Ringkasan Materi
Matematika

Pelajaran 1

Bentuk Pangkat, Akar, dan Logaritma

Kelas X Semester 1

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
Memecahkan masalah yang berkaitan dengan bentuk pangkat, akar, dan logaritma.	• Menggunakan aturan pangkat, akar, dan logaritma. • Melakukan manipulasi aljabar dalam perhitungan yang melibatkan pangkat, akar, dan logaritma.

A. Bentuk Pangkat

Bentuk pangkat meliputi: pangkat bulat positif, pangkat bulat negatif, dan pangkat nol.

Secara umum perpangkatan bulat positif suatu bilangan real didefinisikan:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}}$$

Sifat-sifat bilangan berpangkat bilangan bulat untuk $a, b \in R; m, n \in B; a \neq 0, b \neq 0$ (R = himpunan bilangan real dan B = himpunan bilangan bulat) berikut.

1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3) $(a^m)^n = a^{m \times n}$
4) $(ab)^n = a^n \times b^n$
5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
6) $a^0 = 1$
7) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

B. Bentuk Akar

Pada bentuk akar berlaku:

1) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
2) $m\sqrt{a} \times n\sqrt{b} = m \times n\sqrt{a \times b}$
3) $\dfrac{m\sqrt{a}}{n\sqrt{b}} = \dfrac{m}{n}\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
4) $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^n \times a^m}$
5) $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[mn]{\dfrac{a^n}{a^m}}$

C. Logaritma

Logaritma merupakan *invers* (*kebalikan*) dari perpangkatan, sehingga dapat didefinisikan sebagai berikut.

$$x = a^n \Leftrightarrow {}^a\log x = n$$

untuk $a > 0, a \neq 1$ dan $x > 0$.

Keterangan:

a = bilangan pokok atau basis logaritma

x = numerus, bilangan yang dicari logaritmanya, $x > 0$

n = hasil logaritma, nilainya dapat positif, nol, atau negatif

Sifat-sifat logaritma:

1) ${}^{a}\log a = 1$

2) ${}^{a}\log 1 = 0$

3) ${}^{a}\log x + {}^{a}\log y = {}^{a}\log (x \,.\, y)$

4) ${}^{a}\log x - {}^{a}\log y = {}^{a}\log \dfrac{x}{y}$

5) ${}^{a}\log x^{n} = n \,.\, {}^{a}\log x$

6) ${}^{a}\log x = \dfrac{{}^{c}\log x}{{}^{c}\log a}$

7) ${}^{a}\log x = \dfrac{1}{{}^{x}\log a}$

8) $a^{{}^{a}\log x} = x$

9) ${}^{a^{n}}\log x^{m} = \dfrac{m}{n} \,.\, {}^{a}\log x$

10) ${}^{a}\log \dfrac{1}{x} = -\,{}^{a}\log x$

11) ${}^{\frac{1}{a}}\log x = -\,{}^{a}\log x$

12) ${}^{a}\log x \,.\, {}^{x}\log y = {}^{a}\log y$

13) ${}^{a}\log a^{n} = n$

14) $\log^{2} x = \log x \,.\, \log x$

15) $\log^{-1} x = \dfrac{1}{\log x}$

Pelajaran 2

Persamaan Kuadrat dan Fungsi

Kelas X Semester 1

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
Memecahkan masalah yang berkaitan dengan fungsi, persamaan dan fungsi kuadrat serta pertidaksamaan kuadrat.	• Memahami konsep fungsi. • Menggambar grafik fungsi aljabar sederhana dan fungsi kuadrat.

A. Pengertian Relasi dan Fungsi

Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah pemasangan anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B. Sedangkan suatu *fungsi* dari himpunan *A* ke himpunan *B* adalah suatu relasi yang memasangkan setiap anggota *A* dengan tepat satu anggota *B*.

Fungsi *f* dari himpunan *A* ke *B* ditulis:

$$f : A \to B$$

(dibaca: fungsi *f* memetakan *A* ke *B*)

Pada fungsi $f : A \to B$ berlaku:

1) Himpunan *A* disebut *daerah asal* (*domain*) dari *f*, ditulis D_f.
2) Himpunan *B* disebut *daerah kawan* (*kodomain*) dari *f*.
3) Himpunan dari semua peta *f* di *B* disebut *daerah hasil* (*range*) dari fungsi tersebut, ditulis R_f.

B. Persamaan Kuadrat

Bentuk umum persamaan kuadrat:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ ; \ a, b, c \in R, a \neq 0$$

Akar-akar persamaan kuadrat dapat ditentukan dengan:

- memfaktorkan;
- melengkapkan bentuk kuadrat sempurna;
- menggunakan rumus *abc*:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat:

1) jumlah akar-akar persamaan kuadrat:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2) hasil kali akar-akar persamaan kuadrat:

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

C. Fungsi Kuadrat

Bentuk umum fungsi kuadrat:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, a, b, c \in R$$

Cara-cara menentukan fungsi kuadrat:

a. jika diketahui titik potong dengan sumbu *x* di $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$maka $y = f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$;
b. jika diketahui koordinat titik puncak (titik balik) nya $P\,(p,q)$, maka $y = f(x) = a(x - p)^2 + q$;
c. jika melalui tiga titik yang diketahui, digunakan $y = ax^2 + bx + c$.

Pelajaran 3

Sistem Persamaan

Kelas X Semester 1

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
Memecahkan masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dan pertidaksamaan satu variabel.	• Menyelesaikan sistem persamaan linear dan sistem persamaan campuran linear dan kuadrat dalam dua variabel. • Merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear. • Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dan penafsirannya.

A. Sistem Persamaan Linear

Sistem persamaan linear terdiri atas dua atau lebih persamaan linear. Sistem persamaan linear terbagi atas:

1) Sistem persamaan linear dengan dua variabel. Bentuk umumnya:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases};\quad a, b, c, p, q, r = \text{ bilangan real.}$$

2) Sistem persamaan linear dengan tiga variabel. Bentuk umumnya:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ kx + ly + mz = n \\ px + qy + rz = s \end{cases};$$

$a, b, c, d, k, l, m, n, p, q, r, s =$ bilangan real.

Sistem persamaan linear dengan persamaan kuadrat. Bentuk umumnya:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = px^2 + qx + r \end{cases};\ a, b, p, q, r = \text{ bilangan real.}$$

Sistem persamaan kuadrat dengan dua variabel. Bentuk umumnya:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = px^2 + qx + r \end{cases};\ a, b, c, p, q, r = \text{ bilangan real.}$$

B. Himpunan Penyelesaian Sistem Persamaan

Untuk mencari himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan dua variabel dan persamaan kuadrat dapat dilakukan dengan beberapa cara, yaitu:

1) substitusi,
2) eliminasi, dan
3) gabungan substitusi dan eliminasi.

Pelajaran 4

Pertidaksamaan

Kelas X Semester 1

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
Memecahkan masalah yang berkaitan dengan fungsi, persamaan dan fungsi kuadrat serta pertidaksamaan kuadrat.	♦ Menyelesaikan pertidaksamaan satu variabel yang melibatkan bentuk pecahan aljabar. ♦ Merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan pertidaksamaan satu variabel. ♦ Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan pertidaksamaan satu variabel dan penafsirannya.

A. Pengertian Pertidaksamaan

Pertidaksamaan adalah suatu kalimat terbuka yang memuat satu variabel (peubah) atau lebih dan tanda-tanda ketidaksamaan (<, >, ≤, atau ≥).

