RINGKSAN MATERI
UJIAN NASIONAL MATEMATIKA SMA
PROGRAM IPA

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah penulis panjatkan kehadirat Allah SWT., Atas limpahan rahmat, berkah, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan e-book "***Ringkasan Materi Ujian Nasional Matematika SMA Program IPA***" yang telah penulis susun sejak 3 tahun yang lalu.

E-Book ini mulanya hanya digunakan di lingkungan SMA Muhammadiyah Majenang, namun dengan adanya Internet, penulis berkeinginan agar e-book ini juga dapat bermanfaat bagi seluruh Siswa atau Guru Matematika SMA yang ada di Indonesia sebagai acuan untuk menyelesaikan soal-soal UJIAN NASIONAL.

Anda saat ini telah memiliki E-Book ini, saya sangat berharap Anda dapat sukses dalam menempuh UJIAN NASIONAL MATEMATIKA. Namun harapan Anda untuk LULUS tidak akan dapat terwujud hanya dengan memilikinya saja tanpa mempelajarinya dengan tekun dan penuh kesungguhan, jangan mudah menyerah. Jika mengalami masalah cobalah berbagi dengan orang-orang di sekitar Anda, mungkin dengan teman atau guru Anda. Gunakanlah e-book ini sebagai panduan Anda dalam mengerjakan soal-soal yang terdapat pada e-book KUMPULAN SOAL-SOAL UJIAN NASIONAL MATEMATIKA PROGRAM IPA.

E-Book ini bisa berhasil ada di tangan Anda juga berkat dukungan dari semua pihak terutama Istri tercinta Sutirah, Anak-anakku tersayang Rahmat Yulianto, Halizah Faiqotul Karomah, Aisya Fairuz Bahiyyah dan saudara-saudaraku terkasih yang memberi saya motivasi dan kekuatan yang sangat besar untuk dapat menyelesaikannya. Dukungan dari seluruh dewan guru dan karyawan SMA MUHAMMADIYAH MAJENANG juga sangat berarti bagi saya.

Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam penyusunan e-book ini, oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik yang sifatnya membangun demi sempurnanya e-book ini dari semua member www.soalmatematik.com. Penulis juga berharap semoga e-book ini dapat bermanfaat bagi semua pihak. Amiin.

Majenang, Juni 2009
Penulis

Karyanto, S.Pd

DAFTAR ISI

1. PANGKAT RASIONAL, BENTUK AKAR DAN LOGARITMA

A. Pangkat Negatif dan Pangkat Nol

Misalkan $a \in R$ dan $a \neq 0$, maka:

1) a^{-n} adalah kebalikan dari a^n atau sebaliknya, sehingga

   $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ atau $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

2) $a^0 = 1$

B. Operasi Aljabar Bentuk Akar

Untuk setiap a, b, dan c bilangan positif, maka berlaku hubungan:

1) $a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a + b)\sqrt{c}$
2) $a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a - b)\sqrt{c}$
3) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
4) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(a+b) + 2\sqrt{ab}}$
5) $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{(a+b) - 2\sqrt{ab}}$

C. Merasionalkan penyebut

Untuk setiap pecahan yang penyebutnya mengandung bilangan irrasional (bilangan yang tidak dapat di akar), dapat dirasionalkan penyebutnya dengan kaidah-kaidah sebagai berikut:

1) $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$

2) $\frac{c}{a+\sqrt{b}} = \frac{c}{a+\sqrt{b}} \times \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{c(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$

3) $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$

D. Sifat-Sifat Pangkat

Jika a dan b bilangan real serta n, p, q bilangan bulat positif, maka berlaku:

1) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
2) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
3) $a^p \times a^q = a^{p+q}$
4) $a^p : a^q = a^{p-q}$
5) $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$
6) $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
7) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

E. Pengertian dan Sifat-Sifat Logaritma

Misalkan a adalah bilangan positif (a > 0) dan g adalah bilangan positif yang tidak sama dengan 1 (g > 0, g ≠ 1), maka:

$${}^{g}\log a = x \text{ jika hanya jika } g^{x} = a$$

sifat-sifat logaritma sebagai berikut:

1) ${}^{g}\log (a \times b) = {}^{g}\log a + {}^{g}\log b$
2) ${}^{g}\log \left(\frac{a}{b}\right) = {}^{g}\log a - {}^{g}\log b$
3) ${}^{g}\log a^{n} = n \times {}^{g}\log a$
4) ${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$
5) ${}^{g}\log a = \dfrac{1}{{}^{a}\log g}$
6) ${}^{g}\log a \times {}^{a}\log b = {}^{g}\log b$
7) ${}^{g^{n}}\log a^{m} = \frac{m}{n}\,{}^{g}\log a$
8) $g^{{}^{g}\log a} = a$

2. PERSAMAAN, PERTIDAKSAMAAN DAN FUNGSI KUADRAT

A. Persamaan Kuadrat

1. Bentuk umum persamaan kuadrat : $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$
2. Nilai determinan persamaan kuadrat : $D = b^2 - 4ac$
3. Akar-akar persamaan kuadrat dapat dicari dengan memfaktorkan ataupun dengan rumus:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

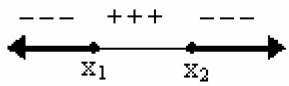
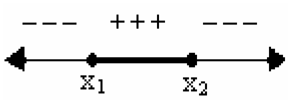
4. Pengaruh determinan terhadap sifat akar:
   a. Bila $D > 0$, maka persamaan kuadrat memiliki 2 akar real yang berbeda
   b. Bila $D = 0$, maka persamaan kuadrat memiliki 2 akar real yang kembar dan rasional
   c. Bila $D < 0$, maka akar persamaan kuadrat imajiner (tidak memiliki akar-akar)
5. Jumlah akar-akar persamaan kuadrat : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
6. Selisih akar-akar persamaan kuadrat : $x_1 - x_2 = \left|\frac{\sqrt{D}}{a}\right|$, $x_1 > x_2$
7. Hasil kali akar-akar persamaan kuadrat : $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
8. Persamaan kuadrat baru disusun dengan rumus : $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$
9. Beberapa rumus yang biasa digunakan saat menentukan persamaan kuadrat baru
   a. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 \cdot x_2)$
   b. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3(x_1 \cdot x_2)(x_1 + x_2)$

B. Pertidaksamaan Kuadrat

Bentuk <u>BAKU</u> pertidaksamaan kuadrat adalah

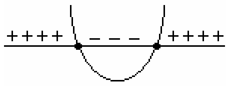
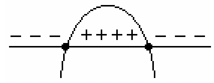
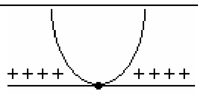
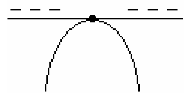
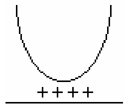
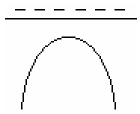
$ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, dan $ax^2 + bx + c > 0$

Adapun langkah penyelesaian Pertidaksamaan kuadrat adalah sebagai berikut:
1. Ubah bentuk pertidaksamaan ke dalam bentuk baku (jika bentuknya belum baku)
2. Cari nilai pembentuk nolnya yaitu x_1 dan x_2 (cari nilai akar-akar persamaan kuadratnya)
3. Simpulkan daerah himpunan penyelesaiannya:

