{v_2}, \qquad r_2 = \frac{v_2}{v_1} r_1.$$

Centripetalna sila odgovorna za kružno gibanje zvijezda realizirana je njihovim međusobnim gravitacijskim privlačenjem,

$$\frac{m_1 v_1^2}{r_1} = G_\mathrm{N} \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{m_2 v_2^2}{r_2},$$

iz čega slijedi

$$m_{1,2} = \frac{(r_1 + r_2)^2}{G_\mathrm{N}} \frac{v_{2,1}^2}{r_{2,1}},$$

odnosno uz korištenje izraza za r_2,

$$m_1 = \frac{r_1 v_2}{G_\mathrm{N} v_1} (v_1 + v_2)^2, \qquad m_2 = \frac{r_1}{G_\mathrm{N}} (v_1 + v_2)^2.$$

Rješenje: $r_2 = v_2 r_1 / v_1$, $m_1 = r_1 (v_2/v_1)(v_1 + v_2)^2 / G_\mathrm{N}$, $m_2 = r_1 (v_1 + v_2)^2 / G_\mathrm{N}$

Zadatak 7.5: Odredi jakost gravitacijskog polja u točki koja se nalazi na osi tankog homogenog diska mase M i polumjera R na udaljenosti z od njegova središta.

Postupak: Jakost gravitacijskog polja $\mathbf{g}$ dobit ćemo s pomoću općenitih relacija

$$\mathbf{g}[\mathbf{r}] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{r}}\Phi[\mathbf{r}], \qquad \Phi[\mathbf{r}] = -G_\mathrm{N}\int \frac{\mathrm{d}m}{r'},$$

gdje je Φ gravitacijski potencijal, a r' je udaljenost elementa mase $\mathrm{d}m$ od točke $\mathbf{r}$. Element mase diska oblika prstena polumjera s i širine $\mathrm{d}s$ može se napisati kao umnožak površinske gustoće mase $\sigma = M/(R^2\pi)$ i elementa površine $\mathrm{d}S = 2s\pi\,\mathrm{d}s$,

$$\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}S = \frac{M}{R^2\pi}\,2s\pi\,\mathrm{d}s = \frac{2M}{R^2}\,s\,\mathrm{d}s,$$

dok je udaljenost od prstena do točke na osi diska koja je udaljna z od njegova središta

$$r' = \sqrt{s^2+z^2}.$$

Potencijal u točkama na osi diska računamo integrirajući po svim prstenovima od kojih se disk sastoji,

$$\Phi[z] = -G_\mathrm{N}\frac{2M}{R^2}\int_0^R \frac{s\,\mathrm{d}s}{\sqrt{s^2+z^2}} = -G_\mathrm{N}\frac{2M}{R^2}\left(\sqrt{R^2+z^2}-z\right).$$

Gravitacijsko polje na osi diska ima, zbog simetrije, isključivo komponentu u smjeru same osi, a na udaljenosti z od središta diska jakost polja slijedi kao

$$g[z] = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Phi[z]\right| = G_\mathrm{N}\frac{2M}{R^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+(R/z)^2}}\right).$$

Rješenje: $g[z] = 2MG_\mathrm{N}R^{-2}\big(1-1/\sqrt{1+(R/z)^2}\big)$

Zadatak 8.1: U automobilu koji se kreće duž zavoja brzinomjer pokazuje stalan iznos brzine $v = 100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, a dinamometar na kojem "mirno" visi uteg mase $m = 1\,\mathrm{kg}$ pokazuje silu iznosa $F = 12\,\mathrm{N}$. Odredi polumjer zakrivljenosti zavoja. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Jednadžba gibanja tijela mase m u neinercijalnom referentnom sustavu $\mathcal{S}'$ koji akcelerira akceleracijom $\mathbf{A}$ u odnosu na inercijalni referentni sustav $\mathcal{S}$ općenito glasi

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{A},$$

gdje je $\mathbf{a}'$ akceleracija u sustavu $\mathcal{S}'$, $\mathbf{F}$ je stvarna sila koja djeluje na česticu, a član $-m\mathbf{A}$ se naziva pseudosilom. Ovdje sustav $\mathcal{S}'$ vezujemo uz automobil čija je akceleracija usmjerena prema središtu zakrivljenosti zavoja, iznos akceleracije je $A = v^2/R$, a R je polumjer zakrivljenosti zavoja. Postavimo li koordinatni sustav tako da je x'-os vodoravna i gleda prema središtu zakrivljenosti zavoja, a y'-os je uspravna i usmjerena prema gore, imamo

$$\mathbf{A} = \frac{v^2}{R}\,\mathbf{i},$$

dok stvarnu silu na tijelo koja se sastoji od napetosti dinamometra i gravitacijske sile pišemo kao

$$\mathbf{F} = T(\cos\alpha\,\mathbf{j} + \sin\alpha\,\mathbf{i}) - mg\,\mathbf{j},$$

gdje je α kut koji dinamometar zatvara s uspravnim pravcem. S obzirom da masa u automobilu mirno visi imamo $\mathbf{a}' = 0$ te se jednadžba gibanja svodi na vektorsku jednadžbu

$$0 = T(\cos\alpha\,\mathbf{j} + \sin\alpha\,\mathbf{i}) - mg\,\mathbf{j} - \frac{mv^2}{R}\,\mathbf{i},$$

odnosno raspisano po komponentama

$$\frac{mv^2}{R} = T\sin\alpha, \qquad mg = T\cos\alpha.$$

Eliminacijom kuta α slijedi

$$R = \frac{mv^2}{T\sin\alpha} = \frac{mv^2}{T\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{mv^2}{T\sqrt{1-(mg/T)^2}} = \frac{mv^2}{\sqrt{T^2-(mg)^2}}.$$

Za zadane vrijednosti

$$R \simeq 111.6\,\mathrm{m}.$$

Rješenje: $R = mv^2/\sqrt{T^2-(mg)^2} \simeq 111.6\,\mathrm{m}$

Zadatak 8.2: Saonice klize niz kosinu uz faktor trenja μ, a u saonicama na niti "mirno" visi sitno tijelo. Odredi tangens kuta koji nit zatvara s okomicom na kosinu.

Postupak: Ako je α kut koji kosina zatvara s vodoravnom ravninom onda je iznos akceleracije saonica koje uz koeficijent trenja μ klize niz kosinu

$$A = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

U referentnom sustavu $\mathcal{S}'$ vezanom uz saonice uvodimo koordinatni sustav tako da x'-os gleda u smjeru relativnog gibanja saonica u odnosu na kosinu, a y' os je okomita na kosinu i gleda prema gore. Jednadžba gibanja tijela mase m u tom sustavu glasi

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{A} = \mathbf{F} - mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\mathbf{i} = 0,$$

gdje je $\mathbf{F}$ stvarna sila koja djeluje na tijelo, a s obzirom da tijelo mrno visi u saonicama imamo $\mathbf{a}' = 0$. Stvarna sila $\mathbf{F}$ se ovdje sastoji od napetosti niti T na kojoj tijelo visi te od gravitacijske sile. Označimo li s β kut koji nit zatvara s y'-osi (okomicom na kosinu) možemo pisati

$$\mathbf{F} = T(-\sin\beta\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j}) + mg(\sin\alpha\,\mathbf{i} - \cos\alpha\,\mathbf{j}).$$

Uvrštavanjem u jednadžbu gibanja te raspisivanjem po komponentama slijedi

$$mg\mu\cos\alpha = T\sin\beta, \qquad mg\cos\alpha = T\cos\beta,$$

te dijeljenjem prve jednadžbe drugom slijedi

$$\tan\beta = \mu.$$

Rješenje: $\tan\beta = \mu$

Zadatak 8.3: Homogena kugla miruje na vodoravnoj podlozi koja u nekom trenutku počne ubrzavati akceleracijom iznosa A u vodoravnom smjeru. Odredi akceleraciju središta kugle u odnosu na mirni referentni sustav ako pri njenu gibanju ne dolazi do proklizavanja po podlozi.

Postupak: Akceleraciju središta mase kugle u odnosu na mirni (inercijalni) referentni sustav možemo napisati kao

$$\mathbf{a} = \mathbf{A} + \mathbf{a}',$$

gdje je $\mathbf{a}'$ je akceleracija središta mase kugle u odnosu na ubrzani (neinercijalni) sustav vezan uz podlogu, a $\mathbf{A}$ je akceleracija podloge u odnosu na mirni sustav. Jednadžba gibanja čestice mase m u ubrzanom sustavu glasi

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{A},$$

gdje je $\mathbf{F}$ stvarna sila, a član $-m\mathbf{A}$ je tzv. pseudosila. Gibanje kugle mase M i polumjera R u danom trenutku možemo opisati kao vrtnju kugle oko vodoravne osi koja prolazi dodirnom točkom kugle i podloge, a okomita je na smjer relativnog gibanja podloge u odnosu na mirni sustav. Pritom u odnosu na odabranu os jedino pseudosila stvara moment sile te možemo pisati

$$I\alpha' = I\frac{a'}{R} = RMA,$$

gdje je α' iznos kutne akceleracije, a' je iznos akceleracije središta kugle, a

$$I = MR^2 + \frac{2}{5}MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$$

je moment tromosti kule određen s pomoću teorema o paralelnim osima. Slijedi

$$a' = \frac{5}{7}A.$$

S obzirom da kugla u referentnom sustavu podloge ubrzava "unazad" u odnosu na smjer u kojem podloga ubrzava u odnsou na mirni sustav, iznos akceleracije središta kugle u odnosu na mirni sustav možemo napisati kao

$$a = A - a' = \frac{2}{7}A.$$

Rješenje: $a = 2A/7$

Zadatak 9.1: Odredi iznos brzine i količine gibanja elektrona ubrzanog iz mirovanja razlikom električnog potencijala $U = 500\,\mathrm{kV}$. (Masa elektrona $m = 511\,\mathrm{keV}\,c^{-2}$.)

Postupak: Prolaskom kroz razliku potencijala U električna sila je ubrzavajući česticu mase m i naboja q obavila je rad $W = qU$ koji je, prema teoremu o radu i kinetičkoj energiji, jednak promjeni kinetičke energije čestice. S obzirom da je početna kinetička energija jednaka nuli imamo

$$W = q\,U = K = E - mc^2,$$

gdje je E relativistička energija čestice, a mc^2 je njena energija mirovanja. Koristeći izraz za relativističku energiju

$$E = \gamma mc^2, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta = \frac{v}{c},$$

slijedi

$$\gamma = 1 + \frac{qU}{mc^2}, \qquad \beta^2 = 1 - \left(\frac{mc^2}{mc^2 + qU}\right)^2,$$

odnosno

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{mc^2 + qU}\right)^2}.$$

Količinu gibanja možemo računati na osnovu relativističkog izraza $p = \gamma mv$, ili jednostavnije s pomoću opće relacije

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2,$$

iz koje dobivamo

$$p = \frac{qU}{c}\sqrt{1 + \frac{2mc^2}{qU}}.$$

Za elektron $q = e$ (elementarni naboj), te za zadane vrijednosti

$$v = 0.8629\,c, \qquad p = 872.3\,\mathrm{keV}\,c^{-1}.$$

Rješenje: $v = 0.8629\,c$, $p = 872.3\,\mathrm{keV}\,c^{-1}$

Zadatak 9.2: Putnička agencija oglasila je putovanje do zvijezde udaljene deset godina svjetlosti (D) koje za putnike prema njihovu vlastitu vremenu traje samo pet godina ($\Delta t'$). Odredi brzinu svemirskog broda s kojim bi se takvo putovanje moglo ostvariti.

Postupak: Neka je $\mathcal{S}$ referentni sustav u kojem polazište i odredište miruju, a $\mathcal{S}'$ neka je sustav vezan uz brod koji se u odnosu na $\mathcal{S}$ giba brzinom iznosa v. Koordinate polaska broda u sustavu $\mathcal{S}$ možemo napisati kao

$$x_0 = 0, \qquad t_0 = 0,$$

dok koordinate dolaska broda u odredište možemo napisati kao

$$x_1 = D, \qquad t_1 = \frac{D}{v},$$

gdje je D udaljenost između polazišta i odredišta. Koordinate tih događaja možemo napisati u sustavu $\mathcal{S}'$ s pomoću Lorenzovih transformacija,

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Koordinate polaska u sustavu $\mathcal{S}'$ su

$$x'_0 = 0, \qquad t'_0 = 0,$$

dok su koordinate dolaska u odredište

$$x'_1 = 0, \qquad t'_1 = \frac{D}{v}\sqrt{1-(v/c)^2}.$$

Prema vremenu u sustavu $\mathcal{S}'$ trajanje putovanja je

$$\Delta t' = t'_1 - t'_0 = \frac{D}{v}\sqrt{1-(v/c)^2},$$

što odgovara vlastitu vremenu putnika koji u tom sustavu miruje, odnosno trajanju putovanja kako je oglašeno. Slijedi da relativna brzina sustava $\mathcal{S}'$ u odnosu na sustav $\mathcal{S}$, odnosno brzina broda, mora biti

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{c\,\Delta t'}{D}\right)^2}}.$$

Za zadane vrijednosti $D = 10\,\mathrm{god}\,c$, $\Delta t' = 5\,\mathrm{god}$, dobivamo $v \simeq 0.894\,c$.

Rješenje: $v = c/\sqrt{1 + (c\,\Delta t'/D)^2} \simeq 0.894\,c$

Zadatak 9.3: U nekom se referentnom sustavu dva svemirska broda gibaju brzinama jednakih iznosa $v = 0.75\,c$, ali duž međusobno okomitih pravaca. Odredi iznos relativne brzine jednog broda u odnosu na drugi, odnosno, iznos brzine jednog broda u referentnom sustavu u kojem onaj drugi miruje.

Postupak: U referentnom sustavu $\mathcal{S}$ u kojem je gibanje opisano komponente vektora brzine prvog broda možemo napisati kao

$$u_{1x} = v, \qquad u_{1y} = u_{1z} = 0,$$

dok za drugi brod pišemo

$$u_{2x} = 0, \qquad u_{2y} = v, \qquad u_{2z} = 0.$$

Uvedemo li sustav $\mathcal{S}'$ koji se giba s prvim brodom, dakle brzinom iznosa v u smjeru x-osi, komponente vektora brzine ćemo dobiti s pomoću transformacija

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \qquad u'_{y,z} = \frac{u_{y,z}\sqrt{1-(v/c)^2}}{1 - u_x v/c^2}.$$

Za prvi brod slijedi $u'_{1x} = u'_{1y} = u'_{1z} = 0$, a za drugi imamo

$$u'_{2x} = -v, \qquad u'_{2y} = v\sqrt{1-(v/c)^2}, \qquad u'_{2z} = 0.$$

Iznos brzine drugog broda u sustavu $\mathcal{S}'$ je

$$u'_2 = \sqrt{(u'_{2x})^2 + (u'_{2y})^2 + (u'_{2z})^2} = v\,\sqrt{2-(v/c)^2}.$$

Za zadane vrijednosti $u'_2 \simeq 0.899\,c$.

Rješenje: $u'_2 = v\,\sqrt{2-(v/c)^2} \simeq 0.899\,c$

Zadatak 10.1: Odredi temperaturu do koje je potrebno zagrijati zrak u balonu kako bi on lebdio ako je ukupna masa opreme i letača (ne računajući masu zraka u balonu) $m_\mathrm{b} = 600\,\mathrm{kg}$, volumen balona je $V_\mathrm{b} = 2800\,\mathrm{m}^3$, a temperatura vanjskog zraka je $T_0 = 20°\mathrm{C}$. (Gustoća zraka pri temperaturi $20°\mathrm{C}$ je $\rho_0 = 1.2\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Tlak vrućeg zraka unutar balona jednak je atmosferskom tlaku.)

Postupak: Balon lebdi ako je njegova težina uravnotežena uzgonom u atmosferi. Težina balona se sastoji od težine same opreme i od težine zraka u balonu te njen iznos možemo napisati kao

$$G = m_\mathrm{b} g + \rho V_\mathrm{b} g,$$

gdje je ρ gustoća vrućeg zraka. Iznos sile uzgona je

$$F_\mathrm{u} = \rho_0 V_\mathrm{b} g,$$

gdje je ρ_0 gustoća vanjskog zraka. Gustoću zraka možemo općenito napisati kao

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{pM}{RT},$$

gdje smo njprije masu zraka m napisali kao produkt množine n i srednje molarne mase M, a zatim smo iskoristili jednadžbu stanja idealnog plina, $pV = nRT$. S obzirom da su ovdje vrući zrak unutar balona i vanjski zrak pri jednakom tlaku slijedi

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T_0}{T}.$$

Konačno, uvrštavanjem gornjeg omjera u $G = F_\mathrm{u}$ slijedi

$$m_\mathrm{b} g + \rho_0 \frac{T_0}{T} V_\mathrm{b} g = \rho_0 V_\mathrm{b} g,$$

odnosno

$$T = \frac{T_0}{1 - \frac{m_\mathrm{b}}{\rho_0 V_\mathrm{b}}},$$

što za zadane vrijednosti daje $T \simeq 357\,\mathrm{K} \simeq 83.7°\mathrm{C}$.

Rješenje: $T = T_0/(1 - m_\mathrm{b}/\rho_0 V_\mathrm{b}) \simeq 83.7°\mathrm{C}$.

Zadatak 10.2: Vaga na kojoj se nalazi posuda s vodom pokazuje vrijednost mase $m_1 = 3.8\,\mathrm{kg}$. Uronimo li u vodu kruto tijelo mase $m_\mathrm{t} = 1.1\,\mathrm{kg}$ obješeno o tanku nit tako da ono ne dodiruje dno posude, ali tako da bude u cijelosti potopljeno, vaga pokazuje vrijednost mase $m_2 = 4.2\,\mathrm{kg}$. Odredi gustoću krutog tijela. (Gustoća vode $\rho_\mathrm{v} = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.)

Postupak: Na uronjeno tijelo volumena V_t voda djeluje silom uzgona čiji je iznos

$$F_\mathrm{u} = \rho_\mathrm{v} V_\mathrm{t} g,$$

gdje je ρ_v gustoća vode. Na osnovu trećeg Newtonovog aksioma zaključujemo da silom istog iznosa, ali suprotnog smjera, tijelo djeluje na vodu. Stoga razlika u masama koje pokazuje vaga

$$m_2 - m_1 = \frac{1}{g} F_\mathrm{u} = \rho_\mathrm{v} V_\mathrm{t}.$$

Tražena gustoća tijela je

$$\rho_\mathrm{t} = \frac{m_\mathrm{t}}{V_\mathrm{t}} = \rho_\mathrm{v} \frac{m_\mathrm{t}}{m_2 - m_1},$$

što za za zadane vrijednosti daje $\rho_\mathrm{t} = 2750\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Rješenje: $\rho_\mathrm{t} = \rho_\mathrm{v} m_\mathrm{t}/(m_2 - m_1) = 2750\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$

Zadatak 10.3: U uspravno postavljenoj cilindričnoj posudi površine vodoravnog presijeka $S = 100\,\mathrm{cm}^2$ nalazi se voda na kojoj pluta komad stiropora, a na stiroporu se nalazi aluminijski uteg mase $m_{\mathrm{Al}} = 200\,\mathrm{g}$. U nekom se trenutku "čamac prevrne"; Uteg tone na dno posude, a stiropor ostaje plutati. Odredi za koliko se spustila razina vode u posudi. (Gustoća aluminija $\rho_{\mathrm{Al}} = 2.7\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, gustoća vode $\rho_{\mathrm{voda}} = 1.0\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$.)

Postupak: Plutajuće tijelo istiskuje volumen vode koji masom odgovara masi plutajućeg tijela. Prije "prevrtanja čamca" masa plutajućeg tijela je

$$m_1 = m_{\mathrm{st.}} + m_{\mathrm{Al}},$$

a tome odgovara volumen istisnute vode

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho_{\mathrm{voda}}} = \frac{m_{\mathrm{st.}} + m_{\mathrm{Al}}}{\rho_{\mathrm{voda}}}.$$

Nakon "prevrtanja čamca" i potonuća utega volumen istisnute vode je zbroj volumena utega i volumena istisnutog plutajućim stiroporom,

$$V_2 = V_{\mathrm{Al}} + \frac{m_{\mathrm{st.}}}{\rho_{\mathrm{voda}}} = \frac{m_{\mathrm{Al}}}{\rho_{\mathrm{Al}}} + \frac{m_{\mathrm{st.}}}{\rho_{\mathrm{voda}}}.$$

Razlika volumena istisnute vode do koje dolazi "prevrtanjem čamca" je

$$\Delta V = V_2 - V_1 = m_{\mathrm{Al}} \left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{Al}}} - \frac{1}{\rho_{\mathrm{voda}}} \right),$$

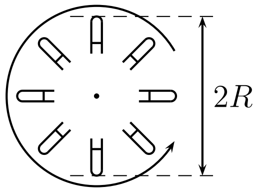
a odgovarajuća razlika razine vode u posudi je

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{m_{\mathrm{Al}}}{S} \left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{Al}}} - \frac{1}{\rho_{\mathrm{voda}}} \right).$$

Za zadane vrijednosti $\Delta h \simeq -1.259\,\mathrm{cm}$.

Rješenje: $\Delta h = m_{\mathrm{Al}}(1/\rho_{\mathrm{Al}} - 1/\rho_{\mathrm{voda}})/S \simeq -1.259\,\mathrm{cm}$

Zadatak 10.4: U laboratorijskom uređaju za centrifugu, epruvete s ispitivanim uzorcima tekućine se vrte u ravnini tako da dna epruveta gledaju "prema van", a njihovi otvori gledaju prema osi vrtnje. Odredi tlak pri dnu epruvete u kojoj se nalazi voda i koja u takvom uređaju čini 6000 okretaja u minuti ($\omega = 200\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$) ako dno epruvete opisuje kružnicu polumjera $R = 15\,\mathrm{cm}$, a "dubina" vode u epruveti iznosi $d = 5\,\mathrm{cm}$. Epruvete su tokom rada uređaja "odozgo" otvorene, a učinak gravitacijske sile se može zanemariti. (Gustoća vode $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, atmosferski tlak $p_{\mathrm{atm.}} = 101\,\mathrm{kPa}$.)



Postupak: Jednadžbu gibanja za sloj fluida u epruveti koji se nalazi između radijalnih udaljenosti r i $r + \Delta r$ od osi vrtnje možemo u neinercijalnom referentnom sustavu vezanom uz epruvetu napisati kao

$$\Delta m\, a' = p[r]S - p[r + \Delta r]S + \Delta m\, \omega^2 r,$$

gdje je $\Delta m = \rho S\,\Delta r$ masa elementa fluida, S je površina poprečnog presjeka epruvete, a a' je radijalna akceleracija elementa fluida u odnosu na epruvetu. S desne strane jednadžbe gibanja imamo sile na sloj fluida uslijed tlaka p u fluidu te centrifugalnu pseudosilu čiji je iznos $\Delta m\,\omega^2 r$. S obzirom da se fluid u odnosu na epruvetu ne giba imamo $a' = 0$ te slijedi

$$\rho\omega^2 r = \frac{p[r + \Delta r] - p[r]}{\Delta r},$$

gdje u limesu $\Delta r \to 0$ desnu stranu prepoznajemo kao derivaciju $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r$, odnosno, imamo diferencijalnu jednadžbu koju možemo napisati kao

$$\mathrm{d}p = \rho\omega^2 r\,\mathrm{d}r.$$

Integracijom gornje jednadžbe počevši od površine vode koja se nalazi pri $r = R - d$ i gdje je $p = p_{\mathrm{atm.}}$ do dna epruvete koje se nalazi pri $r = R$ imamo

$$p \,\Big|_{p_{\mathrm{atm.}}}^{p[R]} = \frac{1}{2}\,\rho\omega^2 r^2 \,\Big|_{R-d}^{R},$$

odnosno, tlak pri dnu epruvete je

$$p[R] = p_{\mathrm{atm.}} + \frac{1}{2}\rho\omega^2 \left(R^2 - (R - d)^2\right) = p_{\mathrm{atm.}} + \frac{1}{2}\rho\omega^2 d\,(2R - d)\,.$$

Za zadane vrijednosti $p[R] \simeq 2.568 \times 10^6\,\mathrm{Pa}$.

Rješenje: $p = p_{\mathrm{atm.}} + \rho\omega^2 d\,(2R - d)\,/2 \simeq 2.568 \times 10^6\,\mathrm{Pa}$

Zadatak 10.5: Pri dnu cilindrične, uspravno postavljene, odozgo otvorene posude promjera $D = 0.4\,\mathrm{m}$ probušen je kružni otvor promjera $d = 1\,\mathrm{cm}$ kroz koji voda iz posude slobodno istječe u atmosferu. U početnom trenutku visina vode u posudi je $H_0 = 0.2\,\mathrm{m}$ iznad njezina dna. Odredi nakon koliko će vremena sva voda iz posude isteći. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Neka je h visina vode u posudi, $v_1 = -\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$ neka je iznos brzine spuštanja površine, a v_2 neka je iznos brzine istjecanja vode pri dnu posude. Jednadžba kontinuiteta $Sv = const.$ primijenjena pri površini vode u posudi i pri njenom dnu daje uvjet $S_1v_1 = S_2v_2$, gdje je $S_1 = D^2\pi/4$ i $S_2 = d^2\pi/4$, odnosno

$$v_1 = -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{S_2}{S_1}\,v_2 = \frac{d^2}{D^2}\,v_2.$$

Nadalje, Bernoullijeva jednadžba $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = const.$ primijenjena pri površini vode u posudi (lijeva strana) i pri njenom dnu (desna strana) daje uvjet

$$p_{\mathrm{atm.}} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = p_{\mathrm{atm.}} + \frac{1}{2}\rho v_2^2,$$

gdje s obzirom na $v_1 \ll v_2$ zanemarujemo član s v_1^2 te dobivamo izraz za brzinu istjecanja kroz otvor pri dnu,

$$v_2 = \sqrt{2gh},$$

(što je tzv. Torricellijev zakon istjecanja). Slijedi

$$v_1 = -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh}.$$

Provodimo separaciju varijabli

$$-\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g}\,\mathrm{d}t,$$

a nakon integracije od početnog stanja ($t = 0$, visina vode $h = H$) do konačnog stanja ($t = T$, $h = 0$) imamo

$$-2\sqrt{h}\,\Big|_H^0 = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g}\,t\,\Big|_0^T,$$

iz čega slijedi trajanje istjecanja vode iz posude,

$$T = \frac{D^2}{d^2}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Za zadane vrijednosti $T \simeq 323.1\,\mathrm{s}$.

Rješenje: $T = (D/d)^2\sqrt{2h/g} \simeq 323.1\,\mathrm{s}$

Zadatak 10.6: Glatka unutrašnjost uspravno postavljenog, odozgo i odozdo otvorenog cilindra (cijevi) premazana je tankim slojem ulja. U cilindar odozgo umetnemo klip (valjak) mase $m = 3\,\mathrm{kg}$ čija je visina $h = 15\,\mathrm{cm}$ znatno manja od visine cijevi, a čiji je promjer $D = 10\,\mathrm{cm}$ samo malo manji od unutrašnjeg promjera cijevi te ga pustimo da klizi niz cijev pri čemu ulje ispunjava sav prostor između klipa i cilindra. Odredi viskoznost ulja ako je poznato da razlika između promjera unutrašnjosti cilindra i promjera klipa iznosi $\Delta D = 0.05\,\mathrm{mm}$, a mjerenje pokazuje da klip klizi niz cilindar brzinom stalnog iznosa $v = 5\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

Postupak: S obzirom da klip klizi niz cilindar brzinom stalnog iznosa slijedi da su gravitacijska na klip i sila otpora uslijed viskoznog trenja u sloju ulja između klipa i cilindra u ravnoteži. Možemo pisati

$$mg = F_\eta,$$

gdje je

$$F_\eta = S\eta\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$$

iznos sile otpora, S je površina plašta klipa, η je viskoznost ulja, a $\mathrm{d}v/\mathrm{d}r$ opisuje promjenu brzine u sloju ulja u smjeru okomitom na gibanje. Možemo pisati

$$S = D\pi\,h, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{v}{\Delta D/2},$$

te slijedi

$$mg = D\pi h\,\eta\,\frac{v}{\Delta D/2},$$

odnosno

$$\eta = \frac{mg\,\Delta D}{2D\pi h\,v}.$$

Za zadane vrijednosti $\eta \simeq 0.312\,\mathrm{Pa\,s}$.

Rješenje: $\eta = mg\,\Delta D/2D\pi hv \simeq 0.312\,\mathrm{Pa\,s}$

Zadatak 10.7: Odredi koeficijent viskoznosti meda ako je izmjereno da kuglica mase $m = 20\,\mathrm{g}$ i promjera $2r = 2\,\mathrm{cm}$ u posudi s medom tone brzinom stalnog iznosa $v = 2\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$, a gustoća ispitivanog meda iznosi $\rho_\mathrm{m} = 1.36\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Jednadžba gibanja kuglice mase m i volumena $V = \frac{4}{3}r^3\pi$ koja brzinom iznosa v vertikalno tone u fluidu gustoće ρ_m i viskoznosti η_m može se napisati kao

$$ma = mg - F_\mathrm{u} - F_\eta[v],$$

gdje je mg iznos gravitacijske sile na kuglicu,

$$F_\mathrm{u} = \rho_\mathrm{m} V g = 4\pi r^3 \rho_\mathrm{m} g/3$$

je iznos sile uzgona, a

$$F_\eta[v] = 6\pi\eta r v$$

je iznos tzv. Stokesove sile otpora pri sporom gibanju kugle kroz viskozni fluid. Kada kuglica tone brzinom stalnog iznosa njena je akceleracija jednaka nuli (sile su u ravnoteži) te iz gornjih jednadžbi slijedi

$$\eta = \frac{1}{v}\left(\frac{mg}{6\pi r} - \frac{2r^2\rho_\mathrm{m} g}{9}\right).$$

Za zadane vrijednosti $\eta \simeq 37.2\,\mathrm{Pa\,s}$.

Riješenje: $\eta = (mg/6\pi r - 2r^2\rho_\mathrm{m} g/9)/v \simeq 37.2\,\mathrm{Pa\,s}$

Zadatak 10.8: U stijenku uspravno postavljene, cilindrične, odozgo otvorene posude u kojoj se nalazi voda zabodemo medicinsku iglu kroz koju voda počne istjecati. Odredi vrijeme nakon kojeg će se razina vode u posudi nad iglom smanjiti na polovinu početne vrijednosti ako je promjer posude $2R = 10\,\mathrm{cm}$, unutarnji promjer igle je $2r = 0.6\,\mathrm{mm}$, a duljina igle je $\ell = 5\,\mathrm{cm}$. (Gustoća vode $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, viskozitet vode $\eta = 0.001\,\mathrm{Pa\,s}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

Postupak: Volumni tok tekućine viskoziteta η kroz (tanku) cijev duljine ℓ i promjera $2r$ opisan je tzv. Poiseuilleovim zakonom,

$$q_\mathrm{V} = \frac{\pi r^4}{8\eta\ell}\,\Delta p,$$

gdje je Δp razlika tlakova na jednom i na drgom kraju cijevi. Ovdje uzimamo da je riječ o razlici hidrostatskog tlaka $p_{\mathrm{atm.}} + \rho g h$ u posudi, gdje je h razina vode iznad igle, i atmosferskog tlaka $p_{\mathrm{atm.}}$ izvan posude, dakle

$$\Delta p = \rho g h.$$

Volumni tok vode kroz cijev se može povezati s promjenom volumena vode u posudi, $V = Sh$, odnosno, s brzinom spuštanja razine vode u posudi,

$$q_\mathrm{V} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Sh) = -S\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t},$$

gdje je $S = R^2\pi$ površina presjeka posude. Slijedi

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{q_\mathrm{V}}{S} = -\frac{r^4\rho g h}{8\eta\ell R^2}.$$

Separacijom varijabli gornju diferencijalnu jednadžbu možemo napisati kao

$$\frac{\mathrm{d}h}{h} = -\frac{r^4\rho g}{8\eta\ell R^2}\,\mathrm{d}t,$$

te integracijom počevši od $h = H$ u trenutku $t = 0$ do $h = H/2$ u trenutku $t = T$ imamo

$$\ln h\,\Big|_H^{H/2} = -\frac{r^4\rho g}{8\eta\ell R^2}\,t\,\Big|_0^T,$$

odnosno,

$$T = \frac{8\eta\ell R^2\ln 2}{r^4\rho g}.$$

Za zadane vrijednosti $T \simeq 2.42\,\mathrm{h}$.

Rješenje: $T = 8\eta\ell R^2\ln 2/r^4\rho g \simeq 2.42\,\mathrm{h}$

Zadatak 10.9: Cilindrični uspravno postavljen spremnik za vodu ukupne visine $H = 5\,\mathrm{m}$ napunjen je vodom do visine $h_0 = 3\,\mathrm{m}$ u odnosu na dno, a u preostalom dijelu se nalazi zrak pri atmosferskom tlaku. Odredi visinu nad dnom spremnika do koje će se spustiti površina vode u spremniku ako pri dnu otvorimo maleni otvor, a spremnik je odozgo zatvoren. Pretpostavljamo da je temperatura zraka stalna. (Atmosferski tlak $p_0 = 101.325\,\mathrm{kPa}$, gustoća vode $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Voda će teći kroz otvor sve dokle je njen tlak s unutarnje strane otvora veći od atmosferskog tlaka s vanjske strane otvora, a prestat će teći kada (ako) se ti tlakovi izjednače. Tlak vode pri dnu spremnika možemo napisati kao zbroj tlaka zraka nad tekućinom i hidrostatskog tlaka,

$$p_\mathrm{v} = p_\mathrm{z} + \rho g h,$$

gdje je h visina površine vode nad dnom. Opišemo li zrak jednadžbom stanja idealnog plina, $pV = nRT$, s obzirom da pretpostavljamo da je njegova temperatura konstantna slijedi da je njegov tlak obrnuto razmjeran volumenu koji on zauzima. Nadalje, s obzirom da je volumen razmjeran visini koju stupac zraka zauzima u spremniku, možemo pisati

$$\frac{p_\mathrm{z}}{p_0} = \frac{V_0}{V_\mathrm{z}} = \frac{H - h_0}{H - h}.$$

Uvjet jednakosti tlaka s unutrašnje i s vanjske strane otvora, $p_\mathrm{v} = p_0$, vodi na

$$p_0 = p_0 \frac{H - h_0}{H - h} + \rho g h,$$

što je kvadratna jednadžba u varijabli h. Slijedi

$$h_{1,2} = \left(\frac{p_0}{2\rho g} + \frac{H}{2}\right)\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\rho g h_0/p_0}{(1 + \rho g H/p_0)^2}}\right).$$

Uočavamo da je h_1 (rješenje s pozitivnim predznakom ispred korijena) veće od $p_0/2\rho g$, što je visina stupca vode kada je nad njom vakuum, a to znači da h_1 ne predstavlja fizikalno rješenje razmatranog problema. Stoga kao rješenje odabiremo h_2 (negativni predznak ispred korijena) koje za zadane vrijednosti daje

$$h = \left(\frac{p_0}{2\rho g} + \frac{H}{2}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\rho g h_0/p_0}{(1 + \rho g H/p_0)^2}}\right) \simeq 2.396\,\mathrm{m}.$$

Rješenje: $h = (p_0/2\rho g + H/2)\left(1 - \sqrt{1 - (4\rho g h_0/p_0)/(1 + \rho g H/p_0)^2}\right) \simeq 2.396\,\mathrm{m}$

Zadatak 10.10: Ronilac na dubini $d_1 = 30\,\mathrm{m}$ ispusti mjehurić zraka volumena $V_1 = 1\,\mathrm{cm}^3$. Odredi volumen tog mjehurića kada on stigne tik pod površinu vode uzimajući u obzir da temperatura vode na dubini d_1 iznosi $T_1 = 5°\mathrm{C}$, dok pod površinom ona iznosi $T_0 = 20°\mathrm{C}$, a pretpostavljajući da je temperatura zraka u mjehuriću jednaka temperaturi vode koja ga okružuje. (Gustoća vode $\rho = 1020\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, ubrzanje gravitascijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, atmosferski tlak $p_{\mathsf{atm.}} = 101.325\,\mathrm{kPa}$.)

Postupak: Količina zraka u mjehuriću se ne mijenja s dubinom pa na osnovu jednadžbe stanja idealnog plina imamo

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = nR = \frac{p_1 V_1}{T_1},$$

gdje se lijeva strana odnosi na stanje pod površinom, a desna strana na stanje na dubini $d_1 = 30\,\mathrm{m}$. Traženi volumen je

$$V_0 = \frac{T_0}{p_0} \frac{p_1 V_1}{T_1},$$

gdje je $V_1 = 1\,\mathrm{cm}^3$, tlakovi su

$$p_0 = p_{\mathsf{atm.}}, \qquad p_1 = p_{\mathsf{atm.}} + \rho g d_1,$$

a temperature su $T_0 = (20 + 273.15)\,\mathrm{K}$, $T_1 = (5 + 273.15)\,\mathrm{K}$. Konačno, za zadane vrijednosti,

$$V_0 \simeq 4.176\,\mathrm{cm}^3.$$

Rješenje: $V_0 = (T_0/T_1)\,(1 + \rho g d_1/p_{\mathsf{atm.}})\,V_1 \simeq 4.176\,\mathrm{cm}^3$

Zadatak 11.1: Odredi masu leda temperature $T_1 = -10°\mathrm{C}$ i masu vode temperature $T_2 = 20°\mathrm{C}$ čijim se miješanjem, po supostavi termodinamičke ravnoteže, dobiva $m_{\mathrm{uk.}} = 10\,\mathrm{kg}$ vode temperature $T_{\mathrm{kon.}} = 5°\mathrm{C}$. (Specifični toplinski kapacitet vode $c_{\mathrm{voda}} = 4.20 \times 10^3\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, specifični toplinski kapacitet leda $c_{\mathrm{led}} = 2.11 \times 10^3\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, specifična toplina taljenja leda $\ell_{\mathrm{t}} = 3.34 \times 10^5\,\mathrm{J\,kg^{-1}}$.)