B. Jenis-Jenis Pertidaksamaan dan Penyelesaiannya

Berdasarkan pangkat dari variabelnya (bentuk pertidaksamaan), pertidaksamaan dapat dibagi atas:

1) *Pertidaksamaan linear*, yaitu suatu pertidaksamaan yang mempunyai variabel pangkat satu.

   Contoh: $x + 4 < 2x + 7$

2) *Pertidaksamaan kuadrat*, yaitu suatu pertidaksamaan yang mempunyai variabel pangkat dua.

   Contoh: $x^2 - 2x + 4 < 7$

3) *Pertidaksamaan pecahan*, yaitu suatu pertidaksamaan yang mempunyai bentuk pecahan dan mengandung variabel x pada penyebutnya.

   Contoh: $\frac{2x+3}{1-2x} > 0$

4) *Pertidaksamaan nilai mutlak (harga mutlak)*, yaitu suatu pertidaksamaan yang mempunyai tanda mutlak. Pada pertidaksamaan nilai mutlak berlaku:

   $|x| > 0$ sama artinya $-a < x < a$.

   $|x| < 0$ sama artinya $x < -a$ atau $x > a$.

5) *Pertidaksamaan bentuk akar*, yaitu pertidaksamaan yang variabelnya terletak di bawah tanda akar. Cara penyelesaiannya diawali dengan menguadratkan kedua ruas.

   Contoh: $\sqrt{x-1} < 0$

Pelajaran 5

Logika Matematika

Kelas X Semester 2

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
Menggunakan logika matematika dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor.	• Memahami pernyataan dalam matematika dan ingkaran atau negasinya. • Menentukan nilai kebenaran dari suatu pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor. • Merumuskan pernyataan yang setara dengan pernyataan majemuk atau pernyataan berkuantor yang diberikan. • Menggunakan prinsip logika matematika yang berkaitan dengan pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor dalam penarikan kesimpulan dan pemecahan masalah

A. Kalimat Terbuka, Pernyataan, dan Negasinya

Kalimat terbuka adalah suatu kalimat yang memuat variabel, nilai kebenarannya belum dapat ditentukan, apakah bernilai benar atau salah.

Pernyataan adalah suatu kalimat yang dapat ditentukan nilai kebenarannya, yaitu benar atau salah, tetapi tidak dapat terjadi benar dan salah bersamaan.

Ingkaran pernyataan (negasi penyataan) adalah kebalikan dari penyataan. Jika pernyataan benar, ingkarannya salah, dan sebaliknya.

> Ingkaran dari ***p*** dinotasikan dengan **~*p***, dibaca: *tidak p* atau *bukan p* atau *tidak benar* bahwa *p* atau *non-p*.

Contoh:

p = Bandung adalah ibu kota Provinsi Jawa Barat. (**benar/B**)

Ingkarannya:

$\sim p$ = Bandung *bukan* ibu kota Provinsi Jawa Barat. (**salah/S**)

$\sim p$ = *Tidak benar* bahwa Bandung adalah ibu kota Provinsi Jawa Barat. (**salah/S**)

Penyataan Majemuk

Pernyataan majemuk adalah penyataan yang terdiri dari dua pernyataan atau lebih dapat dihubungkan dengan kata hubung, yaitu: ... *dan* ... , ... *atau* ... , *jika* ... *maka* ..., dan ... *jika dan hanya jika* ... .

Contoh: Hari ini mendung *atau* langit berwarna biru.

Jenis-Jenis Kalimat Majemuk

Ada empat pernyataan majemuk, yaitu:

1) *Konjungsi*, yaitu gabungan antara dua pernyataan dengan memakai kata hubung "*dan*", dinotasikan:

   $p \wedge q$ dibaca: ***p* dan *q***

   Tabel kebenaran konjungsi:

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

2) *Disjungsi*, yaitu gabungan antara dua pernyataan dengan memakai kata hubung "*atau*", dinotasikan:

   $p \vee q$ dibaca: ***p* atau *q***.

   Tabel kebenaran disjungsi:

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

3) *Implikasi*, yaitu gabungan antara dua pernyataan dengan memakai kata hubung "*jika ... maka ...*", dinotasikan:

   $p \rightarrow q$ dibaca: jika *p* maka *q*,
   p hanya jika *q*,*p* syarat cukup untuk *q*,
   q syarat perlu untuk *p*, atau *q* jika *p*

   Tabel kebenaran implikasi:

p	q	$p \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

4) *Biimplikasi*, dibentuk dari $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, dinotasikan:

   $p \Leftrightarrow q$
   dibaca: *p* jika dan hanya jika *q*,
   p syarat cukup dan perlu untuk *q*,
   p ekuivalen dengan *q*

   Tabel kebenaran biimplikasi:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B	B	B
B	S	S	B	S
S	B	B	S	S
S	S	B	B	B

B. Ingkaran Pernyataan Majemuk

Ingkaran pernyataan majemuk terbagi atas.

1) Ingkaran dari konjungsi, berlaku:
   $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
2) Ingkaran dari disjungsi, berlaku:
   $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \vee \sim q$
3) Ingkaran dari implikasi, berlaku:
   $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
4) Ingkaran dari biimplikasi, berlaku:
   $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

C. Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Dari implikasi $p \Rightarrow q$ dapat dibentuk implikasi baru, yaitu:

- Konvers: $q \Rightarrow p$
- Invers: $\sim p \Rightarrow \sim q$ dan
- Kontraposisi: $\sim q \Rightarrow \sim p$

D. Pernyataan Berkuantor dan Ingkarannya

Pernyataan berkuantor terdiri atas:

1) Pernyataan berkuantor universal, dinotasikan:

$\forall p(x)$ (dibaca: "Untuk semua x, berlaku-lah $p(x)$")

Ingkarannya:

$\sim$("$\forall$ $p(x)) \equiv \exists x \sim p(x)$ (dibaca: "ingkaran untuk semua x yang berlaku $p(x)$ adalah ada x yang bukan $p(x)$").

2) Pernyataan berkuantor eksistensial, dinotasi-kan:

$\exists(x)\ p(x)$
(dibaca: "Ada x sehingga berlaku $p(x)$")

Ingkarannya:

$\sim(\exists x\ p(x)) \equiv \forall x \sim p(x)$ (dibaca: "ingkaran beberapa x berlaku $p(x)$ adalah semua x bukan $p(x)$").

E. Penarikan Kesimpulan

Penarikan kesimpulan terbagi atas:

1) Penarikan kesimpulan dari pernyataan majemuk, dengan aturan:

a) *Modus Ponens*, berlaku:

Jika $p \Rightarrow q$ benar dan p benar maka pernyataan q bernilai benar.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

b) *Aturan Tollens*, berlaku:

Jika $p \Rightarrow q$ benar dan $\sim q$ benar maka pernyataan $\sim p$ bernilai benar.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \sim p \\ \hline \therefore\ \sim q \end{array}$$

c) *Silogisme*, berlaku:

Jika $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow r$ keduanya benar maka $p \Rightarrow r$ juga benar.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore\ p \Rightarrow r \end{array}$$

2) Penarikan kesimpulan dari pernyataan ber-kuantor

Contoh:

$p(x)$: Jika suatu segitiga merupakan segitiga sama kaki maka mempunyai dua sudut sama besar.

$\equiv$ Setiap segitiga sama kaki mempunyai dua sudut sama besar.