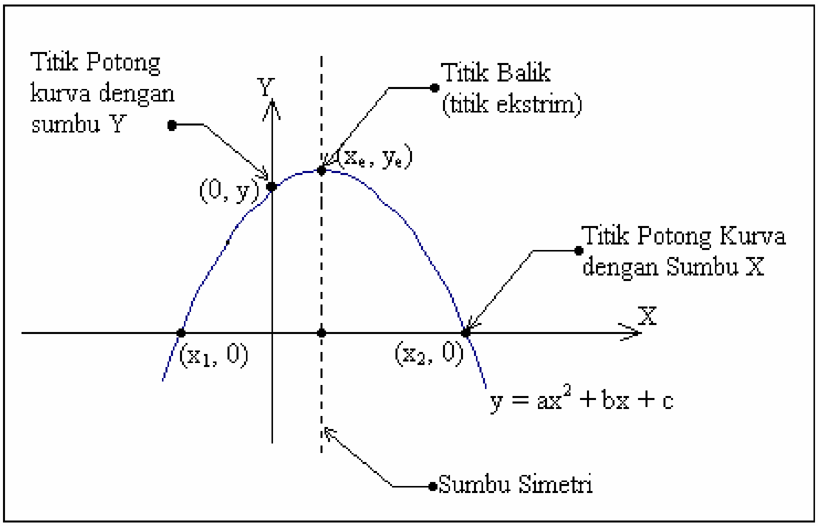
No	Pertidaksamaan	Daerah penyelesaian	Notasi Himpunan Penyelsaian
a	$\geq$ atau $>$		HP ada di **tepi**, menggunakan kata hubung **atau** Hp = $\{x \mid x \leq x_1$ atau $x \geq x_1\}$ atau Hp = $\{x \mid x < x_1$ atau $x > x_1\}$
b	$\leq$ atau $<$		HP ada **tengah** Hp = $\{x \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$ atau Hp = $\{x \mid x_1 < x < x_2\}$ atau

C. Fungsi kuadrat

1. Bentuk umum fungsi kuadrat : $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$
2. Pengaruh determinan terhadap bentuk grafik fungsi kuadrat adalah:

D	a > 0 (fungsi minimum)	a < 0 (fungsi maksimum)
D > 0	 Grafik memotong sumbu X di dua titik	 Grafik memotong sumbu X di dua titik
D = 0	 Grafik menyinggung sumbu X	 Grafik menyinggung sumbu X
D < 0	 Grafik tidak menyinggung sumbu X	 Grafik tidak menyinggung sumbu X

3. Bagian-bagian grafik fungsi kuadrat



a) Persamaan sumbu simetri : $x_e = -\frac{b}{2a}$

b) Nilai ekstrim fungsi : $y_e = -\frac{D}{4a}$

c) Koordinat titik balik/ekstrim : $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$

4. Menenetukan persamaan grafik fungsi kuadrat

a) Grafik fungsi kuadrat yang melalui titik balik (x_e, y_e) dan sebuah titik tertentu (x, y):

$$y = a(x - x_e)^2 + y_e$$

b) Grafik fungsi kuadrat yang memotong sumbu X di dua titik $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, dan melalui sebuah titik tertentu (x, y):

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

3. SISTEM PERSAMAAN LINEAR

A. Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV)

1) Bentuk umum : $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$
2) Dapat diselesaikan dengan metode grafik, substitusi, eliminasi, dan determinan.
3) Metode determinan:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_2;$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

$$x = \frac{D_x}{D}; \qquad y = \frac{D_y}{D}$$

B. Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV)

1) Bentuk umum : $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$
2) Dapat diselesaikan dengan metode eliminasi bertingkat dan determinan.
3) Metode determinan:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} = (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$$

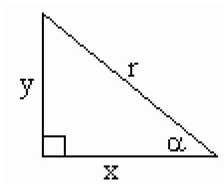
$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix};$$

$$x = \frac{D_x}{D}; \quad y = \frac{D_y}{D}; \quad z = \frac{D_z}{D}$$

4. TRIGONOMETRI I

A. Trigonometri Dasar

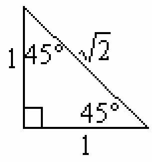
- $\sin \alpha = \frac{y}{r}$
- $\cos \alpha = \frac{x}{r}$
- $\tan \alpha = \frac{y}{x}$



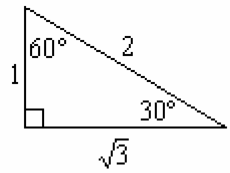
B. Perbandingan trigonometri sudut Istimewa (30º, 45º, 60º)

Nilai perbandingan trigonometri sudut istimewa dapat dicari dengan menggunakan segitiga siku-siku istimewa (gb. 1 dan gb.2)

α^o	sin	cos	tan
30	½	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	½	$\sqrt{3}$



gambar 1



gambar 2

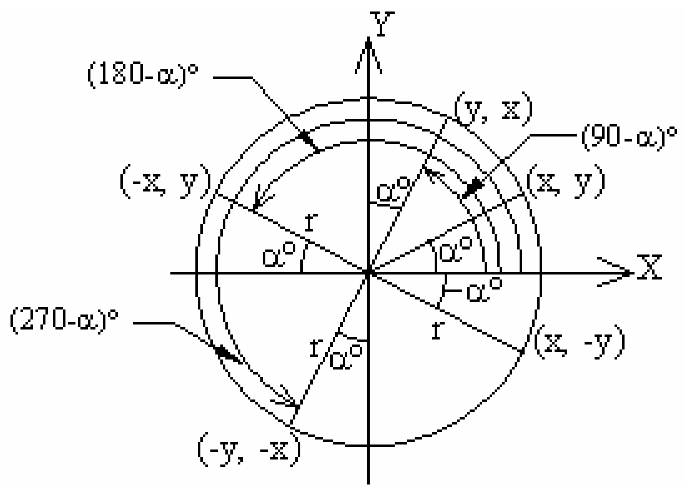
C. Perbandingan Trigonometri sudut berelasi

1. Sudut berelasi (90º – α)
   a) $\sin(90^o - \alpha) = \cos \alpha$
   b) $\cos(90^o - \alpha) = \sin \alpha$
   c) $\tan(90^o - \alpha) = \cot \alpha$

2. Sudut berelasi (180º – α)
   a) $\sin(180^o - \alpha) = \sin \alpha$
   b) $\cos(180^o - \alpha) = -\cos \alpha$
   c) $\tan(180^o - \alpha) = -\tan \alpha$

3. Sudut berelasi (270º – α)
   a) $\sin(270^o - \alpha) = -\cos \alpha$
   b) $\cos(270^o - \alpha) = -\sin \alpha$
   c) $\tan(270^o - \alpha) = \cot \alpha$

4. Sudut berelasi (– α)
   a) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
   b) $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
   c) $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$



D. Identitas Trigonometri sederhana

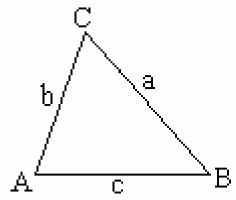
1. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
2. $\text{ctan}\ \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
3. $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$
4. $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$
5. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
6. $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$
7. $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$

E. Koordinat Kutub dan Cartesius

$(x, y) \xrightarrow{\text{kutub}} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$: Merubah dari koordinat kartesius ke kutub

$(r, \theta) \xrightarrow{\text{cartesius}} (r \cos\theta, r \sin\theta)$: Merubah dari koordinat kutub ke kartesius