Postupak: Promjenu topline toplije komponente sustava, a je ovdje voda mase m_{voda} i temperature T_2, pišemo kao

$$\Delta Q_2 = m_{\mathrm{voda}} c_{\mathrm{voda}} (T_{\mathrm{kon.}} - T_2) < 0.$$

Promjena topline hladnije komponente je

$$\Delta Q_1 = m_{\mathrm{led}} c_{\mathrm{led}} (T_0 - T_1) + m_{\mathrm{led}} \ell_{\mathrm{t}} + m_{\mathrm{led}} c_{\mathrm{voda}} (T_{\mathrm{kon.}} - T_0) > 0,$$

gdje prvi član na desnoj strani predstavlja toplinu potrebnu za zagrijavanje leda od početne temperature do temperature tališta $T_0 = 0°\mathrm{C}$, drugi član predstavlja toplinu taljenja leda, a treći član predstavlja toplinu potrebnu za zagrijavanje nastale vode (tekućine) do konačne temperature. S obzirom na načelo očuvanja energije mora vrijediti

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 0.$$

Nadalje, pišući

$$m_{\mathrm{voda}} = m_{\mathrm{uk.}} - m_{\mathrm{led}},$$

iz gornjih relacija slijedi

$$m_{\mathrm{led}} = \frac{m_{\mathrm{uk.}} c_{\mathrm{voda}} (T_2 - T_{\mathrm{kon.}})}{c_{\mathrm{led}} (T_0 - T_1) + \ell_{\mathrm{t}} + c_{\mathrm{voda}} (T_2 - T_0)},$$

što za zadane vrijednosti daje masu leda $m_{\mathrm{led}} \simeq 1.43\,\mathrm{kg}$, odnosno masu vode $m_{\mathrm{voda}} = m_{\mathrm{uk.}} - m_{\mathrm{led}} \simeq 8.57\,\mathrm{kg}$.

Rješenje: $m_{\mathrm{led}} = m_{\mathrm{uk.}} c_{\mathrm{voda}} (T_2 - T_{\mathrm{kon.}}) / (c_{\mathrm{led}} (T_0 - T_1) + \ell_{\mathrm{t}} + c_{\mathrm{voda}} (T_2 - T_0)) \simeq 1.43\,\mathrm{kg}$

Zadatak 11.2: Newcomenov atmosferski (parni) stroj obavlja rad tako što se u cilindar s pomočnim klipom ispunjen vodenom parom pri temperaturi $T = 100°\mathrm{C}$ i pri atmosferskom tlaku uštrca mala količina hladne vode koja dovodi do potpune kondenzacije pare, nakon čega atmosfera potiskuje klip do dna cilindra. Odredi efikasnost ovog stroja kao omjer obavljenog rada i topline potrebne da se cilindar ispuni parom ako je voda početno na temperaturi $T_0 = 10°\mathrm{C}$. (Specifični toplinski kapacitet vode $c = 4.19 \times 10^3\,\mathrm{J\,K^{-1}\,kg^{-1}}$, specifična toplina isparavanja vode $\ell_\mathrm{i} = 2.26 \times 10^6\,\mathrm{J\,kg^{-1}}$, molarna masa vode $M = 18\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$, plinska konstanta $R = 8.314\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$.)

Postupak: Toplina potrebna da cilindar ispunimo vodenom parom može se napisati kao

$$Q = mc\Delta T + m\ell_\mathrm{i},$$

gdje je m potrebna masa vode, prvi član na desnoj strani opisuje toplinu potrebnu da se vodu zagrije za $\Delta T = T - T_0$, dok drugi član uzima u obzir toplinu isparavanja vode. Masu vode potrebnu da se vodenom parom pri temperaturi T i pri atmosferskom tlaku p_0 ispuni volumen cilindra V određujemo s pomoću jednadžbe stanja idealnog plina, $pV = nRT$. Napišemo li masu vode kao produkt množine vode u cilindru i molarne mase vode, slijedi

$$m = nM = \frac{p_0 V M}{RT}.$$

Potrebnu toplinu sada možemo napisati kao

$$Q = \frac{p_0 V M}{RT}(c\Delta T + \ell_\mathrm{i}).$$

Rad koji atmosfera obavi djelujući na klip površine S i pomičući ga za udaljenost h može se napisati kao

$$W = Fh = p_0 S h = p_0 V,$$

gdje je $V = Sh$ volumen cilindra. Konačno, tražena efikasnost je

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{RT}{M(c\Delta T + \ell_\mathrm{i})},$$

što za zadanu vrijednost ΔT daje $\eta \simeq 6.5\%$.

Rješenje: $\eta = RT/M(c(T - T_0) + \ell_\mathrm{i}) \simeq 6.5\%$

Zadatak 11.3: Termički izoliran cilindar, zatvoren na oba kraja, podijeljen je pomičnim klipom u dva dijela; A i B. U početnom stanju u oba dijela cilindra se nalazi idealni dvoatomni plin ($\kappa = 7/5$). Početno stanje plina u dijelu A je $p_{\rm A0} = 200\,{\rm kPa}$ i $V_{\rm A0} = 1\,{\rm L}$, u dijelu B je $p_{\rm B0} = 100\,{\rm kPa}$ i $V_{\rm B0} = 1\,{\rm L}$, a klip je zakočen kako se ne bi pomakao uslijed razlike tlakova. Preselimo li klip iz početnog položaja do položaja u kojem su tlakovi izjednačeni, odredi nove volumene dijelova A i B, te tlak plinova. Pretpostavljamo da je proces u plinovima adijabatski.

Postupak: Obzirom da su procesi adijabatski imamo $pV^\kappa = const.$, odnosno,

$$p_{\rm A0}V_{\rm A0}^\kappa = p_{\rm A1}V_{\rm A1}^\kappa = p_{\rm A1}(V_{\rm A0} + \Delta V)^\kappa,$$

$$p_{\rm B0}V_{\rm B0}^\kappa = p_{\rm B1}V_{\rm B1}^\kappa = p_{\rm B1}(V_{\rm B0} - \Delta V)^\kappa,$$

gdje se varijable s oznakom 1 odnose na stanje nakon pomicanja klipa. Dijeleći gornju jednadžbu donjom, uz oznaku $V_0 = V_{\rm A0} = V_{\rm B0}$ i koristeći $p_{\rm A1} = p_{\rm B1}$, imamo

$$\frac{p_{\rm A0}}{p_{\rm B0}} = \left(\frac{1 + \Delta V/V_0}{1 - \Delta V/V_0}\right)^\kappa,$$

odnosno uz $p_{\rm A0}/p_{\rm B0} = 2$ i $\kappa = 7/5$,

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{(p_{\rm A0}/p_{\rm B0})^{1/\kappa} - 1}{(p_{\rm A0}/p_{\rm B0})^{1/\kappa} + 1} = \frac{2^{5/7} - 1}{2^{5/7} + 1} \simeq 0.2427.$$

Konačni volumeni su

$$V_{\rm A1} = V_0\left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right) \simeq 1.243\,{\rm L}, \qquad V_{\rm B1} = V_0\left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right) \simeq 0.7574\,{\rm L}.$$

Konačni tlakovi su

$$p_1 = p_{\rm A1} = p_{\rm B1} = p_{\rm B0}\left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right)^{-\kappa} \simeq 147.6\,{\rm kPa}.$$

Rješenje: $V_{\rm A1} \simeq 1.243\,{\rm L}$, $V_{\rm B1} \simeq 0.7574\,{\rm L}$, $p_{\rm A1} = p_{\rm B1} \simeq 147.6\,{\rm kPa}$

Zadatak 11.4: Idealni dvoatomni plin u početnom stanju pri tlaku $p_1 = 100\,\mathrm{kPa}$ zauzima volumen $V_1 = 10\,\mathrm{dm}^3$. Plin najprije adijabatski ekspandira do trostruko većeg volumena, a zatim se izobarno komprimira do volumena jednakog početnom. Odredi rad koji plin obavi u čitavom procesu.

Postupak: Rad u adijabatskom dijelu procesa od stanja '1' do stanja '2' opisan je izrazom

$$W_{12} = \frac{nR}{\kappa-1}(T_1 - T_2) = \frac{nRT_1}{\kappa-1}(1 - T_2/T_1) = \frac{p_1V_1}{\kappa-1}\left(1 - (V_1/V_2)^{\kappa-1}\right),$$

gdje smo koristili jednadžbu stanja idealnog plina u početnom stanju, $p_1V_1 = nRT_1$, te relaciju $TV^{\kappa-1} = \mathrm{konst.}$ koja u adijabatskom procesu povezuje temperaturu i volumen. Tlak na kraju adijabatskog dijela procesa slijedi iz relacije $pV^\kappa = \mathrm{konst.}$ kao

$$p_2 = p_1(V_1/V_2)^\kappa.$$

Rad koji plin obavlja u izobarnom dijelu procesa je

$$W_{23} = p_2(V_3 - V_2).$$

Koristeći gore dobiveni izraz za tlak p_2 te s obzirom da je $V_3 = V_1$ pišemo

$$W_{23} = p_1(V_1/V_2)^\kappa(V_1 - V_2) = p_1V_1(V_1/V_2)^\kappa(1 - V_2/V_1).$$

Ukupni rad u procesu je

$$W_{123} = W_{12} + W_{23} = p_1V_1\left(\frac{1 - (V_1/V_2)^{\kappa-1}}{\kappa-1} + (V_1/V_2)^\kappa(1 - V_2/V_1)\right).$$

Konačno, s obzirom da je $V_2 = 3V_1$ te uz $\kappa = 7/5$ za dvoatomni plin, dobivamo

$$W_{123} = p_1V_1\,\frac{45 - 19\times 3^{3/5}}{18} \simeq 0.4594\,p_1V_1.$$

Za zadane vrijednosti početnog tlaka i volumena, $W_{123} = 459.4\,\mathrm{J}$.

Rješenje: $W = p_1V_1(45 - 19\times 3^{3/5})/18 \simeq 459.4\,\mathrm{J}$

Zadatak 11.5: U cilindru s pomičnim klipom se nalazi idealni plin adijabatske konstante κ, početnog volumena V_0, temperature T_0 i tlaka p_0. Plin se najprije pod djelovanjem klipa adijabatski komprimira do upola manjeg volumena nakon čega se pri stalnom volumenu hladi do temperature jednake početnoj. Nakon toga se plin izotermno ekspandira do početnog volumena. Odredi ukupan rad koji klip obavi nad plinom tokom ovog kružnog procesa.

Postupak: Pri adijabatskom procesu od početnog stanja 0 do stanja 1 plin obavlja rad

$$W_{01} = \frac{nR}{\kappa - 1}(T_0 - T_1).$$

Temperatura T_1 u adijabatskom procesu može se izraziti kao

$$T_1 = T_0 \left(V_0/V_1\right)^{\kappa-1} = T_0 2^{\kappa-1},$$

pa imamo

$$W_{01} = \frac{nR}{\kappa - 1} T_0 \left(1 - 2^{\kappa-1}\right) = \frac{p_0 V_0}{\kappa - 1} \left(1 - 2^{\kappa-1}\right).$$

Pri izohornom zagrijavanju od stanja 1 do stanja 2 plin ne obavlja rad, $W_{12} = 0$. Pri izotermnoj ekspanziji od stanja 2 do konačnog stanja 0 plin obavlja rad

$$W_{20} = nRT_0 \ln \frac{V_0}{V_2} = p_0 V_0 \ln 2.$$

Ukupan rad koji plin obavi u procesu je

$$W_{\mathsf{plin}} = W_{01} + W_{12} + W_{20} = \frac{p_0 V_0}{\kappa - 1} \left(1 - 2^{\kappa-1}\right) + p_0 V_0 \ln 2.$$

Rad koji obavi klip ima obrnuti predznak u odnosu na rad plina,

$$W_{\mathsf{klip}} = -W_{\mathsf{plin}} = p_0 V_0 \left(\frac{2^{\kappa-1} - 1}{\kappa - 1} - \ln 2 \right).$$

Rješenje: $W_{\mathsf{klip}} = p_0 V_0 \left((2^{\kappa-1} - 1)/(\kappa - 1) - \ln 2\right)$

Zadatak 11.6: Masu $m = 10\,\mathrm{kg}$ vode želimo ohladili s temperature $T_{\mathrm{C}1} = 290\,\mathrm{K}$ na temperaturu $T_{\mathrm{C}2} = 280\,\mathrm{K}$. Odredi koliki bi rad trebalo obaviti kako bismo vodu ohladili pokrećući infinitezimalni Carnotov toplinski stroj koji kao topliji spremnik koristi okolinu temperature $T_{\mathrm{H}} = 300\,\mathrm{K}$. (Toplinski kapacitet tzv. infinitezimalnog Carnotovog stroja dovoljno je malen da temperaturu toplinskih spremnika tokom jednog ciklusa možemo smatrati stalnom. Specifični toplinski kapacitet vode $c = 4180\,\mathrm{J\,K^{-1}\,kg^{-1}}$.)

Postupak: U kružnom procesu infinitezimalnog kapaciteta vrijedi $\mathrm{d}W = \mathrm{d}Q$, gdje je $\mathrm{d}W$ rad koji stroj obavi, a $\mathrm{d}Q$ je toplina koju stroj dobiva iz spremnika spremnicima. U našem će slučaju oba diferencijala biti negativna jer se stroj vrti u "obrnutom" smjeru; Mi obavljamo rad nad strojem, a on spremnicima predaje više topline nego što iz njih uzima. U Carnotovom procesu koji koristi spremnike temperatura T_{H} i T_{C} možemo pisati

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}Q = \mathrm{d}Q_{\mathrm{H}} + \mathrm{d}Q_{\mathrm{C}},$$

pri čemu vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{H}}}{\mathrm{d}Q_{\mathrm{C}}} = -\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{C}}}.$$

U našem slučaju temperatura okoline T_{H} je stalna, a temperatura vode T_{C} će se postupno smanjivati. Toplinu koju stroj dobiva iz vode ili predaje vodi možemo napisati kao

$$\mathrm{d}Q_{\mathrm{C}} = -mc\,\mathrm{d}T_{\mathrm{C}}.$$

Na osnovu gornjih relacija možemo pisati

$$\mathrm{d}W = \left(-\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{C}}} + 1\right)\mathrm{d}Q_{\mathrm{C}} = mc\left(\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{C}}} - 1\right)\mathrm{d}T_{\mathrm{C}},$$

što ćemo integrirati od početne do konačne vrijednosti temperature vode,

$$W = mc\int_{T_{\mathrm{C}1}}^{T_{\mathrm{C}2}}\left(+\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{C}}} - 1\right)\mathrm{d}T_{\mathrm{C}} = mcT_{\mathrm{H}}\ln\frac{T_{\mathrm{C}2}}{T_{\mathrm{C}1}} + mc(T_{\mathrm{C}1} - T_{\mathrm{C}2}).$$

Za zadane vrijednosti $W \simeq 22\,\mathrm{kJ}$.

Rješenje: $W = mc(T_{\mathrm{H}}\ln[T_{\mathrm{C}2}/T_{\mathrm{C}1}] - (T_{\mathrm{C}1} - T_{\mathrm{C}2})) \simeq 22\,\mathrm{kJ}$

Zadatak 11.7: Infinitezimalni Carnotov toplinski stroj (stroj u jednom ciklusu obavlja infinitezimalni rad $\mathrm{d}W$) djeluje crpeći toplinu iz toplinskog spremnika početne temperature T_{H0} i predajući je toplinskom spremniku početne temperature $T_{\mathrm{C0}} < T_{\mathrm{H0}}$ gdje su spremnici tijela jednakih masa m i jednakih specifičnih toplinskih kapaciteta c. Stroj će raditi sve dok se temperature spremnika ne izjednače. Odredi konačnu temperaturu spremnika i ukupan rad koji će stroj obaviti.

Postupak: Prema prvom zakonu termodinamike, element rada obavljen u kružnom procesu infinitezimalnog kapaciteta je

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}Q = \mathrm{d}Q_{\mathrm{H}} + \mathrm{d}Q_{\mathrm{C}},$$

a ako se radi o Carnotovom procesu vrijedi relacija

$$\frac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{H}}}{\mathrm{d}Q_{\mathrm{C}}} = -\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{C}}}.$$

gdje su $\mathrm{d}Q_{\mathrm{H}}$ i $\mathrm{d}Q_{\mathrm{C}}$ elementi topline preuzeti iz spremnika čije su temperature T_{H} i T_{C}. S obzirom da su spremnici jednakih toplinskih kapaciteta možemo pisati

$$\mathrm{d}Q_{\mathrm{H,C}} = -mc\,\mathrm{d}T_{\mathrm{H,C}}.$$

te iz gornjih izraza slijedi

$$\frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{H}}} = -\frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{C}}}{T_{\mathrm{C}}}.$$

Integracijom od početnog stanja gdje je $T_{\mathrm{H}} = T_{\mathrm{H0}}$ i $T_{\mathrm{C}} = T_{\mathrm{C0}}$ do konačnog stanja gdje imamo $T_{\mathrm{H}} = T_{\mathrm{C}} = T$ slijedi

$$\ln\frac{T}{T_{\mathrm{H0}}} = -\ln\frac{T}{T_{\mathrm{C0}}},$$

odnosno

$$T = \sqrt{T_{\mathrm{H0}}T_{\mathrm{C0}}}.$$

Ukupni obavljeni rad slijedi iz integracijom elementa rada od početnog stanja do konačnog stanja

$$\begin{aligned} W = \int \mathrm{d}W = \int \mathrm{d}Q = \int \mathrm{d}Q_{\mathrm{H}} + \int \mathrm{d}Q_{\mathrm{C}} &= \int_{T_{\mathrm{H0}}}^{T} mc\,\mathrm{d}T_{\mathrm{H}} + \int_{T_{\mathrm{C0}}}^{T} mc\,\mathrm{d}T_{\mathrm{C}} \\ &= mc\,(T_{\mathrm{H0}} + T_{\mathrm{C0}} - 2T). \end{aligned}$$

Koristeći gore izvedeni izraz za konačnu temperaturu, rad možemo napisati kao

$$W = mc\left(\sqrt{T_{\mathrm{H0}}} - \sqrt{T_{\mathrm{C0}}}\right)^2.$$

Rješenje: $T = \sqrt{T_{\mathrm{H0}}T_{\mathrm{C0}}}$, $W = mc\left(\sqrt{T_{\mathrm{H0}}} - \sqrt{T_{\mathrm{C0}}}\right)^2$

Zadatak 11.8: Dva tijela čije su mase m i specifični toplinski kapaciteti c, a početne temperature su im T_{10} i T_{20}, dovedena su u termički kontakt. Odredi konačnu temperaturu po supostavljanju termalne ravnoteže te promjenu entropije čitavog sustava pretpostavljajući da je on izoliran od okoline.

Postupak: S obzirom da je sustav izoliran od okoline ukupna toplina se ne mijenja pa pišemo

$$0 = \mathrm{d}Q = \mathrm{d}Q_1 + \mathrm{d}Q_2 = mc\,\mathrm{d}T_1 + mc\,\mathrm{d}T_2.$$

Konačnu temperaturu T dobit ćemo integracijom gornjeg izraza od početnih temperatura T_{10} i T_{20} do termperature T,

$$0 = \int_{T_{10}}^{T} mc\,\mathrm{d}T_1 + \int_{T_{20}}^{T} mc\,\mathrm{d}T_2,$$

što daje

$$0 = mc(T - T_{10}) + mc(T - T_{20}),$$

odnosno,

$$T = \frac{T_{10} + T_{20}}{2}.$$

Promjenu entropije možemo napisati kao

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}S_1 + \mathrm{d}S_2 = \frac{\mathrm{d}Q_1}{T_1} + \frac{\mathrm{d}Q_2}{T_2} = \frac{mc\,\mathrm{d}T_1}{T_1} + \frac{mc\,\mathrm{d}T_2}{T_2},$$

a ukupnu promjenu koja nastupa od početnog do konačnog stanja dovibamo integracijom gornjeg izraza,

$$\Delta S = \int_{T_{10}}^{T} \frac{mc\,\mathrm{d}T_1}{T_1} + \int_{T_{20}}^{T} \frac{mc\,\mathrm{d}T_2}{T_2},$$

što daje

$$\Delta S = mc\,\ln\frac{T}{T_{10}} + mc\,\ln\frac{T}{T_{20}},$$

odnosno, uz ranije izvedeni izraz za konačnu temperaturu,

$$\Delta S = mc\,\ln\left[\frac{1}{4}\left(1 + \frac{T_{20}}{T_{10}}\right)\left(1 + \frac{T_{10}}{T_{20}}\right)\right].$$

Rješenje: $T = (T_{10} + T_{20})/2$, $\Delta S = mc\,\ln[(1 + T_{20}/T_{10})(1 + T_{10}/T_{20})/4]$

Zadatak 12.1: Odredi rad koji je potrebno obaviti kako bismo čelični štap duljine $L = 2\,\mathrm{m}$, površine poprečnog presjeka $S = 1\,\mathrm{cm}^2$ i početne napetosti $F_0 = 5000\,\mathrm{N}$, dodatnim naprezanjem produljili za $\Delta L = 2\,\mathrm{mm}$. (Youngov modul čelika $E = 200\,\mathrm{GPa}$.)

Postupak: U linearnom području elastičnih deformacija, promjena napetosti štapa ΔF razmjerna je njegovu produljenju ΔL,

$$\Delta F = \frac{SE}{L}\Delta L.$$

Označimo li s x produljenje štapa u odnosu na početno stanje u kojem je njegova napetost F_0, napetost štapa možemo opisati izrazom

$$F[x] = F_0 + kx,$$

gdje je

$$k = \frac{SE}{L}$$

tzv. konstanta elastičnosti štapa (štap možemo shvatiti kao oprugu konstante k). Rad potreban za produljenje štapa od $x = 0$ do $x = \Delta L$ dobivamo integracijom

$$W = \int \mathrm{d}W = \int_0^{\Delta L} F[x]\,\mathrm{d}x = \int_0^{\Delta L} (F_0 + kx)\,\mathrm{d}x = \left(F_0 x + \frac{1}{2}kx^2\right)\Big|_0^{\Delta L} = F_0\Delta L + \frac{SE}{2L}(\Delta L)^2.$$

Za zadane vrijednosti parametara L, F_0, ΔL, S i E dobivamo $W = 30\,\mathrm{J}$.

Umjesto izravnom integracijom rada, zadatak se može riješiti i korištenjem poznate formule za potencijalnu energiju opruge,

$$U = \frac{1}{2}kx^2,$$

gdje je x produljenje opruge u odnosu na stanje u kojom je njena napetost jednaka nuli (važno je uočiti razliku u definiciji koordinate x u odnosu na raniji postupak). Rad potreban za produljenje opruge jednak je promjeni potencijalne energije,

$$W = \Delta U = U' - U = \frac{1}{2}k(x_0 + \Delta L)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 = kx_0\Delta L + \frac{1}{2}k(\Delta L)^2,$$

gdje je

$$x_0 = \frac{F_0}{k}$$

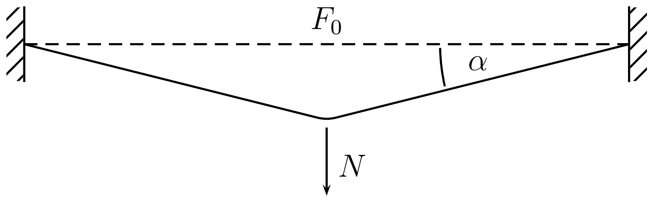
početna vrijednost koordinate x. Slijedi

$$W = F_0\Delta L + \frac{1}{2}k(\Delta L)^2 = F_0\Delta L + \frac{SE}{2L}(\Delta L)^2,$$

što se podudara s ranije dobivenim rezultatom.

Rješenje: $W = F_0\Delta L + SE(\Delta L)^2/2L = 30\,\mathrm{J}$

Zadatak 12.2: Čelična žica promjera $2r = 0.5\,\mathrm{mm}$ napeta je silom $F_0 = 100\,\mathrm{N}$ nakon čega su njeni krajevi učvršćeni. Odredi jakost sile N kojom treba djelovati okomito na žicu pri sredini njezina raspona kako bi ju se otklonilo za kut $\alpha = 5^\circ$ od njezina prvobitna položaja (vidi sliku). (Youngov modul čelika $E = 200\,\mathrm{GPa}$.)



Postupak: Tražena jakost sile N jednaka je jakosti zbroja sila kojima dvije polovice žice djeluju na samo polovište žice. Označimo li s $F[\alpha]$ napetost žice pri otklonu α,

$$N[\alpha] = 2F[\alpha]\,\sin\alpha.$$

U linearnom području elastičnih deformacija, napetost žice pri otklonu α možemo napisati kao

$$F[\alpha] = F_0 + k\,\Delta L = F_0 + k(L[\alpha] - L_0),$$

gdje je ΔL produljenje žice, L_0 je duljina neotklonjene žice čija je napetost F_0, a $L[\alpha]$ je duljina žice pri otklonu α. Veličina k dana je izrazom

$$k = \frac{SE}{L_0} = \frac{r^2\pi E}{L_0}$$

($S = r^2\pi$ je površina poprečnog presjeka žice). Duljinu žice pri otklonu α možemo napisati kao

$$L[\alpha] = \frac{L_0}{\cos\alpha}.$$

Slijedi

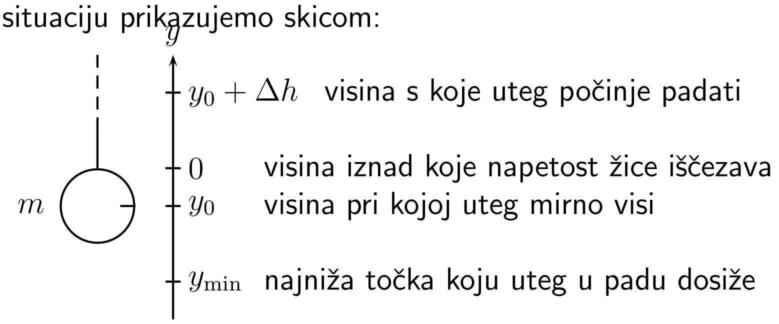
$$N[\alpha] = 2\left(F_0 + kL_0\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\right)\sin\alpha = 2\left(F_0 + r^2\pi E\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\right)\sin\alpha.$$

Za zadane vrijednosti parametara F_0, r, α i E dobivamo $N \simeq 43.6\,\mathrm{N}$.

Rješenje: $N = 2\left(F_0 + r^2\pi E\left(1/\cos\alpha - 1\right)\right)\sin\alpha \simeq 43.6\,\mathrm{N}$

Zadatak 12.3: Uteg mase $m = 10\,\mathrm{kg}$ mirno visi na čeličnoj žici duljine $L = 5\,\mathrm{m}$ i promjera $2r = 0.5\,\mathrm{mm}$. Iz tog položaja uteg podižemo za visinu $\Delta h = 0.5\,\mathrm{m}$, čime je žica olabavljena, te ga puštamo da padne. Odredi najveću napetost žice koja nastupa tokom zaustavljanja utega. (Pretpostavljamo da se sva naprezanja nalaze unutar linearnog područja elastičnosti, Youngov modul čelika $E = 200\,\mathrm{GPa}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Opisanu situaciju prikazujemo skicom:



Najveća napetost žice nastupa kada se padajući uteg na trenutak zaustavi u najnižoj točki svoje putanje, a tu ćemo točku pronaći na osnovu načela očuvanja ukupne energije.

Uspravna y-os uvedena tako da položaj utega $y > 0$ odgovara labavoj žici te njenu napetost možemo napisati kao

$$F[y] = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad y > 0, \\ -ky & \text{za} \quad y \leq 0, \end{cases}$$

gdje je

$$k = SE/L = r^2 \pi E/L$$

konstanta elastičnosti žice. Položaj u kojem uteg mirno visi dobiva se iz jednakosti sila $F[y_0] = mg$ kao

$$y_0 = -mg/k.$$

(Može provjeriti da za zadane vrijednosti parametara vrijedi $y_0 + \Delta h > 0$, što znači da uteg zaista počinje padati s visine pri kojoj je žica olabavljena.) Potencijalna energija sustava sastoji se od gravitacijske i od elastične potencijalne energije te ju možemo napisati kao

$$U[y] = \begin{cases} mgy & \text{za} \quad y > 0, \\ mgy + \frac{1}{2}ky^2 & \text{za} \quad y \leq 0. \end{cases}$$

Pri početku pada ($y = y_0 + \Delta h > 0$), kao i u najnižoj točki koju uteg dosiže ($y = y_{\min} < 0$), kinetička energija u sustavu jednaka je nuli te na osnovu očuvanja ukupne energije očekujemo jednakost

$$E = U[y_0 + \Delta h] = U[y_{\min}],$$

što daje

$$mg(y_0 + \Delta h) = mgy_{\min} + \frac{1}{2}ky_{\min}^2.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe po $y_{\min}$ slijedi

$$(y_{\min})_{1,2} = \frac{mg}{k}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2k}{mg}(y_0 + \Delta h)}\right).$$

Pozitivno rješenje $(y_{\rm min})_1$ odbacujemo te zaključujemo

$$F_{\rm max} = -k(y_{\rm min})_2 = mg\left(1+\sqrt{1+\frac{2k}{mg}(y_0+\Delta h)}\right) = \cdots = mg\left(1+\sqrt{-1+\frac{2r^2\pi E\,\Delta h}{mgL}}\right).$$

Za zadane vrijednosti parametara dobivamo $F_{\rm max} \simeq 970\,\mathrm{N}$.

Rješenje: $F_{\rm max} = mg\left(1+\sqrt{-1+2r^2\pi E\,\Delta h/mgL}\right) \simeq 970\,\mathrm{N}$

Zadatak 12.4: Homogena gumena vrpca slobodno visi o jednom svom kraju te uslijed naprezanja izazvanog njezinom težinom dolazi do njezina produljenja. Odredi ukupno produljenje vrpce ako duljina nenapregnute vrpce iznosi $\ell = 25\,\mathrm{m}$, Youngov modul gume je $E = 4.00 \times 10^6\,\mathrm{Pa}$, a gustoća gume je $\rho = 1500\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

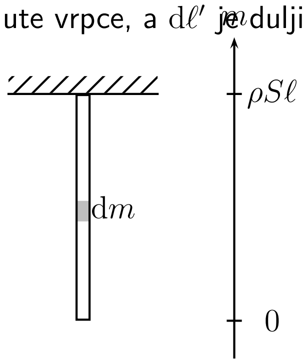
Postupak: Naprezanje vrpce najveće je pri njenom gornjem kraju gdje je ono izazvano ukupnom težinom vrpce, dok pri donjem kraju vrpce naprezanje iščezava. Općenito, naprezanje u nekoj točki vrpce dano je omjerom težine dijela vrpce koji se nalazi ispod te točke i površine poprečnog presjeka vrpce. Naprezanje možemo napisati kao

$$\sigma = \frac{mg}{S},$$

gdje je m masa vrpce koja se nalazi ispod promatrane točke, a S je površina poprečnog presjeka. Tom naprezanju odgovara relativno produljenje elementa vrpce

$$\delta_{\parallel} = \frac{\mathrm{d}\ell' - \mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\sigma_L}{E} = \frac{mg}{SE},$$

gdje je $\mathrm{d}\ell$ duljina elementa nenapregnute vrpce, a $\mathrm{d}\ell'$ je duljina istog elementa pri naprezanju σ_L.



Nadalje, s obzirom da masu i duljinu nenapregnutog elementa vrpce povezuje relacija

$$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V = \rho S\,\mathrm{d}\ell,$$

produljenje elementa možemo napisati kao

$$\mathrm{d}\ell' - \mathrm{d}\ell = \frac{mg}{SE}\,\mathrm{d}\ell = \frac{mg}{S^2E\rho}\,\mathrm{d}m.$$

Konačno, ukupno produljenje vrpce $\Delta\ell$ dobit ćemo integrirajući produljenje elementa vrpce po masi vrpce m koja se nalazi ispod promatrane točke, počevši od donjeg kraja gdje je $m = 0$, pa do gornjeg kraja gdje je $m = \rho S\ell$,

$$\Delta\ell = \ell' - \ell = \int(\mathrm{d}\ell' - \mathrm{d}\ell) = \int_0^{\rho S\ell} \frac{mg}{S^2E\rho}\,\mathrm{d}m = \frac{g}{S^2E\rho}\frac{m^2}{2}\Big|_0^{\rho S\ell} = \frac{\rho g\ell^2}{2E},$$

što za zadane vrijednosti parametara ρ, ℓ i E daje $\Delta\ell \simeq 1.15\,\mathrm{m}$.

Rješenje: $\Delta\ell = \rho g\ell^2/2E \simeq 1.15\,\mathrm{m}$

Zadatak 13.1: Objesimo li uteg o oprugu br. 1 ona se produlji za $\Delta x_1 = 4\,\mathrm{cm}$. Objesimo li isti uteg o oprugu br. 2 ona se produlji za $\Delta x_2 = 6\,\mathrm{cm}$. Odredi periode kojima bi uteg titrao kad bismo ga objesili na te dvije opruge spojene u seriju i kad bismo ga objesili na te dvije opruge spojene paralelno. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Označimo li masu utega s m te konstante dvaju opruga s k_1 i k_2, iz uvjeta ravnoteže utega kada on visi na tim oprugama imamo $mg = k_1\,\Delta x_1 = k_2\,\Delta x_2$, odnosno

$$k_1 = \frac{mg}{\Delta x_1}, \qquad k_2 = \frac{mg}{\Delta x_2}.$$

Konstanta paralelnog spoja dvaju opruga čije su konstante k_1 i k_2 je

$$k_\mathrm{p} = k_1 + k_2 = mg\,\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_1\,\Delta x_2}$$

te je, na osnovu poznatog rješenja jednadžbe gibanja za masu na opruzi (harmonički oscilator), frekvencija titranja ω_p dana izrazom

$$\omega_\mathrm{p}^2 = \frac{k_\mathrm{p}}{m} = g\,\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_1\,\Delta x_2}.$$

Tome odgovara period

$$T_\mathrm{p} = \frac{2\pi}{\omega_\mathrm{p}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{g\,(\Delta x_1 + \Delta x_2)}}.$$

Za zadane vrijednosti $T_\mathrm{p} \simeq 0.311\,\mathrm{s}$.

Konstanta serijskog spoja dvaju opruga je

$$k_\mathrm{s} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = mg\,\frac{1}{\Delta x_1 + \Delta x_2},$$

te je odgovarajuća frekvencija titranja ω_s dana izrazom

$$\omega_\mathrm{s}^2 = \frac{k_\mathrm{s}}{m} = g\,\frac{1}{\Delta x_1 + \Delta x_2}.$$

Odgovarajući period titranja je

$$T_\mathrm{s} = \frac{2\pi}{\omega_\mathrm{s}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{g}}$$

što za zadane vrijednosti daje $T_\mathrm{s} \simeq 0.634\,\mathrm{s}$.

Rješenje: $T_\mathrm{s} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{g}} \simeq 0.634\,\mathrm{s}$, $T_\mathrm{p} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{g\,(\Delta x_1 + \Delta x_2)}} \simeq 0.311\,\mathrm{s}$

Zadatak 13.2: Uteg je obješen o donji kraj dinamometra i titra u uspravnom smjeru. Najmanja i najveća vrijednost sile koju očitavamo na dinamometru tokom titranja su $T_{\min} = 3\,\mathrm{N}$ i $T_{\max} = 7\,\mathrm{N}$, a kružna frekvencija titranja iznosi $\omega_0 = 2\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Odredi masu utega i amplitudu titranja. (Dinamometar možemo smatrati oprugom zanemarive mase. Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Neka je y-os uspravna i orijentirana uvis. Položaj utega možemo napisati kao

$$y[t] = y_0 + A\cos[\omega_0 t],$$

gdje je y_0 koordinata ravnotežnog položaja, a A je amplituda titranja. Prema Newtonovu aksiomu, sila koja osigurava to gibanje je

$$F_y[t] = ma_y[t] = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y[t] = -m\omega_0^2 A\cos[\omega t],$$

gdje je m masa utega. Ta se sila sastoji od gravitacijske sile i od sile dinamometra,

$$F_y[t] = -mg + T[t].$$

Slijedi

$$T[t] = mg - m\omega_0^2 A\cos[\omega t],$$

gdje prepoznajemo

$$T_{\max} = mg + m\omega_0^2 A,$$
$$T_{\min} = mg - m\omega_0^2 A.$$

Iz gornjih dviju jednadžbi možemo izračunati m i A:

$$m = \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2g},$$

$$A = \frac{g}{\omega_0^2}\frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} + T_{\min}}.$$

Za zadane vrijednosti parametara dobivamo $m \simeq 0.510\,\mathrm{kg}$, $A \simeq 9.94\,\mathrm{cm}$.

Rješenje: $m = (T_{\max} + T_{\min})/2g \simeq 0.510\,\mathrm{kg}$, $A = g\omega_0^{-2}(T_{\max} - T_{\min})/(T_{\max} + T_{\min}) \simeq 9.94\,\mathrm{cm}$

Zadatak 13.3: Najveći iznos brzine koju čestica postiže pri harmoničkom titranju je $v_{\max} = 5\ \mathrm{cm\,s^{-1}}$, a najveći iznos akceleracije koju postiže je $a_{\max} = 10\ \mathrm{cm\,s^{-2}}$. Odredi amplitudu A i kružnu frekvenciju titranja ω_0. Zatim odredi iznos brzine u trenutku u kojem otklon čestice od ravnotežnog (središnjeg) položaja iznosi $x = A/2$.

Postupak: Napišemo li otklon čestice koja harmonički titra amplitudom A i kutnom frekvencijom ω_0 kao

$$x[t] = A\cos[\omega_0 t],$$

brzina i akceleracija čestice dane su izrazima

$$v[t] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x[t] = -\omega_0 A\sin[\omega_0 t], \qquad a[t] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x[t] = -\omega_0^2 A\cos[\omega_0 t].$$

Kao maksimalni iznos brzine i maksimalni iznos akceleracije prepoznajemo

$$v_{\max} = \omega_0 A, \qquad a_{\max} = \omega_0^2 A.$$

Iz gornjih dviju jednadžbi slijedi

$$\omega_0 = \frac{a_{\max}}{v_{\max}}, \qquad A = \frac{v_{\max}}{\omega_0} = \frac{v_{\max}^2}{a_{\max}}.$$

Za zadane vrijednosti $v_{\max}$ i $a_{\max}$ dobivamo $\omega_0 = 2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $A = 2.5\,\mathrm{cm}$. Ovisnost iznosa brzine o otklonu dobit ćemo pišući izraz za brzinu u obliku

$$v^2 = \omega_0^2 A^2 \sin^2[\omega_0 t] = \omega_0^2 A^2 (1 - \cos^2[\omega_0 t]),$$

gdje sada možemo iskoristiti izraz za položaj čestice kako bismo eliminirali $\cos[\omega_0 t]$. Slijedi

$$v^2 = \omega_0^2 A^2 \left(1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2\right) = \omega_0^2 (A^2 - x^2).$$

(Važno je uočiti da gornja relacija govori o kvadratima veličina v i x, što znači da ona govori isključivo o iznosima (modulima) brzine i otklona, a ne o njihovim predznacima.) Pri otklonu $x = A/2$ dobivamo

$$v_{x=A/2} = \omega_0 A\sqrt{1 - (1/2)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\omega_0 A = \frac{\sqrt{3}}{2}\,v_{\max}$$

što za zadane vrijednosti daje $v_{x=A/2} \simeq 4.33\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$.