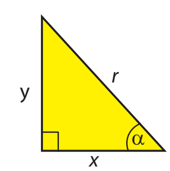
Pelajaran 6
Trigonometri

Kelas X Semester 2

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
Menggunakan perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri dalam pemecahan masalah .	• Melakukan manipulasi aljabar dalam perhitungan teknis yang berkaitan dengan perbandingan, fungsi, persamaan dan identitas trigonometri. • Merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan perbandingan, fungsi, persamaan dan identitas trigonometri. • Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan perbandingan, fungsi, persamaan dan identitas trigonometri, dan penafsirannya.

A. Perbandingan Trigonometri

Rumus-rumus perbandingan trigonometri



1) $\sin \alpha = \dfrac{\text{panjang sisi depan}}{\text{panjang sisi miring}} = \dfrac{y}{r}$

$\cos \alpha = \dfrac{\text{panjang sisi apit}}{\text{panjang sisi miring}} = \dfrac{x}{r}$

$\tan \alpha = \dfrac{\text{panjang sisi depan}}{\text{panjang sisi apit}} = \dfrac{y}{x}$

2) $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$; $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\sin \alpha}$;

$\text{cotan } \alpha = \dfrac{1}{\tan \alpha}$; $\text{cosec } \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$;

Perbandingan trigonometri sudut α dengan $(90° - \alpha)$

3) $\sin (90° - \alpha) = \cos \alpha$

$\cos (90° - \alpha) = \sin \alpha$

$\tan (90° - \alpha) = \text{cotan } \alpha$

$\text{cotan } (90° - \alpha) = \tan \alpha$

$\text{cosec } (90° - \alpha) = \sec \alpha$

$\sec (90° - \alpha) = \text{cosec } \alpha$

Perbandingan trigonometri sudut α dengan $(180° - \alpha)$

4) $\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha$

$\cos (180° - \alpha) = -\cos \alpha$

$\tan (180° - \alpha) = -\tan \alpha$

$\text{cotan } (180° - \alpha) = -\text{cotan } \alpha$

$\text{cosec } (180° - \alpha) = \sec \alpha$

$\sec (180° - \alpha) = \text{-cot } \alpha$

Perbandingan trigonometri sudut α dengan (180°+ α)

5) $\sin (180° + \alpha) = -\sin \alpha$

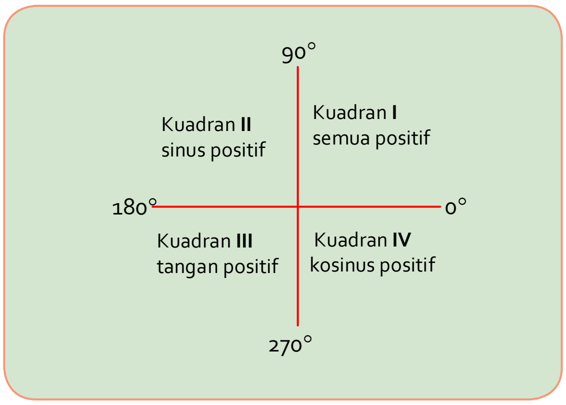
$\cos (180° + \alpha) = -\cos \alpha$

$\tan (180° + \alpha) = \tan \alpha$

$\cot (180° + \alpha) = \cot \alpha$ (cotan)

$\csc (180° + \alpha) = -\csc \alpha$ (cosec)

$\sec (180° + \alpha) = -\sec \alpha$



B. Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri dapat berbentuk sebagai berikut.

1) $f(x) = a \sin (kx + b)$

Periode = $\dfrac{360°}{|k|} = \dfrac{2p}{|k|}$

Nilai maksimum = $|a|$ Nilai minimum = $-|a|$

2) $f(x) = a \cos (kx + b)$

Periode = $\dfrac{360°}{|k|} = \dfrac{2p}{|k|}$

Nilai maksimum = $|a|$ Nilai minimum = $-|a|$

3) $f(x) = a \tan (kx + b)$

Periode = $\dfrac{180°}{|k|} = \dfrac{p}{|k|}$

Tidak ada nilai maksimum dan minimum.

C. Identitas Trigonometri

Contoh identitas trigonometri:

1) $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$
2) $1 + \tan^2 a = \sec^2 a$

D. Persamaan Trigonometri

Untuk $k \in B$ (B = himpunan bilangan bulat), diperoleh persamaan sebagai berikut.

1) Jika $\sin x = \sin a$, maka:

$x_1 = a + k . 360°$ $\quad x_2 = (180° - a) + k . 360°$

2) Jika $\cos x = \cos a$, maka:

$x_1 = a + k . 360°$ $\quad x_2 = -a + k . 360°$

3) Jika $\tan x = \tan a$, maka:

$x = a + k . 180°$

4) Jika $\text{cotan}\ x = \text{cotan}\ a$, maka:

$x = a + k . 180°$

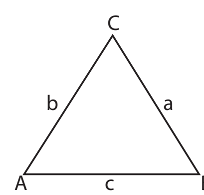
E. Aturan Sinus, Aturan Kosinus, dan Rumus Segitiga

Aturan sinus:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Aturan kosinus:

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$



Luas segitiga:

$L_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} b.c \sin A$ $\qquad L_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B$

$L_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a.b \sin C$

Pelajaran 7

Ruang Dimensi Tiga

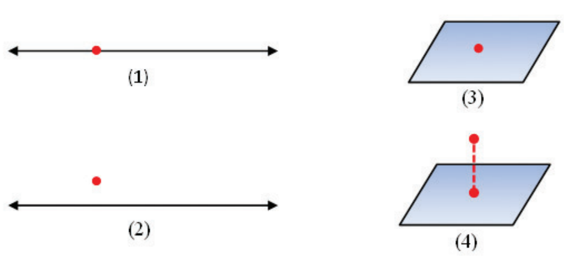
Kelas X Semester 2

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
Menentukan kedudukan, jarak, dan besar sudut yang melibatkan titik, garis, dan bidang dalam ruang dimensi tiga.	• Menentukan kedudukan titik, garis, dan bidang dalam ruang dimensi tiga. • Menentukan jarak dari titik ke garis dan dari titik ke bidang dalam ruang dimensi tiga. • Menentukan besar sudut antara garis dan bidang dan antara dua bidang dalam ruang dimensi tiga.

A. Kedudukan Titik, Garis, dan Bidang pada Bangun Ruang

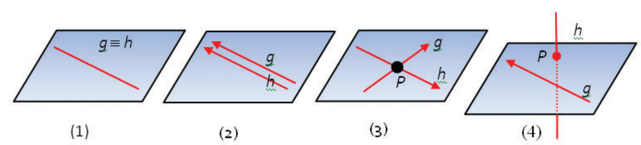
Kedudukan titik dibedakan atas:

1) Titik terletak pada garis
2) Titik terletak di luar garis
3) Titik terletak pada bidang
4) Titik terletak di luar bidang



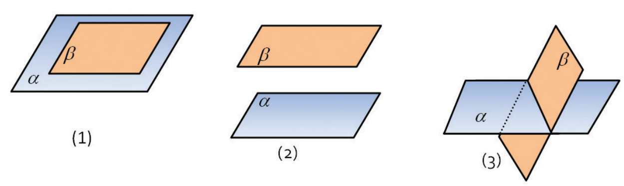
Kedudukan suatu garis terhadap garis lain (dua garis) dibedakan atas:

1) Berimpit 3) berpotongan
2) Sejajar 4) bersilangan



Kedudukan suatu bidang terhadap bidang lain (dua bidang) dibedakan atas:

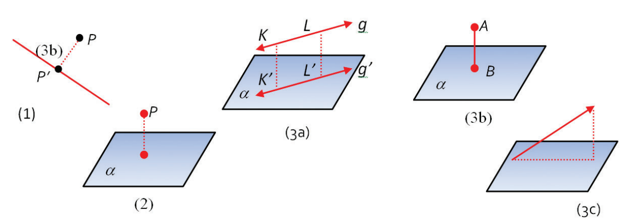
1) Berimpit
2) Sejajar
3) Berpotongan



B. Proyeksi Ruang

Proyeksi ruang meliputi:

1) Proyeksi titik pada garis.
2) Proyeksi titik pada bidang.
3) Proyeksi garis pada bidang.