F. Rumus–Rumus dalam Segitiga



1. Aturan sinus : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2r$
2. Aturan Kosinus : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
3. Luas segitiga
   a) $L = \frac{1}{2}\, a \cdot b \sin C$: Δ dengan kondisi “sisi sudut sisi”
   b) $L = \dfrac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \sin(B + C)}$: Δ dengan kondisi “sudut sisi sudut”
   c) $L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$: Δ dengan kondisi “sisi sisi sisi”
4. Jari–jari lingkaran dalam segitiga $r_d = \dfrac{\text{luas}\,\Delta}{\frac{1}{2}\text{keliling}\,\Delta}$
5. Jari–jari lingkaran luar segitiga $r_l = \dfrac{a}{2 \sin A} = \dfrac{abc}{4\,\text{luas}\Delta}$
6. Rumus luas segi *n* beraturan

Jika panjang jari-jarinya diketahui	Jika panjang sisinya diketahui
$L = \frac{\pi}{2} r^2 \cdot \sin\left(\dfrac{360^\circ}{n}\right)$	$L = \dfrac{n \cdot S^2 \cdot \sin^2\left(\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{2n}\right)}{2 \sin\left(\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}\right)}$

5. TRIGONOMETRI II

A. Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut

1) $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$
2) $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$
3) $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \cdot \tan B}$

B. Rumus Perkalian Sinus dan Kosinus

1) $2\sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$
   $\sin A \cos B = ½\{\sin(A + B) + \sin(A - B)\}$
2) $2\cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$
   $\cos A \sin B = ½\{\sin(A + B) - \sin(A - B)\}$
3) $2\cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$
   $\cos A \cos B = ½\{\cos(A + B) + \cos(A - B)\}$
4) $-2\sin A \sin B = \cos(A + B) - \cos(A - B)$
   $\sin A \sin B = -½\{\cos(A + B) - \cos(A - B)\}$

C. Rumus Penjumlahan dan Pengurangan Sinus dan Kosinus

1) $\sin A + \sin B = 2\sin ½(A + B) \cdot \cos ½(A - B)$
2) $\sin A - \sin B = 2\cos ½(A + B) \cdot \sin ½(A - B)$
3) $\cos A + \cos B = 2\cos ½(A + B) \cdot \cos ½(A - B)$
4) $\cos A - \cos B = -2\sin ½(A + B) \cdot \sin ½(A - B)$

D. Rumus Sudut Rangkap

1) $\sin 2A = 2\sin A \cdot \cos A$
2) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$
   $= 2\cos^2 A - 1$
   $= 1 - 2\sin^2 A$
3) $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$
4) $\text{Sin } 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

E. Rumus Sudut Pertengahan

1) $\sin ½ A = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos A}{2}}$
   - $1 - \cos A = 2\sin^2 ½A$
   - $\sin^2 A = ½(1 - \cos 2A)$
2) $\cos ½ A = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos A}{2}}$
   - $1 + \cos A = 2\cos^2 ½A$
   - $\cos^2 A = ½(1 + \cos 2A)$
3) $\tan ½ A = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$

6. TRIGONOMETRI III

A. Persamaan Trigonometri

1. $\sin x^o = \sin p$
   $x_1 = p + 360k$ …………….(kwadran I)
   $x_2 = (180 - p) + 360k$ …………….(kwadran II)

2. $\cos x^o = \cos p$
   $x_1 = p + 360k$ …………….(kwadran I)
   $x_2 = (360 - p) + 360k$ …………….(kwadran IV)

3. $\tan x^o = \tan p$
   $x_1 = p + 180k$ …………….(kwadran I)
   $x_2 = (180 + p) + 180k$ …………….(kwadran III)

4. Bentuk: $A\ \text{trig}^2 + B\ \text{trig} + C = 0$ diselesaikan seperti menyelesaikan persamaan kuadrat

5. $a \cos x + b \sin x = c$, dapat diselesaikan dengan syarat:
   $|\,c\,| \le \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} \le c \le \sqrt{a^2 + b^2}$

CATATAN
Beberapa identitas trigonometri yang digunakan dalam bab ini adalah:

1. ***$\sin (x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$***
   digunakan pada soal no. 1, 8, 9

2. ***$\sin (x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$***
   digunakan pada soal no. 11

3. ***$\sin 2A = 2\sin A \cdot \cos A$***
   digunakan pada soal no. 13

4. ***$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$***
   digunakan pada soal no. 2, 12

5. ***$\cos (x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$***
   digunakan pada soal no. 5, 10

6. ***$\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A)$***
   digunakan pada soal no. 9

7. LOGIKA MATEMATIKA

A. Negasi (Ingkaran)

Negasi adalah pengingkaran terhadap nilai kebenaran suatu pernyataan. $\sim p$: tidak p

p	~ p
B	S
S	B

B. Operator Logika

1) Konjungsi adalah penggabungan dua pernyataan atau lebih dengan operator “dan”.

$p \wedge q$: p dan q

2) Disjungsi adalah penggabungan dua pernyataan atau lebih dengan operator “atau”.

$p \vee q$: p atau q

3) Implikasi adalah penggabungan dua pernyataan dengan operator “Jika …, maka …”.

$p \Rightarrow q$: Jika p maka q

4) Biimplikasi adalah penggabungan dua pernyataan dengan operator “… jika dan hanya jika …”

$p \Leftrightarrow q$: p jika dan hanya jika q

C. Nilai Kebenaran Konjungsi, Disjungsi, Implikasi, dan Biimplikasi

premis 1 P	premis 2 q	konjungsi $p \wedge q$	disjungsi $p \vee q$	implikasi $p \Rightarrow q$	biimplikasi $p \Leftrightarrow q$
B	B	**B**	B	B	**B**
B	S	S	B	**S**	S
S	B	S	B	B	S
S	S	S	**S**	B	**B**

Kesimpulan: perhatikan nilai kebenaran yang tercetak tebal
1) Konjungsi akan bernilai benar (B), jika kedua premis benar,
2) Disjungsi akan bernilai salah (S), jika kedua premis salah
3) Implikasi akan bernilai salah (S), jika premis sebelah kiri benar (B) dan kanan salah (S)
4) Biimimplikasi akan bernilai benar (B), jika premis kiri dan kanan kembar

D. Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Bila terdapat bentuk implikasi $p \Rightarrow q$, maka diperoleh tiga pengembangannya sebagai berikut:

Implikasi	Invers	Konvers	Kontraposisi
$p \Rightarrow q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$q \Rightarrow p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$

Kesimpulan yang dapat diambil adalah:
1) invers adalah negasi dari implikasi
2) konvers adalah kebalikan dari implikasi
3) kontraposisi adalah implikasi yang dibalik dan dinegasi

E. Pernyataan-Pernyataan yang Equivalen

1) implikasi $\equiv$ kontraposisi : $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
2) konvers $\equiv$ invers : $q \Rightarrow p \equiv \sim p \Rightarrow \sim q$
3) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$: ingkaran dari konjungsi
4) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$: ingkaran dari disjungsi
5) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$: ingkaran dari implikasi
6) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
7) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$: ingkaran dari biimplikasi

F. Kuantor Universal dan Kuantor Eksistensial

- Kuantor Universal adalah suatu pernyataan yang berlaku untuk umum, notasinya "$\forall x$" dibaca "untuk semua nilai x"

- Kuantor Eksistensial adalah suatu pernyataan yang berlaku secara khusus, notasinya "$\exists x$" dibaca "ada nilai x" atau "beberapa nilai x"

- Ingkaran dari pernyataan berkuantor
  1) $\sim(\forall x) \equiv \exists(\sim x)$
  2) $\sim(\exists x) \equiv \forall(\sim x)$

G. Penarikan Kesimpulan

Jenis penarikan kesimpulan ada 3 yaitu:

1) Modus Ponens **(MP)**

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & : \text{premis 1} \\ \underline{p \qquad\quad} & : \text{premis 2} \\ \therefore q & : \text{kesimpulan} \end{array}$$

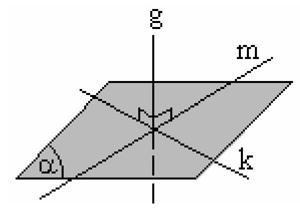
2) Modus Tollens **(MT)**

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & : \text{premis 1} \\ \underline{\sim q \qquad\quad} & : \text{premis 2} \\ \therefore \sim p & : \text{kesimpulan} \end{array}$$

3) Silogisme

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & : \text{premis 1} \\ \underline{q \Rightarrow r\quad} & : \text{premis 2} \\ \therefore p \Rightarrow r & : \text{kesimpulan} \end{array}$$

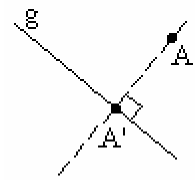
8. DIMENSI TIGA (JARAK)



A. Garis Tegak Lurus Bidang

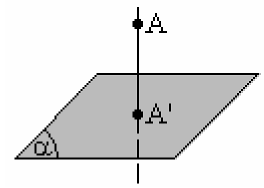
Sebuah garis tegak lurus pada sebuah bidang jika garis itu tegak lurus pada setiap garis di bidang itu.

B. Jarak Titik dan Garis



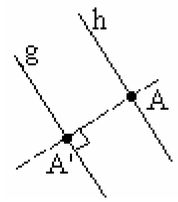
Jarak titik A dan garis g adalah panjang ruas garis AA', dengan titik A' merupakan proyeksi A pada g.

C. Jarak titik dan bidang



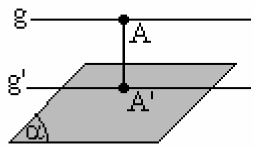
Jarak antara titik A dan bidang adalah panjang ruas garis AA' dengan titik A' merupakan proyeksi titik A pada bidang.

D. Jarak Antara Dua Garis Sejajar



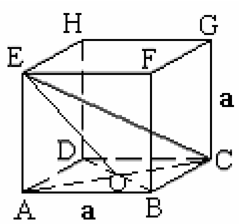
Menentukan jarak dua garis sejajar adalah dengan membuat garis yang tegak lurus dengan keduanya. Jarak kedua titik potong merupakan jarak kedua garis tersebut.

E. Jarak Garis dan Bidang yang Sejajar



Menentukan jarak garis dan bidang adalah dengan memproyeksikan garis pada bidang. Jarak antara garis dan bayangannya merupakan jarak garis terhadap bidang.

F. Jarak Antar titik sudut pada kubus



diagonal sisi AC = $a\sqrt{2}$

diagonal ruang CE = $a\sqrt{3}$

ruas garis EO = $\frac{a}{2}\sqrt{6}$

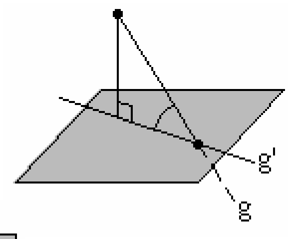
<u>CATATAN PENTING</u>

Pada saat menentukan jarak, hal pertama yang harus dilakukan adalah membuat garis-garis bantu sehingga terbentuk sebuah segitiga sehingga jarak yang ditanyakan akan dapat dengan mudah dicari.

9. DIMENSI TIGA (SUDUT)

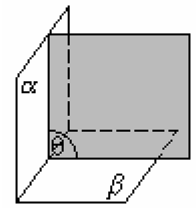
A. Sudut Antara Garis dan Bidang

Sudut antara garis dan bidang merupakan sudut antara garis dan bayangannya bila garis tersebut diproyeksikan pada bidang.

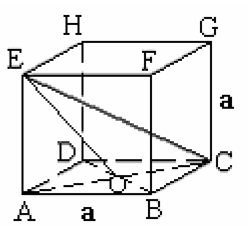


B. Sudut Antara Dua Bidang

Sudut antara dua bidang adalah sudut yang dibentuk oleh dua garis yang tegak lurus garis potong pada bidang α dan β



C. Jarak Antar titik sudut pada kubus



diagonal sisi AC = $a\sqrt{2}$
diagonal ruang CE = $a\sqrt{3}$
ruas garis EO = $\frac{a}{2}\sqrt{6}$

<u>CATATAN PENTING</u>

Pada saat menentukan sudut, hal pertama yang harus dilakukan adalah membuat garis-garis bantu sehingga terbentuk sebuah segitiga sehingga sudut yang ditanyakan akan dapat dengan mudah dicari.

10. STATISTIKA

A. Ukuran Pemusatan Data

1). Rata-rata

a. Data tunggal: $\overline{X} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$

b. Data terkelompok:

Cara konvensional	Cara sandi
$\overline{X} = \dfrac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i}$	$\overline{X} = \overline{X}s + \left(\dfrac{\sum f_i \cdot u_i}{\sum f_i}\right)c$

f_i = frekuensi kelas ke-i
x_i = Nilai tengah data kelas ke-i
$\overline{X}s$ = Rataan sementara
= x_i dari data dengan f_i terbesar

u_i = …, -2, -1, 0, 1, 2 … , disebut kode. 0 merupakan kode untuk $\overline{X}s$
c = panjang kelas interval

2) Median
Median adalah data yang berada tepat ditengah, setelah data tersebut diurutkan.

a. Data tunggal: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$:
median merupakan data ke ½(n + 1) atau Me = $X_{\frac{1}{2}(n+1)}$

b. Data terkelompok: Me = Q_2

3) Modus
Modus adalah data yang sering muncul atau berfrekuensi terbesar.

- Data terkelompok: Mo = $L_{mo} + \left(\dfrac{d_1}{d_1 + d_2}\right)c$

Lmo = tepi bawah kelas modus
d_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya
d_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya

4) Kuartil
Kuartil adalah membagi bentangan data menjadi empat bagian sama panjang setelah data tersebut di urutkan dari yang terkecil (X_{min}) sampai yang terbesar (X_{maks}), seperti pada bagan di bawah ini.

X_{min} — Q_1 — Q_2 = Me — Q_3 — X_{maks}

X_{min}, Q_1, Q_2, Q_3, dan X_{maks} disebut dengan statistika 5 serangkai:

Q_2	
Q_1	Q_3
X_{min}	X_{maks}

a. Data tunggal:

(i) Tentukan median (Q_2) dengan cara membagi bentangan data menjadi dua bagian
(ii) Q_1 (kuartil bawah) merupakan median data bentangan sebelah kiri
(iii) Q_3 (kuartil atas) merupakan median data bentangan sebelah kanan

b. Data terkelompok

$$Q_i = L_{Qi} + \left(\dfrac{\frac{i}{4}N - \sum f_k}{f_{Qi}}\right)c$$

i = jenis kuartil (1, 2, atau 3)
f_k = Frekuensi kumulatif sebelum kelas kuartil
f_{Qi} = Frekuensi kelas kuartil
N = Jumlah seluruh data
L_{Qi} = tepi bawah kelas yang memuat kelas kuartil

5) Rataan Gabungan (penggabungan rata-rata 2 atau lebih kelompok data)

$$\overline{X}_g = \frac{n_1 \cdot \overline{x}_1 + n_2 \cdot \overline{x}_2 + n_3 \cdot \overline{x}_3 + ...}{n_1 + n_2 + n_3 + ...}$$

dengan n_1, n_2, n_3, … : banyaknya data kelompok 1, kelompok 2, kelompok 3 … dst