Napomena: Relaciju koja povezuje v^2 i x^2 se može dobiti i na osnovu izraza za ukupnu energiju pri harmoničkom titranju mase m na opruzi konstante elastičnosti k,

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

Posebno, pri maksimalnom otklonu imamo $v = 0$ i $x = A$, pa možemo pisati

$$E = \frac{1}{2}kA^2.$$

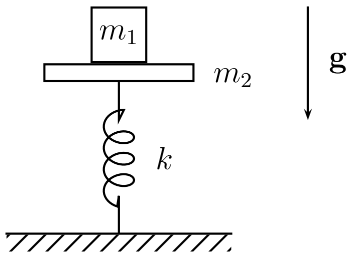
Iz gornjih izraza za energiju slijedi

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2,$$

gdje dijeleći s m i uzimajući u obzir da vrijedi $\omega_0^2 = k/m$ dobivamo $v^2 = \omega_0^2(A^2 - x^2)$ kao i ranije.

Rješenje: $\omega_0 = a_{\max}/v_{\max} = 2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $A = v_{\max}^2/a_{\max} = 2.5\,\mathrm{cm}$, $v_{x=A/2} = v_{\max}\sqrt{3}/2 \simeq 4.33\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$

Zadatak 13.4: Tijelo mase $m_1 = 3\,\mathrm{kg}$ položeno je na tijelo mase $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$ koje je s pomoću opruge konstante $k = 5\times 10^3\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ oslonjeno o čvrsto tlo (vidi sliku). Odredi najveću amplitudu titranja sustava pri kojoj ne dolazi do međusobnog odvajanja tijela m_1 i m_2. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)



Postupak: Neka je y-os uspravna i orijentirana uvis. Pod pretpostavkom da pri titranju ne dolazi do odvajanja tijela m_1 i m_2, njihovu visinu nad tlom možemo napisati kao

$$y[t] = y_0 + A\cos[\omega_0 t],$$

gdje je y_0 ravnotežna visina, A je amplituda, a

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$$

je kružna frekvencija titranja. Akceleracija masa m_1 i m_2 tada je

$$a_y[t] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} y[t] = -\omega_0^2 A\cos[\omega_0 t],$$

a silu koja djeluje na m_1 možemo napisati kao

$$F_y[t] = m_1 a_y[t] = m_1\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = -m_1\omega_0^2 A\cos[\omega_0 t].$$

Ta se sila sastoji od gravitacijske sile iznosa $m_1 g$ koja djeluje prema dolje te od sile N usmjerene uvis kojom tijelo m_2 djeluje na m_1,

$$F_y[t] = -m_1 g + N[t].$$

Slijedi

$$N[t] = m_1 g - m_1\omega_0^2 A\cos[\omega_0 t].$$

Uvjet ne-odvajanja tijela m_1 i m_2 možemo izraziti kao zahtjev da sila N bude pozitivna ili jednaka nuli, tj. da bude usmjerena prema gore ili da iščezne, što vodi na

$$g \ge \omega_0^2 A\cos[\omega_0 t].$$

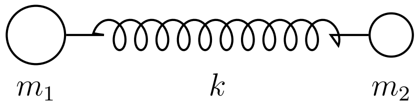
Taj je uvjet ispunjen za

$$A \le \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{g(m_1+m_2)}{k}.$$

Zaključujemo da je najveća amplituda titranja pri kojoj ne dolazi do odvajanja masa $A = g(m_1 + m_2)/k$. Za zadane vrijednosti parametara dobivamo $A \simeq 0.98\,\mathrm{cm}$.

Rješenje: $A = g(m_1+m_2)/k \simeq 0.98\,\mathrm{cm}$

Zadatak 13.5: Čestica mase m_1 i čestica mase m_2 povezane su oprugom konstante k. Odredi kružnu frekvenciju titranja tog sustava.



Postupak: Neka se gibanje čestica odvija duž x-osi; x_1 neka je koordinata čestice m_1, a x_2 neka je koordinata čestice m_2. Neka je u ravnoteži $x_2 > x_1$. Označimo li s ℓ_0 ravnotežnu duljinu opruge, promjenu njene duljine uslijed gibanja čestica možemo napisati kao

$$\xi = x_2 - x_1 - \ell_0.$$

Jednadžbe gibanja čestica sada možemo napisati kao

$$m_1\ddot{x}_1 = k\xi, \qquad m_2\ddot{x}_2 = -k\xi.$$

Napišemo li sada jednadžbu gibanja za varijablu ξ, dobit ćemo

$$\ddot{\xi} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \frac{k\xi}{m_1} + \frac{k\xi}{m_2},$$

odnosno

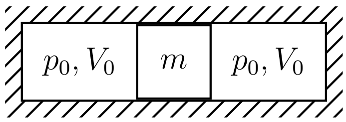
$$\ddot{\xi} + k\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\,\xi = 0,$$

što prepoznajemo kao jednadžbu gibanja harmoničkog oscilatora s kružnom frekvencijom

$$\omega_0^2 = k\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}.$$

Rješenje: $\omega_0 = \sqrt{k(m_1 + m_2)/m_1 m_2}$

Zadatak 13.6: U nepomičnom, s obje strane zatvorenom, toplinski izoliranom cilindru, nalazi se pomični klip mase $m = 3\,\mathrm{kg}$ i površine poprečnog presijeka $S = 10\,\mathrm{cm}^2$ (vidi sliku). Sa svake strane klipa nalazi se jednaka količina idealnog plina adijabatske konstante $\gamma = 1.4$. Kada je klip u ravnotežnom stanju, plin s jedne i s druge strane klipa je pri istoj temperaturi te zauzima obujam $V_0 = 5\,\mathrm{dm}^3$ pri tlaku $p_0 = 2\times10^5\,\mathrm{Pa}$. Pretpostavljajući da je proces sažimanja i širenja plina adijabatski, odredi frekvenciju malih titraja klipa oko ravnotežnog položaja. (Za $\epsilon \ll 1$ može se koristiti razvoj $(1\pm\epsilon)^\alpha \simeq 1\pm\alpha\epsilon$.)



Postupak: Postavimo x-os duž osi cilindra, tako da $x = 0$ odgovara ravnotežnom položaju klipa, a $x > 0$ neka odgovara pomaku klipa nadesno. Jednadžba gibanja klipa glasi

$$m\ddot{x} = (p_1[x] - p_2[x])\,S,$$

gdje je p_1 tlak s lijeve, a p_2 tlak s desne strane. Pri adijabatskom procesu vrijedi $pV^\gamma = \mathrm{const.}$, odnosno

$$p_1V_1^\gamma = p_0V_0^\gamma = p_2V_2^\gamma,$$

pa ovdje imamo

$$p_1[x]\,(V_0 + Sx)^\gamma = p_0V_0^\gamma = p_2[x]\,(V_0 - Sx)^\gamma\,,$$

što još možemo napisati u obliku

$$p_{1,2}[x] = p_0\frac{V_0^\gamma}{(V_0 \pm Sx)^\gamma} = p_0\left(1 \pm \frac{Sx}{V_0}\right)^{-\gamma}.$$

Pod pretpostavkom da je $Sx/V_0 \ll 1$, što odgovara malim oscilacijama, možemo koristiti $(1\pm\epsilon)^\alpha \simeq 1\pm\alpha\epsilon$, te pišemo

$$p_{1,2}[x] = p_0 \mp p_0\gamma\,\frac{Sx}{V_0}.$$

Slijedi

$$p_1[x] - p_2[x] = -2p_0\gamma S/V_0$$

te jednadžba gibanja glasi

$$\ddot{x} + \frac{2p_0\gamma S^2}{mV_0}\,x = 0,$$

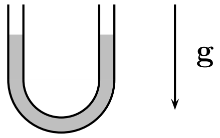
što prepoznajemo kao jednadžbu gibanja jednostavnog harmoničkog titranja s kružnom frekvencijom

$$\omega_0^2 = \frac{2p_0\gamma S^2}{mV_0}.$$

Za zadane vrijednosti parametara dobivamo $\omega_0 \simeq 6.11\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Rješenje: $\omega_0 = \sqrt{2p_0\gamma S^2/mV_0} \simeq 6.11\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

Zadatak 13.7: U cijevi u obliku slova 'U' površine poprečnog presjeka $S = 1\,\mathrm{cm}^2$, s oba otvorena kraja, nalazi se $m = 20\,\mathrm{g}$ vode (vidi sliku). Odredite period titranja razine vode.



(Gustoća vode $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Jednadžbu gibanja te iz nje frekvenciju titranja dobit ćemo na osnovu uvjeta očuvanja energije, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$. Pretpostavimo li da se u nekom trenutku razina vode u lijevom stupcu nalazi na visini $y > 0$ iznad ravnotežne visine, slijedi da je u lijevom stupcu došlo do povećanja mase vode u iznosu

$$\Delta m = \rho S y,$$

dok je istovremeno u desnom stupcu došlo do smanjenja mase vode u tom iznosu. Shvatimo li tu situaciju kao da je masa vode Δm premještena iz desnog u lijevi stupac, pri čemu je njeno središte mase podignuto za y, promjenu gravitacijske potencijalne energije možemo napisati kao

$$U = \Delta m g y = \rho S g y^2.$$

Kinetička energija vode u cijevi može se napisati kao

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{y}^2.$$

Ukupna mehanička energija,

$$E = U + K = \rho S g y^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2,$$

očuvana je veličina pa slijedi

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E = 2\rho S g y \dot{y} + m \dot{y} \ddot{y} = m \dot{y} \left(\ddot{y} + \frac{2\rho S g}{m} y \right),$$

što je ispunjeno za $\dot{y} = 0$ (mirovanje u ravnoteži) ili za

$$\ddot{y} + \frac{2\rho S g}{m} y = 0,$$

što prepoznajemo kao jednadžbu gibanja harmoničkog oscilatora s kružnom frekvencijom

$$\omega_0^2 = \frac{2\rho S g}{m}.$$

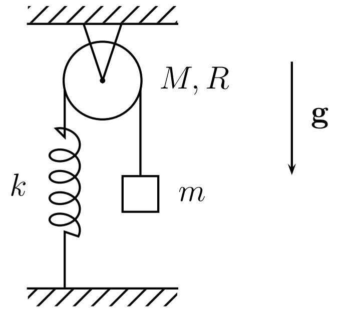
Odgovarajući period je

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\rho S g}}.$$

Za zadane parametre dobivamo $T \simeq 0.634\,\mathrm{s}$.

Rješenje: $T = 2\pi\sqrt{m/2\rho S g} \simeq 0.634\,\mathrm{s}$

Zadatak 13.8: Tanka nerastezljiva nit zanemarive mase prebačena je preko koloture mase M i polumjera R koju smatramo homogenim diskom. Jedan kraj niti oprugom je povezan s čvrstim uporištem, dok na drugom kraju visi uteg mase m. Odredi period malih oscilacija u ovom sustavu.



Postupak: Jednadžbu gibanja sustava dobit ćemo iz uvjeta očuvanja mehaničke energije, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$. Uvodimo uspravnu x-os, usmjerenu prema dolje, tako da $x = 0$ odgovara položaju utega pri kojem napetost opruge iščezava, a $x = x_0$ odgovara ravnotežnom položaju utega. Iz uvjeta ravnoteže imamo relaciju $kx_0 = mg$, a zbog jednostavnosti daljnjeg računa uvodimo koordinatu

$$\xi = x - x_0 = x - mg/k$$

koja opisuje pomak sustava iz ravnoteže. Potencijalnu energiju sustava možemo napisati kao zbroj potencijalne energije opruge i gravitacijske potencijalne energije utega,

$$U = \frac{1}{2}kx^2 - mgx = \frac{1}{2}k(\xi + mg/k)^2 - mg(\xi + mg/k) = \frac{1}{2}k\left(\xi^2 - \left(\frac{mg}{k}\right)^2\right).$$

Kinetičkoj energiji sustava doprinose translacija utega i vrtnja koloture,

$$K = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2,$$

gdje je $I = \frac{1}{2}MR^2$ moment tromosti koloture (disk mase M i polumjera R), a ϕ je kut zakreta koloture koji odgovara pomaku ξ. Iz geometrije sustava slijedi da su ϕ i ξ povezani relacijom $\xi = R\phi$, odnosno kad je riječ o brzinama, $\dot{\xi} = R\dot{\phi}$. Slijedi

$$K = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)\dot{\xi}^2.$$

Iz uvjeta očuvanja mehaničke energije sada imamo

$$0 = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K + U) = \left(m + \frac{M}{2}\right)\dot{\xi}\left(\ddot{\xi} + \frac{k}{m + M/2}\xi\right).$$

Gornji izraz mora biti jedank nuli u svim trenucima vremena pa slijedi da vrijedi jednakost

$$\ddot{\xi} + \frac{k}{m + M/2}\,\xi = 0,$$

što je jednadžba gibanja harmoničkog oscilatora s kružnom frekvencijom

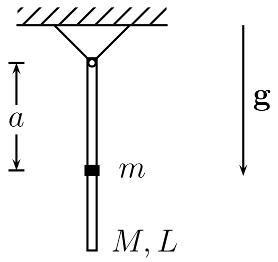
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + M/2}},$$

a kojoj odgovara period

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m + M/2}{k}}.$$

Rješenje: $T = 2\pi\sqrt{(m + M/2)/k}$

Zadatak 13.9: Tanki homogeni štap duljine L i mase M poduprt je tako da može slobodno njihati oko jednog kraja. Odredi udaljenost a od gronjeg kraja štapa na kojoj treba pričvrstiti sitan uteg mase m (vidi sliku) kako bi period pri njihanju čitavog sustava malom amplitudom bio najkraći. Posebno razmotri granični slučaj $m/M \to 0$.



Postupak: Jednadžbu gibanja sustava dobit ćemo na osnovu uvjeta očuvanja mehaničke energije, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$. Neka kut ϕ opisuje otklon njihala od njegova ravnotežna položaja. Potencijalnu energiju sustava možemo napisati kao

$$U = Mg\frac{L}{2}(1-\cos\phi) + mga(1-\cos\phi) \simeq \left(M\,\frac{L}{2} + ma\right) g\,\frac{\phi^2}{2},$$

gdje je $L/2$ udaljenost središta mase štapa od osi, a a je udaljenost utega m od osi. S obzirom da razmatramo mali kut ϕ, koristili smo razvoj $\cos\phi \simeq 1 - \phi^2/2$. Kinetičku energiju možemo napisati kao

$$K = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2 + ma^2\right)\dot{\phi}^2.$$

Uvjet očuvanja energije daje

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K+U) = \left(\frac{1}{3}ML^2 + ma^2\right)\dot{\phi}\left(\ddot{\phi} + \frac{g(ML/2+ma)}{ML^2/3+ma^2}\phi\right).$$

Gornji uvjet mora biti ispunjen u svim trenucima vremena, dakle mora vrijediti

$$\ddot{\phi} + \frac{g(ML/2+ma)}{ML^2/3+ma^2}\phi = 0$$

što prepoznajemo kao jednadžbu gibanja oscilatora s kružnom frekvencijom

$$\omega_0^2 = \frac{(ML/2+ma)g}{ML^2/3+ma^2}.$$

Minimum perioda podudara se s maksimumom frekvencije, kao i njena kvadrata, pa odgovarajuću vrijednost udaljenosti a pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}\omega_0^2}{\mathrm{d}a} = \frac{m(ML^2/3 - MLa - ma^2)}{(ML^2/3+ma^2)^2},$$

iz čega dobivamo

$$a_{1,2} = \frac{ML}{2m}\left(-1 \pm \sqrt{1+\frac{4m}{3M}}\right).$$

S obzirom da se uteg mora nalaziti ispod objesišta odabiremo pozitivno rješenje, odnosno rješenje s pozitivnim predznakom ispred korijena, dakle

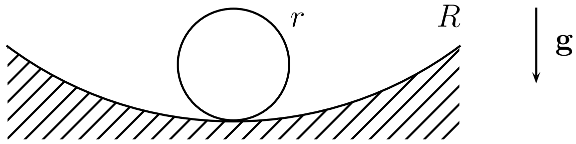
$$a = \frac{ML}{2m}\left(-1 + \sqrt{1+\frac{4m}{3M}}\right).$$

U graničnom slučaju $m/M \to 0$ dobivamo

$$\lim_{m/M\to 0} a = L/3$$

Rješenje: $a = (ML/2m)(-1 + \sqrt{1 + 4m/3M})$, $\lim_{m/M\to 0} a = L/3$

Zadatak 13.10: Homogena kugla polumjera r položena je u dno sferne udubine polumjera zakrivljenosti $R > r$ (vidi sliku). Odredi frekvenciju malih titraja kada kugla kotrljajući se bez proklizavanja "njiše" oko ravnotežnog položaja.



Postupak: Jednadžbu gibanja te iz nje frekvenciju titranja dobit ćemo iz uvjeta očuvanja mehaničke energije, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$. Kako bismo opisali potencijalnu i kinetičku energiju sustava uvodimo dvije kutne koordinate; Kut Φ opisuje otklon središta kugle od ravnotežnog položaja kako ga vidimo iz središta zakrivljenosti sferne udubine (središte se giba po luku polumjera zakrivljenosti $R-r$), a kut ϕ opisuje zakret same kugle. Kuteve Φ i ϕ povezujemo tako što pomak središta kugle $\mathrm{d}s$ najprije izražavamo s pomoću $\mathrm{d}\Phi$, a zatim s pomoću $\mathrm{d}\phi$,

$$\mathrm{d}s = (R-r)\,\mathrm{d}\Phi = r\,\mathrm{d}\phi.$$

Integracijom slijedi relacija $(R-r)\Phi = r\phi$, dok dijeljenjem gornje jednakosti s $\mathrm{d}t$ dobivamo odnos brzine središta kugle v i kutnih brzina $\dot{\Phi}$ i $\dot{\phi}$,

$$v = (R-r)\dot{\Phi} = r\dot{\phi}.$$

Kinetičku energiju homogene kugle čiji je moment tromosti $I = \frac{2}{5}mr^2$ sada možemo zapisati kao

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m(r\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\dot{\phi}^2 = \frac{7}{10}mr^2\dot{\phi}^2.$$

Pri kutnom otklonu Φ središte kugle se, u odnosu na njegov ravnotežni položaj, podiže na visinu $(R-r)(1-\cos\Phi)$ te gravitacijsku potencijalnu energiju kugle možemo napisati kao

$$U = mg(R-r)(1-\cos\Phi) \simeq mg(R-r)\frac{\Phi^2}{2},$$

gdje smo, s obzirom da kut Φ pri malim titrajima poprima male vrijednosti, koristili razvoj $\cos\Phi \simeq 1 - \Phi^2/2$. Prelaskom s kuta Φ na kut $\phi = (R-r)\Phi/r$, potencijalnu energiju pišemo kao

$$U = \frac{mgr^2}{2(R-r)}\phi^2.$$

Uvjet očuvanja mehaničke energije daje

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K+U) = \cdots = \frac{7}{5}\dot{\phi}\left(\ddot{\phi} + \frac{5g}{7(R-r)}\phi\right).$$

S obzirom da gornja jednakost mora vrijediti u svim trenucima vremena, slijedi

$$\ddot{\phi} + \frac{5g}{7(R-r)}\phi = 0,$$

što prepoznajemo kao jednadžbu gibanja jednostavnog harmonijskog titranja s kružnom frekvencijom

$$\omega_0^2 = \frac{5g}{7(R-r)}.$$

Rješenje: $\omega_0 = \sqrt{5g/7(R-r)}$

Zadatak 13.11: Čestica mase m se giba u x, y-ravnini pod djelovanjem sile $\mathbf{F} = -k\,(x\,\mathbf{i} + 4y\,\mathbf{j})$, a puštena u gibanje iz mirovanja u točki $\mathbf{r}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j}$. Napiši putanju čestice u obliku $y[x]$ te ju skiciraj. Zatim odredi najveću vrijednost iznosa brzine koju čestica postiže tokom gibanja.

Postupak: Jednadžba gibanja $m\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$, rastavljena na komponente u x, y-ravnini, daje dvije nevezane jednadžbe gibanja,

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \text{i} \qquad m\ddot{y} + 4ky = 0.$$

Prepoznajemo da je riječ o harmoničkom titranju u x-smjeru frekvencijom

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

te o harmoničkom titranju u y-smjeru dvostruko većom većom frekvencijom. Opća rješenja možemo napisati kao

$$x[t] = A_x \cos[\omega_0 t + \phi_x] \qquad \text{i} \qquad y[t] = A_y \cos[2\omega_0 t + \phi_y],$$

gdje su A_x i A_y amplitude titranja, a ϕ_x i ϕ_y su fazni pomaci. Za komponente brzine dobivamo

$$v_x[t] = \dot{x}[t] = -\omega_0 A_x \sin[\omega_0 t + \phi_x] \qquad \text{i} \qquad v_y[t] = \dot{y}[t] = -2\omega_0 A_y \sin[2\omega_0 t + \phi_y].$$

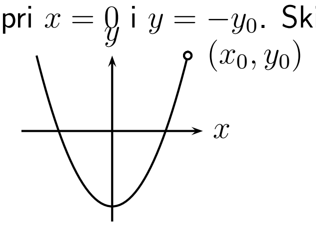
Uzmemo li $t = 0$ kao početni trenutak, na osnovu početnog uvjeta $\mathbf{v}[0] = 0$ zaključujemo da fazni pomaci moraju biti jednaki 0 ili π. Nakon toga na osnovu početnog uvjeta $\mathbf{r}[0] = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j}$ slijedi $A_x = |x_0|$ i $A_y = |y_0|$, gdje za $x_0 > 0$ uzimamo $\phi_x = 0$ dok za $x_0 < 0$ uzimamo $\phi_x = \pi$ te isto tako za y-smjer. Konačno, položaj možemo napisati kao

$$x[t] = x_0 \cos[\omega_0 t] \qquad \text{i} \qquad y[t] = y_0 \cos[2\omega_0 t] = y_0(2\cos^2[\omega_0 t] - 1).$$

Eliminacijom $\cos\omega_0 t$ iz gornjih izraza slijedi jednadžba putanje čestice u x, y ravnini,

$$y[x] = y_0\left(2x^2/x_0^2 - 1\right),$$

gdje prepoznajemo parabolu s tjemenom pri $x = 0$ i $y = -y_0$. Skica za $x_0 > 0$ i $y_0 > 0$:



Komponente brzine su $v_x[t] = -\omega_0 x_0 \sin[\omega_0 t]$ i $v_y[t] = -4\omega_0 y_0 \cos[\omega_0 t]\sin[\omega_0 t]$ te za kvadrat njena iznosa dobivamo

$$v^2[t] = v_x^2[t] + v_y^2[t] = \omega_0^2 \sin^2[\omega_0 t]\,(x_0^2 + 16y_0^2\cos^2[\omega_0 t]).$$

Zbog lakšeg računa uvodimo varijablu $u = \cos^2[\omega_0 t]$ koja poprima vrijednosti iz intervala $[0, 1]$. Gornji izraz za kvadrat iznosa brzine sada možemo napisati kao

$$v^2 = \omega^2(1-u)(x_0^2 + 16y_0^2 u) = -16y_0^2\omega^2(u-1)\left(u + x_0^2/16y_0^2\right), \qquad u \in [0, 1],$$

što je parabola s negativnim vodećim koeficijentom, s nultočkama pri $u_1 = -x_0^2/16y_0^2$ i $u_2 = 1$, te s tjemenom pri

$$u_0 = (u_1 + u_2)/2 = \left(1 - x_0^2/16y_0^2\right)/2.$$

Naš je cilj pronaći maksimum te parabole na intervalu $u \in [0, 1]$. Uočavamo da za sve x_0 i y_0 vrijedi $u_0 \le 1/2$. Za $u_0 \ge 0$ tjeme se nalazi unutar intervala $[0, 1]$ te odgovara maksimumu kvadrata iznosa brzine. Zaključujemo

$$v_{\max} = \sqrt{v^2\big|_{u=u_0}} = \omega_0(x_0^2 + 16y_0^2)/8y_0 \qquad \text{za} \qquad x_0^2/16y_0^2 \le 1.$$

Ako je $u_0 < 0$, maksimum vrijednosti v^2 se za $u \in [0,1]$ nalazi pri lijevom rubu intervala, odnosno pri $u = 0$, te imamo

$$v_{\max} = \sqrt{v^2\big|_{u=0}} = \omega_0 x_0 \qquad \text{za} \qquad x_0^2/16y_0^2 > 1.$$

Rješenje: $y[x] = y_0\,(2x^2/x_0^2 - 1)$, $v_{\max} = \omega_0(x_0^2 + 16y_0^2)/8y_0$ za $x_0^2/16y_0^2 \le 1$, $v_{\max} = \omega_0 x_0$ za $x_0^2/16y_0^2 > 1$

Zadatak 14.1: Otklon čestice koja prigušeno titra opisujemo izrazom $x[t] = A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos[\omega t + \phi]$. Odredi konstante $A > 0$ (amplitudu u $t = 0$) i ϕ (fazu) ako u trenutku $t = 0$ čestica ima brzinu $\dot{x} = v_0 > 0$ pri otklonu $x = x_0 > 0$.

Postupak: Ako je položaj opisan izrazom

$$x[t] = A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos[\omega t + \phi],$$

onda brzinu možemo napisati kao

$$\dot{x}[t] = -(\delta + \omega\tan[\omega t + \phi])\, x[t].$$

Najprije razmotrimo početni uvjet za brzinu,

$$\dot{x}[0] = -(\delta + \omega\tan\phi)\, x_0 = v_0.$$

On je ispunjen za

$$\tan\phi = -\frac{\delta}{\omega} - \frac{v_0}{x_0\omega},$$

gdje valja voditi računa o dvoznačnosti pri određivanju samog ϕ. S obzirom da je zadano $v_0 > 0$ i $x_0 > 0$, tangens faze ϕ je negativan što dopušta fazu (kut) iz II ili iz IV kvadranta. Zatim razmatramo početni uvjet za otklon,

$$x[0] = A\cos\phi = x_0,$$

S obzirom da zahtijevamo $A > 0$ te da je ovdje zadano $x_0 > 0$, slijedi $\cos\phi > 0$ što znači da faza ϕ pripada I ili IV kvadrantu, od čega je samo IV kvadrant dopušten ranije dobivenim uvjetom. Konačno, iz početnog uvjeta za elongaciju slijedi

$$A = \frac{x_0}{\cos\phi} = x_0\sqrt{1 + \tan^2\phi} = x_0\sqrt{1 + \left(\frac{\delta + v_0/x_0}{\omega}\right)^2}.$$

Rješenje: $\phi = \arctan[-(\delta + v_0/x_0)/\omega] \in [-\pi/2, 0]$, $A = x_0\sqrt{1 + ((\delta + v_0/x_0)/\omega)^2}$

Zadatak 14.2: Čestica prigušeno titra duž x-osi. Koordinate triju uzastopnih krajnjih položaja čestice (položaji pri kojima brzina čestice iščezava) su $x_1 = 20\,\mathrm{cm}$, $x_2 = 5.6\,\mathrm{cm}$ i $x_3 = 12.8\,\mathrm{cm}$. Odredi koordinatu ravnotežnog položaja.

Postupak: Položaj čestice koja prigušeno titra duž x-osi možemo općenito napisati kao

$$x[t] = x_\infty + A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos[\omega t + \phi],$$

gdje je x_∞ koordinata ravnotežnog položaja, a

$$\omega = 2\pi/T$$

je period prigušenog titranja. Napišemo li brzinu čestice kao

$$\dot{x}[t] = -A\mathrm{e}^{-\delta t}(\delta\cos[\omega t + \phi] + \omega\sin[\omega t + \phi]),$$

lako je uočiti da ona miruje, tj. nalazi se u krajnjem položaju, u trenucima koji su u vremenu razmaknuti polovicu perioda prigušenog titranja. Označimo li s x_n koordinatu krajnjeg položaja čestice, slijedi da za koordinate dvaju uzastopnih krajnjih položaja vrijedi relacija

$$\frac{x_{n+1} - x_\infty}{x_n - x_\infty} = -\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)}$$

(negativan predznak na desnoj strani je prisutan jer se dva uzastopna krajnja položaja nalaze sa suprotnih strana ravnotežnog položaja). U našem slučaju imamo dva para uzastopnih krajnjih položaja za koje pišemo

$$\frac{x_2 - x_\infty}{x_1 - x_\infty} = -\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)}, \qquad \frac{x_3 - x_\infty}{x_2 - x_\infty} = -\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)}.$$

Eliminacijom $\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)}$ iz gornjeg sustava dobivamo

$$(x_1 - x_\infty)(x_3 - x_\infty) = (x_2 - x_\infty)^2,$$

iz čega slijedi

$$x_\infty = \frac{x_1 x_3 - x_2^2}{x_1 - 2x_2 + x_3}.$$

Rješenje: $x_\infty = (x_1 x_3 - x_2^2)/(x_1 - 2x_2 + x_3) = 10.4\,\mathrm{cm}$

Zadatak 14.3: Čestica koja prigušeno titra s logaritamskim dekrementom prigušenja $\lambda = 0.002$ puštena je u gibanje iz mirovanja pri otklonu $x_0 = 1\,\mathrm{cm}$ u odnosu na ravnotežni položaj. Odredi ukupni put koji će čestica preći do "konačnog zaustavljanja".

Postupak: Ako $x = 0$ odgovara ranvotežnom položaju, uzastopni krajnji položaji čestice koja prigušeno titra zadovoljavaju relaciju

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = -\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)} = -\mathrm{e}^{-\lambda/2},$$

gdje je x_n položaj n-tog krajnjeg položaja, δ je koeficijent prigušenja, T je period prigušenog titranja, a $\lambda = \delta T$ je logaritamski dekrement prigušenja. Ukupan put koji čestica pravaljuje titrajući, krene li iz mirovanja pri otklonu x_0, možemo napisati kao

$$\begin{aligned} s &= |x_0| + 2|x_1| + 2|x_2| + 2|x_3| + \cdots \\ &= x_0 + 2x_0\mathrm{e}^{-\lambda/2} + 2x_0\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^2 + 2x_0\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^3 + \cdots \\ &= x_0\Big(-1 + 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^k\Big). \end{aligned}$$

Sumu prepoznajemo kao geometrijski red,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^k = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda/2}},$$

te je prevaljeni put

$$s = x_0\left(-1 + \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-\lambda/2}}\right).$$

Rješenje: $s = x_0\left(-1 + 2/(1-\mathrm{e}^{-\lambda/2})\right) \simeq 4x_0/\lambda \simeq 20\,\mathrm{m}$

Zadatak 14.4: Homogeni disk polumjera $R = 0.5\,\mathrm{m}$ prigušeno njiše oko vodoravne osi koja je okomita na njegovu površinu i prolazi njegovim rubom. Otklonimo li disk iz ravnotežnog položaja za kut $\vartheta_0 = 4^\circ$ i pustimo li ga u gibanje, njegov se krajnji otklon nakon $n = 6$ punih titraja smanji na vrijednost $\vartheta_6 = 1^\circ$. Odredi period prigušenog titranja diska te razliku između tog perioda i perioda kojim bi on titrao kada prigušenje ne bi bilo prisutno. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Kut otklona pri prigušenom titranju ovog njihala možemo napisati kao

$$\vartheta[t] = \theta\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos[\omega t + \phi]$$

gdje su θ i ϕ konstante, parametar δ opisuje prigušenje,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

je frekvencija prigušenog titranja, dok je

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{mgb}{I}} = \sqrt{\frac{mgb}{mb^2 + I_{\mathrm{cm}}}} = \sqrt{\frac{mgR}{mR^2 + \frac{1}{2}mR^2}} = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$$

vlastita frekvencija, odnosno frekvencija kojom bi sustav titrao kada prigušenje ne bi bilo prisutno. Ako je $\vartheta_0 = \vartheta[0]$ otklon oscilatora u nekom trenutku $t = 0$, onda njegov otklon nakon n punih titraja možemo napisati kao

$$\vartheta_n = \vartheta[nT] = \vartheta[0]\mathrm{e}^{-n\delta T} = \vartheta_0\mathrm{e}^{-n\delta T},$$

iz čega slijedi

$$\delta = \frac{1}{nT}\ln\frac{\vartheta_0}{\vartheta_n}.$$

Uvrštavanjem gornjih izraza za ω_0 i δ u izraz za ω dobivamo

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{2g}{3R} - \left(\frac{1}{nT}\ln\frac{\vartheta_0}{\vartheta_n}\right)^2,$$

iz čega izlučujemo period prigušenog titranja

$$T^2 = (2\pi)^2\frac{3R}{2g}\left(1 + \left(\frac{1}{2\pi n}\ln\frac{\vartheta_0}{\vartheta_n}\right)^2\right) = T_0^2\left(1 + \left(\frac{1}{2\pi n}\ln\frac{\vartheta_0}{\vartheta_n}\right)^2\right).$$

Uz zadane vrijednosti parametara n, ϑ_0, ϑ_n, R i g dobivamo $T_0 \simeq 1.737\,\mathrm{s}$, a vrlo blisku vrijednost dobivamo i za period prigušenog titranja T. Kako bismo odredili razliku između ta dva perioda možemo pisati

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{T^2 - T_0^2}{T + T_0} \simeq \frac{T^2 - T_0^2}{2T_0} = \cdots = \frac{T_0}{2}\left(\frac{1}{2\pi n}\ln\frac{\vartheta_0}{\vartheta_n}\right)^2,$$

što uz zadane vrijednosti parametara daje $\Delta T \simeq 1.17 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$.

Rješenje: $T_0 = 2\pi\sqrt{3R/2g} \simeq 1.737\,\mathrm{s}$, $T = T_0\sqrt{1 + (\ln[\vartheta_0/\vartheta_n]/2\pi n)^2} \simeq 1.738\,\mathrm{s}$, $\Delta T = T - T_0 \simeq (T_0/2)\big(\ln[\vartheta_0/\vartheta_n]/2\pi n\big)^2 \simeq 1.17 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$

Zadatak 14.5: Muzička vilica u zraku titra frekvencijom $f = 440\,\mathrm{Hz}$, a amplituda titranja joj se smanji na jednu polovinu početne vrijednosti u vremenu $\tau_{1/2} = 4\,\mathrm{s}$. Odredi koliko bi se smanjila frekvencija titranja iste vilice kada bi ona titrala u sredstvu zbog kojeg bi se amplituda smanjila na jednu polovinu u vremenu $\tau'_{1/2} = 3\,\mathrm{s}$.

Postupak: Amplituda prigušenog titranja se smanjuje u vremenu razmjerno s $\exp(-\delta t)$ pa vrijedi $\exp(-\delta\tau_{1/2}) = 1/2$, odnosno

$$\delta\tau_{1/2} = \ln 2,$$

gdje je δ koeficijent prigušenja. U zraku vilica titra frekvencijom

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2, \qquad \delta = \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}},$$

dok u sredstvu s jačim prigušenjem imamo

$$\omega'^2 = \omega_0^2 - \delta'^2, \qquad \delta' = \frac{\ln 2}{\tau'_{1/2}},$$

gdje je ω_0 vlastita frekvencija vilice. Eliminacijom ω_0 iz gornjeg sustava slijedi

$$\omega'^2 = \omega^2 - (\delta'^2 - \delta^2)$$

Razlika frekvencija je

$$\Delta\omega = \omega' - \omega = \omega\left(\sqrt{1 - \frac{\delta'^2 - \delta^2}{\omega^2}} - 1\right).$$

Uzmemo li u obzir $\delta < \delta' \ll \omega$ možemo koristiti razvoj $\sqrt{1 \pm \epsilon} \simeq 1 + \frac{1}{2}\epsilon$ te dobivamo

$$\Delta\omega \simeq -\frac{\delta'^2 - \delta^2}{2\omega} = \frac{(\ln 2)^2}{2\omega}\left(\tau_{1/2}{}^{-2} - \tau'_{1/2}{}^{-2}\right).$$

Konačno uz $\omega = 2\pi f$,

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{(\ln 2)^2}{8\pi^2 f}\left(\tau_{1/2}{}^{-2} - \tau'_{1/2}{}^{-2}\right).$$

Rješenje: $\Delta f = f' - f = (\ln 2)^2\big(\tau_{1/2}^{-2} - \tau'_{1/2}{}^{-2}\big)/8\pi^2 f \simeq -6.72 \times 10^{-7}\,\mathrm{Hz}$

Zadatak 14.6: Kritično prigušeni oscilator vlastite frekvencije ω_0 pokrenut je u gibanje iz ravnotežnog položaja početnom brzinom iznosa v_0. Odredi najveći otklon koji će ovaj oscilator postići. Zatim odredi najveći iznos brzine koji će oscilator postići tokom povratka iz najjače otklonjenog u ravnotežni položaj.

Postupak: Opće rješenje jednadžbe gibanja kritično prigušenog oscilatora (koeficijent prigušenja δ jednak je vlastitoj frekvenciji ω_0) ima oblik

$$x[t] = (c_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{-\omega_0 t},$$

gdje su c_1 i c_2 konstante. Tomu odgovara brzina

$$\dot{x}[t] = (c_2 - \omega_0(c_1 + c_2 t))\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.$$

Početni uvjet za položaj daje

$$x[0] = c_1 = 0,$$

s pomoću čega početni uvjet za brzinu daje

$$\dot{x}[0] = c_2 = v_0.$$

Konačno, otklon, brzinu i akceleraciju oscilatora pišemo kao

$$x[t] = v_0 t\, \mathrm{e}^{-\omega_0 t}, \qquad \dot{x}[t] = v_0(1 - \omega t)\, \mathrm{e}^{-\omega_0 t}, \qquad \ddot{x}[t] = -v_0\omega_0(2 - \omega_0 t)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.$$

Najveći otklon dobivamo iz uvjeta $\dot{x}[t] = 0$ koji je ispunjen u trenutku $t = 1/\omega_0$ te

$$x_{\max} = x[1/\omega_0] = \frac{v_0}{\mathrm{e}\omega_0}.$$

Najveći iznos brzine slijedi iz uvjeta $\ddot{x}[t] = 0$ koji je ispunjen u trenutku $t = 2/\omega_0$. Možemo pisati

$$v_{\max} = |\dot{x}[2/\omega_0]| = \frac{v_0}{\mathrm{e}^2}.$$

Rješenje: $x_{\max} = v_0/\mathrm{e}\omega_0$, $v_{\max} = v_0/\mathrm{e}^2$

Zadatak 14.7: Mornarički top (16"/50 Mk VII) čija je masa $M = 120\,\mathrm{t}$ ispaljuje projektil mase $m_\mathrm{p} = 1\,\mathrm{t}$ brzinom iznosa $v_\mathrm{p} = 800\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Ovjes topa dopušta topu da se on po ispaljenju projektila pomakne unazad čime se ublaži djelovanje povratnog udarca na konstrukciju broda. Ovjes je podešen je tako da se top ponaša kao kritično prigušeni oscilator. Odredi vrijeme koje protječe od ispaljenja projektila do trenutka u kojem se top nalazi u najjače otklonjenom položaju ako udaljenost tog položaja od ravnotežnog položaja topa iznosi $x_\mathrm{max} = 1.5\,\mathrm{m}$. Zatim odredi najveći iznos sile kojom top nakon ispaljenja projektila djeluje na brod.