Pelajaran 8

Statistika dan Peluang

Kelas XI Semester 1

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
Menentukan kedudukan, jarak, dan besar sudut yang melibatkan titik, garis, dan bidang dalam ruang dimensi tiga.	• Membaca data dalam bentuk tabel dan diagram batang, garis, lingkaran, dan ogive. • Menyajikan data dalam bentuk tabel dan diagram batang, garis, lingkaran, dan ogive serta penafsirannya. • Menghitung ukuran pemusatan, ukuran letak, dan ukuran penyebaran data, serta penafsirannya. • Menggunakan aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi dalam pemecahan masalah. • Menentukan ruang sampel suatu percobaan. • Menentukan peluang suatu kejadian dan penafsirannya.

A. Statistika

Perbedaan Pengertian Statistik dengan Statistika

Statistik merupakan kumpulan angka-angka dari suatu permasalahan, sehingga dapat memberikan gambaran mengenai masalah tersebut. Sedangkan *statistika* adalah cara ilmiah yang mempelajari pengumpulan, pengaturan, perhitungan, penggambaran, dan penganalisisan data, serta penarikan kesimpulan yang valid berdasarkan penganalisisan yang dilakukan, dan pembuatan kesimpulan yang rasional.

Penyajian Data Tunggal

Penyajian data dapat berupa:

1) *Diagram batang*, yaitu penyajian data dengan menggunakan batang-batang berbentuk persegi panjang dengan lebar batang yang sama dan dilengkapi dengan skala tertentu untuk menyatakan banyaknya tiap jenis data.
2) *Diagram lingkaran*, yaitu penyajian data statistik dengan menggunakan gambar yang berbentuk lingkaran, yang dibagi atas juring-juring.
3) *Diagram garis*, yaitu penyajian data pada bidang Cartesius dengan menghubungkan titik-titik data pada bidang Cartesius (sumbu x dan sumbu y), sehingga diperoleh suatu grafik berupa garis.
4) *Diagram Batang daun*, yaitu penyajian data yang dibagi atas dua bagian, yaitu bagian batang dan

daun. Bagian batang memuat angka puluhan, sedangkan bagian daun memuat angka satuan.

5) *Diagram kotak garis*, yaitu penyajian data dalam bentuk kotak garis.

Penyajian Data Berkelompok

Apabila data cukup banyak maka data dikelompokkan dalam beberapa kelompok, kemudian data tersebut disajikan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi.

Langkah-langkah membuat tabel distribusi frekuensi adalah sebagai berikut.

1) Urutkan data dari data terkecil ke data terbesar.
2) Tentukan banyak kelas pada tabel distribusi frekuensi, dengan menggunakan metode Sturges:

$$k = 1 + 3{,}3 \log n$$

Keterangan:

k = banyak kelas $\quad$ n = banyak data

3) Tentukan interval kelas dengan rumus:

$$I = \frac{R}{k}$$

Keterangan:

I = interval kelas $\quad$ k = banyak kelas

R = range = jangkauan = data tertinggi – data terendah

4) Tentukan batas atas kelas (*Ba*) dan batas bawah kelas (*Bb*).

Tabel distribusi frekuensi dapat dibedakan atas:

1) *Tabel distribusi frekuensi relatif*: mempunyai frekuensi relatif dalam bentuk persentase (%). Besarnya frekuensi relatif dapat ditentukan dengan rumus:

Fungsi relatif kelas ke-k =

$$\frac{\text{frekuensi kelas ke-}k}{\text{banyak data}} \times 100\%$$

2) Tabel distribusi frekuensi kumulatif, merupakan tabel frekuensi yang berisikan frekuensi kumulatif (frekuensi hasil akumulasi). Frekuensi kumulatif adalah frekuensi yang dijumlahkan, yaitu frekuensi suatu kelas dijumlahkan dengan frekuensi kelas sebelumnya.

Ukuran Data Statistik

a. Ukuran Pemusatan Data (Ukuran Tendensi Sentral)

Ada tiga macam ukuran tendensi sentral, yaitu:

a) *Rata-rata* atau *mean* ($\bar{x}$), yaitu jumlah seluruh nilai-nilai data dibagi dengan banyaknya data.

1) *Rata-rata untuk data tunggal (tidak berkelompok)*, rumusnya:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

2) *Rata-rata untuk data berkelompok*, rumusnya:

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \dots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

3) *Rata-rata sesungguhnya*, rumusnya:

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

4) *Rata-rata sesungguhnya dengan memfaktorkan interval kelasnya*, rumusnya:

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \right) I$$

Keterangan:

$\overline{x}$ *(eksbar)* = rata-rata data
n = jumlah semua bobot data
$\overline{x}_0$ = rata-rata sementara
f_i = bobot untuk nilai-nilai x_i
x_i = nilai data ke-*l*
l = interval kelas
$u = \frac{d}{l}$ = faktor interval

b) *Median* (*Md*), yaitu nilai yang terletak di tengah deretan data setelah diurutkan dari yang terkecil.

Rumus median untuk data berkelompok:

$$Md = Tb + \left(\frac{\frac{1}{2}n - fk}{f} \right) l$$

Keterangan:
Md = median
Tb = tepi bawah kelas
fk = frekuensi kumulatif

c) *Modus* (*Mo*), yaitu data yang paling sering muncul atau yang mempunyai frekuensi terbanyak.

Rumus modus data kelompok adalah

$$Mo = Tb + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) l$$

Keterangan:
Mo = modus
d_1 = selisih antara frekuensi kelas modus dengan frekuensi kelas sebelumnya
d_2 = selisih antara frekuensi kelas modus dengan frekuensi kelas sesudahnya

b. Ukuran Letak

Ukuran letak suatu data dapat dinyatakan dalam bentuk *fraktil*.

Fraktil adalah nilai-nilai yang membagi seperangkat data yang telah berurutan menjadi beberapa bagian yang sama, yaitu:

a) *Kuartil*, yaitu ukuran letak yang membagi sekumpulan data tersebut menjadi 4 bagian yang sama.