$\overline{x}_1, \overline{x}_1, \overline{x}_1 ...$: nilai rata-rata data kelompok 1, kelompok 2, kelompok 3 … dst

B. Ukuran Penyebaran Data

1. Jangkauan atau Rentang (R)

R = Xmaks – Xmin

Dengan Xmaks : statistik maksimum atau data yang terbesar

Xmin : statistik minimum atau data yang terkecil

2. Hamparan atau Rentang Antar Kuartil atau Jangkauan Antar Kuartil (H)

H = $Q_3 – Q_1$

Dengan Q_1 : kuartil pertama atau kuartil bawah

Q_3 : kuartil ketiga atau kuartil atas

3. Simpangan Kuartil atau Rentang Semi Antarkuartil (Qd)

Qd = $\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$

4. Simpangan Rata-Rata (Sr)

a. Data tunggal : Sr = $\frac{\sum |x_i - \overline{x}|}{n}$;

b. Data terkelompok: Sr = $\frac{\sum f_i |x_i - \overline{x}|}{N}$;

5. Standar Deviasi atau Deviasi Standar atau Simpangan Baku (S)

a. Data tunggal

i) Ragam atau Variansi : $S^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n}$

ii) Simpangan baku : S = $\sqrt{S^2}$

a. Data Terkelompok

i) Ragam atau Variansi : $S^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum f_i}$

ii) Simpangan baku : S = $\sqrt{S^2}$

11. PELUANG

A. Notasi Faktorial

a. $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$
b. $n! = n \times (n-1)!$
c. $1! = 1$
d. $0! = 1$

B. Permutasi

Permutasi adalah pola pengambilan yang memperhatikan urutan (AB ≠ BA), jenisnya ada 3, yaitu:

a) Permutasi dari beberapa unsur yang berbeda; ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

b) Permutasi dengan beberapa unsur yang sama; ${}_nP_{n_1,\, n_2,\, n_3} = \dfrac{n!}{n_1!\, n_1!\, n_1!}$, $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots \le n$

c) Permutasi siklis (lingkaran); ${}_nP_{siklis} = (n-1)!$

C. Kominasi

Kombinasi adalah pola pengambilan yang tidak memperhatikan urutan (AB = BA).

Kominasi dari beberapa unsur yang berbeda adalah ${}_nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$

D. Peluang Suatu Kejadian

a) Kisaran nilai peluang : $0 \le P(A) \le 1$

b) $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$, n(A) banyaknya kejadian A dan n(S) banyaknya ruang sampel

c) Peluang komplemen suatu kejadian : $P(A^c) = 1 - P(A)$

d) Peluang gabungan dari dua kejadian : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

e) Peluang dua kejadian saling lepas : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

f) Peluang dua kejadian saling bebas : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

g) Peluang kejadian bersyarat (A dan B tidak saling bebas) : $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

E. Frekuensi Harapan Fh

Frekuensi harapan kejadian A dari n kali percobaan adalah : $Fh(A) = n \times P(A)$

F. Binom Newton

a) $$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n a^{n-i} b^i$$
$$= C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b^1 + C_2^n a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n$$

b) suku ke – r dari binom Newton

$U_r = C_{r-1}^n a^{n-r+1} b^{r-1}$

12. LINGKARAN

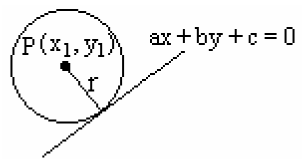
A. Persamaan Lingkaran

1) Lingkaran dengan pusat (a, b) dan jari-jarinya (r)
   $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

2) Bentuk umum persamaan lingkaran
   $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
   Pusat (– ½ A, –½B) dan jari-jari: $r = \sqrt{(\frac{1}{2}A)^2 + (\frac{1}{2}B)^2 - C}$

3) Jarak titik $P(x_1,y_1)$ terhadap garis $ax + by + c = 0$ adalah:

$$r = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$



B. Persamaan Garis Singgung Lingkaran

1) Garis singgung lingkaran yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran
   a) Garis singgung lingkaran: $x^2 + y^2 = r^2$
      $x\,x_1 + y\,y_1 = r^2$
   b) Garis singgung lingkaran : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
      $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$
   c) Garis singgung lingkaran : $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
      $xx_1 + yy_1 + ½A(x + x_1) + ½B(y + y_1) + C = 0$

2) Garis singgung lingkaran yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ di luar lingkaran, langkah-langkahnya:
   1. Tentukan persamaan garis kutub = garis singgung lingkaran pada a)
   2. Substitusikan persamaan garis kutub yang telah diperoleh ke persamaan lingkaran, maka akan diperoleh dua buah titik singgung pada lingkaran.
   3. Tentukan persamaan garis singgung yang melalui kedua titik yang telah diperoleh.

3) Garis singgung lingkaran dengan gradien m diketahui
   - Garis singgung lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dengan gradien m

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

13. SUKU BANYAK

A. Teorema Sisa

1) $F(x) = (x - b)\cdot H(x) + S$, maka $S = F(b)$
2) $F(x) = (ax - b)\cdot H(x) + S$, maka $S = F(\frac{b}{a})$
3) $F(x) : [(x - a)(x - b)]$, maka $S(x) = (x - a)S_2 + S_1$, dengan S_2 adalah sisa pembagian pada tahap ke-2

Dengan H(x): Hasil pembagian dan S: sisa pembagian

B. Teorema Faktor

$(x - b)$ adalah faktor dari $f(x)$ bila $S = f(b) = 0$

C. Akar Rasional Persamaan Suku Banyak

Bentuk umum : $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + d = 0$. Akar-akarnya adalah $x_1, x_2, \dots, x_n$.

1) $x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{b}{a}$
2) $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \frac{d}{a}$ (bila berderajat genap)
3) $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = -\frac{d}{a}$ (bila berderajat ganjil)
4) $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 + \dots = \frac{c}{a}$

14. FUNGSI KOMPOSISI DAN FUNGSI INVERS

A. Domain Fungsi (D_F)

a. $F(x) = \sqrt{f(x)}$, D_F semua bilangan R, dimana $f(x) \geq 0$

b. $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, D_F semua bilangan R, dimana $g(x) \neq 0$

B. Komposisi Fungsi dan Invers Fungsi

1) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
2) $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$
3) $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$
4) $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, maka $f(x)^{-1} = \dfrac{-dx + b}{cx - a}$

15. LIMIT FUNGSI

A. Limit Mendekati Bilangan a $\in$R

- Teorema L'Hospital : Jika $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}$, maka $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$

B. Limit Trigonometri

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{ax}{\sin ax} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan ax}{ax} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{ax}{\tan ax} = 1$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

Catatan;
Beberapa identitas trigonometri yang biasa digunakan adalah:

a. 1 – cos A = $2\sin^2(\frac{1}{2}A)$

Digunakan pada soal no. 17, 20, 23

b. $\frac{1}{\sin x}$ ***= csc x***

c. $\frac{1}{\cos x}$ ***= secan x***

Digunakan pada soal no. 18

d. cos A – cos B = – 2 sin $\frac{1}{2}$***(A + B) · sin*** $\frac{1}{2}$***(A – B)***

digunakan pada soal no. 19

C. Limit Mendekati Tak Berhingga

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots}{cx^n + dx^{n-1} + \ldots} = \frac{a}{c}$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots}{cx^m + dx^{m-1} + \ldots} = 0$, untuk m > n

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots}{cx^m + dx^{m-1} + \ldots} = \infty$, untuk m < n

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d}\right) = \infty$, bila a > c