Postupak: S obzirom da je top kritično prigušeni oscilator njegovo gibanje u odnosu na brod opisujemo izrazom

$$x[t] = \mathrm{e}^{-\delta t}(x_0 + (v_0 + x_0\delta)t),$$

gdje su x_0 i v_0 početni položaj i brzina u trenutku $t = 0$. Ovdje $t = 0$ odgovara trenutku ispaljenja projektila pa imamo $x_0 = 0$, dok početnu brzinu određujemo na osnovu očuvanja količine gibanja pri ispaljenju projektila. Količina gibanja projektila $m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}$ mora po iznosu biti jednaka količini gibanja topa Mv_0, pa imamo

$$v_0 = \frac{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}{M},$$

odnosno,

$$x[t] = v_0 t\mathrm{e}^{-\delta t} = \frac{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}{M}\, t\mathrm{e}^{-\delta t}.$$

Funkcija $t\mathrm{e}^{-\delta t}$ ima maksimum pri $t = \delta^{-1}$ gdje je njena vrijednost $1/e\delta$, pa imamo

$$x_\mathrm{max} = \frac{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}{\mathrm{e}\delta M}.$$

Iz gornjeg izraza određujemo

$$\delta = \frac{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}{\mathrm{e}Mx_\mathrm{max}},$$

te za trenutak u kojem top doseže x_max dobivamo

$$t = \frac{1}{\delta} = \frac{\mathrm{e}Mx_\mathrm{max}}{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}.$$

Za zadane vrijdnosti $t \simeq 0.612\,\mathrm{s}$. Iznos sile kojom top djeluje na brod računamo na osnovu mase i akceleracije samog topa,

$$F[t] = M\ddot{x}[t] = m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}\delta\mathrm{e}^{-\delta t}(-2 + \delta t).$$

Može se pokazati da funkcija $\mathrm{e}^{-\delta t}(-2 + \delta t)$ za $t \geq 0$ ima najveću apsolutnu vrijednost upravo u trenutku $t = 0$, dakle netom nakon ispaljenja projektila (a ne pri maksimalnom otklonu topa gdje je sila povratne opruge najveća, kao niti u još kasnijem trenutku u kojem je ispunjen uvjet $\mathrm{d}F/\mathrm{d}t = 0$). Slijedi

$$F_\mathrm{max} = |F[0]| = 2m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}\delta = \frac{2(m_\mathrm{p}v_\mathrm{p})^2}{\mathrm{e}Mx_\mathrm{max}}.$$

Za zadane vrijednosti $F_\mathrm{max} \simeq 2.61 \times 10^6\,\mathrm{N}$.

Rješenje: $t = \mathrm{e}Mx_\mathrm{max}/m_\mathrm{p}v_\mathrm{p} \simeq 0.612\,\mathrm{s}$, $F_\mathrm{max} = 2(m_\mathrm{p}v_\mathrm{p})^2/\mathrm{e}Mx_\mathrm{max} \simeq 2.61 \times 10^6\,\mathrm{N}$

Zadatak 15.1: Kuglica mase $m = 12\,\mathrm{g}$ i polumjra $r = 1\,\mathrm{cm}$ vezana je oprugom za čvrsto uporište tako da kružna frekvencija njenog neprigušenog titranja iznosi $\omega_0 = 2\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Odredi logaritamski dekrement prigušenja, frekvenciju prigušenog titranja te rezonantnu frekvenciju tog oscilatora kada je on uronjen u ulje viskoznosti $\eta = 0.4\,\mathrm{Pa\,s}$. (Silu otpora pri gibanju kuglice kroz ulje opisati Stokesovim zakonom.)

Postupak: Prema Stokesovu zakonu, jakost sile koja koči gibanje kugle polumjera r i brzine iznosa v pri njenu gibanju kroz fluid koeficijenta viskoznosti η opisana je izrazom

$$F_\eta = 6\pi\eta r v.$$

Prema tome, jednadžbu gibanja kuglice možemo napisati kao

$$m\ddot{x} = -6\pi\eta r\dot{x} - kx,$$

gdje je k konstanta opruge. Podijelimo li gornju jednadžbu s m možemo ju napisati u poznatom obliku,

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

gdje je $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ zadana frekvencija neprigušenog titranja, dok parametar

$$\delta = 3\pi\eta r/m$$

opisuje jakost prigušenja. Za $\delta < \omega_0$, što je za vrijednosti ovdje zadanih parametara ispunjeno (dobiva se $\delta/\omega_0 = 0.5$), rješenje jednadžbe gibanja je prigušeno titranje frekvencijom

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - (3\pi\eta r/m)^2} \simeq 5.44\,\mathrm{rad\,s^{-1}}.$$

Logaritamski dekrement prigušenja ovdje je

$$\lambda = \delta T = \frac{2\pi\delta}{\omega} = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = 2\pi\left(\frac{\omega_0^2}{\delta^2} - 1\right)^{-1/2} = 2\pi\left(\left(\frac{\omega_0 m}{3\pi\eta r}\right)^2 - 1\right)^{-1/2} \simeq 3.63.$$

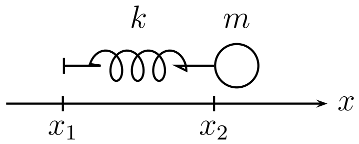
Rezonantna frekvencija dana je izrazom

$$\omega_{\mathrm{rez.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - 2(3\pi\eta r/m)^2} \simeq 4.44\,\mathrm{rad\,s^{-1}}.$$

Rješenje: $\lambda = 2\pi\big((\omega_0 m/3\pi\eta r)^2 - 1\big)^{-1/2} \simeq 3.63$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (3\pi\eta r/m)^2} \simeq 5.44\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $\omega_{\mathrm{rez.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2(3\pi\eta r/m)^2} \simeq 4.44\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

Zadatak 15.2: Na jednom kraju opruge konstante k pričvršćeno je tijelo mase m. Drugi kraj opruge, pod utjecajem vanjske sile, titra duž osi opruge amplitudom R i frekvencijom $\omega_{\rm p}$. Odredi amplitudu titranja mase m te najveći iznos produljenja opruge do kojeg dolazi tokom gibanja ovog sustava.

Postupak: Neka je x_1 položaj kraja opruge koji titra amplitudom R i frekvencijom $\omega_{\rm p}$, a x_2 neka je položaj suprotnog kraja na kojem je pričvršćena masa m.



Jednadžbu gibanja mase m možemo napisati kao

$$m\ddot{x}_2 = -k\,\Delta\ell = -k(\ell - \ell_0) = -k(x_2 - x_1 - \ell_0),$$

gdje je $\Delta\ell$ produljenje opruge, ℓ je njena trenutna duljina, a konstanta ℓ_0 je ravnotežna duljina opruge. Titranje x_1 možemo opisati izrazom

$$x_1[t] = R\cos[\omega_{\rm p}t].$$

Nadalje, s obzirom da ravnotežnu duljinu opruge ℓ_0 možemo odabrati po volji, zbog jednostavnosti uzimamo $\ell_0 = 0$. Dijeleći jednadžbu gibanja s m možemo ju napisati u obliku

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = R\omega_0^2\cos[\omega_{\rm p}t],$$

gdje je

$$\omega_0^2 = k/m, \qquad f_{\rm p} = kR/m = R\omega_0^2.$$

Prepoznajemo da se radi o neprigušenom oscilatoru vlastite frekvencije ω_0, ali s vanjskom silom. Općenit izraz za amplitudu prisilnog titranja,

$$A = \frac{f_{\rm p}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\rm p}^2)^2 + (2\delta\omega_{\rm p})^2}},$$

uz $\delta = 0$ jer nema prigušenja te uz gornji izraz za $f_{\rm p}$ poprima oblik

$$A = \frac{f_{\rm p}}{|\omega_0^2 - \omega_{\rm p}^2|} = \frac{R\omega_0^2}{|\omega_0^2 - \omega_{\rm p}^2|} = \frac{R}{\left|1 - (\omega_{\rm p}/\omega_0)^2\right|}.$$

Najveće produljenje opruge može se odrediti iz najvećeg iznosa akceleracije mase m koji pri harmoničkom titranju amplitudom A i frekvencijom $\omega_{\rm p}$ iznosi

$$a_{\max} = \omega_{\rm p}^2 A.$$

Najveće produljenje je

$$(\Delta\ell)_{\max} = \frac{F_{\max}}{k} = \frac{ma_{\max}}{k} = \frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega_0^2}A = \frac{R}{\left|1 - (\omega_0/\omega_{\rm p})^2\right|}.$$

Rješenje: $\omega_0^2 = k/m$, $A = R/|1 - (\omega_{\rm p}/\omega_0)^2|$, $(\Delta\ell)_{\max} = R/|1 - (\omega_0/\omega_{\rm p})^2|$

Zadatak 15.3: Kada na prigušeni oscilator djeluje vanjska harmonička sila amplitude F_p i frekvencije jednake rezonantnoj frekvenciji oscilatora, on titra amplitudom $A_\mathrm{rez.}$. Kada na isti oscilator djeluje vanjska sila nepromijenjene amplitude F_p, ali frekvencije koja je znatno niža od rezonantne frekvencije (teži u nulu), oscilator titra amplitudom A_0. Izrazi logaritamski dekrement prigušenja oscilatora s pomoću omjera $q = A_\mathrm{rez.}/A_0$.

Postupak: Logaritamski dekrement prigušenja oscilatora opisanog s ω_0 i δ definiran je s $\lambda = \delta T$, gdje je $T = 2\pi/\omega$ period prigušenog titranja (bez vanjske sile), a $\omega = \omega_0\sqrt{1-(\delta/\omega_0)^2}$ je frekvencija. Možemo pisati

$$\lambda = 2\pi\frac{\delta/\omega_0}{\sqrt{1-(\delta/\omega_0)^2}}.$$

Amplituda prisilnog titranja tog oscilatora uz vanjsku silu amplitude F_p i frekvencije ω_p dana je izrazom

$$A[\omega_\mathrm{p}] = \frac{F_\mathrm{p}/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_\mathrm{p}^2)^2+(2\delta\omega_\mathrm{p})^2}}.$$

U rezonanciji gdje je $\omega_\mathrm{p} = \omega_\mathrm{rez.} = \omega_0\sqrt{1-2(\delta/\omega_0)^2}$, te kada $\omega_\mathrm{p} \to 0$, imamo

$$A_\mathrm{rez.} = A[\omega_\mathrm{rez.}] = \frac{F_\mathrm{p}/m}{2\delta\omega_0\sqrt{1-(\delta/\omega_0)^2}}, \qquad \text{i} \qquad A_0 = A[0] = \frac{F_\mathrm{p}/m}{\omega_0^2}.$$

Slijedi

$$q = \frac{A_\mathrm{rez.}}{A_0} = \frac{1}{2(\delta/\omega_0)\sqrt{1-(\delta/\omega_0)^2}}.$$

Iz gornjeg izraza računamo omjer δ/ω_0,

$$\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{1}{q^2}}\right).$$

Odabiremo rješenje s negativnim predznakom ispred korijena jer za $(\delta/\omega_0)^2 > 1/2$ pojava rezonancije ne postoji te računamo logaritamski dekrement prigušenja,

$$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-q^{-2}}}{1+\sqrt{1-q^{-2}}}}.$$

Rješenje: $\lambda = 2\pi\sqrt{\left(1-\sqrt{1-q^{-2}}\right)/\left(1+\sqrt{1-q^{-2}}\right)}$

Zadatak 15.4: Ovjes (opruge i amortizeri) automobilske prikolice mase $m = 200\,\mathrm{kg}$ podešen je tako da se ona, kad nije opterećena, ponaša kao kritično prigušeni oscilator. Odredi rezonantnu frekvenciju prikolice opterećene teretom mase $M = 400\,\mathrm{kg}$ ako je opaženo da se ona pod tim opterećenjem spusti za $H = 10\,\mathrm{cm}$. (Prikolicu s teretom shvaćamo kao masu $m + M$ oslonjenu na oprugu s prigušenjem. Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Rezonantna frekvencija oscilatora dana je poznatim izrazom

$$\omega_{\mathrm{rez.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2},$$

gdje je ω_0 vlastita frekvencija oscilatora, a δ je parametar koji opisuje prigušenje. S obzirom da prikolicu s teretom shvaćamo kao masu $m+M$ oslonjenu na oprugu konstante k s trenjem b, vlastita frekvencija je

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m+M}},$$

a koeficijent prigušenja je

$$\delta = \frac{b}{2(M+m)}.$$

Na osnovu podatka da se neopterećena prilkolica ponaša kao kritično prigušeni oscilator, što znači da je za $M = 0$ vrijedi $\omega_0 = \delta$, ovdje imamo

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{b}{2m}.$$

Nadalje, na osnovu opažanja da se pod teretom težine Mg prikolica spusti (sabije oprugu) za visinu H, slijedi jenakost sila $kH = Mg$, odnosno

$$k = Mg/H.$$

Konačno, rezonantnu frekvenciju s pomoću gornjih izraza možemo napisati kao

$$\omega_{\mathrm{rez.}}^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2 = \frac{k}{m+M} - 2\left(\frac{b}{2(M+m)}\right)^2 = \frac{k}{m+M} - \frac{2km}{(M+m)^2} = \frac{k(M-m)}{(M+m)^2} = \frac{M(M-m)}{(M+m)^2}\,\frac{g}{H},$$

odnosno

$$\omega_{\mathrm{rez.}} = \frac{M}{M+m}\sqrt{\frac{g}{H}\left(1 - \frac{m}{M}\right)}.$$

(Zanimljivo je uočiti da se kod ovako podešenog ovjesa pojava rezonancije pojavljuje tek za $M \geq m$, jer u protivnom je izraz pod korijenom negativan.) Za zadane vrijednosti parametara m, M i H dobije se $\omega_{\mathrm{rez.}} \simeq 4.67\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Rješenje: $\omega_{\mathrm{rez.}} = (M/(M+m))\sqrt{(g/H)(1 - m/M)} \simeq 4.67\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Zadatak 15.5: Automobil se kreće po neravninama koje možemo opisati visinom $y[x] = H\cos[2\pi x/\lambda]$, gdje je x vodoravna koordinata položaja, $H = 2\,\mathrm{cm}$ je "amplituda", a λ je "valna duljina" neravnina. Ovjes automobila ima $q = 5$ puta slabije prigušenje od onog koji bi odgovarao kritičnom prigušenju. Odredi amplitudu titranja automobila duž uspravne osi kada se on kreće brzinom pri kojoj dolazi do rezonancije. (Automobil shvaćamo kao masu oslonjenu na oprugu s prigušenjem. Prijelazne pojave ne razmatramo.)

Postupak: Automobil shvaćamo kao oscilator koji se sastoji od mase m oslonjene na oprugu konstante k uz koeficijent trenja b, čemu odgovaraja vlastita frekvencija

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

i koeficijent gušenja $\delta = b/2m$. Pri kritičnom prigušenju vrijedi $\delta = \omega_0$, pa s obzirom da je ovdje prigušenje q puta slabije od kritičnog, imamo

$$\delta = \frac{\omega_0}{q}.$$

Pri gibanju automobila donji kraj opruge titra s amplitudom H, a to znači da amplitudu vanjske sile koja na njega djeluje možemo napisati kao

$$F_\mathrm{p} = kH = m\omega_0^2 H.$$

Amplituda titranja u rezonanciji dana je poznatim izrazom

$$A_\mathrm{rez.} = \frac{F_\mathrm{p}/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

Uvrštavanjem gornjih izraza za F_p i δ slijedi

$$A_\mathrm{rez.} = \frac{Hq^2}{2\sqrt{q^2 - 1}}.$$

Rješenje: $A_\mathrm{r} = (H/2)\left(q^2/\sqrt{q^2-1}\right) \simeq 5.103\,\mathrm{cm}$

Zadatak 16.1: Gitarska žica 1E, promjera $2r = 0.01''$, načinjena od čelika Youngova modula elastičnosti $E = 2.2 \times 10^{11}\,\mathrm{Pa}$ i gustoće $\rho = 7700\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, razapeta je na rasponu duljine $\ell = 25.5''$. Odredi silu napetosti i odgovarajuće relativno produljenje žice ako ona u osnovnom modu titra frekvencijom $f = 330\,\mathrm{Hz}$. ($1'' = 1\,\mathrm{in} = 2.54 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$.)

Postupak: Pri titranju stojnog vala na žici duljine ℓ s učvršćenim krajevima, za osnovni mod titranja vrijedi

$$\ell = \frac{\lambda}{2},$$

gdje je λ valna duljina. Tome odgovara valni vektor

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\ell},$$

odnosno frekvencija

$$\omega = 2\pi f = kv,$$

gdje je

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

brzina širenja vala na žici, T je napetost, a

$$\mu = \rho S = \rho r^2 \pi$$

je linijska gustoća mase žice. Slijedi

$$T = \mu v^2 = \rho r^2 \pi \, (2\pi f/k)^2 = \rho r^2 \pi \, (2\pi \ell)^2 = 4 r^2 \pi \rho \ell^2 f^2.$$

Za zadane vrijednosti $T \simeq 71.3\,\mathrm{N}$. Relativno produljenje žice u odnosu na stanje bez naprezanja je

$$\delta_L = \frac{\sigma_L}{E} = \frac{T/S}{E} = \frac{T}{r^2 \pi E} = \frac{4\rho \ell^2 f^2}{E}.$$

Za zadane vrijednosti $\delta \simeq 6.40 \times 10^{-3}$

Rješenje: $T = 4r^2\pi\rho\ell^2 f^2 \simeq 71.3\,\mathrm{N}$, $\delta_L = 4\rho\ell^2 f^2/E \simeq 6.40 \times 10^{-3}$

Zadatak 16.2: Čelična žica promjera $d = 1\,\mathrm{mm}$ i duljine $\ell = 3\,\mathrm{m}$ s učvršćenim krajevima napeta je tako da joj frekvencija titranja transverzalnog stojnog vala u osnovnom modu iznosi $f = 200\,\mathrm{Hz}$. Odredi ukupnu energiju titranja te žice kada ona titra u osnovnom modu maksimalnom amplitudom $A = 2\,\mathrm{cm}$. (Gustoća čelika $\rho = 7800\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.)

Postupak: Titranje stojnog vala u osnovnom modu na napetoj žici s krajevima pri $x_1 = 0$ i $x_2 = \ell$ možemo opisati valnom funkcijom

$$y[x,t] = A\sin[kx]\cos[\omega t],$$

gdje vrijedi

$$\ell = \frac{\lambda}{2}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\ell}, \qquad \omega = 2\pi f.$$

Linijska gustoća kinetičke energije žice je

$$\frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta x}\dot{y}^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y[x,t]}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\sin^2[kx]\sin^2[\omega t],$$

gdje je

$$\mu = \rho S = r^2\pi\rho = \frac{d^2\pi\rho}{4}$$

linijska gustoća mase žice. Ukupnu kinetičku energiju dobivamo integracijom preko čitavog raspona žice,

$$K = \int_{x=0}^{\ell}\frac{\Delta K}{\Delta x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\sin^2[\omega t]\int_0^{\ell}\sin^2[\pi x/\ell]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2\ell\sin^2[\omega t]$$

(gornji je integral očigledan jer je srednja vrijednost kvadrata trigonometrijske funkcije na polovici perioda jednaka $1/2$). Vidimo da kinetička energija postiže maskimalnu vrijednost

$$(K)_{\max} = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2\ell$$

u trenucima kada vrijedi $\sin[\omega t] = \pm 1$. Primjećujemo da u tim trenucima vrijedi $\cos[\omega t] = 0$, odnosno $y[x,t] = 0$, što znači da u tim trenucima žica nije otklonjena te da je njena potencijalna energija jednaka nuli. Konačno, s obzirom da je ukupna energija zbroj kinetičke i potencijalne energije, te da je ukupna energija očuvana u vremenu, zaključujemo

$$E = K + U = (K)_{\max} = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2\ell = \frac{1}{4}\frac{d^2\pi\rho}{4}(2\pi f)^2 A^2\ell = \frac{1}{4}d^2\pi^3\rho f^2 A^2\ell.$$

Za zadane vrijednosti d, ℓ i f, A i ρ dobije se $E \simeq 2.90\,\mathrm{J}$.

Rješenje: $E = d^2\pi^3\rho f^2 A^2\ell/4 \simeq 2.90\,\mathrm{J}$

Zadatak 16.3: Uteg mase $M = 2\,\mathrm{kg}$ mirno visi na užetu duljine $\ell = 10\,\mathrm{m}$ i mase $m = 0.5\,\mathrm{kg}$. Odredi trajanje putovanja transverzalnog valnog poremećaja s jednog na drugi kraj kraj užeta (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Brzina kretanja valnog poremećaja dana je izrazom

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

gdje je T napetost, a

$$\mu = \frac{m}{\ell}$$

je linijska gustoća mase užeta. Napetost užeta u točki na visini h iznad njegova donjeg kraja jednaka je zbroju težine utega i težine dijela užeta koje se nalazi ispod te točke,

$$T[h] = \left(M + \frac{h}{\ell}m\right) g.$$

Slijedi da je brzina kretanja vala na visini h iznad donjeg kraja

$$v[h] = \sqrt{\frac{T[h]}{\mu}} = \sqrt{\left(\frac{M\ell}{m} + h\right) g}.$$

Trajanje putovanja vala s jednog kraja na drugi je

$$\tau = \int \mathrm{d}t = \int_{h=0}^{\ell} \frac{\mathrm{d}h}{v[h]} = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^{\ell} \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{M\ell/m + h}} = \frac{2}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{M\ell}{m} + h}\,\Bigg|_0^{\ell} = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(\sqrt{1 + \frac{M}{m}} - \sqrt{\frac{M}{m}}\right).$$

Za zadane vrijednosti M, ℓ i m dobivamo $\tau \simeq 0.477\,\mathrm{s}$.

Rješenje: $\tau = 2\sqrt{\ell/g}\left(\sqrt{1 + M/m} - \sqrt{M/m}\right) \simeq 0.477\,\mathrm{s}$

Zadatak 16.4: Napetim užetom, brzinom iznosa $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, putuje transverzalni valni poremećaj oblika $y[x] = \alpha x \mathrm{e}^{-x^2/b^2}$, gdje su $\alpha = 0.1$ i b konstante. Odredi maksimalni iznos brzine kojom se gibaju čestice užeta.

Postupak: Valni poremećaj koji se brzinom iznosa v užetom giba na desno općenito opisujemo s

$$y[x,t] = f[x - vt],$$

gdje je f funkcija jedne varijable. U trenutku $t = 0$ imamo

$$y[x,0] = f[x].$$

Uzmemo li da se oblik valnog poremećaja opisan u zadatku funkcijom $y[x]$ odnosi na trenutak $t = 0$, mora vrijediti $f[x] = y[x]$, te funkciju f prepoznajemo kao

$$f[x] = \alpha x \mathrm{e}^{-x^2/b^2}.$$

Brzina kojom se gibaju čestice je

$$\dot{y}[x,t] = \frac{\partial}{\partial t} y[x,t] = \frac{\partial}{\partial t} f[x - vt] = -v f'[x - vt].$$

Najveći iznos te brzine možemo pronaći tako da se ograničimo na trenutak $t = 0$ te da razmotrimo brzine čestica duž čitave x-osi,

$$\dot{y}[x,0] = -v f'[x].$$

Ekstrem gornje brzine tražimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \dot{y}[x,0] = -v f''[x] = -\frac{2\alpha x \mathrm{e}^{-(x/b)^2}}{b^2} \left(3 - \frac{2x^2}{b^2}\right),$$

koji je ispunjen za

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\, b, \qquad x_3 = 0.$$

Brzine čestica za gornje vrijednosti x su

$$\dot{y}[x_{1,2}, 0] = \frac{2}{\mathrm{e}^{3/2}} \alpha v, \qquad \dot{y}[x_3, 0] = -\alpha v.$$

S obzirom da je $2 < \mathrm{e}^{3/2}$ zaključujemo da je najveći iznos brzine koju postižu čestice pri gibanju zadanog valnog poremećaja

$$|\dot{y}|_{\max} = \alpha v.$$

Za zadane vrijednosti $|\dot{y}|_{\max} = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Rješenje: $|\dot{y}|_{\max} = \alpha v = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Zadatak 16.5: Beskonačnim užetom napetosti $T = 2\,\mathrm{kN}$ putuje transverzalni valni poremećaj čiji je oblik u trnutku $t = 0$ opisan s $y[x] = A\mathrm{e}^{-x^2/b^2}$, gdje su $A = 1\,\mathrm{cm}$ i $b = 10\,\mathrm{cm}$ konstante. Odredi ukupnu energiju valnog poremećaja. (Koristi se integral $\int_{-\infty}^{\infty} u^2\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}/2$.)

Postupak: Uzmemo li da valni poremećaj putuje na desno, opisujemo ga valnom funkcijom

$$y[x,t] = f[x - vt] = A\mathrm{e}^{-(x-vt)^2/b^2},$$

gdje je

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

brzina propagacije vala, T je napetost, a $\mu = \Delta m/\Delta x$ je linijska gustoća mase užeta. Linijska gustoća kinetičke energije užeta je

$$\frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta x}v_y^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y[x,t]}{\partial t}\right)^2 = \frac{2\mu v^2 A^2}{b^2}\left(\frac{x-vt}{b}\mathrm{e}^{-(x-vt)^2/b^2}\right)^2.$$

Linijska gustoća potencijalne energije je

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{T(\Delta x' - \Delta x)}{\Delta x},$$

gdje je $\Delta x' - \Delta x$ produljenje elementa užeta uslijed valnog gibanja. Pišući

$$\Delta x' = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x\sqrt{1 + (\Delta y/\Delta x)^2} \simeq \Delta x\left(1 + (\Delta y/\Delta x)^2/2\right),$$

gdje smo koristili $\sqrt{1+\epsilon} \simeq 1 + \epsilon/2$, slijedi

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{T}{2}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = \frac{T}{2}\left(\frac{\partial y[x,t]}{\partial x}\right)^2 = \frac{2TA^2}{b^2}\left(\frac{x-vt}{b}\mathrm{e}^{-(x-vt)^2/b^2}\right)^2.$$

Linijsku gustoću ukupne energije u trenutku $t = 0$ možemo, koristeći $\mu v^2 = T$, napisati kao

$$\left.\frac{\Delta E}{\Delta x}\right|_{t=0} = \left.\left(\frac{\Delta K}{\Delta x} + \frac{\Delta U}{\Delta x}\right)\right|_{t=0} = \frac{4TA^2}{b^4}x^2\mathrm{e}^{-2x^2/b^2}.$$

Ukupna energija valnog poremećaja je

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta E}{\Delta x}\,\mathrm{d}x = \frac{4TA^2}{b^4}\frac{b^3}{2\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}u^2\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{TA^2}{b}.$$

Za zadane vrijednosti $E \simeq 2.507\,\mathrm{J}$

Rješenje: $E = TA^2\sqrt{\pi}/b\sqrt{2} \simeq 2.507\,\mathrm{J}$

Zadatak 16.6: Stojni valovi zvuka titraju u dvije cijevi s otvorenim krajevima. Duljina prve cijevi je $\ell = 1\ \mathrm{m}$, a druga cijev je za $\Delta\ell = 1\,\mathrm{mm}$ dulja od prve. Odredi frekvenciju udara koji se čuju kada obje cijevi istovremeno proizvode zvuk u osnovnom modu titranja. (brzina zvuka $v_\mathrm{z} = 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$)

Postupak: Titranje zraka u osnovnom modu u cijevi s otvorenim krajevima pri $x_1 = 0$ i $x_2 = \ell$ opisujemo funkcijom

$$\xi[x,t] = A\cos[kx]\cos[\omega t]$$

gdje vrijedi

$$\ell = \frac{\lambda}{2}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\ell}, \qquad \omega = kv_\mathrm{z} = \frac{\pi}{\ell}v_\mathrm{z}.$$

Kad dvije cijevi titraju istovremeno, ukupno titranje koje opažamo u nekoj točki izvan obiju cijevi možemo opisati s

$$\zeta[x,t] = a_1\cos[\omega_1 t + \phi_1] + a_2\cos[\omega_2 t + \phi_2].$$

Uzmemo li $a_1 = a_2 = a$, te zbog jednostavnosti $\phi_1 = \phi_2 = 0$, imamo

$$\zeta[x,t] = 2a\cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right]\cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right],$$

gdje prepoznajemo udare s kružnom frekvencijom

$$\omega_\mathrm{u} = \omega_1 - \omega_2 = \pi v_\mathrm{z}\left(\frac{1}{\ell_1} - \frac{1}{\ell_2}\right) = \pi v_\mathrm{z}\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_1\ell_2} = \pi v_\mathrm{z}\frac{\Delta\ell}{\ell(\ell + \Delta\ell)} \simeq \pi v_\mathrm{z}\frac{\Delta\ell}{\ell^2}.$$

Tražena frekvencija je

$$f_\mathrm{u} = \frac{\omega_\mathrm{u}}{2\pi} = \frac{v_\mathrm{z}\Delta\ell}{2\ell^2}.$$

Za zadane vrijednosti $f_\mathrm{u} \simeq 0.170\,\mathrm{Hz}$.

Rješenje: $f_\mathrm{u} = v_\mathrm{z}\Delta\ell/2\ell(\ell + \Delta\ell) \simeq v_\mathrm{z}\Delta\ell/2\ell^2 \simeq 0.170\ \mathrm{Hz}$

Zadatak 16.7: Kada je omjer frekvencija dvaju tonova jednak $\sqrt[12]{2}$ glazbenici kažu da se oni razlikuju za "pola tona". (Jednu "oktavu" čini dvanaest uzastopnih "polutonova", dakle ona odgovara udvostručenju polazne frekvencije.) Odredi od koliko se "polutonova" sastoji prirast frekvencije koji nastupa kada titranje zraka u cijevi s jednim zatvorenim i jednim otvorenim krajem iz osnovnog moda pređe u prvi pobuđeni.

Postupak: Duljina cijevi ℓ s jednim zatvorenim i jednim otvorenim krajem i valna duljina zvuka λ, kad se radi o titranju u osnovnom modu (1) te u prvom pobuđenom modu (2), zadovoljavaju relacije

$$\ell = \frac{\lambda_1}{4}, \qquad \ell = \frac{3\lambda_2}{4}.$$

Nadalje vrijedi

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\pi}{2\ell}, \qquad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{3\pi}{2\ell} = 3k_1,$$

te koristeći relaciju

$$\omega = kv$$

slijedi

$$\omega_2 = 3\omega_1.$$

Vidimo da prilikom prelaska u prvi pobuđeni mod titranja dolazi do utrostručenja polazne frekvencije zvuka. Odgovarajući broj polutonova m dobit ćemo s pomoću uvjeta

$$3 = \left(\sqrt[12]{2}\right)^m = 2^{m/12},$$

iz čega slijedi

$$m = 12 \times \frac{\ln 3}{\ln 2} \simeq 19.02.$$

Rješenje: $m = 12 \times \ln 3/\ln 2 \simeq 19.02$

Zadatak 16.8: Zvučnik se nalazi na vodoravnom tlu i emitira zvuk frekvencije $f = 1000\,\mathrm{Hz}$ ravnomjerno u svim smjerovima "gornjeg poluprostora". Odredi snagu zvučnika ako na udaljenosti $r = 30\,\mathrm{m}$ od njega jakost buke iznosi $L_{\mathrm{dB}} = 100\,\mathrm{dB}$. Zatim odredi amplitudu kojom osciliraju čestice zraka te amplitudu oscilacije tlaka zraka na udaljenosti r od izvora. (Za frekvenciju zvuka $f = 1000\,\mathrm{Hz}$ uzima se da granica čujnosti odgovara intenzitetu $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$. Gustoća zraka $\rho_{\mathrm{z}} = 1.22\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, brzina zvuka u zraku $v_{\mathrm{z}} = 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

Postupak: Na osnovu definicije jakosti buke, $L_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}[I/I_0]$, gdje je I_0 granica čujnosti, slijedi

$$I = I_0 \times 10^{L_{\mathrm{dB}}/10},$$

što za zadanu vrijednost daje $I = 10^{-2}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$. S druge strane, intenzitet zvuka definiran je kao omjer srednje snage vala, odnosno njegova izvora, i površine na koju on pada, što je ovdje polusfera polumjera r. Možemo pisati

$$\langle P\rangle = IS = I2r^2\pi,$$

što za zadane vrijednosti daje $\langle P\rangle \simeq 56.5\,\mathrm{W}$. Nadalje, poznati izraz za intenzitet longitudinalnog vala glasi

$$I = \frac{\langle P\rangle}{S} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{z}}\omega^2 A^2 v_{\mathrm{z}} = \frac{(\Delta p)^2_{\max}}{2\rho_{\mathrm{z}} v_{\mathrm{z}}},$$

gdje je ρ_{z} gustoća zraka, v_{z} je brzina zvuka u zraku, $\omega = 2\pi f$ je kružna frekvencija vala, A je amplituda oscilacije čestica, a $(\Delta p)_{\max}$ je amplituda titranja tlaka. Slijedi

$$A = \frac{1}{\pi f}\sqrt{\frac{I}{2\rho_{\mathrm{z}} v_{\mathrm{z}}}},$$

što za zadane vrijednosti daje $A \simeq 1.10 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$. Za amplitudu oscilacije tlaka dobivamo

$$(\Delta p)_{\max} = \sqrt{2\rho_{\mathrm{z}} v_{\mathrm{z}} I},$$

što za zadane vrijednosti daje $(\Delta p)_{\max} \simeq 2.88\,\mathrm{Pa}$.

Rješenje: $I = I_0 \times 10^{L_{\mathrm{dB}}/10} = 10^{-2}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$, $\langle P\rangle = 2r^2\pi I \simeq 56.5\,\mathrm{W}$, $A = (1/\pi f)\sqrt{I/2\rho_{\mathrm{z}} v_{\mathrm{z}}} \simeq 1.10 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$, $(\Delta p)_{\max} = \sqrt{2\rho_{\mathrm{z}} v_{\mathrm{z}} I} \simeq 2.88\,\mathrm{Pa}$

Zadatak 16.9: Prvi automobil vozi ravnom cestom prema reflektirajućem zidu brzinom iznosa $v_\mathrm{i} = 60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ svo vrijeme trubeći frekvencijom $f_\mathrm{i} = 250\,\mathrm{Hz}$. Drugi automobil vozi istom cestom ususret prvom automobilu brzinom iznosa $v_\mathrm{p} = 120\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Odredi frekvenciju koju čuje vozač drugog automobila kada se radi o zvuku trube koji do njega stiže izravno od prvog automobila (a) prije njihova mimoilaženja, (b) nakon mimoilaženja, te (c) kada se radi o zvuku trube koji do njega stiže nakon što se reflektirao od zida. (Brzina zvuka $v_\mathrm{z} = 1240\,\mathrm{km\,h^{-1}}$)

Postupak: Općenito, frekvencija izvora f_i i frekvencija f_p koju čuje prijamnik slijede relaciju

$$\frac{f_\mathrm{p}}{f_\mathrm{i}} = \frac{1 - \hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip} \cdot \mathbf{v}_\mathrm{p}/v_\mathrm{z}}{1 - \hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip} \cdot \mathbf{v}_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}},$$

gdje je $\hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip}$ jedinični vektor usmjeren od izvora prema prijamniku, a $\mathbf{v}_\mathrm{i}$ i $\mathbf{v}_\mathrm{p}$ su njihove brzine. U slučaju prijema zvuka koji stiže izravno od prvog automobila ovdje imamo

$$f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}\,\frac{1 \pm v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z}}{1 \mp v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}},$$

gdje gornji predznak odgovara slučaju (a), a donji predznak slučaju (b). U slučaju (c) radi se o zvuku koji stiže nakon reflektiranja od zida pa najprije računamo frekvenciju koju "čuje" zid,

$$f_\mathsf{zid} = \frac{f_\mathrm{i}}{1 - v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}},$$

a zatim zid shvaćamo kao izvor frekvencije f_zid. Slijedi da je frekvencija koju čuje vozač drugog automobila

$$f_\mathrm{p} = f_\mathsf{zid}\,(1 - v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z}) = f_\mathrm{i}\,\frac{1 - v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z}}{1 - v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}}.$$

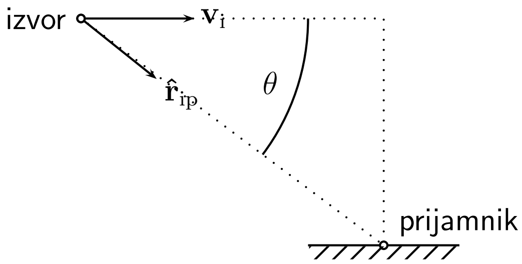
Rješenje: (a) $f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}\,(1 + v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z})/(1 - v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}) \simeq 288\,\mathrm{Hz}$, (b) $f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}\,(1 - v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z})/(1 + v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}) \simeq 215\,\mathrm{Hz}$, (c) $f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}\,(1 - v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z})/(1 - v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}) \simeq 237\,\mathrm{Hz}$

Zadatak 16.10: Avion leti duž vodoravnog pravca brzinom $v_\mathrm{i} = 0.8\, v_\mathrm{z}$, gdje je v_z brzina širenja zvuka, i odašilje zvuk frekvencije $f_\mathrm{i} = 100\,\mathrm{Hz}$. Izračunaj frekvenciju koju čuje mirni prijamnik na tlu u trenutku kada se avion nalazi točno iznad njega. (Potrebno je uzeti u obzir "kašnjenje" zvuka.)