Kuartil terbagi atas:

- Kuartil bawah (Q_1), terletak pada data urutan ke-¼ (*n* + 1)
- Kuartil tengah (Q_2), terletak pada data urutan ke-½ (*n* + 1)
- Kuartil atas (Q_3), terletak pada data urutan ke-¾ (*n* + 1)

Rumus kuartil untuk data berkelompok:

$$Q_j = Tb_{Q_j} + \left(\frac{\frac{j}{4}n - fk_{Q_j}}{f_{Q_j}} \right) l$$

Keterangan:
Q_j = kuartil ke-*j* (*j* = 1, 2, 3)
Tb_{Qi} = tepi bawah kelas yang memuat Q_j
n = jumlah seluruh frekuensi
fk_{Qi} = frekuensi kumulatif kurang dari di bawah kelas yang memuat Q_j
f_{Qi} = frekuensi kelas yang memuat Q_j
l = lebar atau panjang kelas (interval kelas)

b) *Desil*, yaitu ukuran letak yang membagi sekumpulan data menjadi 10 bagian. Rumus desil untuk data berkelompok:

$$D_j = Tb_{D_j} + \left(\frac{\frac{j}{10}n - fk_{D_j}}{f_{D_j}} \right) l$$

Keterangan:
D_j = desil ke-*j* (*j* = 1, 2, 3, …, 9)
Tb_{Di} = tepi bawah kelas yang memuat D_j
n = jumlah seluruh frekuensi
fk_{Di} = frekuensi kumulatif kurang dari di bawah kelas yang memuat D_j
f_{Di} = frekuensi kelas yang memuat D_j
l = lebar atau panjang kelas (interval kelas)

c) *Persentil*, yaitu ukuran letak yang membagi sekumpulan data menjadi 100 bagian. Rumus kuartil untuk data berkelompok:

$$P_j = Tb_{P_j} + \left(\frac{\frac{j}{4}n - fk_{P_j}}{f_{P_j}} \right) l$$

Keterangan:

P_j = kuartil ke-j (j = 1, 2, 3, …, 99)
Tb_{P_j} = tepi bawah kelas yang memuat P_j
n = jumlah seluruh frekuensi
fk_{P_j} = frekuensi kumulatif kurang dari di bawah kelas yang memuat P_j
f_{P_j} = frekuensi kelas yang memuat P_j
l = lebar atau panjang kelas (interval kelas)

c. Ukuran Penyebaran Data (Dispersi)

Ukuran penyebaran data terbagi atas:

a) jangkauan atau range (R), berlaku:

$$R = X_{\text{maks}} - X_{\text{min}}$$

b) simpangan rata-rata atau deviasi rata-rata (SR), rumusnya:

$$SR = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n} \quad \text{atau} \quad R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \overline{x}|$$

c) simpangan baku/standar deviasi/deviasi standar (SD), rumusnya:

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}} \quad \text{jika } n > 30$$

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \quad \text{jika } n \leq 30$$

d) simpangan kuartil atau jangkauan semi interkuartil (Q_d), rumusnya:

$$Q_d = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$$

Keterangan:

Q_d = simpangan kuartil
Q_3 = simpangan atas
Q_1 = simpangan bawah

B. Peluang

Permutasi

Permutasi adalah urutan yang mungkin dari sejumlah unsur yang berbeda tanpa adanya pengulangan. Rumusnya:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{atau} \quad {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Di mana $k \leq n$

Permutasi terbagi atas:

1) Permutasi dengan beberapa objek sama, berlaku:
   a) Banyaknya permutasi dari n objek dengan r objek sama ($r < n$) adalah

   $${}_nP_r = \frac{n!}{r!}$$

   b) Banyaknya permutasi dari n objek, di mana ada beberapa objek sama, misalnya ada m_1 objek yang sama, ada m_2 objek yang sama serta m_3 objek yang sama, dan seterusnya adalah

   $${}_nP_{m_1, m_2, m_3, \ldots} = \frac{n!}{m_1!\ m_2!\ m_3!\ \ldots}$$

2) Permutasi siklis, berlaku:
   Banyaknya permutasi siklis dari n objek = (n – 1)!

Kombinasi

Banyaknya kombinasi r objek dari n objek ditulis dengan ${}_nC_r$ atau C_r^n adalah

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Peluang Suatu Kejadian

Peluang (P) merupakan ukuran mengenai kemungkinan suatu kejadian tertentu akan terjadi dalam suatu *percobaan*. Jika hasil suatu percobaan yang mungkin itu dihimpun dalam suatu himpunan maka himpunan itu disebut *ruang sampel* yang dilambangkan dengan S.

Peluang P untuk terjadinya suatu kejadian E adalah

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Keterangan:

$P(E)$ = peluang kejadian yang diharapkan sukses
$n(E)$ = banyaknya anggota kejadian E
$n(S)$ = banyaknya anggota ruang sampel (banyaknya kejadian yang mungkin terjadi)

Peluang komplemen suatu kejadian berlaku:

$$P(E^C) = 1 - P(E)$$

Keterangan:

$P(E^C)$ = peluang komplemen suatu kejadian
$P(E)$ = peluang yang diharapkan sukses

Frekuensi Harapan

Jika suatu percobaan dilakukan n kali maka peluang kejadian yang diharapkan adalah $P(E)$. Perkalian antara berapa kali percobaan dilakukan dengan peluang kejadian itu dinamakan *frekuensi harapan* (f_h), ditulis dengan:

$$f_h(E) = n \times P(E)$$

Keterangan:

$f_h(E)$ = frekuensi harapan
$P(E)$ = peluang kejadian E n = banyak kejadian

Kejadian Majemuk

Pada kejadian majemuk berlaku:

Peluang kejadian saling asing atau kejadian saling lepas:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Untuk peluang kejadian sembarang A dan B berlaku:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Pada kejadian A dan B *saling bebas*, kejadian A tidak memengaruhi kejadian B atau kejadian B tidak memengaruhi kejadian A, sehingga berlaku:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dua buah kejadian disebut *kejadian tidak saling bebas* berlaku:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

Peluang bersyarat $P(B|A)$ artinya peluang terjadinya B setelah A terjadi

Pelajaran 9

Kompisisi Dua Fungsi dan Invers

Kelas XI Semester 2

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
Menentukan komposisi dua fungsi dan invers suatu fungsi.	• Menentukan komposisi fungsi dari dua fungsi. • Menentukan invers suatu fungsi.

A. Pengertian Relasi dan Fungsi

1. Produk Cartesius

Jika terdapat himpunan *P* dan *Q* yang tidak kosong, produk cartesius dari himpunan P dan Q adalah himpunan pasangan terurut *(x, y)* dengan x ∈ P, y ∈ Q, ditulis sebagai berikut.

$$P \times Q = \{(x, y) \mid x \in P \text{ dan } y \in Q\}$$

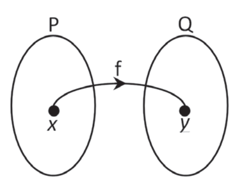
2. Relasi

Relasi atau hubungan R dari himpunan P ke himpunan Q adalah sembarang himpunan bagian dari produk cartesius P × Q dengan x ∈ P, y ∈ Q, ditulis sebagai berikut:

$$R = \{(x, y) \mid x \in P \text{ dan } y \in Q\}$$

3) Fungsi

Suatu fungsi f atau pemetaan f dari himpunan P ke himpunan Q adalah suatu relasi khusus yang memetakan setiap elemen dari P (domain) dengan tepat satu elemen dari Q (kodomain).



Jika f memetakan suatu elemen x ∈ P ke suatu elemen y ∈ Q, fungsi f dari A ke B dapat ditulis y = f(x) dengan x sebagai peubah bebas dan y sebagai peubah terikat.

Daerah asal (domain) fungsi y = f(x) adalah nilai-nilai x supaya y = f(x) ada nilainya (terdefinisi).

Syarat agar suatu fungsi terdefinisi :

* $y = \sqrt{f(x)} \rightarrow \text{syarat } f(x) \geq 0$
* $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \rightarrow g(x) \neq 0$
* $y = {}^{f(x)}\log(x)$
  $\rightarrow \text{syarat } g(x) > 0 \text{ dan } f(x) > 0, f(x) \neq 1$

Daerah hasil (*range*) fungsi *y = f(x)* adalah nilai-nilai y yang dipengaruhi oleh domain fungsi (D_f).