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d}\right) = 0$, bila a = c

6) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d}\right) = -\infty$, bila a < c

7) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{ax^2+qx+r}\right) = \frac{b-q}{2\sqrt{a}}$

16. TURUNAN (DERIVATIF)

A. Rumus-Rumus Turunan Fungsi Aljabar dan Geometri

Untuk u dan v adalah fungsi dari x, dan c adalah konstanta, maka:

1) $y = u + v$, $\Rightarrow y' = u' + v'$	6) $y = \sin u$, $\Rightarrow y' = \cos u \cdot u'$
2) $y = c \cdot u$, $\Rightarrow y' = c \cdot u'$	7) $y = \cos u$, $\Rightarrow y' = -\sin u \cdot u'$
3) $y = u \cdot v$, $\Rightarrow y' = v \cdot u' + u \cdot v'$	8) $y = \tan u$, $\Rightarrow y' = \sec^2 u \cdot u'$
4) $y = \frac{u}{v}$, $\Rightarrow y' = (v \cdot u' - u \cdot v') : v^2$	9) $y = \text{cotan } u$, $\Rightarrow y' = -\text{cosec}^2 u \cdot u'$
	10) $y = \sec u$, $\Rightarrow y' = \sec u \cdot \tan u \cdot u'$
5) $y = u^n$, $\Rightarrow y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	11) $y = \text{cosec}, u$ $\Rightarrow y' = -\text{cosec } u \cdot \text{cotan } u \cdot u'$

Keterangan:

y' : turunan pertama dari y
u' : turunan pertama dari u
v' : turunan pertama dari v

Catatan:
Identitas trigonometri yang banyak digunakan pada bab ini adalah

2sin u · cos u = sin 2u

Digunakan pada soal no. 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16

B. Tafsiran Geometris

Turunan suatu fungsi dapat digunakan dalam penafsiran geometris dari suatu fungsi, diantaranya:

1) Gradien garis singgung kurva f(x) di titik x = a , yaitu m = f'(a)

   Rumus persamaan garis singgung kurva yang melalui titik (a, b) dan bergradien m adalah:
   $y - b = m(x - a)$
2) Fungsi f(x) naik, jika $f'(x) > 0$, dan turun, jika $f'(x) < 0$
3) Fungsi f(x) stasioner jika $f'(x) = 0$
4) Nilai stasioner f(x) maksimum jika $f''(x) < 0$, dan minimum jika $f''(x) > 0$

17. INTEGRAL

A. Rumus-Rumus Integral Dasar

Untuk u dan v adalah fungsi dari x, dan c konstanta, maka:

1. $\int dx = x + c$	5. $\int \sin u\, du = -\cos u + c$
2. $\int a\, dx = a \int dx = ax + c$	6. $\int \cos u\, du = \sin u + c$
3. $\int u^n\, du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	7. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + c$
4. $\int [\, f(u) \pm g(u)\,]\, du = \int f(u)\, du \pm \int g(u)\, du$	

B. Teknik Integral Substitusi Trigonometri

a. jika integran berbentuk $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, gunakan substitusi x = a sin θ

b. jika integran berbentuk $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$, gunakan substitusi x = a tan θ

c. jika integran berbentuk $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$, gunakan substitusi x = a sec θ

C. Teknik Itegral Parsial

Teknik integral parsial digunakan jika integran tidak dapat diselesaikan dengan metode substitusi

Misalkan u(x) dan v(x) masing-masing adalah fungsi dalam variabel x, maka pengintegralan $\int u\, dv$ ditentukan oleh: $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

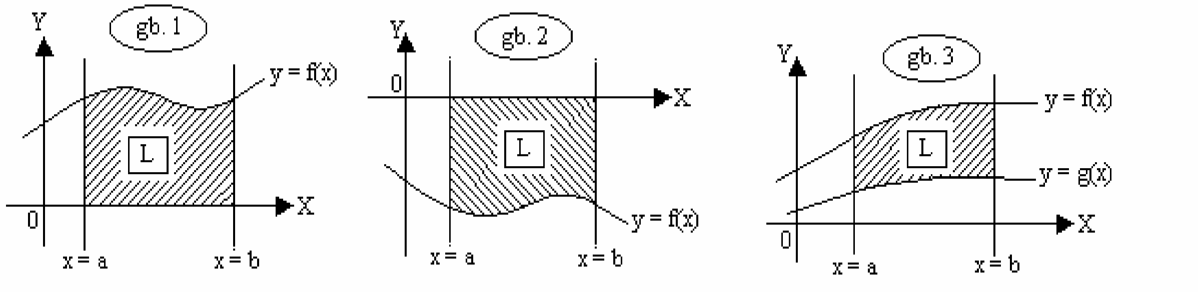
D. Integral Tentu

Misalkan kurva y = f(x) kontinu pada interval tertutup [a, b], maka luas daerah L yang dibatasi oleh kurva y = f(x), sumbu X, garis x = a, dan garis x = b, ditentukan dengan rumus:

L = $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, dengan F(x) adalah integral (antidiferensial) dari f(x)

E. Penggunan Integral Tentu

1) Untuk Menghitung Luas Daerah



gb. 1 dan gb 2. Luas daerah yang dibatasi oleh: kurva y = f(x), sumbu X, grs x = a, dan grs x = b

gb 3. Luas daerah yang dibatasi oleh: kurva y = f(x), y = g(x), grs x = a, grs x = b

a. Luas daerah L pada gb. 1

L = $\int_a^b f(x)dx$,

untuk f(x) ≥ 0

b. Luas daerah L pada gb. 2

L = $-\int_a^b f(x)dx$, atau L = $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$

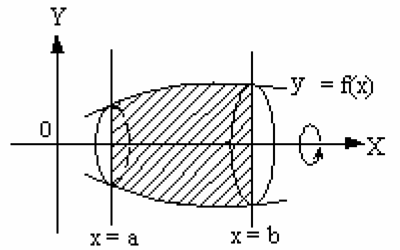
untuk f(x) ≤ 0

c. Luas daerah L pada gb. 3

L = $\int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$,

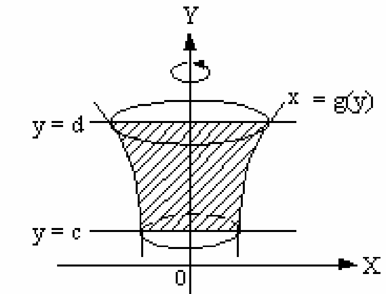
dengan f(x) ≥ g(x)

2) Untuk Menghitung Volume Benda Putar



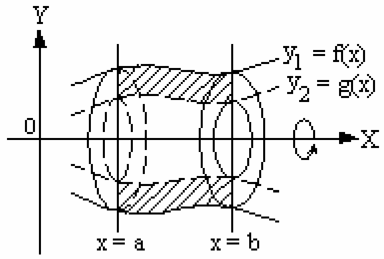
gb. 4 Volume benda putar dari daerah yang diputar sejauh 360° mengelilingi sumbu X

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx \text{ atau } V = \pi \int_a^b y^2\,dx$$