Postupak: Frekvencija zvuka koju čuje mirni prijamnik dana je izrazom

$$f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}\,\frac{v_\mathrm{z}}{v_\mathrm{z} - \hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{i}},$$

gdje je $\hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip}$ je jedinični vektor koji pokazuje smjer od položaja izvora u trenutku emitiranja prema položaju prijamnika u trenutku prijama, $\mathbf{v}_\mathrm{i}$ je brzina izvora u trenutku emitiranja, a v_z je iznos brzine zvuka. Zadanu situaciju prikazujemo skicom:



U pravokutnom trokutu na skici, omjer duljine vodoravne katete i duljine hipotenuze jednak je $v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}$, jer u istom vremenu avion prevaljuje duljinu katete, dok zvuk prevaljuje duljinu hipotenuze. Možemo pisati

$$\cos\theta = v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z},$$

odnosno skalarni produkt $\hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{i}$ možemo napisati kao

$$\hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{i} = v_\mathrm{i}\cos\theta = v_\mathrm{i}^2/v_\mathrm{p}.$$

Slijedi

$$f_\mathrm{p} = \frac{f_\mathrm{i}}{1-(v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z})^2}.$$

Za zadani omjer $v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}$ dobivamo $f_\mathrm{p} \simeq 278\,\mathrm{Hz}$.

Rješenje: $f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}/(1-(v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z})^2) \simeq 278\,\mathrm{Hz}$

Zadatak 16.11: Izvor koji proizvodi zvuk frekvencije f i prijamnik se nalaze u istoj točki do trenutka $t = 0$ u kojem se izvor počninje gibati ubrzavajući duž pravca akceleracijom stalnog iznosa a, dok prijamnik i dalje miruje. Odredi frekvenciju koju čuje prijamnik u trenutku $t > 0$.

Postupak: Općenito, kada izvor koji se giba brzinom $\mathbf{v}_i$ odašilje zvuk frekvencije f_i, mirni prijamnik čuje zvuk frekvencije

$$f_{\rm p} = \frac{f_{\rm i}}{1 - (\hat{\mathbf{r}}_{\rm ip} \cdot \mathbf{v}_{\rm i})/v_{\rm z}},$$

gdje je $v_{\rm z}$ iznos brzine zvuka, a $\hat{\mathbf{r}}_{\rm ip}$ je jedinični vektor usmjeren od točke odašiljanja prema prijemniku. U ovom slučaju, u trenutku $t > 0$ prijamnik čuje zvuk emitiran u ranijem trenutku t' (vrijedi $0 < t' < t$) u kojem su iznos brzine izvora i njegova udaljenost od prijamnika dani s

$$v(t') = at', \qquad x(t') = \frac{a}{2}t'^2.$$

Vrijeme t nakon kojeg odaslani zvuk stiže do prijamnika jest zbroj vremena t' koliko je izvor putovao i vremena $x(t')/v_{\rm z}$ koliko je zvuku trebalo da stigne do prijamnika, dakle vrijedi relacija

$$t = t' + x(t')/v_{\rm z}.$$

Rješavanjem po t' dobivamo

$$t'_{1,2} = \frac{v_{\rm z}}{a}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 2at/v_{\rm z}}\right),$$

gdje odabiremo pozitivno rješenje, tj. ono s pozitivnim predznakom ispred korijena. Brzina izvora u trenutku t' je

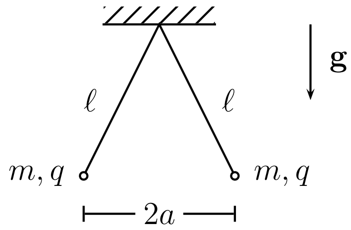
$$v(t') = v_{\rm z}\left(-1 + \sqrt{1 + 2at/v_{\rm z}}\right).$$

Konačno, frekvencija koju čuje mirni prijamnik u trenutku t je

$$f_{\rm p}(t) = \frac{f_{\rm i}}{1 - (\hat{\mathbf{r}}_{\rm ip} \cdot \mathbf{v}_{\rm i}(t'))/v_{\rm z}} = \frac{f_{\rm i}}{1 + v(t')/v_{\rm z}} = \frac{f_{\rm i}}{\sqrt{1 + 2at/v_{\rm z}}}.$$

Rješenje: $f_{\rm p}(t) = f_{\rm i}/\sqrt{1 + 2at/v_{\rm z}}$

Zadatak 17.1: Dvije metalne kuglice od kojih svaka ima masu $m = 10\,\mathrm{g}$ ovješene su jedna tik do druge o nevodljive niti duljine $\ell = 1\,\mathrm{m}$. Dovedemo li na kuglice ukupan naboj $2q$ koji se među njima ravnomjerno rasporedi, one će se zbog elektrostatskog odbijanja razmaknuti (vidi sliku). Odredi naboj q ako razmak među kuglicama iznosi $2a = 20\,\mathrm{cm}$ i izrazi ga u jedinicama elementarnog naboja q_e. (Permitivnost vakuuma $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, elementarni naboj $q_\mathrm{e} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.)



Postupak: Neka je x-os vodoravna i usmjerena prema desno, a y-os neka je uspravna i usmjerena uvis. Na svaku od kuglica djeluje napetost niti,

$$\mathbf{T} = T(\pm \sin\alpha\,\mathbf{i} + \cos\alpha\,\mathbf{j}),$$

gdje je α kut otklona niti, a izbor predznaka x-komponente ovisi o tome promatramo li lijevu ili desnu kuglicu. Na kuglice također djeluje odbojna elektrostatska sila,

$$\mathbf{F}_\mathrm{e} = \mp F_\mathrm{e}\,\mathbf{i}, \qquad F_\mathrm{e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(2a)^2},$$

gdje ponovo izbor predznaka ovisi o tome promatramo li lijevu ili densu kuglicu, te s gravitacijska sila

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g} = -mg\,\mathbf{j}.$$

Uvjet ravnoteže kuglica možemo napisati kao

$$0 = T(\pm \sin\alpha\,\mathbf{i} + \cos\alpha\,\mathbf{j}) \mp F_\mathrm{e}\,\mathbf{i} - G\,\mathbf{j},$$

odnosno, raspisano po komponentama

$$F_\mathrm{e} = T\sin\alpha, \qquad G = T\cos\alpha.$$

Dijeljenjem gornjih jednadžbi dobivamo

$$\tan\alpha = \frac{F_\mathrm{e}}{G},$$

dok iz geometrije imamo

$$\tan\alpha = \frac{a}{\sqrt{\ell^2 - a^2}}.$$

Eliminacijom $\tan\alpha$ iz gornjih dviju jednadžbi te korištenjem izraza za F_e i G, slijedi

$$q^2 = 4\pi\epsilon_0\, mg\,\frac{4a^3}{\sqrt{\ell^2 - a^2}},$$

odnosno,

$$q = \pm 4a^{3/2}\sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 mg}{\sqrt{\ell^2 - a^2}}},$$

gdje predznak naboja q ostaje neodređen. Za zadane vrijednosti m, ℓ i a dobije se $q \simeq \pm 2.095 \times 10^{-7}\,\mathrm{C} \simeq \pm 1.308 \times 10^{12}\, q_\mathrm{e}$.

Rješenje: $q = \pm 4a^{3/2}\sqrt{\pi\epsilon_0\, mg/\sqrt{\ell^2 - a^2}} \simeq \pm 1.308 \times 10^{12}\, q_\mathrm{e}$

Zadatak 17.2: Dvije čestice naboja q učvršćene su na x-osi pri koordinatama $x_{1,2} = \pm a$. Odredi frekvenciju kojom bi oko ravnotežnog položaja $x = y = 0$ titrala čestica mase m i naboja q, ako je njeno gibanje ograničeno na x-os. Zatim odredi frekvenciju kojom bi duž y-osi, oko istog ravnotežnog položaja, titrala čestica mase m i naboja $-q$. (Pretpostavlja se male oscilacije i koristiti se razvoj $(1+\epsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\epsilon$.)

Postupak: Čestice mase m i naboja $\pm q$ gibaju se pod djelovanjem električne sile $\mathbf{F} = \pm q\mathbf{E}$. Električno polje $\mathbf{E}$ dvaju naboja q učvršćenih pri $\mathbf{r}_{1,2} = \pm a\,\mathbf{i}$ možemo u točki $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ napisati kao

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(x-a)\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}}{|(x-a)\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}|^3} + \frac{(x+a)\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}}{|(x+a)\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}|^3}\right)$$

Za gibanje naboja q duž x-osi odgovorna je x-komponenta električne sile. Uvrstimo li $y = 0$ u gornji izraz za električno polje, kao x-komponentu dobivamo

$$E_x[x] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x-a}{|x-a|^3} + \frac{x+a}{|x+a|^3}\right).$$

S obzirom da razmatramo male oscilacije, vrijedi $|x| \ll a$, odnosno $|a \pm x| = a \pm x$, te možemo pisati

$$E_x[x] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-(a-x)^{-2} + (a+x)^{-2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(-(1-x/a)^{-2} + (1+x/a)^{-2}\right) \simeq -\frac{qx}{\pi\epsilon_0 a^3},$$

gdje smo u poslijednjem koraku koristili razvoj $(1\pm\epsilon)^{-2} \simeq 1 \mp 2\epsilon$. Jednadžbu gibanja čestice naboja q i mase m sada možemo napisati kao

$$m\ddot{x} = F_x = qE_x = -\frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a^3}\,x,$$

odnosno $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, gdje prepoznajemo jednadžbu gibanja harmoničkog oscilatora s frekvencijom

$$\omega_0^2 = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a^3 m}.$$

Za gibanje naboja $-q$ duž y-osi odgovorna je y-komponenta električnoe sile. Uz $x = 0$ dobivamo

$$E_y[y] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{y}{|-a\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}|^3} + \frac{y}{|a\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}|^3}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2y}{(a^2+y^2)^{3/2}} = \frac{qy}{2\pi\epsilon_0 a^3}\frac{1}{(1+(y/a)^2)^{3/2}} \simeq \frac{qy}{2\pi\epsilon_0 a^3},$$

gdje smo, s obzirom da je pri malim oscilacijama vrijedi $|y| \ll a$, koristili razvoj $(1+\epsilon)^{-3/2} \simeq 1 - (3/2)\epsilon$. Jednadžbu gibanja pišemo kao

$$m\ddot{y} = F_y = -qE_y = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a^3}\,y,$$

odnosno $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$, gdje je frekvencija titranja

$$\omega_0^2 = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a^3 m}.$$

Rješenje: Titranje q duž x-osi: $\omega_0 = q/\sqrt{\pi\epsilon_0 a^3 m}$, titranje $-q$ duž y-osi: $\omega_0 = q/\sqrt{2\pi\epsilon_0 a^3 m}$

Zadatak 17.3: Električno polje opisano je izrazom

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}] = \begin{cases} E_0(r/r_0)\,\hat{\mathbf{r}} & \text{za} \quad r \le r_0 \\ E_0(r_0/r)^2\,\hat{\mathbf{r}} & \text{za} \quad r > r_0, \end{cases}$$

gdje je $\mathbf{r}$ položaj točke u prostoru u odnosu na točku $\mathcal{O}$ (ishodište), r je udaljenost, $\hat{\mathbf{r}}$ je jedinični vektor, a E_0 i $r_0 > 0$ su konstante. Odredi količinu električnog naboja sadržanu unutar sfere polumjera r sa središtem u $\mathcal{O}$ te volumnu gustoću električnog naboja na udaljenosti r od točke $\mathcal{O}$.

Postupak: Prema Gaussovu zakonu za električno polje, količina naboja q unutar zatvorene plohe S razmjrena je toku električnog polja $\mathbf{E}$ kroz S,

$$q = \int_V \rho\,\mathrm{d}V = \epsilon_0 \oint_S \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Kao S ovdje odabiremo sfernu plohu polumjera r sa središtem u $\mathcal{O}$. S obzirom da je zadano polje $\mathbf{E}$ svugdje okomito na tako odabranu plohu te da je svugdje na njoj jednakog iznosa, tok $\mathbf{E}$ kroz S jednak je produktu jakosti polja i ukupne površine plohe. Slijedi

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \begin{cases} E_0(r/r_0)\,4\pi r^2 & \text{za} \quad r \le r_0 \\ E_0(r_0/r)^2\,4\pi r^2 & \text{za} \quad r > r_0, \end{cases}$$

odnosno,

$$q[r] = \begin{cases} 4\pi\epsilon_0 E_0 r^3/r_0 & \text{za} \quad r \le r_0 \\ 4\pi\epsilon_0 E_0 r_0^2 & \text{za} \quad r > r_0. \end{cases}$$

Volumnu gustoću naboja na udaljenosti r od točke $\mathcal{O}$ dobit ćemo iz omjera naboja sadržanog između dviju sfernih ljuski čiji su polumjeri r i $r+\mathrm{d}r$ i volumena prostora među tim ljuskama,

$$\rho[r] = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} = \frac{q[r+\mathrm{d}r]-q[r]}{4\pi r^2\,\mathrm{d}r} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}q[r].$$

Slijedi

$$\rho[r] = \begin{cases} 3\epsilon_0 E_0/r_0 & \text{za} \quad r \le r_0 \\ 0 & \text{za} \quad r > r_0. \end{cases}$$

Prepoznajemo da je riječ o homogenoj raspodjeli naboja unutar sfere polumjera r_0 te o vakuumu izvan nje.

Gustoću naboja se također može odrediti iz Maxwellove jednadžbe, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$. U pravokutnim koordinatama, pišući $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, unutar sfere polumjera $\mathbf{r}_0$ imamo

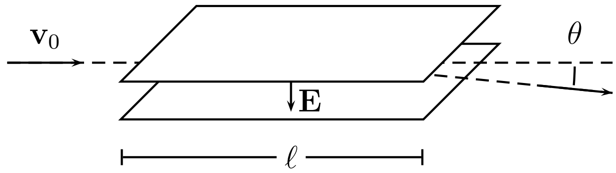
$$\rho = \epsilon_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \epsilon_0\left(\mathbf{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \mathbf{j}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + \mathbf{k}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\cdot\left(\frac{E_0}{r_0}\,(\mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z)\right) = \cdots = \frac{3\epsilon E_0}{r_0},$$

dok izvan nje imamo

$$\rho = \epsilon_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \epsilon_0\left(\mathbf{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \mathbf{j}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + \mathbf{k}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\cdot\left(E_0 r_0^2\,\frac{\mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \cdots = 0.$$

Rješenje: Za $r \le r_0$: $q[r] = 4\pi\epsilon_0 E_0 r^3/r_0$, $\rho[r] = 3\epsilon_0 E_0/r_0$, za $r > r_0$: $q = 4\pi\epsilon_0 E_0 r_0^2$, $\rho = 0$

Zadatak 17.4: Čestica mase m i naboja q ulijeće brzinom iznosa v_0 među paralelne ploče nabijenog kondenzatora. Prvobitan smjer gibanja čestice paralelan je s pločama, a duljina ploča u tom smjeru je ℓ (vidi sliku). Odredi kut otklona smjera gibanja čestice do kojeg dolazi uslijed prolaska kroz kondenzator ako je jakost homogenog električnog polja među pločama E. (Pretpostavljamo da čestica nije udarila u ploču kondenzatora.)



Postupak: Postavimo pravokutni koordinatni sustav tako da je ishodište u točki u kojoj čestica ulazi u kondenzator, orijentacija x-osi neka je podudarna s prvobitnim smjerom gibanja čestice, a y-os neka ima smjer obrnut u odnosu na smjer električnog polja. Jednadžba gibanja nabijene čestice u električnom polju, $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = q\mathbf{E}$, ovdje glasi

$$m\big(\ddot{x}[t]\,\mathbf{i} + \ddot{y}[t]\,\mathbf{j}\big) = -qE\,\mathbf{j}.$$

Uz pokratu

$$\gamma = qE/m$$

jednadžba gibanja svodi se na

$$\ddot{x}[t] = 0, \qquad \ddot{y}[t] = -\gamma,$$

što je podudarno s uobičajenim opisom gibanja čestice u homogenom polju gravitacijske sile ubrzanja $g = \gamma$. Integracijom jednadžbi gibanja uz početne uvjete u $t = 0$,

$$x[0] = y[0] = 0, \qquad \dot{x}[0] = v_0, \quad \dot{y}[0] = 0,$$

slijedi

$$x[t] = v_0 t, \qquad y[t] = -\frac{\gamma}{2}t^2,$$

što pak odgovara tzv. horizontalnom hitcu u homogenom polju gravitacijske sile. Čestica napušta kondenzator u trenutku $t = \tau$ u kojem vrijedi $x[\tau] = \ell$, odnosno

$$\tau = \ell/v_0.$$

Kut otkona slijedi iz

$$\tan\theta = -\frac{\dot{y}[\tau]}{\dot{x}[\tau]} = \frac{\gamma\tau}{v_0} = \frac{qE\ell}{mv_0^2}.$$

Rješenje: $\tan\theta = qE\ell/mv_0^2$

Zadatak 17.5: Čestica mase m i naboja q se slobodno giba kroz prostor u kojem nije prisutno elektromagnetsko polje. U trenutku $t = 0$ uključuje se homogeno magnetsko polje jakosti B i smjera okomitog na brzinu čestice, a u trenutku $t = \tau$ polje se gasi. Odredi otklon pravca gibanja čestice koji je nastupio uslijed prisutnosti magnetskog polja u tom vremenskom intervalu.

Postupak: Prije uključenja i nakon gašenja nagnetskog polja čestica se giba jednoliko pravocrtno, dok u vremenskom intervalu u kojem je prisutno polje $\mathbf{B}$ na nju djeluje magnetska komponenta Lorentzove sile,

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

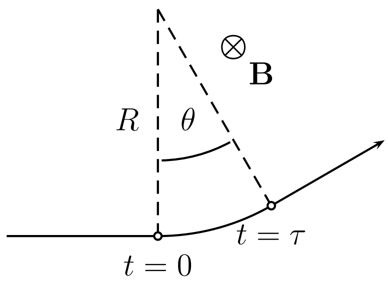
gdje je $\mathbf{v}$ brzina čestice. S obzirom da je početna brzina $\mathbf{v}$ okomita na $\mathbf{B}$, te da je $\mathbf{F}$ uvijek okomita na $\mathbf{B}$, slijedi da se gibanje odvija u ravnini okomitoj na $\mathbf{B}$. Nadalje, s obzirom da je $\mathbf{F}$ okomita na $\mathbf{v}$, slijedi da ona ima ulogu centripetalne sile koja mijenja smjer brzine $\mathbf{v}$, ali ne i njen iznos v. Iz svega navedenog slijedi da je riječ o gibanju u ravnini pod utjecajem centripetalne sile stalnog iznosa

$$F = |q|vB.$$

Takvoj sili odgovara kružno gibanje pri čemu vrijedi

$$F = \frac{mv^2}{R},$$

gdje je R polumjer putanje. Na skici koja slijedi smjer polja $\mathbf{B}$ je postavljen u skladu s pretpostavkom $q > 0$:



Kutnu brzinu ω možemo, na osnovu gornjih izraza za silu, napisati kao

$$\omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta = \frac{v}{R} = \frac{|q|B}{m},$$

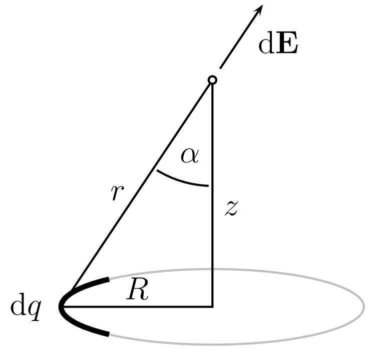
te kut otklona koji nastupa u vremenskom intervalu τ možemo napisati kao

$$\theta = \omega\tau = \frac{|q|B\tau}{m}.$$

Rješenje: $\theta = |q|B\tau/m$

Zadatak 17.6: Električni naboj jednoliko je raspoređen duž tankog obruča polumjera R. Odredi udaljenost od središta obruča onih točaka na njegovoj osi u kojima je jakost električnog polja najveća.

Postupak: Zadatak se može riješiti izravnim računanjem jakosti električnog polja u točkama na njegovoj osi.



Element naboja $\mathrm{d}q$ na obruču doprinosi električnom polju $\mathbf{E}$ u točki udaljenoj z od središta obruča elementom polja $\mathrm{d}\mathbf{E}$ čija je jakost

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}.$$

Zbog simetrije je očigledno da je ukupno polje $\mathbf{E} = \int \mathrm{d}\mathbf{E}$ usmjereno duž osi obruža (komponente $\mathrm{d}\mathbf{E}$ okomite na os se poništavaju). Stoga nas zanima isključivo komponenta $\mathrm{d}\mathbf{E}$ usmjerena duž osi obruča. Njen iznos možemo napisati kao

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}E\,\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}q,$$

gdje smo koristili $\cos\alpha = z/r$ te $r^2 = R^2 + z^2$. Integracijom preko čitavog obruča

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

gdje je q ukupan naboj. Ekstrem nalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_z[z] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^2-2z^2}{(R^2+z^2)^{5/2}},$$

koji je ispunjen za

$$z = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Očigledno je da se radi o maksimumu jakosti polja jer električno polje iščezava u središtu prstena (zbog simetrije), kao i pri beskonačnoj udaljenosti.

Umjesto izravnom integracijom, jakost električnog polja može se odrediti i preko elektrostatskog potencijala U kao $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}U$. Neka je z-os podudarna s osi simetrije obruča i neka $z=0$ odgovara njegovu središtu. Za točke na z-osi elektrostatski potencijal možemo napisati kao

$$U[z] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}.$$

z-komponenta električnog polja sada je

$$E_z[z] = -\frac{\partial}{\partial z}U[z] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}},$$

što se podudara s ranije dobivenim rezultatom.

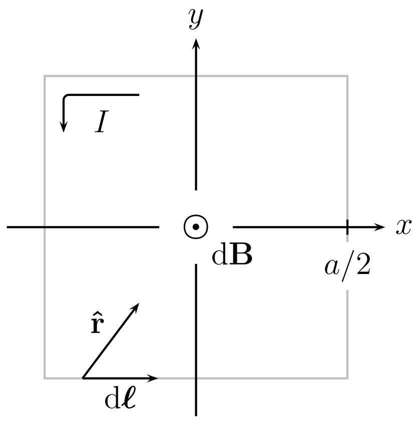
Rješenje: $z = R/\sqrt{2}$

Zadatak 17.7: Kvadratičnom petljom čija stranica ima duljinu $a = 10\,\mathrm{cm}$ teče struja jakosti $I = 1\,\mathrm{A}$. Primjenom Biot–Savartova pravila odredi jakost magnetskog polja B u sredini petlje. (Koristi se integral $\int (x^2+c^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}x = xc^{-2}(x^2+c^2)^{-1/2}$, permeabilnost vakuuma $\mu_0 = 1.257\times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-1}}$.)

Postupak: Prema Biot–Savartovu pravilu, element petlje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ kojim teče struja jakosti I doprinosi magnetskom polju u točki čiji je položaj u odnosu na $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ dan vektorom $\mathbf{r}$ kao

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell})\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2},$$

gdje je $r = |\mathbf{r}|$ udaljenost, a $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ je jedinični vektor. Skica prikazuje zadanu kvadratnu petlju smještenu u x, y-ravninu, element petlje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$, te odgovarajući element polja $\mathrm{d}\mathbf{B}$ u središtu kvadrata i jedinični vektor $\hat{\mathbf{r}}$,



Element stranice kvadrata pri $y = -a/2$ (donja stranica na slici) možemo napisati kao

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mathbf{i}\,\mathrm{d}x.$$

Vektor položaja točke u kojoj računamo polje u odnosu na $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ je $\mathbf{r} = -x\,\mathbf{i} + (a/2)\,\mathbf{j}$ te udaljenost r i jedinični vektor $\hat{\mathbf{r}}$ pišemo kao

$$r = \sqrt{x^2 + (a/2)^2}, \qquad \hat{\mathbf{r}} = \frac{-x\,\mathbf{i} + (a/2)\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+(a/2)^2}}.$$

Slijedi

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \mathbf{k}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a/2}{(x^2+(a/2)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$

Doprinos čitave stranice kvadrata dobivamo integracijom,

$$\mathbf{B} = \int \mathrm{d}\mathbf{B} = \mathbf{k}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{x=-a/2}^{a/2}\frac{a/2}{(x^2+(a/2)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{\mu_0 I}{\pi a\sqrt{2}}\,\mathbf{k}.$$

Konačno, s obzirom da sve četiri stranice kvadrata na jednak način doprinose polju u središtu kvadrata, ukupno polje dobivamo množenjem gornjeg izraza s četiri. Tražena jakost magnetskog polja je

$$B = 2\sqrt{2}\,\frac{\mu_0 I}{\pi a}.$$

Za zadane vrijednosti a i I dobivamo $B \simeq 1.132\times 10^{-5}\,\mathrm{T}$.

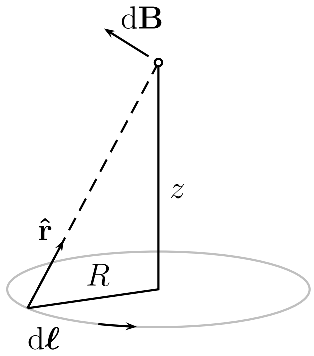
Rješenje: $B = 2\sqrt{2}\,\mu_0 I/\pi a \simeq 1.132\times 10^{-5}\,\mathrm{T}$

Zadatak 17.8: Kružnom petljom teče električna struja stalne jakosti. Odredi polumjer petlje s kojim se postiže najveća jakost magnetskog polja u točki na osi petlje koja je udaljena z od središta petlje.

Postupak: Element magnetskog polja $\mathrm{d}\mathbf{B}$ u točki čiji je položaj u odnosu na element struje $I\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ dan s $\mathbf{r}$ opisan je Biot–Savartovim zakonom,

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell})\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

($r = |\mathbf{r}|$ je udaljenost, $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ je jedinični vektor). Ovdje je $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ element kružnice polumjera R,



Na osnovu simetrije zaključujemo da je polje $\mathbf{B} = \int \mathrm{d}\mathbf{B}$ u točkama na osi petlje usmjereno duž same osi. Stoga je dovoljno integrirati uzdužnu komponentu $\mathrm{d}\mathbf{B}$ koju možemo napisati kao

$$\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2}\sin\phi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{(z^2+R^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}\ell,$$

gdje je ϕ kut što ga $\hat{\mathbf{r}}$ zatvara s osi petlje, a zatim smo koristili $r = \sqrt{z^2+R^2}$ i $\sin\phi = R/r$. Integracijom po čitavoj petlji, uz $\int \mathrm{d}\ell = 2R\pi$, slijedi

$$B = B_z = \int \mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}.$$

Polumjer petlje R koji će dati najveći B za danu udaljenost z i jakost struje I dobivamo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}B = \cdots = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R(2z^2-R^2)}{(R^2+z^2)^{5/2}},$$

koji je izpunjen za

$$R = \sqrt{2}z.$$

Rješenje: $R = \sqrt{2}z$

Zadatak 17.9: Duž pravca kojim teče struja stalne jakosti I također je raspoređen naboj linijske gustoće λ. Odredi iznos brzine kojom se usporedno s tim pravcem mora gibati nabijena čestica kako bi elektromagnetska (Lorentzova) sila na česticu iščezla.

Postupak: Elektromagnetska (Lorentzova) sila na česticu naboja q koja se giba brzinom $\mathbf{v}$ u polju $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ dana je izrazom $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ te iščezava ako vrijedi

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0.$$

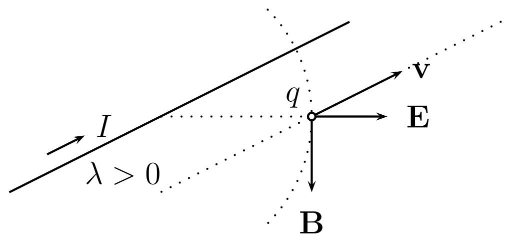
Električno polje naboja linijske gustoće λ raspoređenog po beskonačnom pravcu ima iznos

$$E[r] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r},$$

gdje je r udaljenost od pravca, a za $\lambda > 0$ je usjereno "radijalno prema van" u odnosu na pravac (taj rezultat slijedi iz primjene Gaussova zakona za električno polje). Magnetsko polje struje stvoreno strujom I koja teče beskonačnim pravcem ima jakost

$$B[r] = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r},$$

a smjer je određen "pravilom desne ruke" (rezultat slijedi iz primjene Ampèreova zakona). U ovom slučaju, pretpostavimo li da je pravac pozitivno nabijen te da struja teče u naznačenom smjeru, smjerove polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ možemo prikazati slikom:



Pretpostavimo li da se nabijena čestica giba u smjeru naznačenom na slici, s obzirom da su vektori $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{v}$ međusobno okomiti, uvjet za iščezavanje elektromagnetske sile se svodi na

$$E = vB,$$

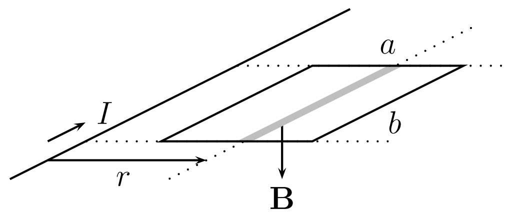
gdje su E, B i v iznosi tih vektora. Slijedi

$$v = \frac{E}{B} = \frac{\lambda c^2}{I}.$$

Rješenje: $v = \lambda c^2 / I$

Zadatak 17.10: Pravokutnik sa stranicama duljine $a = 2\,\mathrm{cm}$ i $b = 3\,\mathrm{cm}$ i beskonačni ravni vodič duž kojeg teče stalna struja jakosti $I = 5\,\mathrm{A}$ nalaze se u istoj ravnini. Vodiču je najbliža stranica pravokutnika duljine b, paralelna je s njim i nalazi se na udaljenosti $d = 1\,\mathrm{cm}$ od njega. Odredi tok magnetskog polja kroz prevokutnik. (Permeabilnost vakuuma $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$.)

Postupak: Vodič i kvadrat prikazujemo skicom:



Magnetsko polje okomito je na ravninu u kojoj leže vodič i petlja, a jakost polja ovisi o udaljenosti od vodiča r kao

$$B[r] = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

(gornji rezultat slijedi iz primjene Ampèreova zakona). Element toka magnetskog polja kroz plohu može se napisati kao

$$\mathrm{d}\Phi_B = B\,\mathrm{d}S,$$

gdje je $\mathrm{d}S$ element površine. Njega ovdje ovdje odabiremo kao vrpcu širine $\mathrm{d}r$ na udaljenosti r od vodiča (vrpca sive boje na gornjoj skici). Element toka sada je

$$\mathrm{d}\Phi_B = B[r]\,b\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I b}{2\pi r}\,\mathrm{d}r,$$

a integracijom preko čitavog pravolutnika slijedi

$$\Phi_B = \int \mathrm{d}\Phi_B = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I b}{2\pi r}\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left[\frac{d+a}{d}\right].$$

Za zadane vrijednosti a, b, d i I dobivamo $\Phi_B \simeq 3.29 \times 10^{-6}\,\mathrm{T\,m^2}$.

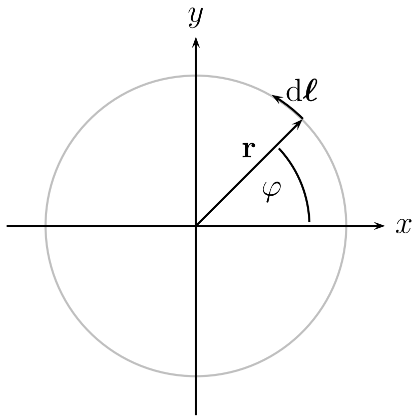
Rješenje: $\Phi_B = (\mu_0 I b/2\pi)\ln[(d+a)/d] \simeq 3.29 \times 10^{-6}\,\mathrm{T\,m^2}$

Zadatak 17.11: Odredi moment elektromagnetske sile koja djeluje na kružnu petlju polumjera R kojom teče struja jakosti I kada se ona nalazi u homogenom magnetskom polju jakosti B i smjera koji zatvara kut θ s okomicom na ravninu petlje.

Postupak: Element sile koja djeluje na element vodiča $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ kojim teče struja I u magnetskom polju $\mathbf{B}$ može se općenito napisati kao

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathrm{d}q\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = \mathrm{d}q\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{B}\right) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}) = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}.$$

Zadanu kružnu petlju ćemo smjestiti u ravninu $z = 0$ kao što prikazuje slika:



Položaj elementa petlje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ možemo napisati kao

$$\mathbf{r} = R\,(\mathbf{i}\,\cos\varphi + \mathbf{j}\,\sin\varphi),$$

gdje je φ kutna koordinata, dok sam element krivulje možemo napisati kao

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = R\,\mathrm{d}\varphi\,(-\mathbf{i}\,\sin\varphi + \mathbf{j}\,\cos\varphi).$$

Magnetsko polje koje zatvara kut θ sa z-osi možemo napisati kao

$$\mathbf{B} = B\,(\mathbf{i}\,\sin\theta + \mathbf{k}\,\cos\theta).$$

Element momenta sile (u odnosu na ishodište) sada možemo napisati kao

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathbf{r}\times(I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}) &= (\mathbf{r}\cdot\mathbf{B})\,I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} - (\mathbf{r}\cdot I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell})\,\mathbf{B}\\ &= R^2 IB\,\mathrm{d}\varphi\,(-\mathbf{i}\,\cos\theta\,\cos\varphi\sin\varphi + \mathbf{j}\,\sin\theta\,\cos^2\varphi)\\ &= R^2 IB\,\mathrm{d}\varphi\left(-\mathbf{i}\,\cos\theta\,\frac{\sin 2\varphi}{2} + \mathbf{j}\,\sin\theta\,\cos^2\varphi\right),\end{aligned}$$

gdje smo najprije koristili opći vektorski identitet $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$, a zatim gornje izraze za $\mathbf{r}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ i $\mathbf{B}$. Moment elektromagnetske sile slijedi integracijom gornjeg izraza preko čitave petlje. Očigledno je da će integral x-komponente biti jednak nuli jer se radi o oscilatornoj funkciji, dok je integral y-komponente također očigledan jer je srednja vrijednost kvadrata trigonometrijske funkcije na njenom punom periodu jednaka $1/2$. Slijedi

$$\mathbf{M} = \int \mathrm{d}\mathbf{M} = \mathbf{j}\,R^2\pi IB\,\sin\theta.$$

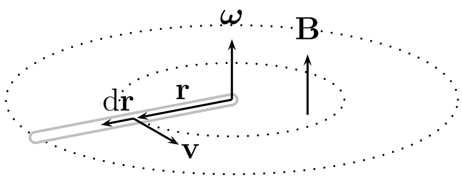
Rješenje: $M = R^2\pi IB\,\sin\theta$

Zadatak 17.12: Tanki vodljivi štap duljine ℓ okreće se oko svog kraja kutnom brzinom ω u ravnini okomitoj na homogeno magnetsko polje jakosti B. Odredi iznos inducirane elektromotorne sile na krajevima štapa.

Postupak: Elektromotorna sila je krivuljni integral sile koja djeluje na jedinični naboj,

$$\mathcal{E} = \int_c (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell},$$

gdje je $\mathbf{v}$ brzina elementa krivulje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$. Električno polje $\mathbf{E}$ u ovom slučaju nije prisutno, a odnos brzine elementa štapa $\mathbf{v}$ i magnetskog polja $\mathbf{B}$ prikazujemo slikom:



Vektor $\mathbf{r}$ pokazuje položaj elementa štapa u odnosu na os vrtnje. Brzinu elementa štapa može se napisati kao $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, a sam element kao $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mathrm{d}\mathbf{r}$. Slijedi da možemo pisati

$$\mathcal{E} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int ((\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Koristeći opći identitet $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ te uzimajući u obzir da su $\mathbf{B}$ i $\boldsymbol{\omega}$ paralelni, dok su $\mathbf{B}$ i $\mathbf{r}$ okomiti, vektorski produkt iz gornjeg izraza za elektromotornu silu možemo raspisati kao

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} = B\omega\mathbf{r}.$$

Konačno

$$\mathcal{E} = \int B\omega\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = B\omega \int_0^\ell r\,\mathrm{d}r = \frac{B\omega\ell^2}{2}.$$

Zadatak se može riješiti i primjenom Faradayeva zakona indukcije prema kojemu je elektromotorna sila inducirana u zatvorenoj petlji jednaka vremenskoj promjeni toka magnetskog polja kroz plohu omeđenu tom petljom. Ovdje uočavamo da krivulja koju razmatramo (štap) nije zatvorena, dakle ona ne omeđuje plohu, no moguć je sljedeći pristup. Kod homogenog i u vremenu stalnog polja jakosti B koje je okomito na plohu površine S možemo pisati

$$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(BS) = B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}.$$

S obzirom da kraj štapa u vremenu $\mathrm{d}t$ napravi pomak $\ell\omega\,\mathrm{d}t$, površina koju štap prebriše jednaka je površini pravokutnog trokuta s katetama ℓ i $\ell\omega\,\mathrm{d}t$,

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\ell^2\omega\,\mathrm{d}t.$$

Slijedi $\mathcal{E} = B\omega\ell^2/2$, kao i ranije.

Rješenje: $\mathcal{E} = B\omega\ell^2/2$

Zadatak 17.13: Vodljiva žica duljine $L = 1\,\mathrm{m}$ s učvršćenim krajevima napeta je tako da frekvencija titranja transverzalnog stojnog vala u osnovnom modu iznosi $f_1 = 100\,\mathrm{Hz}$. Odredi amplitudu elektromotorne sile koja se inducira u toj žici kada na njoj titra stojni val amplitude $A = 1\,\mathrm{cm}$ u n-tom modu, a titranje se odvija u ravnini koja je okomita na homogeno magnetsko polje jakosti $B = 5 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$.