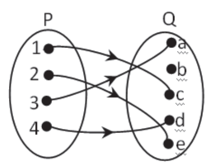
Menentukan range (daerah hasil) dari fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ adalah sebagai berikut.

✸ Untuk $D_f = \{x \mid x \in R\}$
- Jika $a > 0$, daerah hasilnya $R_f = \{y \mid y \geq y_e, y \in R\}$
- Jika $a < 0$, daerah hasilnya $R_f = \{y \mid y \leq y_e, y \in R\}$ dengan $y_e = -\left(\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

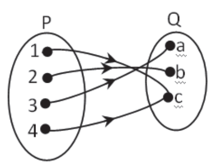
- Untuk $D_f = \{x \mid p \leq x \leq q, x \in R\}$
  - Jika absis titik puncaknya $\left(x_e = -\dfrac{b}{2a}\right)$ di dalam interval domain, tentukan $f(x_e)$, $f(p)$, dan $f(q)$, sehingga: $R_f = \{y \mid f_{min} \leq y \leq f_{maks}, y \in R\}$
  - Jika absis titik puncaknya (x_e) di luar interval domain, tentukan $f(p)$, dan $f(q)$, sehingga: $R_f = \{y \mid f_{min} \leq y \leq f_{maks}, y \in R\}$.

B. Sifat-sifat Fungsi

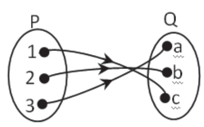
- Fungsi dari himpunan P ke Q disebut satu-satu (one-one / injektif) jika setiap elemen dari P hanya mempunyai satu peta di Q dan tidak harus semua elemen dari Q terpetakan dari P.



- Fungsi dari himpunan P ke himpunan Q disebut pada (onto / surjektif) jika setiap elemen dari himpunan Q habis terpetakan (mempunyai minimal satu pasangan dengan elemen himpunan P).



- Fungsi dari himpunan P ke himpunan Q disebut korespondensi satu-satu (one-one onto / bijektif) jika fungsi itu injektif dan onto).



C. Aljabar Fungsi

Jika *f* dan *g* adalah dua fungsi yang diketahui, maka fungsi yang merupakan jumlah, selisih, hasil kali, dan hasil bagi kedua fungsi tersebut masing-masing sebagai berikut.

* $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, dengan $D_{(f+g)} = D_f \cap D_g$
* $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, dengan $D_{(f-g)} = D_f \cap D_g$
* $(f.g)(x) = f(x).g(x)$, dengan $D_{(f.g)} = D_f \cap D_g$
* $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, dengan $D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = D_f \cap D_g$ dan $g(x) \neq 0$

D. Komposisi Fungsi

Jika fungsi *f*: A $\to$ B dan fungsi *g*: B $\to$ C, fungsi *h*: A $\to$ C disebut fungsi komposisi yang ditentukan oleh rumus sebagai berikut.

$$h = g_o f = g_o f(x) = g_o\{f(x)\} = (g_o f)(x)$$

- Syarat agar fungsi *g* dan fungsi *f* dapat dikomposisikan menjadi $(g_o f)$ adalah sebagai berikut.
  - Irisan antara daerah hasil fungsi dengan daerah asal fungsi *g* bukan himpunan kosong.
    $(R_f \cap R_g) \neq 0$
  - Daerah asal fungsi komposisi $(g_o f)$ adalah himpunan bagian dari daerah asal fungsi *f*.
    $D_{(g_o f)} \subseteq D_f$
  - Daerah hasil fungsi komposisi $(g_o f)$ adalah himpunan bagian dari daerah hasil fungsi *g*.
    $R_{(g_o f)} \subseteq R_f$
- Sifat fungsi komposisi: tidak komutatif
  $g_o f(x) \neq f_o g(x)$.

E. Fungsi Invers

- Tidak semua fungsi invers merupakan fungsi invers dan invers fungsi yang merupakan fungsi disebut fungsi invers.
- Suatu fungsi f : A → B mempunyai fungsi invers f^{1} : B → A jika semua elemen himpunan A dan elemen himpunan B berkorespondensi satu-satu.
- Notasi fungsi invers adalah jika $f(x) = y$, $f^{1}(y) = x$ atau $y^{-1} = f^{1}(x)$.
- Langkah menentukan fungsi invers dari $y = f(x)$ adalah:
  - Mengubah fungsi $y = f(x)$ dalam bentuk *x* sebagai fungsi *y*.
  - Mengganti *y* pada $f^{1}(y)$ dengan *x* untuk mendapatkan $f^{1}(x)$.
- Sifat komposisi fungsi invers : $f^{-1}{}_o\, g^{-1} = (g_o f)^{-1}$

F. Hubungan komposisi dan invers

Jika $(g \circ f)(x) = h(x)$, maka diperoleh:

1. $h^{-1}(x) = (g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x))$
2. $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x))$
3. $g(x) = (h \circ f^{-1})(x)$
4. $f(x) = (g^{-1} \circ h)(x)$

G. Rumus-rumus

1. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
2. $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
3. $\left(\frac{f}{x}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dengan $g(x) \neq 0$
4. $f^n(x) = \{f(x)\}^n$
5. $f(x) = ax^n + b \rightarrow f^{-1}(x) = \left(\frac{x-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$
6. $f(x) = \sqrt[n]{ax+b} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^n - b}{a}$
7. $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a};\ x \neq \frac{a}{c}$

Pelajaran 10

Limit Fungsi

Kelas XI Semester 2

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
Menggunakan konsep limit fungsi dan turunan fungsi dalam pemecahan masalah.	• Menghitung limit fungsi aljabar sederhana di suatu titik. • Menggunakan sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar. • Menggunakan sifat dan aturan turunan dalam perhitungan turunan fungsi aljabar. • Menggunakan turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi aljabar dan memecahkan masalah. • Merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan ekstrem fungsi aljabar. • Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan ekstrem fungsi aljabar dan penafsirannya.

A. Pengertian Limit

1. Limit suatu fungsi *f(x)* untuk *x* mendekati nilai *a* adalah harga yang paling dekat dari *f(x)* pada saat *x* mendekati nilai *a*.
2. Jika $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, artinya *L* adalah nilai pendekatan untuk *x* di sekitar *a*.

B. Teorema Limit

1. Jika *f(x)* = *x*, maka $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$
2. Jika *c* konstanta, maka $\lim\limits_{x \to a} c.f(x) = c.\lim\limits_{x \to a} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$
4. $\lim\limits_{x \to a} \{f(x).g(x)\} = \lim\limits_{x \to a} f(x).\lim\limits_{x \to a} g(x)$
5. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, untuk $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$
6. $\lim\limits_{x \to a} f^n(x) = \lim\limits_{x \to a} \{f(x)\}^n = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)^n$,

   untuk *n* bilangan asli

C. Limit Fungsi Aljabar

Langkah umum penyelesaian limit fungsi aljabar $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ adalah sebagai berikut.

1. Substitusi nilai $x = a$ ke *f(x)*.
2. Jika hasilnya bentuk tak tentu $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty, -\infty\right)$, *f(x)* harus diuraikan.
3. Jika hasilnya bentuk tertentu, itulah nilai limitnya.