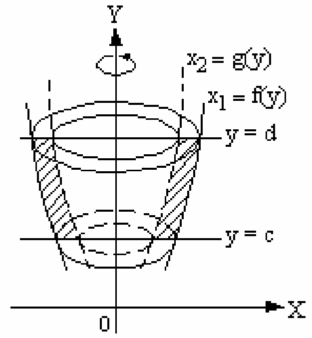
gb. 5 Volume benda putar dari daerah yang diputar sejauh 360° mengelilingi sumbu Y

$$V = \pi \int_c^d (g(y))^2\,dy \text{ atau } V = \pi \int_c^d x^2\,dy$$



gb. 6 Volume benda putar dari daerah antara dua kurva yang diputar 360° terhadap sumbu X

$$V = \pi \int_a^b \{(f^2(x) - g^2(x)\}dx \text{ atau } V = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2)dx$$



gb. 7 Volume benda putar dari daerah antara dua kurva yang diputar 360° terhadap sumbu Y

$$V = \pi \int_c^d \{f^2(y) - g^2(y)\}dy \text{ atau V}$$

$$= \pi \int_c^d (x_1^2 - x_2^2)dy$$

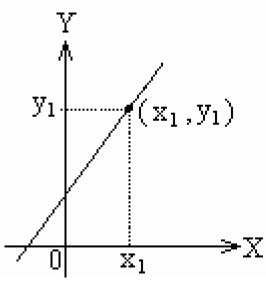
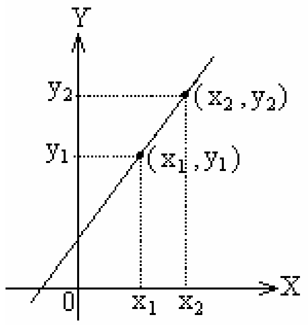
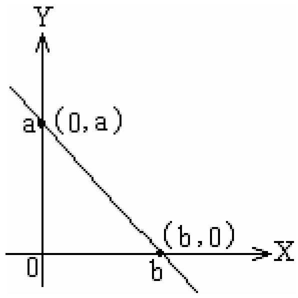
Catatan

Beberapa identitas trigonometri yang biasa digunakan pada bab ini adalah;

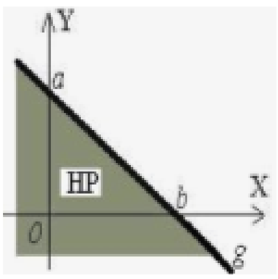
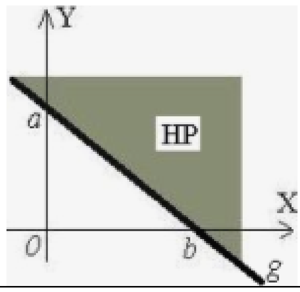
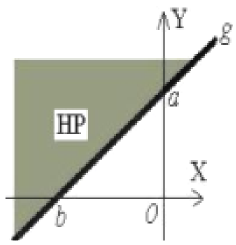
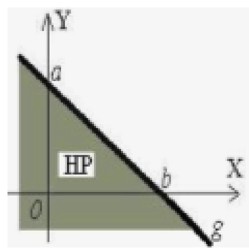
1. ***2sinA·cosB = sin(A + B) + sin(A – B)***
   digunakan pada soal No. 5, 17
2. ***–2sinA·sinB = cos(A + B) – cos(A – B)***
   digunakan pada soal No. 6, 16
3. ***sin²A*** $= \frac{1}{2}\{1 - \cos 2A\}$
   digunakan pada soal no. 19
4. ***sin 2A =2sin A · cos A***
   digunakan pada soal no. 22

18. PROGRAM LINEAR

A. Persamaan Garis Lurus

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>a. Persamaan garis yang bergradien m dan melalui titik (x_1, y_1) adalah:
$y - y_1 = m(x - x_1)$</td>
<td>b. Persamaan garis yang melalui dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah :
$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$</td>
<td>c. Persamaan garis yang memotong sumbu X di (b, 0) dan memotong sumbu Y di (0, a) adalah:
$ax + by = ab$</td>
</tr>
</table>

B. Pertidaksamaan Linear

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">• Garis condong ke kiri ($m < 0$)</td>
<td colspan="2">• Garis condong kanan ($m > 0$)</td>
</tr>
<tr>
<td>• Garis g utuh dan HP di bawah garis
$ax + by \le ab$

• Jika garis g putusputus dan HP di bawah garis, maka</td>
<td>• Garis utuh dan HP di atas garis
$ax + by \ge ab$

• Jika garis g putusputus dan HP di atas garis, maka
$ax + by > ab$</td>
<td>• Garis utuh dan HP di atas garis
$ax + by \le ab$

• Jika garis g putus-putus dan HP di atas garis, maka
• $ax + by < ab$</td>
<td>• Garis utuh dan HP di bawah garis
$ax + by \ge ab$

• Jika garis g putus-putus dan HP di bawah garis, maka
• $ax + by > ab$</td>
</tr>
</table>

C. Fungsi Tujuan (Obyektif / Sasaran), Nilai Maksimum, dan Nilai Minimum

1) Fungsi tujuan adalah nilai f untuk x dan y tertentu dari suatu program linear, dan dinyatakan f(x, y)
2) Nilai fungsi sasaran yang dikehendaki adalah kondisi x dan y yang menyebabkan maksimum atau minimum
3) Pada gambar himpunan penyelesaian program linear, titik-titik sudut merupakan titik-titik kritis, dimana nilai minimum atau maksimum berada.

19. MATRIKS

A. Transpose Matriks

Jika A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka transpose matriks A adalah $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

B. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Dua matriks dapat dijumlahkan bila kedua matriks tersebut berordo sama. Penjumlahan dilakukan

dengan menjumlahkan elemen-elemen yang seletak

C. Perkalian Matriks dengan Bilangan Real

Jika A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka nA = $n\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} an & bn \\ cn & dn \end{pmatrix}$

D. Perkalian Matriks dengan Matriks

- Perkalian matriks A dan B dapat dilakukan bila jumlah kolom matriks A sama dengan jumlah baris matriks B ($A_{m\times n} \times B_{p\times q}$, jika n = p) dan hasil perkaliannya adalah matriks berordo m × q.
- Hasil perkalian merupakan jumlah perkalian elemen-elemen baris A dengan kolom B.

  Jika A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dan B = $\begin{pmatrix} k & l & m \\ n & o & p \end{pmatrix}$, maka

  $$A \times B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k & l & m \\ n & o & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak+bn & al+bo & am+bp \\ ck+dn & cl+do & cm+dp \end{pmatrix}$$

E. Matriks Identitas (I)

- I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Dalam perkalian dua matriks terdapat matriks identitas (I), sedemikian sehingga I×A = A×I = A

F. Determinan Matriks berordo 2×2

Jika A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka determinan dari matriks A dinyatakan Det(A) = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

G. Invers Matriks

- Dua matriks A dan B dikatakan saling invers bila A×B = B×A = I, dengan demikian A adalah invers matriks B atau B adalah invers matriks A.