Postupak: Elektromotorna sila je definirana izrazom

$$\mathcal{E} = \int_c (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

gdje je $\mathbf{v}$ brzina elementa krivulje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$, a $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ su električno i magnetsko polje. U zadanoj situaciji električno polje nije prisutno, a $\mathbf{v}$ je brzina kojom se žica giba pri titranju. Pravokutni koordinatni sustav postavljamo tako da žica leži na x-osi s krajevima pri $x = 0$ i $x = L$, te uzimamo da se titranje stojnog vala odvija u $z = 0$ ravnini. Otklon žice od ravnotežnog položaja opisujemo valnom funkcijom

$$y[x, t] = A \sin[n\pi x/L] \sin[n\omega_1 t + \phi]$$

gdje $n = 1, 2, \ldots$ odgovara različitim modovima titranja, a ϕ je općenit pomak u fazi. Takvom titranju odgovara brzina

$$\mathbf{v}[x, t] = \dot{y}[x, t]\,\mathbf{j} = An\omega_1 \sin[n\pi x/L] \cos[n\omega_1 t + \phi]\,\mathbf{j}.$$

Homogeno magnetsko polje je okomito na ravninu titranja pa pišemo

$$\mathbf{B} = B\,\mathbf{k}.$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= \int_{x=0}^{L} \big((An\omega_1 \sin[n\pi x/L] \cos[n\omega_1 t + \phi]\,\mathbf{j}) \times (B\,\mathbf{k})\big) \cdot (\mathbf{i}\,\mathrm{d}x) \\
&= ABn\omega_1 \cos[n\omega_1 t + \phi] \int_0^L \sin[n\pi x/L]\,\mathrm{d}x \\
&= ABn\omega_1 \frac{L}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \cos[n\omega_1 t + \phi].
\end{aligned}$$

Pišući $\cos n\pi = (-1)^n$, elektromotornu silu možemo napisati kao

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_n \cos(n\omega_1 t + \phi),$$

gdje je

$$\mathcal{E}_n = \frac{AB\omega_1 L}{\pi}(1 - (-1)^n)$$

amplituda elektromotorne sile pri titranju žice u n-tom modu. Važno je uočiti da ona iščezava za parne modove titranja. Za neparne modove, te za zadane vrijednosti parametara, amplituda elektromotorne sile je

$$\mathcal{E}_{1,3,\ldots} = \frac{2AB\omega_1 L}{\pi} = 4ABf_1 L \simeq 2 \times 10^{-4}\,\mathrm{V}.$$

Rješenje: $\mathcal{E}_{1,3,\ldots} = 4ABf_1 L = 2 \times 10^{-4}\,\mathrm{V}$, $\mathcal{E}_{2,4,\ldots} = 0$

Zadatak 17.14: Homogeno ali o vremenu ovisno magnetsko polje ima stalan iznos B_0 te smjer koji leži u ravnini $z = 0$ i jednoliko se okreće kutnom brzinom ω. Odredi amplitudu titranja elektromotorne sile inducirane u zatvorenoj petlji koja leži u ravnini okomitoj na vektor $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ te omeđuje površinu S.

Postupak: Prema Faradayevu zakonu, inducirana elektromotorna sila jednaka je negativnoj vremenskoj promjeni toka magnetskog polja kroz petlju,

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Zadano magnetsko polje možemo napisati kao

$$\mathbf{B}[t] = B_0(\mathbf{i}\,\cos[\omega t+\phi] \pm \mathbf{j}\,\sin[\omega t+\phi]),$$

gdje pozitivni (negativni) predznak odgovara pozitivnom (negativnom) smjeru vrtnje vektora $\mathbf{B}$, a ϕ je fazni pomak. U nastavku ćemo odabrati pozitivan predznak (pozitivan smjer vrtnje) i fazni pomak $\phi = 0$. Vektorski element površine $\mathrm{d}\mathbf{S}$ je produkt iznosa površine $\mathrm{d}S$ i jediničnog vektora okomitog na nju. Ovdje možemo napisati

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}}{\sqrt{14}}\,\mathrm{d}S.$$

Za tok magnetskog polja dobivamo

$$\Phi_B[t] = \int_S \mathbf{B}[t]\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{B_0}{\sqrt{14}}\int_S(\cos[\omega t]+2\sin[\omega t])\,\mathrm{d}S = \frac{B_0 S}{\sqrt{14}}(\cos[\omega t]+2\sin[\omega t]),$$

te inducirana elektromotorna sila slijedi kao

$$\mathcal{E}[t] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B[t] = \frac{B_0 S\omega}{\sqrt{14}}(\sin[\omega t]-2\cos[\omega t]).$$

Kako bismo u gornjem izrazu prepoznali amplitudu titranja, faktor u okruglim zagradama raspisujemo koristeći Eulerovu formulu za kompleksne brojeve,

$$\begin{aligned}\sin[\omega t]-2\cos[\omega t] &= \cos[\omega t-\pi/2]-2\cos[\omega t]\\ &= \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\pi/2)}-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}]\\ &= \mathrm{Re}[-(\mathrm{i}+2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}]\\ &= \mathrm{Re}[\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}]\\ &= \sqrt{5}\,\cos[\omega t+\psi].\end{aligned}$$

(Fazni pomak ψ u gornjem se izrazu pojavio kada smo kompleksni broj $-\mathrm{i}-2$ napisali u obliku $\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$. Samu vrijednost faznog pomaka ψ ovdje nije potrebno posebno odrediti.) Slijedi da induciranu elektromotornu silu možemo napisati kao

$$\mathcal{E}[t] = \mathcal{E}_0\cos[\omega t+\psi],$$

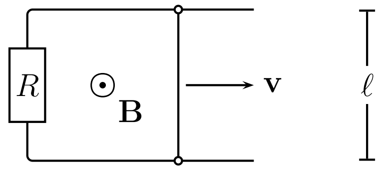
gdje je

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{5/14}\,B_0 S\omega$$

amplituda njenog titranja.

Rješenje: $\mathcal{E}_0 = \sqrt{5/14}\,B_0 S\omega$

Zadatak 17.15: Dvije paralelne vodljive tračnice leže u ravnini okomitoj na homogeno magnetsko polje jakosti B. Tračnice su povezane električnim otporom R, razmak među njima je ℓ, te po njima klizi vodljivi štap (vidi sliku). Odredi jakost sile koja mora djelovati na štap kako bi se on gibao stalnom brzinom iznosa v.



Postupak: Najprije ćemo odrediti induciranu elektromotornu silu, zatim struju koja teče petljom, te konačno silu koja djeluje na štap i koju treba uravnotežiti traženom vanjskom silom kako bi se štap gibao stalnom brzinom. Prema Faradayevu zakonu indukcije, elektromotorna sila inducirana u petlji koju čine tračnice, otpor i štap jednaka je (negativnoj) promjeni toka magnetskog polja kroz petlju. Ovdje možemo pisati

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}SB = -B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t},$$

gdje je S površina petlje koja se u vremenu mijenja, a B je stalno magnetsko polje koje smo izlučili ispred operatora $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. Pretpostavimo li da se štap giba brzinom iznosa v, on u vremenskom intervalu Δt napravi pomak $\Delta x = v\,\Delta t$, a time poveća površinu petlje za

$$\Delta S = \ell\,\Delta x = \ell v\,\Delta t.$$

Slijedi da možemo pisati

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \ell v,$$

odnosno

$$\mathcal{E} = -B\ell v.$$

Uslijed inducirane elektromotorne sile $\mathcal{E}$ petljom teće električna struja I čija je jakost određena električnim otporom R. Prema Ohmovu zakonu,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Silu koja djeluje na štap određujemo s pomoću izraza za element sile $\mathrm{d}\mathbf{F}$ koja djeluje na element vodiča $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ kojim teče struja I u polju $\mathbf{B}$,

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}.$$

Ovdje je ravni štap duljine ℓ okomit na homogeno polje te je jakost sile

$$F = I\ell B = \frac{\mathcal{E}\ell B}{R} = \frac{B^2\ell^2 v}{R}.$$

Tu je silu potrebno uravnotežiti traženom vanjskom silom kako bi štap bio u ravnoteži i gibao se stalnom brzinom iznosa v.

Rješenje: $F = B^2\ell^2 v/R$

Zadatak 17.16: Koaksijalni kabel se sastoji od vodljive jezgre polumjera $a = 1\,\mathrm{mm}$ i od vodljivog omotača polumjera $b = 2.5\,\mathrm{mm}$. Jezgra je nabijena linijskom gustoćom naboja $\lambda = 10^{-6}\,\mathrm{C\,m^{-1}}$, a omotač je nabijen linijskom gustoćom naboja jednakog iznosa ali suprotnog predznaka. Odredi energiju električnog polja po jedinici duljine kabla. (Permitivnost vakuuma $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$.)

Postupak: Volumna gustoća energije elektromagnetskog polja općenito je dana izrazom

$$w = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right),$$

gdje je E jakost električnog, a B je jakost magnetskog polja. Magnetsko polje ovdje nije prisutno, a električno polje u prostoru između jezgre i omotača možemo smatrati ekvivalentnim električnom polju beskonačnog pravca nabijenog linijskom gustoćom naboja λ. Jakost tog polja je

$$E[r] = \frac{\lambda}{2r\pi\epsilon_0}, \qquad a \le r \le b$$

(gornji izraz slijedi iz primjene Gaussova zakona za električno polje). Unutar same jezgre, kao i izvan omotača kabla, električno polje iščezava. Slijedi da je volumna gustoća energije elektromagnetskog polja unutar ovog kabla

$$w[r] = \frac{\epsilon_0}{2} E^2[r] = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_0 r^2}.$$

Energija sadržana u dijelu kabla duljine ℓ dobiva se integracijom po prostoru između jezgre kabla i omotača kabla. Element volumena $\mathrm{d}V$ možemo napisati kao umnožak površine omotača cilindra polumjera r i duljine ℓ, $A = 2r\pi\ell$, i radijalnog pomaka $\mathrm{d}r$,

$$\mathrm{d}V = 2r\pi\ell\,\mathrm{d}r.$$

Slijedi

$$E = \int_V w\,\mathrm{d}V = \int_a^b w[r] 2r\pi\ell\,\mathrm{d}r = \int_a^b \frac{\lambda^2\ell}{4\pi\epsilon_0 r}\,\mathrm{d}r = \frac{\lambda^2\ell}{4\pi\epsilon_0} \ln\left[\frac{b}{a}\right].$$

Energija polja po jedinici duljine kabla je

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln\left[\frac{b}{a}\right].$$

Za zadane vrijednosti a, b i λ dobije se $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\ell \simeq 8.23 \times 10^{-3}\,\mathrm{J\,m^{-1}}$.

Rješenje: $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\ell = (\lambda^2/4\pi\epsilon_0)\ln[b/a] \simeq 8.235 \times 10^{-3}\,\mathrm{J\,m^{-1}}$

Zadatak 17.17: Koaksijalni kabel se sastoji od šuplje vodljive jezgre polumjera $a = 1\,\mathrm{mm}$ i vodljivog omotača polumjera $b = 5\,\mathrm{mm}$. Kroz vodiče u suprotnim smjerovima teku struje jednake jakosti $I = 1\,\mathrm{A}$. Odredi energiju magnetskog polja po jedinici duljine kabla. (Permeabilnost vakuuma $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$.)

Postupak: Gustoća energije elektromagnetskog polja je općenito dana izrazom

$$w = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right).$$

U zadanoj situaciji električno polje nije prisutno, dok magnetsko polje iščezava unutar tanjeg vodiča jer kroz kružnu petlju polumjera $r < a$ ne teče struja, kao i izvan omotača jer se struje koje teku kroz kružnu petlju polumjera $r > b$ poništavaju. Jakosti magnetskog polja u prostoru između jezgre i omotača doprinosi struja koja teče jezgrom kabla. Prema Ampèreovu zakonu,

$$B[r] = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}, \qquad a \le r \le b.$$

Gustoća energije elektromagnetskog polja sada je

$$w[r] = \frac{1}{2\mu_0}B^2[r] = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}, \qquad a < r < b.$$

Energija sadržana u dijelu kabla duljine ℓ je

$$E = \int_V w\,\mathrm{d}V = \int_a^b w[r]\,2\pi r\ell\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi}\ln\left[\frac{b}{a}\right].$$

Linijska gustoća energije kabla je

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\left[\frac{b}{a}\right].$$

Za zadane vrijednosti a, b i I dobije se $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\ell \simeq 1.61 \times 10^{-7}\,\mathrm{J\,m^{-1}}$.

Rješenje: $\lambda = (\mu_0 I^2/4\pi)\ln[b/a] \simeq 1.61 \times 10^{-7}\,\mathrm{J\,m^{-1}}$

Zadatak 17.18: Ravni linearno polarizirani elektromagnetski val valne duljine λ širi se u vakuumu u smjeru jediničnog vektora $\mathbf{i}$. Amplituda titranja električnog polja tog vala je E_0, a smjer se podudara s vektorom $\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Sastavi izraze koji opisuju pripadajuće magnetsko polje $\mathbf{B}$ te Poyntingov vektor $\mathbf{S}$.

Postupak: Općenit izraz za električno polje ravnog linearno polariziranog vala možemo napisati kao

$$\mathbf{E}[\mathbf{r},t] = \mathbf{E}_0 \cos[\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \phi],$$

gdje je $\mathbf{E}_0$ amplituda električnog polja (vektor), $\boldsymbol{\kappa}$ je valni vektor (vrijedi $\mathbf{E}_0\cdot\boldsymbol{\kappa} = 0$), $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$ je položaj točke u prostoru, ω je frekvencija, t je vrijeme, a ϕ je fazni pomak. Za val valne duljine λ koji se u vakuumu širi u smjeru $\mathbf{i}$ imamo $\boldsymbol{\kappa} = \kappa\,\mathbf{i}$, $\kappa = 2\pi/\lambda$, $\omega = \kappa c$, te s obzirom na zadanu linearnu polarizaciju, $\mathbf{E}_0 = E_0\,(\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{2}$. Slijedi

$$\mathbf{E}[x,t] = E_0\,\frac{\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}}\,\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+\phi\right].$$

Magnetsko polje dobivamo koristeći izraz $\mathbf{B} = \hat{\boldsymbol{\kappa}}\times(\mathbf{E}/c)$, gdje je u ovom slučaju $\hat{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{i}$. Slijedi

$$\mathbf{B}[x,t] = \frac{E_0}{c}\,\frac{-\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}}\,\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+\phi\right].$$

Poyntingov vektor, $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$, slijedi kao

$$\mathbf{S}[x,t] = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\,\mathbf{i}\,\cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+\phi\right] = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\,\mathbf{i}\,\left(1+\cos\left[\frac{4\pi}{\lambda}(x-ct)+2\phi\right]\right).$$

Rješenje: $\mathbf{B}[x,t] = \frac{E_0}{c}\,\frac{-\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}}\,\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+\phi]$, $\mathbf{S}[x,t] = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\,\mathbf{i}\,(1+\cos[\frac{4\pi}{\lambda}(x-ct)+2\phi])$

Zadatak 17.19: Ukupna snaga Sunčeva zračenja je $L_\odot = 3.839 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$ (tzv. luminozitet Sunca), a srednja udaljenost Zemlje od Sunca je $a = 149.6 \times 10^9\,\mathrm{m}$ (tzv. astronomska jedinica). Odredi srednju vrijednost iznosa Poyntingova vektora na Zemlji. Zatim, pretpostavljajući da je Sunčevo zračenje ravni linearno polarizirani val, odredi amplitude kojima titraju električno i magnetsko polje.

Postupak: Srednja vrijednost iznosa Poyntingova vektora odgovara količini energije elektromagnetskog zračenja koja prolazi jediničnom plohom u jedinici vremena. Shvatimo li Sunce kao točkasti izvor snage $L_\odot$, srednju vrijednost iznosa Poyntingova vektora na udaljenosti a od Sunca možemo napisati kao

$$\langle S \rangle = \frac{L_\odot}{4a^2\pi} \simeq 1365\,\mathrm{W\,m^{-2}}.$$

Sam Poyntingov vektor definiran je izrazom

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B},$$

gdje su $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ električno i magnetsko polje. u ravnom valu $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ titraju u fazi, međusobno su okomiti, a za njihove amplitude E_0 i B_0 vrijedi

$$E_0 = cB_0.$$

Slijedi da iznos Poyntingova vektora u danoj točki prostora možemo napisati kao

$$S = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 \cos^2[\omega t],$$

te s obzirom da je srednja vrijednost kvadrata trigonometrijske funkcije jednaka $1/2$, srednju vrijednost pišemo kao

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0.$$

Koristeći $E_0 = cB_0$ slijedi

$$E_0^2 = 2\mu_0 c \langle S \rangle = \frac{\mu_0 c L_\odot}{2a^2\pi},$$

odnosno,

$$B_0^2 = \frac{2\mu_0}{c}\langle S \rangle = \frac{\mu_0 L}{2ca^2\pi}.$$

Uz poznate konstante dobivamo vrijednosti $E_0 \simeq 1014\,\mathrm{V\,m^{-1}}$, $B_0 \simeq 3.383 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$.

Rješenje: $\langle S \rangle = L_\odot/4a^2\pi \simeq 1365\,\mathrm{W\,m^{-2}}$, $E_0 = \sqrt{\mu_0 c L_\odot/2a^2\pi} \simeq 1014\,\mathrm{V\,m^{-1}}$, $B_0 = \sqrt{\mu_0 L_\odot/2ca^2\pi} \simeq 3.383 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$

Zadatak 17.20: Ravni (eliptički polarizirani) elektromagnetski val čije je električno polje opisano izrazom

$$\mathbf{E}[z,t] = E_{0x}\,\mathbf{i}\,\cos[\kappa z - \omega t] + E_{0y}\,\mathbf{j}\,\sin[\kappa z - \omega t]$$

pada na polarizator koji propušta komponentu vala čije je električno polje usporedno s vektorom $3\mathbf{i}+\mathbf{j}$. Odredi amplitudu titranja električnog polja nakon prolaska vala kroz polarizator.

Postupak: Komponenta upadnog elektromagnetskog vala čije je električno polje okomito na propusni smjer polarizatora se pri prolasku kroz polarizator apsorbira, dok komponenta vala čije je električno polje usporedno s propusnim smjerom polarizatora ostaje nepromijenjena. Komponentu upadnog električnog polja koja je usporedna s propusnim smjerom polarizatora računamo kao projekciju upadnog polja na taj smjer . Uvodimo jedinični vektor propusnog smjera polarizatora,

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{3\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{10}},$$

te kao projekciju zadanog električnog polja na taj smjer imamo

$$\mathbf{E}' = (\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{p}})\hat{\mathbf{p}},$$

gdje je

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{p}} = \frac{3E_{0x}}{\sqrt{10}}\cos[\kappa z - \omega t] + \frac{E_{0y}}{\sqrt{10}}\sin[\kappa z - \omega t].$$

Kako bismo u gornjem izrazu prepoznali amplitudu titranja uvodimo oznake

$$a = \frac{3E_{0x}}{\sqrt{10}}, \qquad b = \frac{E_{0y}}{\sqrt{10}},$$

te gornji izraz za projekciju polja zapisujemo kao

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{p}} = a\cos[\kappa z - \omega t] + b\cos[\kappa z - \omega t - \pi/2].$$

Korištenjem Eulerove formule slijedi

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{p}} = \mathrm{Re}\left[a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\kappa z-\omega t)}\right] + \mathrm{Re}\left[b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\kappa z-\omega t-\pi/2)}\right] = \mathrm{Re}\left[(a-\mathrm{i}\,b)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\kappa z-\omega t)}\right] = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos[\kappa z - \omega t + \phi]$$

(faza ϕ pojavila se kada smo kompleksni broj $a-\mathrm{i}\,b$ napisali kao $\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$). Konačno, električno polje nakon prolaska kroz polarizator je

$$\mathbf{E}' = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos[\kappa z - \omega t + \phi]\,\hat{\mathbf{p}},$$

gdje kao amplitudu titranja prepoznajemo

$$E_0' = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{9}{10}E_{0x}^2 + \frac{1}{10}E_{0y}^2}.$$

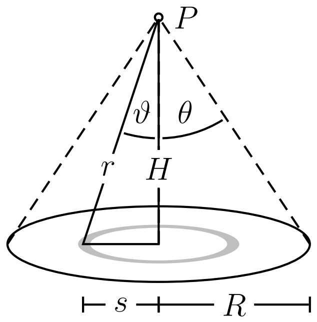
Rješenje: $E_0' = \sqrt{(9E_{0x}^2 + E_{0y}^2)/10}$

Zadatak 18.1: Odredi prostorni kut koji baza stošca zauzima u odnosu na vrh stošca, ako je polumjer baze stošca R, a njegova visina je H. Zatim taj prostorni kut izrazi preko kuta θ koji plašt stošca zatvara s njegovom visinom (vrijedi $\tan\theta = R/H$).

Postupak: Općenito, Element prostornog kuta koji element plohe $\mathrm{d}S$ zauzima u odnosu na točku P može se napisati kao

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{r^2}\cos\vartheta,$$

gdje je r udaljenost između P i $\mathrm{d}S$, a ϑ je kut koji pravac koji prolazi kroz P i $\mathrm{d}S$ zatvara s okomicom na $\mathrm{d}S$. Ovdje kao element plohe odabiremo kružnu stazu polumjera s i širine $\mathrm{d}s$:



Površina kružne staze (sivo područje na gornjoj skici) je

$$\mathrm{d}S = 2s\pi\,\mathrm{d}s,$$

a iz geometrije prepoznajemo

$$r^2 = H^2 + s^2, \qquad \cos\vartheta = \frac{H}{r}.$$

Element prostornog kuta koji zauzima kružna staza je

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{2s\pi\,\mathrm{d}s}{r^2}\,\frac{H}{r} = 2\pi H\,\frac{s}{(H^2+s^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}s.$$

Ukupni prostorni kut koji zauzima baza stošca dobivamo integracijom od $s = 0$ do $s = R$,

$$\Omega = \int \mathrm{d}\Omega = 2\pi H \int_0^R \frac{s}{(H^2+s^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}s = -2\pi H\,\frac{1}{\sqrt{H^2+s^2}}\Big|_0^R = 2\pi\left(1 - \frac{H}{\sqrt{H^2+R^2}}\right).$$

Konačno, iz geometrije prepoznajemo da je drugi član u zagradi jednak $\cos\theta$ te zaključujemo

$$\Omega = 2\pi(1-\cos\theta).$$

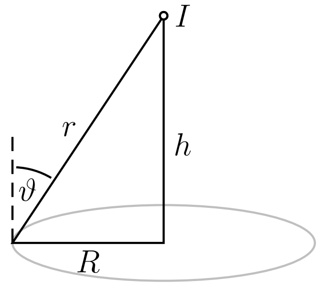
Rješenje: $\Omega = 2\pi\big(1 - H/\sqrt{H^2+R^2}\big) = 2\pi(1-\cos\theta)$

Zadatak 18.2: Okrugli stol polumjera R osvijetljen je točkastim izotropnim izvorom svjetlosti koji se nalazi na visini h iznad njegova središta. Odredi visinu h kojom se postiže najveća osvijetljenost ruba stola.

Postupak: Općenito, osvijetljenost elementa plohe točkastim izvorom može napisati kao

$$E = \frac{I}{r^2}\cos\vartheta,$$

gdje je I svjetlosna jakost izvora, r je udaljenost izvora od elementa plohe, a ϑ je kut pod kojim svjetlost pada na plohu (u odnosu na okomicu). Izvor na visini h nad središtem okruglog stola prikazujemo skicom:



Pri rubu stola imamo

$$r^2 = R^2 + h^2, \qquad \cos\vartheta = \frac{h}{r},$$

te osvjetljenost ruba stola pišemo kao

$$E = \frac{I}{r^2}\frac{h}{r} = I\,\frac{h}{(R^2+h^2)^{3/2}}.$$

Visinu h kojom se postiže ekstrem osvijetljenosti E pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}E = \left(\frac{1}{h} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{R^2+h^2}\,2h\right)E = I\,\frac{R^2-2h^2}{(R^2+h^2)^{5/2}},$$

koji je ispunjen za

$$h = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Pronađeni ekstrem je nužno maksimum jer veičina $E \geq 0$ iščezava za $h \to 0$ kao i za $h \to \infty$.

Rješenje: $h = R/\sqrt{2}$

Zadatak 18.3: Dva točkasta izvora svjetlosti jednake jakosti nalaze se na visini h iznad vodoravne ravnine, a razmak među njima je d. Za $d \gg h$ opaža se dva maksimuma osvijetljenosti ravnine, dok se za $d \ll h$ opaža samo jedan maksimum. Odredi graničnu vrijednost omjera h/d pri kojoj se dva maksimuma osvijetljenosti ravnine stapaju u jedan.

Postupak: Neovisno o tome imamo li jedan ili dva maksimuma osvijetljenosti ravnine, oni se nalaze na pravcu koji leži ispod samih izvora (jer osvijetljenost nužno opada s udaljavanjem od tog pravca). Stoga u nastavku razmatramo isključivo osvijetljenost ravnine duž tog pravca. Za dovoljno malen omjer h/d, dva se maksimuma osvijetljenosti nalaze u točkama pravca približno ispod samih izvora, dok pri sredini razmaka imamo lokalni minimum osvijetljenosti na pravcu. S druge strane, za dovoljno velik omjer h/d, pri sredini razmaka među izvorima imamo maksimum osvijetljenosti. Slijedi da graničnu vrijednost omjera h/d možemo odrediti na osnovu karaktera ekstrema osvijetljenosti ravnine u točki pri sredini razmaka među izvorima, odnosno, na osnovu toga radi li se o minimumu ili o maksimumu osvijetljenosti.

Općenito, osvijetljenost elementa plohe na udaljenosti r od izvora jakosti I opisana je s $E = (I/r^2)\cos\theta$, gdje je θ kut pod kojim svjetlost upada na plohu (u odnosu na okomicu). Ovdje krećemo od izraza za osvijetljenost elementa ravnine na vodoravnoj udaljenosti x od izvora jakosti I koji se nalazi na visini h. S obzirom da iz geometrije imamo

$$r^2 = h^2 + x^2, \qquad \cos\theta = \frac{h}{r},$$

osvijetljenost elementa ravnine opisujemo funkcijom

$$E_1[x] = \frac{Ih}{(h^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Uvedemo li sada dva takva izvora na međusobnom razmaku d, osvijetljenost plohe u točkama na pravcu koji leži ispod njih možemo opisati funkcijom

$$E_2[x] = E_1[d/2 + x] + E_1[d/2 - x] = \frac{Ih}{(h^2 + (d/2 + x)^2)^{3/2}} + \frac{Ih}{(h^2 + (d/2 - x)^2)^{3/2}},$$

gdje je x udaljenost promatrane točke od točke pravca koja se nalazi pri sredini razmaka među izvorima. Prva derivacija gornje funkcije glasi

$$E_2'[x] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} E_2[x] = -\frac{3Ih(d/2 + x)}{(h^2 + (d/2 + x)^2)^{5/2}} + \frac{3Ih(d/2 - x)}{(h^2 + (d/2 - x)^2)^{5/2}},$$

gdje uočavamo očekivanu činjenicu da pri $x = 0$ vrijedi $E_2' = 0$, odnosno da pri sredini razmaka među izvorima imamo ekstrem osvijetljenosti (minimum ili maksimum), neovisno o vrijednosti omjera h/d. Sada je potrebno odrediti radi li se o minimumu ili o maksimumu. Druga derivacija funkcije E_2 glasi

$$E_2''[x] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} E_2[x] = \frac{15Ih(d/2 + x)^2}{(h^2 + (d/2 + x)^2)^{7/2}} - \frac{3Ih}{(h^2 + (d/2 + x)^2)^{5/2}} + \frac{15Ih(d/2 - x)^2}{(h^2 + (d/2 - x)^2)^{7/2}} - \frac{3Ih}{(h^2 + (d/2 - x)^2)^{5/2}}$$

Pri $x = 0$ ona se značajno pojednostavljuje,

$$E_2''[0] = \frac{30Ih(d/2)^2 - 6Ih(h^2 + (d/2)^2)}{(h^2 + (d/2)^2)^{7/2}} = \frac{6Ih(d^2 - h^2)}{(h^2 + (d/2)^2)^{7/2}}.$$

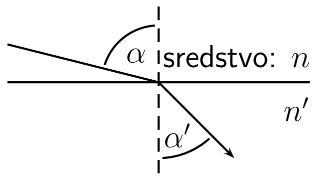
Uočavamo da za $d > h$ imamo $E''[0] > 0$, što znači da pri $x = 0$ imamo minimum osvijetljenosti, odnosno da postoje dva maksimuma osvijetljenosti, jedan s jedne, a drugi s druge strane ovog minimuma, dok za $d < h$ imamo $E''[0] < 0$, dakle maksimum osvijetljenosti pri $x = 0$. Kao granični slučaj prepoznajemo $h = d$, odnosno

$$h/d = 1.$$

Rješenje: $h/d = 1$

Zadatak 18.4: Traktor vozi ravnom cestom te u nekom trenutku silazi s nje i nastavlja vožnju poljem, kako bi u najkraćem mogućem vremenu stigao na odredište koje se nalazi u polju na nekoj udaljenosti od ceste. Odredi kut koji putanja traktora kroz polje zatvara s okomicom na cestu ako je iznos brzine traktora na cesti $v = 12\,\mathrm{km/h}$, dok je u polju iznos njegove brzine $v' = 6\,\mathrm{km/h}$.

Postupak: Problem je ekvivalentan putanji zrake svjetlosti koja iz optičkog sredstva indeksa loma n prelazi u optičko sredstvo indeksa loma n':



Kut upada α i kut loma α' povezani su s indeksima loma optičkih sredstava Snellovim zakonom,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{n'}{n}.$$

Indeks loma je obrnuto razmjeran brzini propagacije svjetlosti u optičkom sredstvu pa možemo pisati

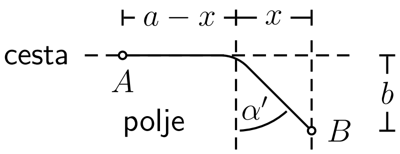
$$\frac{n'}{n} = \frac{v}{v'}.$$

Omjer brzina na desnoj strani ovdje možemo shvatiti kao omjer brzina traktora u dvama sredstvima (na cesti i u polju). Nadalje, kut upada traktora s ceste u polje ovdje je $\alpha = \pi/2$, što znači da imamo $\sin\alpha = 1$, a kut loma α' je traženi kut pod kojim se (u odnosu na okomicu na cestu) traktor giba poljem. Slijedi

$$\sin\alpha' = \frac{n}{n'} = \frac{v'}{v}$$

te za zadani omjer brzina dobivamo $\alpha' = 30°$.

Naravno, problem se može riješiti i izravnim razmatranjem kinematike. Neka traktor kreće iz točke A koja je udaljena a od one točke na cesti koja je najbliža odredištu B, a udaljenost odredišta od ceste neka je b. Neka je x udaljenost točke u kojoj traktor silazi s ceste od točke ceste koja je najbliža odredištu.



Trajanje putovanja možemo napisati kao

$$t = \frac{a-x}{v} + \frac{\sqrt{x^2+b^2}}{v'}.$$

Ekstrem pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}t = -\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} = -\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\sin\alpha',$$

iz čega slijedi

$$\sin\alpha' = \frac{v'}{v},$$

što se podudara s ranije dobivenim rezultatom.

Rješenje: $\alpha' = \arcsin[v'/v] = 30°$

Zadatak 18.5: Muha leti brzinom iznosa v prema konkavnom zrcalu duž njegove optičke osi. Kada muha uđe u područje u kojem je njena udaljenost od tjemena zrcala manja od $R/2$, gdje je R polumjer zakrivljenosti zrcala, ona vidi 'prividnu muhu' (vlastitu sliku) kako joj leti u susret. U trenutku u kojem udaljenost stvarne muhe od tjemena zrcala iznosi $a = R/3$, odredi (a) koliko se puta prividna muha pričinja većom od stvarne muhe, (b) udaljenost među muhama te (c) iznos (relativne) brzine prividne u odnosnu na stvarnu muhu.

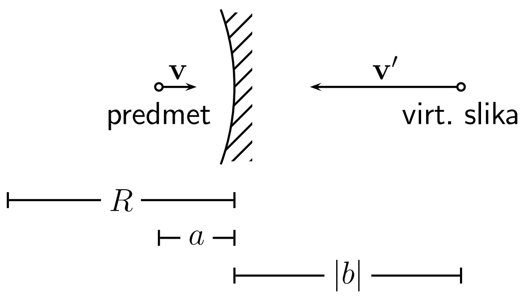
Postupak: Udaljenosti predmeta (ovdje stvarne muhe), $a > 0$, i njegove slike (ovdje prividne muhe), b, od tjemena konkavnog zrcala s polumjerom zakrivljenosti R te lateralno povećanje slike u odnosu na predmet, m, povezani su poznatim izrazima

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R}, \qquad m = -\frac{b}{a}.$$

Kada je $a < R/2$, gornje formule daju negativnu vrijednost udaljenosti b te pozitivnu vrijednost povećanja m,

$$b = \frac{Ra}{2a - R} < 0, \quad m = \frac{R}{R - 2a} > 0 \quad \text{za} \quad a < \frac{R}{2},$$

a to znači da je slika virtuelna (nalazi se iza zrcala) te da je uspravna. Skica prikazuje položaj predmeta i virtuelne slike u slučaju $a < R/2$ te njihove smjerove gibanja kada se radi o muhama u ovom zadatku:



Slijedi da udaljenost između predmeta (stvarne muhe) i slike (prividne muhe) za $a < R/2$ možemo napisati kao

$$D = a + |b| = a - b = a - \frac{Ra}{2a - R} = \frac{2a(R - a)}{R - 2a},$$

a iznos relativne brzine slike (prividne muhe) u odnosu na predmet (stvarnu muhu) dobivamo deriviranjem te udaljenosti po vremenu,

$$v_{\text{rel.}} = \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D \right| = \cdots = \left| 2 \, \frac{(R - a)^2 + a^2}{(R - 2a)^2} \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a \right| = 2v \, \frac{(R - a)^2 + a^2}{(R - 2a)^2},$$

pri čemo smo udaljenost a smatrali funkcijom vremena te smo koristili

$$\left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a \right| = v.$$

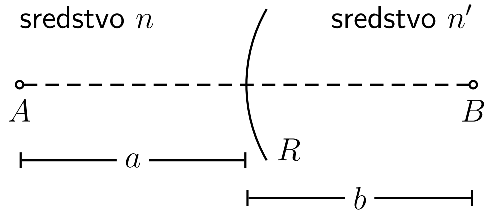
Konačno, za zadanu vrijednost udaljenosti $a = R/3$ dobivamo

$$m = 3, \qquad D = 4R/3, \qquad v_{\text{rel.}} = 10v.$$

Rješenje: (a) $m = R/(R - 2a) = 3$, (b) $D = 2a(R - a)/(R - 2a) = 4R/3$, (c) $v_{\text{rel.}} = 2v((R - a)^2 + a^2)/(R - 2a)^2 = 10v$

Zadatak 18.6: Odredi najmanju udaljenost između predmeta i njegove realne slike koja može nastati u sfernom dioptru polumjera zakrivljenosti R ako su indeksi loma optičkih sredstava s dvaju strana dioptra n i n'.

Postupak: Sferni dioptar koji stvara realnu sliku predmeta prikazujemo skicom:



Orijentacija zakrivljenosti granične plohe na gornjoj skici u skladu je s pretpostavkom da vrijedi $n' > n$ (dioptar je konvergentan, odn. može stvoriti realnu sliku, ako je granična ploha konveksna kada joj pristupamo iz optički rjeđeg sredstva). Točke A i B predstavljaju položaj predmeta i njegove realne slike (točke A i B mogu zamijeniti uloge). Udaljenosti točaka A i B od tjemena dioptra, a i b, povezane su poznatim izrazom

$$\frac{n}{a} + \frac{n'}{b} = \frac{n' - n}{R} > 0,$$

a kako bi slika bila realna (b pozitivno u gornjem izrazu), udaljenost a mora biti dulja od odgovarajuće 'žarišne duljine' f_a,

$$a > f_a = \frac{n}{n' - n} R$$

(sličan uvjet se može formulirati i za udaljenost b). Međusobnu udaljenost točaka A i B možemo izraziti kao funkciju udaljenosti a,

$$D = a + b = a + n' \left(\frac{n' - n}{R} - \frac{n}{a} \right)^{-1} = \cdots = \frac{(n' - n)(R + a)a}{(n' - n)a - nR}$$

Ekstrem te udaljenosti nalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} D = \cdots = (n' - n) \frac{(n' - n)a^2 - 2nRa - nR^2}{((n' - n)a - nR)^2}$$

koji je ispunjen za

$$a_{1,2} = \frac{n \pm \sqrt{n'n}}{n' - n} R.$$

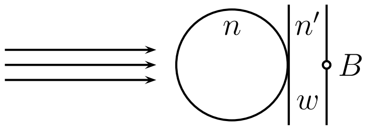
Uočavamo da vrijedi $a_2 < f_a$, zbog čega to rješenje odbacujemo, dok ono drugo prihvaćamo, jer vrijedi $a_1 > f_a$. Za $a = a_1$ udaljenost točaka A i B je

$$D = \cdots = \frac{\sqrt{n'} + \sqrt{n}}{\sqrt{n'} - \sqrt{n}} R.$$

Radi se o minimumu jer $D \to \infty$ za $a \to \infty$ kao i za $a \to f_a$.

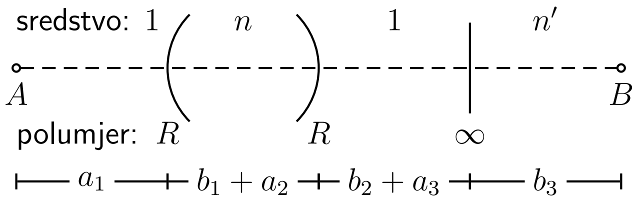
Rješenje: $D_{\min} = R(\sqrt{n'} + \sqrt{n})/(\sqrt{n'} - \sqrt{n})$

Zadatak 18.7: Snop paralelnih zraka svjetlosti pada na prozirnu kuglicu indeksa loma n koja dodiruje planparalelnu prozirnu ploču debljine w i indeksa loma n' (vidi skicu).



Odredi promjer kuglice želimo li da snop bude fokusiran na izlaznoj plohi planparalelne ploče (točka B na skici). Sustav se nalazi u zraku (indeks loma jednak jedinici).