D. Jenis Limit untuk $x \to c$

1. Jika $x \to c$ dan c adalah konstanta, fungsi $f(x)$ diuraikan dengan cara faktorisasi.
2. Untuk fungsi $f(x)$ yang mengandung bentuk akar, kalikan dengan sekawannya terlebih dahulu, baru masukkan nilai limitnya.

E. Jika $x \to \infty$ dan hasilnya $\frac{\infty}{\infty}$ atau $\frac{0}{0}$,

fungsi $f(x)$ diuraikan dengan cara membagi pembilang dan penyebut dengan x pangkat tertinggi.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_1x^m + a_2x^{m-1} + \ldots}{b_1x^n + b_2x^{n-1} + \ldots} = \begin{cases} \infty, \text{ untuk } m > n \\ \frac{a_1}{b_1}, \text{ untuk } m = n \\ 0, \text{ untuk } m < n \end{cases}$$

F. Jika $x \to \infty$ dengan hasil $\infty - \infty$,

fungsi $f(x)$ diuraikan dengan cara dikali sekawan untuk fungsi yang mengandung bentuk akar, kemudian membagi pembilang dan penyebut dengan x pangkat tertinggi.

Rumus jumlah dan selisih akar

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}\right) = \begin{cases} \infty, \text{ untuk } a>c \\ 0, \text{ untuk } a=c \\ -\infty, \text{ untuk } a<c \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{ax+b} - \sqrt{cx+d}\right) = \begin{cases} \infty, \text{ untuk } a>c \\ 0, \text{ untuk } a=c \\ -\infty, \text{ untuk } a<c \end{cases}$$

Rumus selisih akar kuadrat

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{px^2+qx+r}\right) = \begin{cases} \infty, \text{ untuk } a>p \\ \frac{b-q}{2\sqrt{a}}, \text{ untuk } a=p \\ -\infty, \text{ untuk } a<p \end{cases}$$

Pelajaran 11

Integral

Kelas XII Semester 1

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
Menggunakan konsep integral dalam pemecahan masalah sederhana.	• Memahami konsep integral tak tentu dan integral tentu. • Menghitung integral tak tentu dan integral tentu dari fungsi aljabar sederhana. • Menggunakan integral untuk menghitung luas daerah di bawah kurva.

A. Integral Tak Tentu

1. $\int dx = x + c$
2. $\int df(x) = f(x) + c$
3. $\int a dx = ax + c$
4. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$ dengan $n \neq 1$
5. $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c$ dengan $n \neq -1$
6. $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$ dengan $a \neq 0$

B. Sifat-Sifat Integral

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

C. Penerapan Integral Tentu

1. $S = \int v \, dt$
2. $V = \int a \, dt$

D. Integral Tertentu

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$F(x) = \text{anti turunan } f(x)$

$a = \text{batas bawah}$

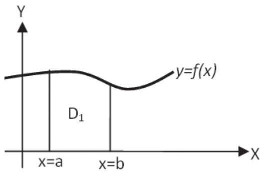
$b = \text{batas atas}$

E. Sifat-Sifat Integral Tertetu

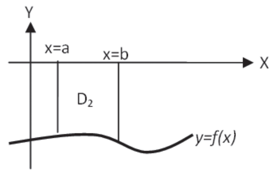
1. $\int_a^b k \, dx = k(b-a)$
2. $\int_a^a f(x) \, dx = 0$
3. $\int_a^b k f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
5. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

F. Luas Bidang Datar

1. Dibatasi Oleh Kurva dan Sumbu X

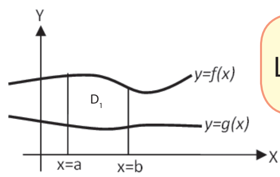


$$\text{Luas } D_1 = \int_a^b f(x)dx$$



$$\text{Luas } D_2 = -\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

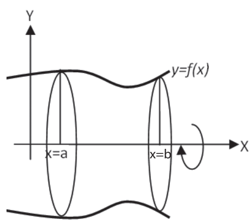
2. Luas Antara Dua Kurva



$$\text{Luas } D_1 = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

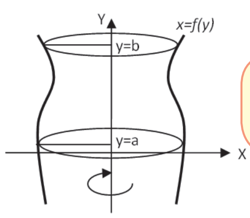
G. Volume Benda Putar

1. Mengelilingi Sumbu X



$$\text{Volume} = \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

2. Mengelilingi Sumbu Y



$$\text{Volume} = \pi \int_a^b [f(y)]^2 dy$$

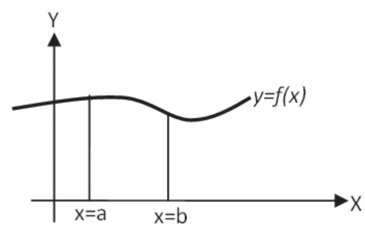
H. Integral Fungsi Trigonometri

1. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
2. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
3. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$
4. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + c$
5. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$
6. $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

I. Integral Substitusi Trigonometri

Fungsi Integral	Substitusi dengan	Hasil Substitusi
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \alpha$	$a \cos\alpha$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \alpha$	$a \sec \alpha$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \alpha$	$a \tan \alpha$

J. Panjang Busur



$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

Pelajaran 12

Program Linear

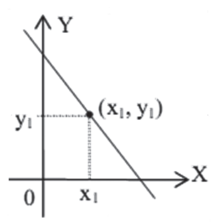
Kelas XII Semester 1

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
Menyelesaikan masalah program linear.	• Menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear dua variabel. • Merancang model matematika dari masalah program linear. • Menyelesaikan model matematika dari masalah program linear dan penafsirannya.

A. Persamaan garis lurus

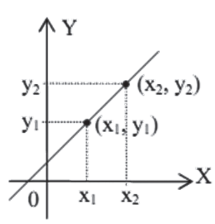
1. Persamaan garis yang bergradien *m* dan melalui titik (x_1, y_1) adalah:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



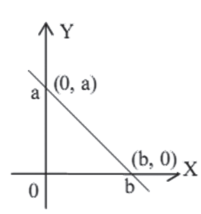
2. Persamaan garis yang melalui dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



3. Persamaan garis yang melalui titik (0, a) dan (b, 0) adalah:

$$ax + by = ab$$



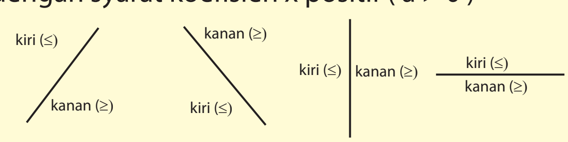
B. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan linear

Daerah penyelesaian dari masalah program linear, yaitu model matematika yang berbentuk pertidaksamaan linear $ax + by \leq ab$ atau $ax + by \geq ab$.

Daerah penyelesaian dapat ditentukan dengan cara:

1. Jika $ax + by \leq ab$ maka daerah penyelesaian berada di sebelah **kiri** garis, dengan syarat koefisien x positif ($a > 0$).
2. Jika $ax + by \geq ab$ maka daerah penyelesaian berada di sebelah **kanan** garis, dengan syarat koefisien x positif ($a > 0$).