  Bila matriks A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka invers A adalah: $A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)}\text{Adj}(A) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- Sifat-sifat invers matriks
  1) $(A\times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$
  2) $(B\times A)^{-1} = A^{-1} \times B^{-1}$

H. Matriks Singular

matriks singular adalah matrik yang tidak mempunyai invers, karena nilai determinannya sama dengan nol

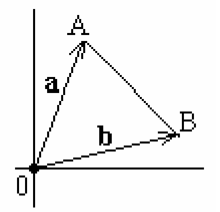
I. Persamaan Matriks

Bentuk-bentuk persamaan matriks sebagai berikut:

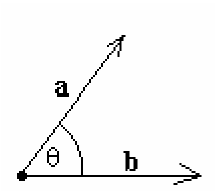
1) $A \times X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B$
2) $X \times A = B \Leftrightarrow X = B \times A^{-1}$

20. VEKTOR

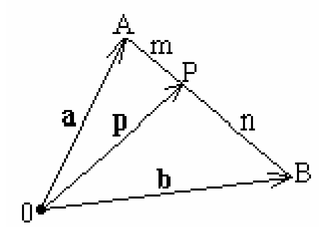
A. Vektor Secara Geometri



1. Ruas garis berarah $\overline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$



2. Sudut antara dua vektor adalah θ



3. Bila AP : PB = m : n, maka:
$$p = \frac{n\mathbf{a} + m\mathbf{b}}{n + m}$$

B. Vektor Secara Aljabar

1. Komponen dan panjang vektor: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$;
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

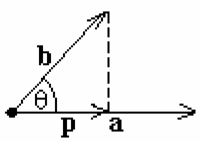
2. Penjumlahan, pengurangan, dan perkalian vektor dengan bilangan real:
$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix};$$
$$k\mathbf{a} = k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

C. Dot Product

Apabila diketahui $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, maka:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 = a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3$
3. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$
4. $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$
5. Dua vektor saling tegak lurus jika $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

D. Proyeksi Vektor



1. Proyeksi skalar ortogonal
Panjang vektor proyeksi **b** pada **a**
$$|\mathbf{p}| = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$$

2. Vektor proyeksi ortogonal :
vektor proyeksi **b** pada **a**
$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$$

21. TRANSFORMASI

A. Translasi (Pergeseran) ; T = $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ atau } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

B. Refleksi (Pencerminan)

1. Bila M matriks refleksi berordo 2 × 2, maka:
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ atau } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
2. Matriks M karena refleksi terhadap sumbu X, sumbu Y, garis y = x, garis y = – x, dan titik O dapat dicari dengan proses refleksi titik-titik satuan pada bidang koordinat sbb:

$M_{y=0}$	$M_{x=0}$	$M_{y=x}$	$M_{y=-x}$	M_O
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

C. Rotasi (Perputaran)

1) Hasil rotasi R[O, θ], adalah:
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2) Hasil rotasi R[O, 90°], adalah:
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

D. Dilatasi (Perbesaran) dengan Faktor Pengali k

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

E. Komposisi Transformasi

$$P(x, y) \xrightarrow{\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}} \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} P'(x', y') \text{ ; maka } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

F. Luas Hasil Transformasi

1. Luas bangun hasil translasi, refleksi, dan rotasi adalah tetap.
2. Luas bangun hasil transformasi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah: L' = $L \times \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

22. BARISAN DAN DERET ARITMETIKA

A. Barisan aritmetika adalah barisan yang mempunyai beda tetap untuk suku yang berdekatan

1) $U_1, U_2, U_3, \dots ,U_n$ ....barisan aritmetika
2) $U_1 = a$ ....suku pertama
3) $b = U_2 – U_1 = U_3 – U_2 = U_n – U_{n – 1}$ ....beda
4) $U_m – U_k = (m – k)b$
5) $U_n = a + (n – 1)b$ ....suku ke-n

B. Deret aritmetika adalah penjumlahan suku-suku pada barisan aritmetika

1) $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ .... deret aritmetika
2) $S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$ ....(1) digunakan jika diketahui data a dan Un

   $= \frac{1}{2}n(2a + (n – 1)b)$ ....(2) digunakan jika diketahui data a dan b

   $= \frac{b}{2}n^2 + kn,\ k = \frac{1}{2}(2a – b)$ ....(3) digunakan jika S_n dalam bentuk fungsi
3) $Un = S_n – S_{n – 1}$ .... hubungan antara suku ke-n dan deret
   $U_1 = a = S_1$

C. Bila banyaknya suku suatu barisan aritmetika adalah 2k – 1 dan ganjil, maka terdapat suku tengah U_t, sedemikian sehingga:

$U_t = \frac{1}{2}(a + U_{2k – 1})$ dengan t = k letak suku tengah

D. Bila dua bilangan x dan y disisipkan k bilangan, sehingga membentuk barisan aritmetika, maka:

$$b_{baru} = \frac{y - x}{k + 1}$$

23. BARISAN DAN DERET GEOMETRI

A. Barisan geometri adalah barisan yang memiliki pembanding/rasio tetap

1) $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ ....barisan geometri
2) $U_1 = a$ ....suku pertama
3) $r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_n}{U_{n-1}}$ ....rasio
4) $U_n = ar^{n-1}$ ....suku ke-n

B. Deret geometri adalah penjumlahan suku-suku pada barisan geometri

1) $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ .... deret geometri
2) $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ ....jumlah n suku pertama deret geometri
3) $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$ ....deret geometri tak hingga
4) $Un = S_n - S_{n-1}$ ....hubungan antara suku ke-n dan deret
5) Bila deret geometri memiliki memiliki rasio r sedemikian sehingga $-1 < x < 1$, maka deret geometri tersebut memiliki jumlah di suku tak terhingga (deret konvergen)

C. Bila banyaknya suku suatu barisan geometri adalah n dan ganjil, maka terdapat suku tengah U_t, sedemikian sehingga:

$U_t = \sqrt{a \cdot U_n}$ dengan $t = ½(n + 1)$

D. Bila dua bilangan x dan y disisipkan k bilangan, sehingga membentuk barisan geometri, maka:

$$r_{baru} = \sqrt[k+1]{\frac{y}{x}}$$

24. PERSAMAAN/PERTIDAKSAMAAN EKSPONEN

A. Persamaan Eksponen

Untuk $a > 0$, $a \neq 1$; $b > 0$, $b \neq 1$, maka berlaku

1. Jika $a^{f(x)} = a^p$, maka $f(x) = p$
2. Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, maka $f(x) = g(x)$
3. Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, maka $f(x) = 0$
4. Jika $\{h(x)\}^{f(x)} = \{h(x)\}^{g(x)}$, maka
   a) $f(x) = g(x)$
   b) $h(x) = 1$
   c) $h(x) = 0$ untuk $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$
   d) $h(x) = -1$ untuk $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya ganjil atau keduanya genap
5. Jika $A\{a^{f(x)}\}^2 + B\{a^{f(x)}\} + C = 0$, maka dapat diselesaikan secara persamaan kuadrat.

B. Pertidaksamaan Eksponen

- Untuk $a > 1$
  1. Jika $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, maka $f(x) > g(x)$
  2. Jika $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, maka $f(x) < g(x)$

  Tanda Pertidaksamaan tetap
- Jika $0 < a < 1$
  1. Jika $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, maka $f(x) < g(x)$
  2. Jika $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, maka $f(x) > g(x)$

  Tanda Pertidaksamaan berubah

25. PERSAMAAN/PERTIDAKSAMAAN LOGARITMA

A. Persamaan Logaritma

Untuk $a > 0$, $a \neq 1$; $f(x) > 0$, $g(x) > 0$

1. Jika ${}^a\log f(x) = {}^a\log p$, maka $f(x) = p$
2. Jika ${}^a\log f(x) = {}^a\log g(x)$, maka $f(x) = g(x)$

B. Pertidaksamaan Logaritma

- Untuk $a > 1$
  1. Jika ${}^a\log f(x) > {}^a\log g(x)$, maka $f(x) > g(x)$
  2. Jika ${}^a\log f(x) < {}^a\log g(x)$, maka $f(x) < g(x)$

  Tanda Pertidaksamaan tetap
- Jika $0 < a < 1$
  1. Jika ${}^a\log f(x) > {}^a\log g(x)$, maka $f(x) < g(x)$
  2. Jika ${}^a\log f(x) < {}^a\log g(x)$, maka $f(x) > g(x)$

  Tanda Pertidaksamaan berubah