Postupak: Ovaj optički sustav možemo shvatiti kao niz sfernih dioptara pri čemu slika koja nastaje prolaskom svjetlosti kroz neki dioptar predstavlja predmet sljedećem dioptru u nizu. Prvi dioptar u nizu je ploha kroz koju svjetlost ulazi u kuglicu, drugi dioptar je ploha kroz koju svjetlost izlazi iz kuglice, treći dioptar je ploha kroz koju svjetlost ulazi u ploču. Plohu kroz koju svjetlost izlazi iz ploče ne moramo razmatrati jer fokusiranje svjetlosti na samom rubu ploče možemo shvatiti kao fokusiranje unutar ploče na udaljenosti w od ulazne plohe. Tri dioptra koja razmatramo prikazujemo shemom:



Prva dva dioptra su konvergentna jer su obje granične plohe konveksne kada im pristupamo iz sredstva manjeg indeksa loma. Polumjer zakrivljenosti trećeg (ravnog) dioptra naveden je kao ∞ jer ravni dioptar možemo smatrati sfernim dioptrom čiji polumjer zakrivljenosti teži u beskonačnost. Tri dioptra opisana su uobičajenim jednadžbama,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{n}{b_1} = \frac{n-1}{R} > 0, \qquad \frac{n}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{n-1}{R} > 0, \qquad \frac{1}{a_3} + \frac{n'}{b_3} = \frac{n'-1}{\infty} = 0.$$

S obzirom da je upadna svjetlost snop paralelnih zraka, možemo smatrati da ona potječe od beskonačno udaljenog predmeta te uzeti

$$a_1 = \infty.$$

Kako je udaljenost između tjemena prvog i drugog dioptra jednaka je promjeru kuglice, pišemo

$$b_1 + a_2 = 2R.$$

Zatim, s obzirom da kuglica dodiruje planparalelnu ploču, udaljenost između tjemena drugog dioptra i plohe trećeg dioptra jednaka je nuli te stavljamo

$$b_2 + a_3 = 0.$$

Konačno, s obzirom na zahtjev da se svjetlost, nakon što je ušla u planparalelnu ploču, fokusira na udaljenosti koja je jednaka debljini ploče, pišemo

$$b_3 = w.$$

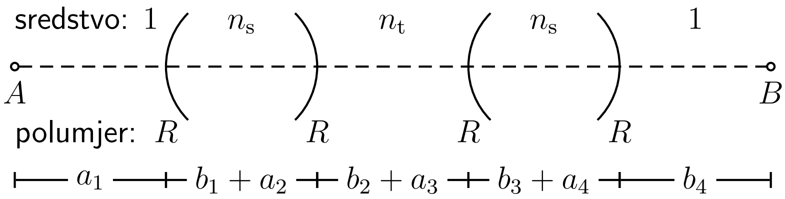
Eliminacijom veličina $a_{1,2,3}$ i $b_{1,2,3}$ iz gornjih jednadžbi dobivamo polumjer zakrivljenosti sfernih dioptara R, odnosno, traženi promjer kuglice,

$$2R = \frac{4(n-1)w}{(2-n)n'}.$$

Rješenje: $2R = 4w(n-1)/(2-n)n'$

Zadatak 18.8: Dvije jednake konvergentne simetrične tanke leće načinjene od stakla indeksa loma $n_\mathrm{s} = 1.5$ postavljene su jedna iza druge na zajedničku optičku os tako da im se tjemena dodiruju. Kada se u prostoru među lećama nalazi zrak (indeks loma jednak jedinici) one u zraku čine sustav žarišne duljine $f = 1\,\mathrm{m}$. Odredi žarišnu duljinu ovog sustava u zraku kada se prostor među lećama umjesto zrakom ispuni tekućinom indeksa loma $n_\mathrm{t} = 1.35$.

Postupak: Sustav dviju leća se sastoji od četiriju sfernih dioptara. U slučaju kada je među lećama sredstvo indeksa loma n_t možemo ga prikazati sljedećom shemom:



Udaljenosti predmeta i slika povezane su s polumjerom zakrivljenosti dioptara te s indeksima loma sredstava jednadžbama

$$\frac{1}{a_1} + \frac{n_\mathrm{s}}{b_1} = \frac{n_\mathrm{s} - 1}{R}, \qquad \frac{n_\mathrm{s}}{a_2} + \frac{n_\mathrm{t}}{b_2} = \frac{n_\mathrm{s} - n_\mathrm{t}}{R}, \qquad \frac{n_\mathrm{t}}{a_3} + \frac{n_\mathrm{s}}{b_3} = \frac{n_\mathrm{s} - n_\mathrm{t}}{R}, \qquad \frac{n_\mathrm{s}}{a_4} + \frac{1}{b_4} = \frac{n_\mathrm{s} - 1}{R},$$

a s obzirom da leće smatramo tankima te da se njihova tjemena dodiruju, uzimamo

$$b_1 + a_2 = 0, \qquad b_2 + a_3 = 0, \qquad b_3 + a_4 = 0.$$

Eliminacijom $a_{2,3,4}$ i $b_{1,2,3}$ iz gornjih jednadžbi računamo žarišnu duljinu sustava u slučaju u kojem je među lećama sredstvo indeksa loma n_t,

$$f' = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_4}\right)^{-1} = \cdots = \frac{R}{4n_\mathrm{s} - 2(n_\mathrm{t} + 1)}.$$

Stavimo li u gornjem izrazu $n_\mathrm{t} = 1$ dobivamo žarišnu duljinu ovog sustava u slučaju u kojem je među lećama zrak,

$$f = \frac{R}{4(n_\mathrm{s} - 1)}.$$

Eliminacijom R iz gornjih izraza za f i f' slijedi

$$f' = f\,\frac{2(n_\mathrm{s} - 1)}{2n_\mathrm{s} - n_\mathrm{t} - 1}.$$

Za zadane vrijednosti parametara f, n_s i n_t dobivamo $f' \simeq 1.538\,\mathrm{m}$.

Rješenje: $f' = 2f(n_\mathrm{s} - 1)/(2n_\mathrm{s} - n_\mathrm{t} - 1) \simeq 1.538\,\mathrm{m}$

Zadatak 18.9: Konvergentna leća žarišne duljine $f = 50\,\mathrm{cm}$ stvara sliku predmeta koja je udaljena $b = 3\,\mathrm{m}$ od leće. Primaknemo li predmet leći za $\Delta a = -5\,\mathrm{cm}$, koliko će se duž optičke osi pomaknuti njegova slika?

Postupak: Prema jednadžbi leće imamo

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

gdje je a udaljenost predmeta, a b je udaljenost slike od leće žarišne duljine f. Slijedi

$$a = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{b}\right)^{-1} = \frac{fb}{b-f}.$$

Kada se predmet pomakne za Δa, slika se pomiče za Δb, te vrijedi

$$\frac{1}{a+\Delta a} + \frac{1}{b+\Delta b} = \frac{1}{f},$$

iz čega dobivamo

$$b + \Delta b = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{a+\Delta a}\right)^{-1} = \frac{f(a+\Delta a)}{a+\Delta a - f} = \frac{f(fb + \Delta a(b-f))}{fb + (\Delta a - f)(b-f)},$$

odnosno, nakon sređivanja izraza,

$$\Delta b = \cdots = -\Delta a\,\frac{(b-f)^2}{f^2 + (b-f)\Delta a}.$$

Za zadane vrijednosti f, b i Δa dobivamo $\Delta b = 2.5\,\mathrm{m}$.

Rješenje: $\Delta b = -\Delta a\,(b-f)^2/(f^2 + (b-f)\Delta a) = 2.5\,\mathrm{m}$

Zadatak 18.10: Lećom žarišne duljine f i polumjera otvora $R_\mathrm{L} = f/4$ (fotoaparat), na zaslonu (filmu) okomitom na optičku os stvaramo (oštru) sliku Sunca. Odredi koliko je puta zaslon (film) u području te slike jače osvijetljen nego što bi bio osvijetljen kad bi bio jednostavno izložen Sunčevoj svjetlosti. (Polumjer Sunca $R_\odot = 6.963 \times 10^8\,\mathrm{m}$, srednja udaljenost Sunca od Zemlje $a = 1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$)

Postupak: Koristeći jednadžbu leće žarišne duljine $f > 0$,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

gdje je $a > f$ udaljenost predmeta (ovdje Sunca) s jedne, a b je udaljenost slike (ovdje zaslona odn. filma) s njene druge strane, te jednadžbu za lateralno povećanje slike u odnosu na izvor

$$m = -\frac{b}{a},$$

polumjer slike Sunca na zastoru možemo napisati kao

$$R'_\odot = |m| R_\odot = R_\odot \frac{b}{a} = R_\odot \frac{f}{a-f}.$$

Površina te slike je

$$S' = {R'_\odot}^2 \pi = \frac{R_\odot^2 \pi f^2}{(a-f)^2}.$$

Osvijetljenost je općenito omjer snage zračenja i površine na koju ono pada. Ako je E osvijetljenost bilo koje površine jednostavno izložene Suncu (podrazumijeva se da je površina okomita na smjer toka zračenja), onda snagu zračenja koju zahvaća leća možemo napisati kao

$$P_\mathrm{L} = E S_\mathrm{L} = E R_\mathrm{L}^2 \pi.$$

Kada je riječ o slici Sunca, ta snaga pada na površinu S' te je osvijetljenost zaslona u području slike

$$E' = \frac{P_\mathrm{L}}{S'} = \frac{E R_\mathrm{L}^2 (a-f)^2}{R_\odot^2 f^2}.$$

Konačno, traženi omjer osvijetljenosti se može napisati kao

$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{R_\mathrm{L} a}{R_\odot f}\right)^2 \left(1 - \frac{f}{a}\right)^2,$$

a s obzirom da je $f/a \ll 1$, možemo izostaviti faktor u okruglim zagradama i pisati

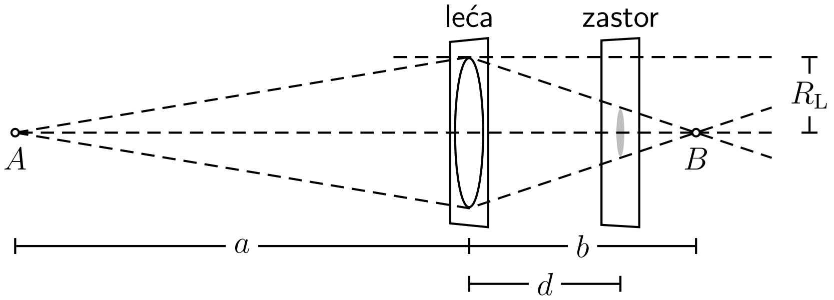
$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{R_\mathrm{L} a}{R_\odot f}\right)^2.$$

Za zadani omjer R_L/f te poznate astronomske konstante a i $R_\odot$ dobivamo $E'/E \simeq 2.88 \times 10^3$.

Rješenje: $E'/E = (R_\mathrm{L} a / R_\odot f)^2 (1 - f/a)^2 \simeq (R_\mathrm{L} a / R_\odot f)^2 \simeq 2.88 \times 10^3$

Zadatak 18.11: S jedne strane tanke konvergentne leće kružnog otvora se na optičkoj osi na udaljenosti a nalazi izotropni točkasti izvor svjetlosti snage P. Sa suprotne strane na udaljenosti b od leće nastaje njegova realna slika. Postavimo li na slikovnoj strani leće na udaljenosti $d \neq b$ zastor okomit na optičku os, na njemu će nastati svijetla mrlja kružnog oblika. Odredi osvijetljenost zastora unutar svijetle mrlje pretpostavljajući da je udaljenost a znatno veća od polumjera otvora leće.

Postupak: Skica prikazuje slučaj u kojem je $d < b$ (svijetla mrlja prikazana je sivo, R_L je polumjer otvora leće):



Polumjer svijetle mrlje r slijedi iz sličnosti pravokutnih trokuta,

$$\frac{r}{b-d} = \frac{R_\mathrm{L}}{b},$$

a u općenitom slučaju možemo pisati

$$r = R_\mathrm{L}\left|1 - \frac{d}{b}\right|$$

(uzimamo apsolutnu vrijednost kako bismo obuhvatili i slučaj $d > b$ koji nije prikazan na skici). Osvijetljenost mrlje E je omjer snage svjetlosti P_L koja ulazi u leću i površine svijetle mrlje $S = r^2\pi$ koju ta svjetlost stvara na zastoru,

$$E = \frac{P_\mathrm{L}}{S} = \frac{P_\mathrm{L}}{r^2\pi} = \frac{P_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L}^2\pi(1-d/b)^2}.$$

Omjer snage koja ulazi u leću P_L i ukupne snage izotropnog izvora P jednak je omjeru prostornog kuta Ω_L koji u odnosu na izvor svjetlosti zahvaća otvor leće i ukupnog prostornog kuta 4π u koji izvor zrači,

$$\frac{P_\mathrm{L}}{P} = \frac{\Omega_\mathrm{L}}{4\pi}.$$

Prostorni kut Ω_L napisat ćemo s pomoću poznate formule za prostorni kut stošca visine a i polumjera baze R_L (vidi raniji zadatak),

$$\Omega_\mathrm{L} = 2\pi\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R_\mathrm{L}^2}}\right) = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+(R_\mathrm{L}/a)^2}}\right).$$

S obzirom da je ovdje $R_\mathrm{L}/a \ll 1$, možemo koristiti razvoj $(1+\epsilon)^{-1/2} \simeq 1 - \epsilon/2$, čime se gornji izraz svodi na

$$\Omega_\mathrm{L} = R_\mathrm{L}^2\pi/a^2.$$

(Taj rezultat se može izravno dobiti uoči li se da, s obzirom da je $a \gg R_\mathrm{L}$, čitav otvor leće možemo smatrati okomitim na pravac izvor–leća.) Snagu zahvaćenu lećom sada možemo napisati kao

$$P_\mathrm{L} = \frac{PR_\mathrm{L}^2}{4a^2},$$

te za osvijetljenost svijetle mrlje na zastoru dobivamo

$$E = \frac{P}{4a^2\pi(1 - d/b)^2}.$$

Rješenje: $E = (P/4a^2\pi)(1 - d/b)^{-2}$

Zadatak 18.12: Predmet se nalazi na udaljenosti $a_1 = 20\,\mathrm{cm}$ ispred tanke konvergentne leće žarišne duljine $f_1 = 10\,\mathrm{cm}$. Iza te leće se na udaljenosti $D = 30\,\mathrm{cm}$ nalazi druga tanka konvergentna leća čija je žarišna duljina $f_2 = 12.5\,\mathrm{cm}$. Odredi karakter slike te njen položaj i lateralno povećanje u odnosu na predmet.

Postupak: Udaljenost predmeta i njegove slike od prve leće te odgovarajuće lateralno povećanje povezani su poznatim izrazima

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}, \qquad m_1 = -\frac{b_1}{a_1}.$$

Istovjetni izrazi vrijede i za drugu leću,

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2}, \qquad m_2 = -\frac{b_2}{a_2}.$$

pri čemu slika koju stvara prva leća predstavlja predmet za drugu leću, a s obzirom da je razmak među lećama D, vrijedi

$$b_1 + a_2 = D.$$

Eliminacijom b_1 i a_2 iz gornjih jednadžbi računamo udaljenost slike od druge leće,

$$b_1 = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}, \qquad b_2 = \frac{a_2 f_2}{a_2 - f_2} = \frac{(D - b_1) f_2}{(D - b_1) - f_2} = \cdots = \frac{a_1(D - f_1) f_2 - D f_1 f_2}{a_1(D - f_1 - f_2) - f_1(D - f_2)}.$$

Kao ukupno lateralno povećanje slike u odnosu na predmet slijedi općenit izraz

$$m = m_2\, m_1 = \frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1 b_2}{a_1(D - b_1)} = \cdots = \frac{f_1 f_2}{a_1(D - f_1 - f_2) - f_1(D - f_2)}.$$

Za zadane vrijednosti a_1 i f_1 dobivamo $b_1 = 20\,\mathrm{cm}$, što znači da se predmet druge leće nalazi na udaljenosti $a_2 = D - b_1 = 10\,\mathrm{cm}$ od nje, gdje uočavamo da vrijedi $a_2 < f_2$, što pak znači da će druga leća tvoriti virtuelnu sliku. Za zadane vrijednosti a_1, $f_{1,2}$ i D dobivamo $b_2 = -50\,\mathrm{cm}$, gdje predznak suprotan predznaku udaljenosti a_2 potvrđuje da se slika nalazi s iste strane leće kao i predmet, odnosno, da je ona virtuelna. Udaljenost slike koju stvara druga leća i predmeta prve leće je za zadane vriejdnosti parametara a_1, $f_{1,2}$ i D jednaka nuli,

$$a_1 + D + b_2 = 0,$$

što znači da se položaj slike i predmeta u ovom slučaju podudaraju. Za ukupno lateralno povećanje dobivano $m = -5$, što znači da je slika ovdje preokrenuta i povećana.

Rješenje: $b_2 = (a_1(D-f_1)f_2 - Df_1f_2)/(a_1(D-f_1-f_2) - f_1(D-f_2)) = -50\,\mathrm{cm}$ (slika je virtuelna, njen se položaj podudara s položajem predmeta), $m = f_1 f_2/(a_1(D - f_1 - f_2) - f_1(D - f_2)) = -5$ (slika je uvećana i preokrenuta)

Zadatak 18.13: Fotografski teleobjektiv se sastoji od (prednje) konvergentne leće žarišne duljine $f_1 = 30\,\mathrm{cm}$ iza koje se na udaljenosti $D = 27.5\,\mathrm{cm}$ nalazi (stražnja) divergentna leća žarišne duljine $f_2 = -10\,\mathrm{cm}$. Odredi udaljenost između prednje leće teleobjektiva i slike predmeta, ako udaljenost predmeta od fotografskog aparata teži u beskonačno. Zatim odredi žarišnu duljinu leće koja daje jednako povećanje slike vrlo udaljenog predmeta kao i opisani teleobjektiv. (Sve leće smatramo tankim lećama.)

Postupak: Teleobjektiv je kombinacija dviju leća pa možemo koristiti općenite izraze za udaljenost slike od stražnje leće, b_2, te za ukupno lateralno povećanje slike, m, izvedene u prethodnom zadatku,

$$b_2 = \frac{a_1(D-f_1)f_2 - Df_1f_2}{a_1(D-f_1-f_2) - f_1(D-f_2)}, \qquad m = \frac{f_1f_2}{a_1(D-f_1-f_2) - f_1(D-f_2)}.$$

Udaljenost slike 'beskonačno dalekog' predmeta od prednje leće je

$$x_\infty = D + \lim_{a_1\to\infty} b_2 = D + \frac{(D-f_1)f_2}{D-f_1-f_2},$$

što za zadane vrijednosti $f_{1,2}$ i D daje $x_\infty \simeq 30.83\,\mathrm{cm}$. Kada bismo umjesto teleobjektiva imali samo jednu leću žarišne duljine f te predmet na udaljenosti a_1, pisali bismo

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f}, \qquad m = -\frac{b_1}{a_1} = -\frac{f}{a_1 - f}.$$

Izjednačavajući izraze za povećanje slike u slučaju teleobjektiva i u slučaju jednostruke leće dobivamo

$$f = \frac{f_1f_2}{f_1 + f_2 - D(1 - f_1/a_1)}.$$

S obzirom da vrijedi $a_1 \gg f_1$ možemo uzeti

$$f = \frac{f_1f_2}{f_1 + f_2 - D},$$

što za zadane vrijednosti $f_{1,2}$ i D daje $f \simeq 40\,\mathrm{cm}$.

Rješenje: $x = D + (D-f_1)f_2/(D-f_1-f_2) \simeq 30.83\,\mathrm{cm}$, $f = f_1f_2/(f_1+f_2-D) \simeq 40\,\mathrm{cm}$

Zadatak 19.1: Bijela svjetlost pada okomito na tanku opnu od sapunice indeksa loma $n = 4/3$. Odredi najmanju debljinu opne pri kojoj istovremeno dolazi do najslabije moguće refleksije plave svjetlosti (valna duljina u vakuumu $\lambda_\mathrm{B} = 480\,\mathrm{nm}$) i do najjače moguće refleksije crvene svjetlosti ($\lambda_\mathrm{R} = 640\,\mathrm{nm}$).

Postupak: Razlika u fazi svjetlosti valne duljine λ reflektirane na prednjoj i one reflektirane na stražnjoj strani opne debljine d i indeksa loma n je

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda} + \pi = 2\pi\,\frac{2nd}{\lambda} + \pi,$$

gdje je $\Delta s = s_2 - s_1 = 2nd$ razlika u duljini optičkih putova koje prevaljuju dvije zrake, dok je član π je prisutan zbog toga što se jedna od dvije zrake reflektira od optički gušćeg sredstva. Uvjet destruktivne interferencije za plavu svjetlost glasi

$$\Delta\phi_\mathrm{B} = 2\pi\,\frac{2nd}{\lambda_\mathrm{B}} + \pi = (2k+1)\pi, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

iz čega slijedi

$$d = \frac{\lambda_\mathrm{B}}{2n}k = 180\,\mathrm{nm}, 360\,\mathrm{nm}, 540\,\mathrm{nm}, 720\,\mathrm{nm}, \ldots$$

Uvjet konstruktivne interferencije za crvenu svjetlost glasi

$$\Delta\phi_\mathrm{R} = 2\pi\,\frac{2nd}{\lambda_\mathrm{R}} + \pi = 2k'\pi, \qquad k' = 1, 2, \ldots$$

što daje

$$d = \frac{\lambda_\mathrm{R}}{4n}\,(2k'-1) = 120\,\mathrm{nm}, 360\,\mathrm{nm}, 600\,\mathrm{nm}, \ldots$$

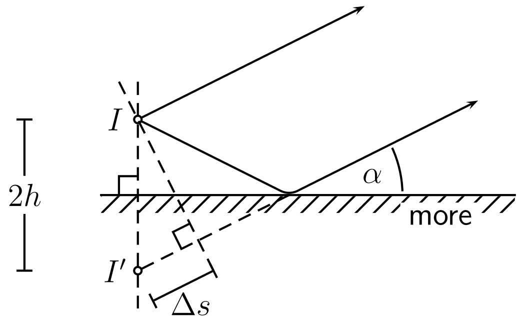
Usporedbom dobivenih vrijednosti pronalazimo da je najmanja debljina opne koja zadovoljava oba uvjeta

$$d_\mathrm{min} = 360\,\mathrm{nm}.$$

Rješenje: $d_\mathrm{min} = 360\,\mathrm{nm}$

Zadatak 19.2: Odašiljač radio-valova valne duljine $\lambda = 10\,\mathrm{m}$ nalazi se na visini $h = 8\,\mathrm{m}$ iznad mirne površine mora. Uzimajući u obzir da površina mora reflektira radio-valove, odredi kuteve u odnosu nju pod kojima se, s velike udaljenosti, opaža maksimume i minimume jakosti radio-signala.

Postupak: Razlika u fazi vala koji do prijamnika na udaljenosti $r \gg h$ stiže izravno od odašiljača i vala koja do njega stiže nakon refleksije na površini mora prisutna je zbog razlike u duljini optičkih putova dvaju valova te zbog pomaka u fazi π (polovica punog ciklusa titranja) koja nastupa pri refleksiji vala na granici s optički gušćim sredstvom.



Kao što prikazuje gornja skica, val koji se reflektira na površini mora možemo shvatiti kao da potječe od zrcalne slike izvora koja se nalazi na dubini h ispod površine mora. Tada je lako vidjeti da je razlika duljine optičkih putova dvaju valova

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 2h \sin\alpha,$$

gdje je α kut elevacije prijamnika. Tome odgovara razlika u fazi

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda} + \pi = \frac{4\pi h \sin\alpha}{\lambda} + \pi,$$

gdje je uključen član π zbog refleksije na optički gušćem sredstvu. Uvjet konstruktivne interferencije, odn. maksimuma u intenzitetu zračenja, dvaju valova s razlikom faza $\Delta\phi$ glasi

$$\Delta\phi = 2m\pi, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

što ovdje daje

$$\sin\alpha_{\max} = \frac{\lambda}{4h}(2m-1).$$

S obzirom na to da za zadane vrijednosti h i λ imamo $\lambda/4h = 5/16$ te da nas zanimaju samo pozitivni kutevi, u obzir dolaze samo vrijednosti $m = 1, 2$, za koje dobivamo

$$\sin\alpha_{\max} = \frac{5}{16}, \frac{15}{16},$$

odnosno $\alpha_{\max} \simeq 18.21^\circ, 69.64^\circ$. Uvjet destruktivne interferencije, odn. minimuma u intenzitetu zračenja, dvaju valova s razlikom faza $\Delta\phi$ glasi

$$\Delta\phi = (2m+1)\pi, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

što ovdje daje

$$\sin\alpha_{\min} = \frac{\lambda}{2h} m.$$

U obzir dolaze vrijednosti $m = 0, 1$, za koje imamo

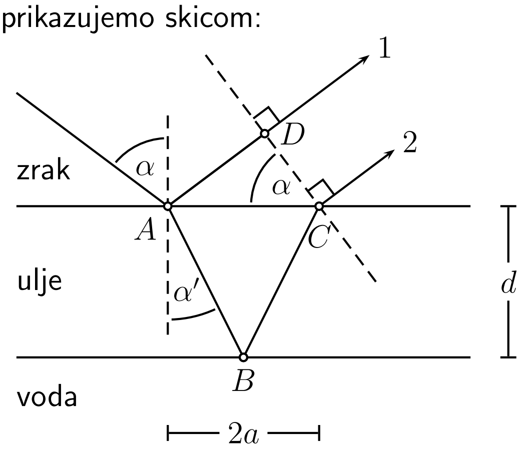
$$\sin\alpha_{\min} = 0, \frac{5}{8},$$

odnosno $\alpha_{\min} \simeq 0^\circ, 38.68^\circ$.

Rješenje: Maksimumi: $\sin\alpha_{\max} = (\lambda/4h)(2m-1)$, $m = 1, 2$, $\alpha_{\max} \simeq 18.21^\circ, 69.64^\circ$, minimumi: $\sin\alpha_{\min} = (\lambda/2h)m$, $m = 0, 1$, $\alpha_{\min} \simeq 0^\circ, 38.68^\circ$.

Zadatak 19.3: Na vodi pluta sloj ulja debljine d i indeksa loma n koji je veći od indeksa loma vode. Odredi razliku u fazi između svjetlosti valne duljine λ reflektirane na graničnoj plohi zrak–ulje i one reflektirane na graničnoj plohi ulje–voda, ako svjetlost upada iz zraka pod kutom α. (Indeks loma zraka jednak je jedinici.)

Postupak: Opisanu situaciju prikazujemo skicom:



Upadna svjetlost reflektira se od granične plohe zrak–ulje (na skici zraka 1) i od granične plohe ulje–voda (zraka 2). Razlika u fazi posljedica je razlike u duljini optičkih putova dviju zraka, $\Delta s = s_2 - s_1$, te pomaka u fazi π (polovica ciklusa) koji nastupa pri refleksiji svjetlosti na granici s optički gušćim sredstvom. To je ovdje samo granica zrak–ulje pa se takav pomak pojavljuje samo za zraku 1. Razliku u duljini optičkih putova razmatramo između točke A u kojoj se upadna zraka razdvaja na zrake 1 i 2, te točaka C i D u kojima zrake 1 i 2 presijecaju ravninu okomitu na njih (desna iscrtkana linija na skici). Možemo pisati

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda} + \pi = 2\pi\frac{s_2 - s_1}{\lambda} + \pi, \qquad s_1 = |AD|, \qquad s_2 = n(|AB| + |BC|).$$

Uvodimo duljinu $2a = |AC|$ (vidi skicu) te iz geometrije prepoznajemo

$$\frac{a}{d} = \tan\alpha' = \frac{\sin\alpha'}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha'}},$$

Koristeći zakon loma prema kojemu je $n\sin\alpha' = \sin\alpha$ gornji omjer pišemo u obliku

$$\frac{a}{d} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}.$$

Optički put zrake 1 sada možemo napisati kao

$$s_1 = |AD| = |AC|\sin\alpha = 2a\sin\alpha = \frac{2d\sin^2\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}},$$

dok je optički put zrake 2

$$s_2 = n(|AB| + |BC|) = 2n|AB| = 2n\sqrt{d^2 + a^2} = 2nd\sqrt{1 + \left(\frac{a}{d}\right)^2} = \frac{2n^2 d}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}.$$

Konačno, razlika optičkih puteva je

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha},$$

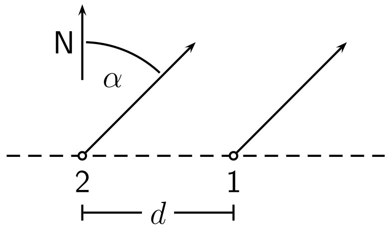
a razlika u fazi uključujući i pomak π zbog refleksije zrake 1 na optički gušćem sredstvu je

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda} + \pi = \frac{4\pi d}{\lambda}\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \pi.$$

Rješenje: $\Delta\phi = (4\pi d/\lambda)\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \pi$

Zadatak 19.4: Dva odašiljača radio valova valne duljine $\lambda = 100\,\mathrm{m}$ leže na pravcu istok–zapad na razmaku $d = 200\,\mathrm{m}$. Odredi fazni pomak među odašiljačima s pomoću kojega se maksimum intenziteta odašilje u smjeru sjeveroistoka.

Postupak: Odašiljače prikazujemo skicom:



Električno polje istočnog odašiljača koje prijamnik opaža u nekoj točki možemo napisati kao

$$E_1[t] = E_{10}\cos\left[\omega t + \phi_1 - 2\pi\frac{s_1}{\lambda}\right] = E_0\cos[\omega t - \psi_1],$$

gdje je E_{10} amplituda titranja polja (razmjerna snazi odašiljača te ovisna o udaljenosti odašiljača od prijamnika), ϕ_1 je faza odašiljača, s_1 je duljina optičkog puta (udaljenost) između odašiljača i prijamnika, a

$$\psi_1 = \phi_1 - 2\pi s_1/\lambda$$

je faza s kojom prijamnik prima val. Na istovjetan način možemo napisati i polje zapadnog odašiljača,

$$E_2[t] = E_{20}\cos[\omega t - \psi_2], \qquad \psi_2 = \phi_2 - 2\pi s_2/\lambda.$$

Razliku u fazi tih valova možemo napisati kao

$$\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1 = \Delta\phi - 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda},$$

gdje je $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ fazni pomak među odašiljačima, a $\Delta s = s_2 - s_1$ je razlika duljine optičkih puteva za dani položaj prijamnika. Ako se prijamnik nalazi na velikoj udaljenosti pod azimutom α, iz geometrije slijedi (vidi skicu)

$$\Delta s = s_2 - s_1 = d\sin\alpha.$$

Nadalje, ako se on nalazi u smjeru sjeveroistoka imamo $\alpha = \pi/4$, što daje

$$\Delta s = d\sin\frac{\pi}{4} = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Razlika u fazi sada je

$$\Delta\psi = \Delta\phi - \frac{d\pi\sqrt{2}}{\lambda}.$$

Kako bismo postigli konstruktivnu interferenciju zahtijevamo

$$\Delta\psi = 2m\pi, \qquad m = 0, \pm1, \pm2\ldots.$$

S obzirom da za zadane vrijednosti λ i d imamo $d/\lambda = 2$, gornji uvjet glasi $\Delta\phi = 2\pi(m + \sqrt{2})$, Uočavamo da se vrijednost faznog pomaka $\Delta\phi$ koja se nalazi unutar intervala $[-\pi, \pi]$ dobiva se uz $m = -1$ i ona je

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = 2\pi(\sqrt{2} - 1).$$

Ta je vrijednost pozitivna te zaključujemo da zapadni odašiljač mora prethoditi $\sqrt{2} - 1 \simeq 0.41$ punog ciklusa u odnosu na istočni odašiljač.

Rješenje: Zapadni odašiljač prethodi s $\Delta\phi = 2\pi(\sqrt{2} - 1)$

Zadatak 19.5: Tri koherentna izvora zračenja valne duljine λ leže na pravcu. Odredi namanji razmak d među susjednim izvorima kojime se postiže iščezavanje zračenja u točkama koje leže na istom pravcu kao i izvori na velikoj udaljenosti od izvora. (Podrazumijeva se da su izvori jednake jakosti te da titraju u fazi.)

Postupak: Neka izvori leže na x-osi pri koordinatama $x = 0, \pm d$. Na udaljenosti od izvora znatno većoj od d možemo smatrati da sva tri izvora doprinose poljima koja titraju jednakim amplitudama te ukupno električno polje u točkama na samoj x-osi možemo napisati kao

$$E[x,t] = E_0 \cos[\omega t - k(x+d)] + E_0 \cos[\omega t - kx] + E_0 \cos[\omega t - k(x-d)],$$

gdje je

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Koristeći kompleksni zapis imamo

$$\begin{aligned} E[x,t] &= E_0 \operatorname{Re}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k(x+d))} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k(x-d))}\big] \\ &= E_0 \operatorname{Re}\big[\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kd} + 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kd}\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\big] \\ &= E_0 \operatorname{Re}\big[\big(1 + 2\cos[kd]\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\big] \\ &= E_0 \big(1 + 2\cos[kd]\big) \cos[\omega t - kx], \end{aligned}$$

gdje prepoznajemo titranje amplitudom $E_0(1 + 2\cos[kd])$ koja iščezava ako vrijedi

$$\cos[kd] = -\frac{1}{2}.$$

Najmanja vrijednost d koja zadovoljava gornji uvjet je

$$d_{\min} = \frac{1}{k} \arccos\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{2\pi}{3} = \frac{\lambda}{3}.$$

Isti rezultat se može dobiti i korištenjem poznatog izraza za intenzitet zračenja rešetke s N koherentnih izvora na međusobnom razmaku d,

$$I[\alpha] = I_0 \frac{\sin^2\left[N\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]}.$$

Ovdje je $N = 3$, a za točke na pravcu na kojem leže izvori stavljamo $\alpha = \pi/2$. Zahtijev da zračenje u tim točkama iščezne vodi na

$$\sin\left[\frac{\pi d}{\lambda}\right] \neq 0, \qquad \sin\left[3\frac{\pi d}{\lambda}\right] = 0,$$

odnosno

$$3\frac{\pi d}{\lambda} = \pi, 2\pi, \ldots$$

Najmanji d koji zadovoljava gornji uvjet je $d_{\min} = \lambda/3$.

Rješenje: $d_{\min} = \lambda/3$

Zadatak 19.6: Kontinuirani spektar zračenja s valnim duljinama u području od $\lambda_\mathrm{B} = 420\,\mathrm{nm}$ do $\lambda_\mathrm{R} = 680\,\mathrm{nm}$ (bijela svjetlost) pada okomito na optičku rešetku s razmakom $d = 5\,\mu\mathrm{m}$ među pukotinama. Odredi kutnu širinu razmaka (tamnog područja) između kraja prvog i početka drugog spektra u kutnoj raspodjeli zračenja rešetke. Zatim odredi valnu duljinu drugog spektra pri kojoj nastupa preklop s početkom trećeg spektra.

Postupak: Kutna raspodjela intenziteta svjetlosti valne duljine λ pri difrakciji na rešetki s razmakom među pukotinama d opisana je poznatim izrazom

$$I[\alpha] = I_0 \frac{\sin^2\left[N\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]},$$

a njeni se glavni maksimumi, $I_\mathrm{max} = N^2 I_0$, nalaze pri

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{d}m, \qquad m = 0, \pm1, \pm2\ldots,$$

gdje $m = 0$ odgovara središnjem ili nultom maksimumu, $m = \pm1$ odgovara prvom maksimumu itd. S obzirom da ovdje imamo kontinuirani spektar, prvi se maksimum ($m = 1$), odn. spektar prvog reda, proteže u području kuta α

$$\text{od} \quad \sin\alpha_{1B} = \frac{\lambda_\mathrm{B}}{d} \quad \text{do} \quad \sin\alpha_{1R} = \frac{\lambda_\mathrm{R}}{d},$$

Drugi maksimum ($m = 2$), odn. spektar u drugog reda, proteže u području kuta α

$$\text{od} \quad \sin\alpha_{2B} = \frac{2\lambda_\mathrm{B}}{d} \quad \text{do} \quad \sin\alpha_{2R} = \frac{2\lambda_\mathrm{R}}{d}.$$

S obzirom da za zadane granične valne duljine λ_B i λ_R vrijedi $2\lambda_\mathrm{B} > \lambda_\mathrm{R}$, slijedi $\alpha_{2B} > \alpha_{1R}$ te zaključujemo da zaista postoji razmak (tamno područje) između kraja spektra prvog i početka spektra drugog reda. Kutna širina tog razmaka je

$$\Delta\alpha = \alpha_{2B} - \alpha_{1R} = \arcsin\left[\frac{2\lambda_\mathrm{B}}{d}\right] - \arcsin\left[\frac{\lambda_\mathrm{R}}{d}\right],$$

što za zadane vrijednosti $\lambda_\mathrm{B,R}$ i d daje $\Delta\alpha \simeq 1.85°$. Treći maksimum ($m = 3$), odn. spektar trećeg reda, u kutnoj raspodjeli počinje pri

$$\sin\alpha_{3B} = \frac{3\lambda_\mathrm{B}}{d}.$$

S obzirom da za zadane valne duljine $\lambda_\mathrm{B,R}$ vrijedi $3\lambda_\mathrm{B} < 2\lambda_\mathrm{R}$, slijedi $\alpha_{3B} < \alpha_{2R}$, što potvrđuje da se početak trećeg spektra nalazi unutar spektra drugog reda. Valna duljina λ spektra drugog reda kojoj odgovara isti kut otklona kao i početku spektra trećeg reda slijedi iz uvjeta

$$\sin\alpha = \frac{2\lambda}{d} = \frac{3\lambda_\mathrm{B}}{d},$$

što daje

$$\lambda = \frac{3}{2}\lambda_\mathrm{B}.$$

Za zadane vrijednosti $\lambda = 630\,\mathrm{nm}$.

Rješenje: $\Delta\alpha = \arcsin[2\lambda_\mathrm{B}/d] - \arcsin[\lambda_\mathrm{R}/d] \simeq 1.85°$, $\lambda = 3\lambda_\mathrm{B}/2 = 630\,\mathrm{nm}$

Zadatak 19.7: Monokromatska svjetlost upada okomito na optičku rešetku koja se sastoji od niza pukotina širine a raspoređenih tako da je razmak među središtima susjednih pukotina d. Na zastoru promatramo svijetle i tamne pruge. Na mjestu gdje bismo očekivali treći po redu interferencijski maksimum pojavljuje se prvi po redu difrakcijski minimum. Odredi omjer širine pukotina a i razmaka među njihovim središtima d.