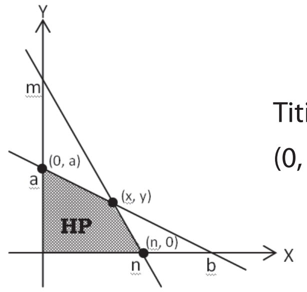
Letak kiri dan kanan daerah penyelesaian, dengan syarat koefisien x positif ($a > 0$)



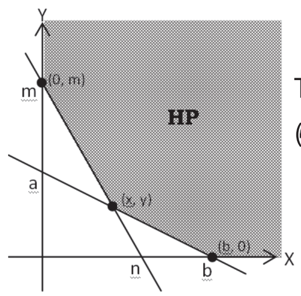
C. Fungsi Tujuan (Objektif /Sasaran), Nilai Maksimum, dan Nilai Minimum

1. Fungsi tujuan adalah nilai f untuk x dan y tertentu dari suatu program linear, dan dinyatakan f(x, y)
2. Nilai fungsi sasaran yang dikehendaki adalah kondisi x dan y yang menyebabkan maksimum atau minimum
3. Pada gambar HP program linear, titik-titik sudut merupakan titik-titik kritis, dimana nilai minimum atau maksimum berada. Apabila

sistem pertidaksamaannya terdiri dari dari dua pertidaksamaan, maka titik-titik kritisnya bisa ditentukan tanpa harus digambar grafiknya.



Titik kritis ada 3:
(0, a), (x, y), dan (n, 0)



Titik kritis ada 3 :
(0, m), (x, y), dan (b, 0)

Berdasarkan kedua grafik di atas dapat disimpulkan cara penentuan titik kritis sebagai berikut.

1. Pilih titik potong kurva dengan sumbu Y atau sumbu X yang **terkecil** (0, a) dan (q, 0) jika tujuannya **maksimumkan** atau yang **terbesar** (0, p), (b, 0) jika tujuannya **minimumkan**.
2. Titik potong antara kedua kurva (x, y)

Pelajaran 13 Matriks

Kelas XII Semester 1

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
Menggunakan matriks dalam pemecahan masalah.	• Menggunakan sifat-sifat dan operasi matriks untuk menunjukkan bahwa suatu matrik persegi merupakan invers dari matriks persegi lain. • Menentukan determinan dan invers matriks 2 x 2. • Menggunakan determinan dan invers dalam penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel.

1. Pengertian matriks

a) Matriks merupakan susunan kumpulan bilangan dalam bentuk persegi atau persegi panjang yang diatur menurut baris dan kolom;

b) Baris suatu matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang mendatar dalam matriks;

c) Kolom suatu matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang tegak dalam matriks.

2. Operasi hitung matriks

a) Penjumlahan atau pengurangan matriks

Matriks A dan B dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika ordo A = ordo B

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a+p & b+q & c+r \\ d+s & e+t & f+u \end{bmatrix}$$

1) Sifat penjumlahan matriks

Jika A, B, dan C matriks-matriks berordo sama, berlaku:

(a) Sifat Komutatif: A + B = B + A;

(b Sifat Asosiatif: (A + B) + C = A + (B + C);

(c) Terdapat matriks Identitas, yaitu matriks nol, sehingga: A + 0 = 0 + A = A;

(d) Setiap matriks A mempunyai invers penjumlahan yaitu matriks – A , sehingga:

A + (–A) = (–A) + A = 0

2) Pada pengurangan matriks bersifat:

(a) Tidak Komutatif

(b) Tidak Asosiatif

(c) Tidak terdapat unsur Identitas

b) Perkalian Matriks

Dua matriks A dan B dapat dikalikan bila banyak kolom matriks pertama (kiri) sama dengan banyak baris matriks kedua (kanan)

1) $A_{m\,x\,n} \cdot B_{n\,x\,k} = C_{m\,x\,k}$

2) $B_{n\,x\,k} \cdot A_{m\,x\,n}$ tidak dapat dikalikan

3. Transpos Matriks

Transpos matriks A (A^t) adalah sebuah matriks yang disusun dengan cara menuliskan baris ke-I matriks A menjadi kolom ke-I matriks A^t .

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

Beberapa sifat matriks transpos:

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(A^t)^t = A$

c) $(AB)^t = B^tA^t$

d) $(KA)^t = KA^t$, k merupakan konstanta

4. Determinan dan invers matriks

1) Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka determinan matriks A =

$$|A| = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

2) Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka invers matriks A =

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Apabila $|A| = 0$ $|A| = 0$, maka matriks A tidak mempunyai invers dan disebut matriks singular. Apabila $|A| \neq 0$ $|A| \neq 0$, maka matriks A mempunyai invers dan disebut matriks non singular.

3) Sifat-sifat invers matriks

(1) $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$

5. Penggunaan matriks dalam sistem persamaan linear

1) Cara Matriks

Jika persamaan $AX = B$, maka $X = A^{-1}\,B$

Jika persamaan $XA = B$, maka $X = B\,A^{-1}$

2) Cara determinan

$ax + by = p$

$cx + dy = q$

maka $x = \dfrac{Dx}{d}$ dan $y = \dfrac{Dy}{D}$

dengan

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},\quad Dx = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix},\quad Dy = \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}$$

Pelajaran 14

Barisan dan Deret

Kelas XII Semester 2

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
Menggunakan konsep barisan dan deret dalam pemecahan masalah.	• Menentukan suku ke-n barisan dan jumlah n suku deret aritmetika dan geometri. • Merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan deret. • Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan deret dan menafsirkan solusinya.

1. Barisan dan Deret Aritmatika

a. Bentuk umum barisan:

$$\begin{array}{cccccc} U_1, & U_2, & U_3, & U_4, & \ldots, & U_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a, & a+b, & a+2b, & a+3b, & \ldots, & a+(n-1)b \end{array}$$

b. Beda (selisih) = b

$b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3 = \ldots = U_n - U_{n-1}$

c. Suku ke-n (U_n)

$U_n = a + (n - 1)b$

$U_n = S_n - S_{n-1}$

d. Jumlah n suku pertama (S_n)

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_{n-1} + U_n$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) \quad \text{atau} \quad S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)b\}$$

e. Hubungan suku pertama (*a*), suku tengah (U_t), dan suku ke-n (U_n)

$$U_t = \frac{1}{2}(a + U_{2k-1}),$$

k letak suku tengah, banyaknya suku 2k – 1

$S_n = n \,.\, U_t$

f. Sisipan

$$b_{baru} = \frac{b}{k+1}$$

2. Barisan dan Deret Geometri

a. Bentuk umum barisan:

$$\begin{array}{ccccc} U_1, & U_2, & U_3, & U_4, \ldots, & U_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ r, & ar, & ar^2, & ar^3, \ldots, & ar^{n-1} \end{array}$$

b. Rasio (perbandingan) = r

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3} = \ldots = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

c. Suku ke-n (U_n)

$U_n = ar^{n-1}$

$U_n = S_n - S_{n-1}$

d. Jumlah n suku pertama (S_n)

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_{n-1} + U_n$

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r - 1}, r > 1 \text{ atau}$$

$$S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r}, r < 1$$

e. Hubungan suku pertama (a), suku tengah (U_t), dan suku ke-n (U_n)

$$U_t^2 = a.U_n$$

f. Sisipan

$$r_{baru} = \sqrt[k+1]{r}$$

3. Deret Geometri Tak Hingga

a. Konvergen (semakin mengecil), apabila limit jumlah untuk $n \rightarrow \infty$ dapat ditentukan.

Jumlah sampai tak hingga:

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}, \ -1 < r < 1, \ r \neq 0.$$

b. Divergen (semakin menyebar/membesar), apabila limit jumlah untuk $n \rightarrow \infty$ tidak dapat ditentukan.

Jumlah sampai tak hingga:

$$S_\infty = \pm\infty, \ r < -1 \text{ atau } r > 1.$$