Postupak: Kutna raspodjela intenziteta zračenja pri interferenciji N točkastih koherentnih izvora valne duljine λ na međusobnom razmaku d opisana je poznatim izrazom

$$I[\alpha] = I_0 \frac{\sin^2\left[N\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]},$$

gdje glavne interferencijske maksimume iznosa $I_{\max} = N^2 I_0$ očekujemo pri kutu α za koji vrijedi

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{d}m, \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots.$$

Kut koji odgovara trećem po redu glavnom interferencijskom maksimumu dan je s

$$\sin\alpha_3 = \frac{3\lambda}{d}.$$

Svaki od koherentnih izvora ovdje je pukotina širine a te osim same interferencije izvora uzimamo u obzir i difrakciju. Kutna raspodjela intenziteta zračenja pri difrakciji svjetlosti valne duljine λ na pukotini širine a opisan je izrazom

$$I[\alpha'] = I_0 \frac{\sin^2\left[\frac{\pi a}{\lambda}\sin\alpha'\right]}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\alpha'\right)^2}.$$

Minimume očekujemo pri kutu α' koji zadovoljava

$$\sin\alpha' = \frac{\lambda}{a}m' \qquad m' = \pm1, \pm2, \ldots$$

Za prvi difrakcijski minimum uzimamo $m = 1$, odnosno

$$\sin\alpha'_1 = \frac{\lambda}{a}.$$

Uvjet zadatka glasi

$$\alpha_3 = \alpha'_1,$$

odnosno, napišemo li $\sin\alpha_3 = \sin\alpha'_1$, slijedi

$$\frac{3\lambda}{d} = \frac{\lambda}{a},$$

na osnovu čega je traženi omjer

$$\frac{a}{d} = \frac{1}{3}.$$

Rješenje: $a/d = 1/3$

Zadatak 19.8: Snop prirodne svjetlosti intenziteta I_0 upada na niz od tri polarizatora. Propusni smjer trećeg i propusni smjer prvog polarizatora zatvaraju kut θ_{31} dok se kut θ_{21} što ga zatvara propusni smjer drugog polarizatora s propusnim smjerom prvog polarizatora može podešavati. Odredi kut θ_{21} kojime se postiže najveći intenzitet snopa nakon njegova prolaska trećim polarizatorom te iznos najvećeg intenziteta.

Postupak: Intenzitet snopa nakon prolaska prvim polarizatorom jednak je jednoj polovini uparnog intenziteta,

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0,$$

jer polarizator apsorbira jedan od dvaju ravnomjerno zastupljenih smjerova polarizacije prirodne svjetlosti. Daljnji pad intenziteta nakon prolaska snopa drugim i trećim polarizatorom slijedi primjenom Malusova zakona,

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta_{21}, \qquad I_3 = I_2 \cos^2 \theta_{32},$$

gdje je θ_{21} traženi kut između drugog i prvog polarizatora, a θ_{32} je kut između trećeg i drugog polarizatora. Koristeći

$$\theta_{21} + \theta_{32} = \theta_{31}$$

možemo napisati

$$I_3 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \theta_{21} \cos^2 \theta_{32} = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \theta_{21} \cos^2 [\theta_{31} - \theta_{21}].$$

Kut θ_{21} s kojim se ostvaruje maksimum intenziteta I_3 pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}I_3}{\mathrm{d}\theta_{21}} = -2(\tan \theta_{21} - \tan[\theta_{31} - \theta_{21}]) I_3$$

koji je ispunjen kada je

$$\tan \theta_{21} = \tan[\theta_{31} - \theta_{21}],$$

odnosno za

$$\theta_{21} = \theta_{31}/2.$$

Maksimalni intenzitet je

$$(I_3)_{\max} = \frac{1}{2} I_0 \cos^4 [\theta_{31}/2].$$

Rješenje: $\theta_{21} = \theta_{31}/2$, $I_{\max} = I_0 \cos^4[\theta_{31}/2]/2$

Zadatak 20.1: Snaga zračenja točkastog izotropnog izvora monokromatske svjetlosti valne duljine $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$ je $P = 10\,\mathrm{W}$. Odredi najveću udaljenost na kojoj čovjek može primijetiti taj izvor ako njegovo oko reagira na svjetlosni tok od najmanje 60 fotona u sekundi, a promjer širom otvorene zjenice oka je $2r = 5\,\mathrm{mm}$. (Planckova konstanta $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$, brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

Postupak: Jakost točkastog izvora je

$$I = \frac{P}{4\pi},$$

a snagu koju zahvaća ljudsko oko na udaljenosti d od tog izvora je

$$P' = I\,\Omega',$$

gdje je

$$\Omega' = \frac{r^2\pi}{d^2}$$

prostorni kut koji otvor zjenice površine $r^2\pi$ zauzima u odnosu na izvor. Slijedi

$$P' = \frac{Pr^2}{4d^2}.$$

(Gornji rezultat možemo izravno napisati primijetimo li da se snaga koju zahvaća oko, P' i ukupna znaga izvora, P, odnose kao što se odnose površina otvora oka, $r^2\pi$, i površina sfere polumjera jednakog udaljenosti oka od izvora, $4d^2\pi$.) S obzirom da se svjetlost sastoji od fotona čija je energija

$$E_{\text{fot.}} = \frac{hc}{\lambda},$$

snagu koju oko zahvaća također možemo napisati kao produkt frekvencije f' kojom fotoni ulaze u oko i energije fotona,

$$P' = f E_{\text{fot.}} = f\frac{hc}{\lambda}.$$

Izjednačavanjem gornjih izraza za snagu P' slijedi

$$d^2 = \frac{Pr^2\lambda}{4fhc}.$$

Pragu osjetljivosti oka $f_{\min}$ odgovara maksimalna udaljenost s koje vidimo izvor,

$$d_{\max} = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{P\lambda}{hcf_{\min}}}.$$

Za zadane vrijednosti P, $f_{\min} = 60\,\mathrm{s^{-1}}$ i r dobivamo $d_{\max} \simeq 809\,\mathrm{km}$.

Rješenje: $d_{\max} = (r/2)\sqrt{P\lambda/hcf_{\min}} \simeq 809\,\mathrm{km}$

Zadatak 20.2: Žica duljine $\ell = 1\,\mathrm{m}$ i promjera $2r = 1\,\mathrm{mm}$ priključena je na napon $U = 6\,\mathrm{V}$ te njome teče struja $I = 0.2\,\mathrm{A}$, a nalazi se u okolini temperature $T_0 = 300\,\mathrm{K}$. Odredi temperaturu žice pretpostavljajući da ona apsorbira i emitira termalno zračenje kao crno tijelo. (Štefan–Boltzmannova konstanta $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$.)

Postupak: U stacionarnom stanju, tj. kada je temperatura žice stalna, količina energije koju u jedinici vremena žica prima jednaka je količini energije koju ona predaje. Pišemo

$$0 = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = UI + S\sigma T_0^4 - S\sigma T^4,$$

gdje je UI snaga kojom električna struja zagrijava (pozitivni predznak) žicu, $S\sigma T_0^4$ je snaga kojom žica apsorbira (pozitivni predznak) termalno zračenje iz okoline, a $S\sigma T^4$ je snaga termalne emisije (negativni predznak) žice. Ploha koja istovremeno apsorbira i emitira zračenje je plašt cilindra polumjera r i duljine ℓ čija je površina

$$S = 2r\pi\ell.$$

Slijedi

$$T^4 = T_0^4 + \frac{UI}{S\sigma} = T_0^4 + \frac{UI}{2r\pi\ell\sigma},$$

a za zadane vrijednosti parametara ℓ, r, U, I i T_0 dobivamo $T \simeq 349\,\mathrm{K}$.

Rješenje: $T = (T_0^4 + UI/2r\pi\ell\sigma)^{1/4} \simeq 349\,\mathrm{K}$

Zadatak 20.3: Čelična kuglica promjera $2r = 1\,\mathrm{cm}$ zagrijana je do temperature $T_0 = 1000\,\mathrm{K}$ i ostavljena je da se hladi termalnim zračenjem. Pretpostavljajući da kuglica zrači kao crno tijelo te zanemarujući apsorpciju zračenja iz okoline odredi za koliko vremena se temperatura kuglice spusti na $T_1 = 900\,\mathrm{K}$. (Toplinski kapacitet čelika $c = 466\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, gustoća čelika $\rho = 7800\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, Štefan–Boltzmannova konstanta $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$.)

Postupak: Toplinska energija sadržana u čeličnoj kuglici pri temperaturi T je

$$Q = mcT.$$

Ta se toplina u vremenu smanjuje zbog termičkog zračenja opisanog Štefan–Boltzmannovim zakonom,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q = mc\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T = -S\sigma T^4.$$

Gornja diferencijalna jednadžba dopušta separaciju varijabli te ju možemo napisati u obliku

$$-\frac{mc}{S\sigma}\frac{\mathrm{d}T}{T^4} = \mathrm{d}t,$$

a integracijom dobivamo

$$\frac{mc}{3S\sigma T^3} = t + C,$$

gdje je C integracijska konstanta. S obzirom da je u trenutku $t = t_0$ kuglica pri temperaturi $T = T_0$, a u trenutku t_1 je pri temperaturi T_1, imamo sustav

$$\frac{mc}{3S\sigma T_0^3} = t_0 + C, \qquad \frac{mc}{3S\sigma T_1^3} = t_1 + C.$$

Oduzimanjem lijeve od desne jednadžbe slijedi traženo vrijeme hlađenja,

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{mc}{3S\sigma}\left(\frac{1}{T_1^3} - \frac{1}{T_0^3}\right).$$

Kako bismo gornji izraz napisali s pomoću zadanih parametara, površinu kuglice i njenu masu pišemo kao

$$S = 4r^2\pi, \qquad m = \rho V = \rho\,\frac{4}{3}r^3\pi,$$

te za vrijeme hlađenja dobivamo

$$\Delta t = \frac{\rho c r}{9\sigma}\left(\frac{1}{T_1^3} - \frac{1}{T_0^3}\right).$$

Za zadane vrijednosti parametara r, T_{12} i konstanti ρ, c i σ dobivamo $\Delta t = 13.3\,\mathrm{s}$

Rješenje: $\Delta t = (\rho c r/9\sigma)(T_1^{-3} - T_0^{-3}) \simeq 13.3\,\mathrm{s}$

Zadatak 20.4: Srednja udaljenosti Zemlje od Sunca (tzv. astronomska jedinica) iznosi $a = 1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$, a ukupna snaga Sunčeva zračenja (tzv. luminozitet Sunca) je $P = L_\odot = 3.846 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$. Procijeni srednju temperaturu Zemlje na osnovu pretpostavke da ona apsorbira i emitira zračenje kao crno tijelo. (Štefan–Boltzmannova konstanta $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$.)

Postupak: Sunce možemo shvatiti kao izotropni izvor jakosti

$$I = \frac{P}{4\pi} = \frac{L_\odot}{4\pi},$$

a snagu zračenja koja pada na Zemlju i koje ona apsorbira možemo napisati kao

$$P_\mathrm{a} = I\Omega,$$

gdje je

$$\Omega = \frac{R_\mathrm{Z}^2\pi}{a^2}$$

prostorni kut koji Zemlja zauzuma u odnosu na Sunce, R_Z je polumjer Zemlje. Slijedi da snagu zračenja koju Zemlja apsorbira možemo napisati kao

$$P_\mathrm{a} = \frac{L_\odot R_\mathrm{Z}^2}{4a^2}.$$

Snagu zračenja koje Zemlja emitira opisujemo Štefan–Boltzmannovim zakonom,

$$P_\mathrm{e} = S\sigma T^4 = 4R_\mathrm{Z}^2\pi\sigma T^4,$$

gdje je $S = 4R_\mathrm{Z}^2\pi$ površina Zemlje, a T je njena srednja temperatura. S obzirom da nema drugih mehanizama grijanja i hlađenja te dvije snage moraju biti u ravnoteži,

$$P_\mathrm{a} = P_\mathrm{e}.$$

Slijedi

$$T^4 = \frac{L_\odot}{16\pi\sigma a^2},$$

što daje $T \simeq 278.7\,\mathrm{K}$.

Rješenje: $T = (L_\odot/16\pi\sigma a^2)^{1/4} \simeq 278.7\,\mathrm{K} \simeq 5.5°\mathrm{C}$

Zadatak 20.5: Na osnovu izraza za raspodjelu gustoće energije zračenja crnog tijela temperature T po valnim duljinama (Planckov zakon),

$$u_\lambda[\lambda] = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1},$$

izvedi izraz za raspodjelu gustoće energije zračenja po frekvencijama, $u_f[f]$, te odredi frekvenciju pri kojoj ta raspodjela ima maksimum. (Postupak zahtijeva pronalaženje nultočke funkcije numeričkim putem.)

Postupak: Širinu uskog spektralnog intervala u okolini valne duljine λ, odnosno frekvencije $f = c/\lambda$, možemo izraziti širinom intervala valnih duljina, $\Delta\lambda$, kao i širinom intervala frekvencija, Δf. Kada $\Delta\lambda \to 0$, širina uskog spektralnog intervala iskazana kao $\Delta\lambda$ i kao Δf odnose se kao

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta f} = \left|\frac{d\lambda}{df}\right| = \frac{c}{f^2}.$$

Gustoću energije sadržanu u tom spektralnom intervalu također možemo napisati bilo koristeći valnu duljinu, bilo koristeći frekvenciju, pri čemu mora vrijediti jednakost

$$u_\lambda[\lambda]\,\Delta\lambda = u_f[f]\,\Delta f.$$

Tražena funkcija raspodjele gustoće energije zračenja crnog tijela po frekvencijama slijedi kao

$$u_f[f] = \frac{\Delta\lambda}{\Delta f}\,u_\lambda[c/f] = \frac{c}{f^2}\frac{8\pi hc}{(c/f)^5}\frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} = \frac{8\pi hf^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}.$$

Ekstrem gornje funkcije možemo pronaći uvjetom $0 = \frac{d}{d\lambda}u_\lambda[\lambda]$. Zbog jednostavnosti računa uvodimo bezdimenzionalnu varijablu

$$x = \frac{hf}{kt}$$

te tražimo maksimum veličine

$$u_\lambda = k\,\frac{x^3}{e^x - 1},$$

gdje je k konstanta, u odnosu na variajblu x. Uvjet ekstrema daje

$$0 = \frac{d}{dx}u_\lambda = \cdots = \frac{kx^2}{(e^x - 1)^2}\big(e^x(3 - x) - 3\big),$$

što vodi na

$$x = 3(1 - e^{-x}).$$

Vrijednost varijable x koja zadovoljava gornji uvjet nije moguće izraziti analitički pa koristimo numerički postupak koji daje $x \simeq 2.82144$. Očigledno je da se radi o maksimumu jer veličina $u_\lambda > 0$ iščezava za $x \to 0$ kao i za $x \to \infty$. Slijedi,

$$x_{\max} = \frac{hf_{\max}}{kT} \simeq 2.82144,$$

odnosno,

$$f_{\max} \simeq 2.82144 \times \frac{kT}{h}.$$

Rješenje: $u_f[f] = (8\pi hf^3/c^3)/(e^{hf/kT} - 1)$, $f_{\max} \simeq 2.82144 \times kT/h$

Zadatak 20.6: Odredi silu kojom Sunčevo zračenje djeluje na Zemlju pretpostavljajući da Zemlja apsorbira svo zračenje koje na nju pada te koristeći podatke o ukupnoj snazi Sunčeva zračenja (luminozitet Sunca) $P = L_\odot = 3.846 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$, polumjeru Zemlje $R = 6371\,\mathrm{km}$ te srednjoj udaljenosti Zemlje od Sunca (astronomska jedinica) $a = 1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$. (Brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

Postupak: Na osnovu očuvanja količine gibanja mora vrijediti

$$\Delta\mathbf{p}_\mathrm{Z} + \Delta\mathbf{p}_\mathrm{aps.} = 0,$$

gdje je $\Delta\mathbf{p}_\mathrm{Z}$ promjena količine gibanja Zemlje, a $\Delta\mathbf{p}_\mathrm{aps.}$ je promjena količine gibanja zračenja uslijed apsorpcije. Promjenu količine gibanja Zemlje koja nastupa u vremenskom intervalu Δt možemo napisati kao

$$\Delta\mathbf{p}_\mathrm{Z} = \mathbf{F}\,\Delta t,$$

gdje je $\mathbf{F}$ sila koja djeluje na Zemlju. Promjenu količine gibanja zračenja u istom vremenskom intervalu možemo napisati kao zbroj promjena količina gibanja svih apsorbiranih fotona,

$$\Delta\mathbf{p}_\mathrm{aps.} = \sum_{i\in\Delta t}(\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}_i) = -\sum_{i\in\Delta t}\mathbf{p}_i$$

(s obzirom da je riječ o apsorpciji imamo $\mathbf{p}'_i = 0$). S obzirom da je udaljenost Zemlja–Sunce znatno veća od polumjera Zemlje i Sunca vektori $\mathbf{p}_i$ su gotovo paralelni pa možemo računati s modulima vektora. Slijedi

$$F = \frac{\Delta p_\mathrm{Z}}{\Delta t} = \frac{\Delta p_\mathrm{aps.}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{i\in\Delta t} p_i.$$

Iznos količine gibanja fotona p_i povezan je s njegovom energijom E_i relativističkom relacijom

$$E_i = p_i c$$

s pomoću koje silu možemo napisati kao

$$F = \frac{1}{\Delta t}\sum_{i\in\Delta t}\frac{E_i}{c} = \frac{1}{c}\frac{\Delta E_\mathrm{a}}{\Delta t} = \frac{1}{c}P_\mathrm{a}$$

gdje je ΔE_a ukupna energija apsorbiranog zračenja u vremenskom intervalu Δt, a P_a snaga apsorbiranog zračenja. S obzirom da je polumjer Zemlje mnogo manji od udaljenosti Zemlja–Sunce omjer apsorbirane snage P_a i ukupne snage Sunčevog zračenja $L_\odot$ odgovara omjeru površine kruga polumjera R i površine sfere polumjera a,

$$\frac{P_\mathrm{a}}{L_\odot} = \frac{R^2\pi}{4a^2\pi} = \frac{R^2}{4a^2}$$

(detaljniji izvor gornje relacije vidi u ranijem zadatku). Konačno

$$F = \frac{R^2 L_\odot}{4a^2 c} \simeq 5.817 \times 10^8\,\mathrm{N}.$$

Rješenje: $F = R^2 L_\odot / 4a^2 c \simeq 5.817 \times 10^8\,\mathrm{N}$.

Zadatak 20.7: Pri raspršenju fotona na mirnom elektronu (Comptonovo raspršenje), energija fotona raspršenih pod kutem $\theta'_{\text{fot.}} = 60^\circ$ je $E'_{\text{fot.}} = 0.7\ \text{MeV}$. Odredi energiju fotona prije raspršenja. (Masa elektrona $m_e = 0.511\ \text{MeV}/c^2$.)

Postupak: Koristeći poznat izraz za razliku valnih duljina fotona pri Comptonovu raspršenju,

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}\big(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}}\big),$$

te izraz za energiju fotona frekvencije f, odn. valne duljine λ,

$$E_{\text{fot.}} = hf = \frac{hc}{\lambda},$$

imamo

$$\frac{hc}{E'_{\text{fot.}}} - \frac{hc}{E_{\text{fot.}}} = \frac{h}{m_e c}\big(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}}\big),$$

iz čega dobivamo

$$E_{\text{fot.}} = \frac{E'_{\text{fot.}}}{1 - (E'_{\text{fot.}}/m_e c^2)(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}})}.$$

Za zadane vrijednosti $E_{\text{fot.}} \simeq 2.222\ \text{MeV}$.

Rješenje: $E_{\text{fot.}} = E'_{\text{fot.}}/\big(1 - (E'_{\text{fot.}}/m_e c^2)(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}})\big) \simeq 2.222\ \text{MeV}$

Zadatak 20.8: Odredi najveću energiju koju elektron može primiti u Comptonovu raspršenju ako je valna duljina fotona prije raspršenja $\lambda = 0.1\,\mathrm{nm}$. (Planckova konstanta $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js}$, masa elektrona $m_e = 9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, elementarni naboj $e = 1.602 \times 10^{-19}$.)

Postupak: Energija koju elektron u raspršenju primi jednaka je energiji koju foton izgubi,

$$\Delta E = E_{\mathrm{fot.}} - E'_{\mathrm{fot.}} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = hc\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)},$$

gdje je

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta'_{\mathrm{fot.}})$$

razlika valne duljine fotona nakon i prije raspršenja pod kutem $\theta'_{\mathrm{fot.}}$ (poznata formula za Comptonovo raspršenje). Iz gornjih izraza se vidi da je ΔE najveće kada je $\Delta\lambda$ najveće, pa pišemo

$$(\Delta E)_{\max} = hc\,\frac{(\Delta\lambda)_{\max}}{\lambda(\lambda + (\Delta\lambda)_{\max})},$$

a također se vidi da je $\Delta\lambda$ najveće pri $\theta'_{\mathrm{fot.}} = \pi$ (raspršenje izravno unazad), odnosno,

$$(\Delta\lambda)_{\max} = \frac{2h}{m_e c}.$$

Slijedi

$$(\Delta E)_{\max} = \frac{2h^2 c}{\lambda(\lambda m_e c + 2h)}.$$

Za zadanu vrijednost λ,

$$(\Delta E)_{\max} \simeq 573.9\,\mathrm{eV}.$$

Rješenje: $(\Delta E)_{\max} = 2h^2 c/\lambda(\lambda m_e c + 2h) \simeq 573.9\,\mathrm{eV}$

Zadatak 20.9: Proučavanjem fotoelektričnog efekta na uzorku nekog metala uočeno je da svjetlost valne duljine $\lambda_1 = 410\,\mathrm{nm}$ s njegove površine izbacuje elektrone koji savladavaju zaustavni potencijal do $\Delta U_1 = 1\,\mathrm{V}$. Odredi gornju granicu na valnu duljinu svjetlosti koja bi proizvela fotone koji savladavaju zaustavni potencijal $\Delta U_2 = 2\,\mathrm{V}$. (Planckova konstanta $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$, brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, elementarni naboj $e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.)

Postupak: Kako bi elektron izbačen s površine metala fotoelektričnim efektom savladao zaustavni potencijal ΔU energija fotona $E_{\text{fot.}} = hf = hc/\lambda$ mora biti veća od, ili u graničnom slučaju jednaka zbroju izlaznog rada $W_{\text{izl.}}$ za dani metal i rada $e\,\Delta U$ potrebnog za savladavanje zaustavnog potencijala,

$$E_{\text{fot.}} = \frac{hc}{\lambda} \geq W_{\text{izl.}} + e\,\Delta U.$$

Ovdje imamo granični slučaj

$$\frac{hc}{\lambda_1} = W_{\text{izl.}} + e\,\Delta U_1$$

te zahtjev

$$\frac{hc}{\lambda_2} \geq W_{\text{izl.}} + e\,\Delta U_2.$$

Eliminacijom $W_{\text{izl.}}$ slijedi

$$\frac{hc}{\lambda_2} \geq \frac{hc}{\lambda_1} + e(\Delta U_2 - \Delta U_1),$$

odnosno,

$$\lambda_2 \leq \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{e}{hc}(\Delta U_2 - \Delta U_1)\right)^{-1}.$$

Za zadane vrijednosti $\lambda_2 \leq 308.1\,\mathrm{nm}$.

Rješenje: $\lambda_2 \leq (1/\lambda_1 + (e/hc)(\Delta U_2 - \Delta U_1))^{-1} \simeq 308.1\,\mathrm{nm}$

Zadatak 20.10: Pri prelasku elektrona iz stanja više u stanje niže energije u vodikovu atomu emitiran je foton valne duljine $\lambda \simeq 486\,\mathrm{nm}$. Odredi glavne kvantne brojeve tih dvaju stanja. (Energija ionizacije vodika $E_\mathrm{I} = 13.6\,\mathrm{eV}$)

Postupak: Energija emitiranog fotona

$$E_{\mathrm{fot.}} = \frac{hc}{\lambda} \simeq 2.55\,\mathrm{eV}$$

jednaka je razlici energija elektrona u početnom i konačnom stanju atoma. Energija elektrona dana je izrazom

$$E_n = -\frac{1}{n^2} E_\mathrm{I},$$

gdje je $n = 1, 2, \ldots$ glavni kvantni broj, a $E_\mathrm{I} \simeq 13.6\,\mathrm{eV}$ je energija ionizacije vodikova atoma. Za $n = 1, 2, 3, 4, 5$ dobivamo

$$E_n \simeq -13.6\,\mathrm{eV}, -3.40\,\mathrm{eV}, -1.51\,\mathrm{eV}, -0.85\,\mathrm{eV}, -0.54\,\mathrm{eV}.$$

Uočavamo da je

$$E_4 - E_2 \simeq 2.55\,\mathrm{eV} \simeq E_{\mathrm{fot.}},$$

te zaključujemo

$$n = 4, \qquad n' = 2.$$

Rješenje: $n = 4$, $n' = 2$

Zadatak 20.11: Čestica μ^- (mion) i proton mogu činiti vezano stanje nalik vodikovu atomu. Koristeći Bohrov model atoma procijeni energiju fotona emitiranog prilikom prelaska miona iz prvog pobuđenog u osnovno energijsko stanje na osnovu podataka da energija ionizacije vodikova atoma iznosi približno $13.6\,\mathrm{eV}$ te da je masa miona približno 207 puta veća od mase elektrona.

Postupak: U Bohrovom modelu vodikova atoma energija fotona emitiranog pri prelasku iz m-tog u n-to pobuđeno stanje dana je izrazom

$$E_{mn} = |E_m - E_n| = \left|\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right| E_\mathrm{I}\ ,$$

gdje je E_I energija ionizacije vodikova atoma,

$$E_\mathrm{I} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \simeq 13.6\,\mathrm{eV}.$$

Ovdje imamo $m = 2$ i $n = 1$, dakle

$$E_{21} = |E_2 - E_1| = \left|\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right| E_\mathrm{I} = \frac{3}{4} E_\mathrm{I}\ .$$

U vezanom stanju miona i protona u gornjim izrazima potrebno je masu elektrona m_e zamijeniti masom miona,

$$m_e \longrightarrow m_\mu \simeq 207\, m_e.$$

Iz gornjih izraza je očigledno da je i energija ionizacije "mionskog H-atoma" približno 207 puta veća od energije ionizacije "običnog" vodikovog atoma te isto vrijedi i za energije fotona

$$E_{21}^{(\mu)} = \frac{3}{4} E_\mathrm{I}^{(\mu)} \simeq \frac{3}{4}\, 207\, E_\mathrm{I} \simeq 2.1\,\mathrm{keV}.$$

(Napomena: Stroži račun uzeo bi u obzir da na mjestu m_e u izrazu za E_I stoji tzv. reducirana masa elektrona, definirana izrazom $\mu_e = m_e m_p/(m_e + m_p)$. Zamjenom $\mu_e \to \mu_\mu$ dobili bismo $E_\mathrm{I}^{(\mu)} \simeq 186\, E_\mathrm{I}$, odnosno $E_{21}^{(\mu)} \simeq 1.9\,\mathrm{keV}$.)

Rješenje: $E_{21}^{(\mu)} \simeq 2.1\,\mathrm{keV}$

Zadatak 20.12: Pretpostavimo da se čestica mase m giba u kružnim orbitama pod djelovanjem privlačne centralne sile kojoj odgovara potencijalna energija čestice opisana izrazom

$$E_{\text{pot.}}[r] = \frac{1}{2}kr^2,$$

gdje je k konstanta, a r je udaljenost čestice od središta. U skladu s postulatom o kvantizaciji kutne količine gibanja, $L_n = n\hbar$, $n = 1, 2, \ldots$, izvedi izraz za energijske nivoe čestice.

Postupak: Najprije prepoznajemo da zadana potencijalna energija odgovara harmoničkoj sili (sili opruge) čija jakost je

$$F = kr.$$

Ako se elektron giba u kružnoj orbiti polumjera r brzinom v, odnosno kutnom brzinom $\omega = v/r$, ta sila ima ulogu centripetalne sile i njena jakost mora biti

$$F = F_{\text{CP}} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r.$$

Slijedi relacija

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

gdje uočavamo da kutna brzina ne ovisi o polumjeru orbite (slično kao što frekvencija titranja harmoničkog oscilatora ne ovisi o amplitudi). Energija čestice sastoji se od kinetičke i od potencijalne energije te imamo

$$E = K + U = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}(m\omega^2 + k)r^2 = kr^2.$$

Iznos kutne količine gibanja čestice u kružnoj orbiti je

$$L = pr = mvr = m\omega r^2$$

($p = mv$ je iznos linearne količine gibanja), a u skladu s postulatom o kvantizaciji ovdje stavljamo

$$L = L_n = m\omega_n r_n^2 = n\hbar, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

gdje su ω_n i r_n kutna brzina vrtnje i polumjer orbite za dani kvantni broj n. S obzirom da smo pokazali da kutna brzina ω ne ovisi o n stavljamo $\omega_n = \omega$ te slijedi izraz za polumjer orbite,

$$r_n^2 = \frac{n\hbar}{m\omega} = \frac{n\hbar}{\sqrt{mk}}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Energija čestice za kvantni broj n slijedi kao

$$E_n = kr_n^2 = n\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Rješenje: $E_n = n\hbar\sqrt{k/m}$, $n = 1, 2, \ldots$

Zadatak 20.13: Pretpostavljajući da sva energija Sunčeva zračenja potiče iz pretvorbe vodika ${}^1_1\mathrm{H}$ u helij ${}^4_2\mathrm{He}$, pritom zanemarujući energiju nastalih neutrina, procijeni masu vodika koju Sunce troši u jedinici vremena. (Ukupna snaga Sunčeva zračenja (tzv. luminozitet sunca) $P = L_\odot = 3.846 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$, masa vodikova atoma $m^*[{}^1_1\mathrm{H}] = 1.007825\,\mathrm{u}$, masa helijeva atoma $m^*[{}^2_4\mathrm{He}] = 4.002603\,\mathrm{u}$, brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

Postupak: Reakciju možemo sažeti kao

$$4\,{}^1_1\mathrm{H} \longrightarrow {}^4_2\mathrm{He} + 2\nu_e + \text{fotoni.}$$

Zanemarujući energiju neutrina nastalih u reakciji, energija zračenja (fotona) koja se oslobodi po jednom utrošenom vodikovu atomu je

$$E_\mathrm{H} = \Big(m^*[{}^1_1\mathrm{H}] - \frac{1}{4}\,m^*[{}^4_2\mathrm{He}]\Big)c^2,$$

odnosno, količina energije koja se oslobađa po jedinici mase potrošenog vodika je

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}m} = \frac{E_\mathrm{H}}{m^*[{}^1_1\mathrm{H}]} = \left(1 - \frac{m^*[{}^4_2\mathrm{He}]}{4\,m^*[{}^1_1\mathrm{H}]}\right)c^2.$$

Masa vodika koju Sunce troši u jedinici vremena je

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}E}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}m}\right)^{-1} L_\odot = \left(1 - \frac{m^*[{}^4_2\mathrm{He}]}{4\,m^*[{}^1_1\mathrm{H}]}\right)^{-1}\frac{L_\odot}{c^2}.$$

Za zadane vrijednosti

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \simeq 6.01 \times 10^{11}\,\mathrm{kg\,s^{-1}}.$$

Rješenje: $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = (1 - m^*[{}^4_2\mathrm{He}]/4m^*[{}^1_1\mathrm{H}])^{-1}L_\odot/c^2 \simeq 6.01 \times 10^{11}\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$

Zadatak 20.14: Nekim fizikalnim procesom čija aktivnost A_1 je stalna u vremenu nastaju jezgre aktivnog izotopa 2 s konstantom raspada λ_2. Odredi ovisnost aktivnosti izotopa 2 o vremenu ako je ona u početnom trenutku bila jednaka nuli.

Postupak: Populacija jezgara izotopa 2 podložna je raspadu, a doprinosi joj stalna aktivnost A_1, dakle

$$\mathrm{d}N_2 = -\lambda_2 N_2 \,\mathrm{d}t + A_1 \,\mathrm{d}t.$$

Separacijom varijabli,

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{-N_2 + A_1/\lambda_2} = \lambda_2 \,\mathrm{d}t,$$

te integracijom slijedi

$$-\ln[-N_2 + A_1/\lambda_2] = \lambda_2 t + C,$$

odnosno,

$$N_2[t] = \frac{A_1}{\lambda_2} - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t - C},$$

gdje je C integracijska konstanta. Njenu vrijednost određujemo iz početnog uvjeta $A_2[0] = \lambda_2 N_2[0] = 0$ što daje

$$\mathrm{e}^{-C} = \frac{A_1}{\lambda_2}.$$

Sada možemo napisati aktivnost izotopa 2 kao

$$A_2[t] = \lambda_2 N_2[t] = \cdots = A_1 \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right).$$

Rješenje: $A_2[t] = A_1 \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right)$

Zadatak 20.15: Pri raspadu jezgre aktivnog izotopa 1 nastaje jezgra aktivnog izotopa 2. Odgovarajuće konstante raspada su λ_1 i λ_2. Ako je u početnom trenutku aktivnost izotopa 1 u nekom uzorku različita od nule, a aktivnost izotopa 2 je jednaka nuli, odredi vrijeme nakon kojeg će aktivnost izotopa 2 doseći svoj maksimum.

Postupak: Populacije izotopa 1 i 2 ponašaju se u skladu sa zakonom radioaktivnog raspada pri čemu svaki raspad u populaciji izotopa 1 doprinosi populaciji izotopa 2. Možemo pisati

$$\begin{aligned} \mathrm{d}N_1 &= -\lambda_1 N_1\,\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}N_2 &= -\lambda_2 N_2\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}N_1, \end{aligned}$$

odnosno,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_1[t] + \lambda_1 N_1[t] &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_2[t] + \lambda_2 N_2[t] &= \lambda_1 N_1[t], \end{aligned}$$

što su linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima. Jednadžba za populaciju N_1 je homogena i ima (dobro poznato) rješenje koje možemo napisati kao

$$N_1[t] = N_{10}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t},$$

gdje konstanta $N_{10} = N_1[0]$ opisuje populaciju izotopa 1 u početnom trenutku $t = 0$. Uvrštavanjem tog rješenja u diferencijalnu jednadžbu za N_2 imamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_2[t] + \lambda_2 N_2[t] = \lambda_1 N_{10}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}.$$

Gornja jednadžba je nehomogena i njeno opće rješenje je zbroj rješenja njoj odgovarajuće homogene jednadžbe koje glasi $A\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$, gdje je A konstanta, i partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe do kojeg dolazimo s pomoću probnog rješenja $B\mathrm{e}^{\beta t}$, gdje su B i β konstante. Uvrštavanjem slijedi

$$\beta B\mathrm{e}^{\beta t} + \lambda_2 B\mathrm{e}^{\beta t} = \lambda_1 N_{10}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t},$$

što je ispunjeno za $\beta = -\lambda_1$ i $B = \lambda_1 N_{10}/(\lambda_2 - \lambda_1)$. Opće rješenje je dakle

$$N_2[t] = A\mathrm{e}^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}.$$

Konstanta A određena je početnim uvjetom $N_2[0] = 0$. Slijedi

$$N_2[t] = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right).$$

Maksimum populacije 2 pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_2[t] = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(-\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + \lambda_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right),$$

koji je ispunjen u trenutku

$$t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Rješenje: $t = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}\ln[\lambda_1/\lambda_2]$.

Zadatak 20.16: U Zemljinoj atmosferi, a time i u svim živim organizmima, udio aktivnog izotopa $^{14}\mathrm{C}$ u ukupnoj populaciji ugljikovih atoma iznosi $\epsilon = (1.0 \pm 0.1) \times 10^{-12}$. Prestankom života organizma, izotop $^{14}\mathrm{C}$ se raspada s vremenom poluraspada $T_{1/2} = (5730 \pm 40)\,\mathrm{god}$, dok su preostali izotopi ugljika stabilni. Izvedi izraz s pomoću kojeg se, na osnovu mjerenja specifične aktivnosti uzorka čistog ugljika, $a = A/m$, gdje je A aktivnost, a m je masa uzorka, može odrediti vrijeme koje je proteklo nakon prestanka života organizma. Zatim procijeni standardnu pogrešku pri određivanju "starosti uzorka" ako je standardna relativna pogreška pri određivanju specifične aktivnosti $\sigma_a/a = 0.001$, a očekivana starost je približno $T_{1/2}/\ln 2$.

Postupak: Uzimamo da uzorak čistog ugljika mase m sadrži

$$N = \frac{m}{m^*[\mathrm{C}]}$$

atoma ugljika, gdje $m^*[\mathrm{C}]$ označava srednju masu ugljikova atoma. Kako je početna zastupljenost aktivnog izotopa $^{14}\mathrm{C}$ u uzorku jednaka atmosferskoj, početna aktivnost uzorka je

$$A_0 = \lambda \epsilon N = \frac{\lambda \epsilon m}{m^*[\mathrm{C}]},$$

gdje je

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

konstanta raspada. Aktivnost uzorka opada u vremenu u skladu sa zakonom o radioaktivnom raspadu; Ako je t vrijeme koje je proteklo nakon prestanka života organizma, aktivnost uzorka je

$$A[t] = A_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{\lambda \epsilon m}{m^*[\mathrm{C}]} = \frac{\lambda \epsilon m}{m^*[\mathrm{C}]}\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Specifična aktivnost slijedi kao

$$a[t] = \frac{A[t]}{m} = \frac{\lambda \epsilon}{m^*[\mathrm{C}]}\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

iz čega dobivamo starost uzorka,

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\frac{\lambda \epsilon}{a m^*[\mathrm{C}]} \right].$$

Standardnu pogrešku starosti računamo propagacijom pogrešaka koje se odnose na veličine ϵ, $T_{1/2}$, i a. Uobičajenim postupkom dobivamo

$$\begin{aligned}
\sigma_t &= \sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial \epsilon}\right)^2 \sigma_\epsilon^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T_{1/2}}\right)^2 \sigma_{T_{1/2}}^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda \epsilon}\right)^2 \sigma_\epsilon^2 + \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{t}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{T_{1/2}}\right)^2 \sigma_{T_{1/2}}^2 + \left(\frac{1}{\lambda a}\right)^2 \sigma_a^2} \\
&= \frac{1}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{\sigma_\epsilon}{\epsilon}\right)^2 + (1 - t\lambda)^2 \left(\frac{\sigma_{T_{1/2}}}{T_{1/2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2} \\
&= \frac{T_{1/2}}{\ln 2}\sqrt{\left(\frac{\sigma_\epsilon}{\epsilon}\right)^2 + \left(1 - \frac{t \ln 2}{T_{1/2}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{T_{1/2}}}{T_{1/2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Uočavamo da za $t \sim T_{1/2}/\ln 2 \sim 8000\,\mathrm{god}$ srednji član pod korijenom iščezava te da za zadane vrijednosti doprinos prvog člana dominira nad doprinosom trećeg. Stoga standardnu pogrešku procijenjujemo na

$$\sigma_t \sim \frac{T_{1/2}}{\ln 2}\,\frac{\sigma_\epsilon}{\epsilon} \sim 800\,\mathrm{god.}$$

Rješenje: $t = \lambda^{-1}\ln[\lambda\epsilon/am^*[\mathrm{C}]]$, $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$, $\sigma_t \sim T_{1/2}\sigma_\epsilon/(\ln 2)\epsilon \sim 800\,\mathrm{god}$