TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U SVIBNJU 2011. – VIŠA RAZINA

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **D.** Skup svih realnih brojeva koji su jednaki ili manji od –2 je interval $\langle -\infty, -2]$. Skup svih realnih brojeva koji su strogo veći od 3 je interval $\langle 3, +\infty\rangle$. Traženi skup tvore svi realni brojevi koji pripadaju jednom ili drugom od tih dvaju skupova, pa ga dobijemo kao uniju navedenih dvaju skupova, tj. kao $\langle -\infty, -2] \cup \langle 3, +\infty\rangle$.

2. **B.** Iz zadane jednakosti množenjem s 2 dobijemo:

$$2 \cdot s = a \cdot t^2,$$

a odatle dijeljenjem lijeve i desne strane jednakosti s t^2 slijedi

$$a = \frac{2 \cdot s}{t^2}.$$

3. **B.** Prosjek Lucijinih bodova iz prvih triju zadaća jednak je aritmetičkoj sredini brojeva 64, 76 i 91, tj.

$$s_1 = \frac{64 + 76 + 91}{3} = 77 \text{ bodova.}$$

Prema uvjetu zadatka, prosjek bodova iz svih četiriju zadaća je za 3 boda veći od prosjeka bodova iz prvih triju zadaća, pa zaključujemo da je prosjek bodova iz svih četiriju zadaća jednak

$$s_2 = s_1 + 3 = 77 + 3 = 80 \text{ bodova.}$$

Označimo li s x broj bodova postignutih na četvrtoj zadaći, zaključujemo da je 80 aritmetička sredina brojeva 64, 76, 91 i x. To znači da mora vrijediti jednakost

$$\frac{64 + 76 + 91 + x}{4} = 80,$$

odnosno, nakon množenja s 4,

$$231 + x = 320.$$

Odatle je

$$x = 320 - 231 = 89 \text{ bodova.}$$

4. **C.** Imamo redom:

$$z^6 = (1 - i)^6 = (1 - i)^{2 \cdot 3} = [(1 - i)^2]^3 = (1^2 - 2 \cdot 1 \cdot i + i^2)^3 = [1 - 2 \cdot i + (-1)]^3 = (-2 \cdot i)^3 = (-2)^3 \cdot$$
$$\cdot i^3 = (-8) \cdot i^2 \cdot i = (-8) \cdot (-1) \cdot i = 8 \cdot i.$$

Imaginarni dio toga kompleksnoga broja jednak je koeficijentu uz imaginarnu jedinicu i. Dakle,

$$\mathrm{Im}(z^6) = 8.$$

5. **A ili C. Napomena: U zadatku nije precizirano na koju se visinu (na osnovicu ili na krak) misli, pa računamo duljinu obiju visina!** Izračunajmo najprije duljinu visine na osnovicu zadanoga trokuta. Njezino je nožište u polovištu osnovice, pa uočimo pravokutan trokut kojemu su duljine kateta jednake duljini visine na osnovicu i polovici duljine osnovice, a duljina hipotenuze jednaka duljini kraka. Prema Pitagorinu poučku za a = 10 cm i b = 14 cm dobivamo:

$$v_a = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{14^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2} = \sqrt{196-25} = \sqrt{171} \approx 13.08 \text{ cm},$$

odnosno, zaokruženo na najbliži prirodan broj,

$$v_a = 13 \text{ cm}.$$

Duljinu visine na krak računamo koristeći dvije formule za površinu trokuta:

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2}.$$

Iz tih formula proizlazi

$$a \cdot v_a = b \cdot v_b,$$

odnosno

$$v_b = \frac{a \cdot v_a}{b} = \frac{10 \cdot \sqrt{171}}{14} = \frac{5}{7} \cdot \sqrt{171} \approx 9.34 \text{ cm},$$

odnosno, zaokruženo na najbliži prirodan broj,

$$v_b = 9 \text{ cm}.$$

Stoga su rješenja zadatka v_a = 13 cm i v_b = 9 cm.

6. **B.** Koristit ćemo složeno pravilo trojno. Prema podatcima iz zadatka možemo postaviti sljedeću shemu:

masa konca [kg]	duljina platna [m]	širina platna [cm]
28. 8	36	160
x	40	120

Masa konca i duljina platna, te masa konca i širina platna su upravno razmjerne veličine (što je veća masa konca, satkat ćemo dulje, odnosno šire platno), pa u sva tri stupca postavljamo strjelice od drugoga retka prema prvome:

↑ masa konca [kg]	↑ duljina platna [m]	↑ širina platna [cm]
28. 8	36	160
x	40	120

Postavljamo sljedeći produljeni razmjer:

$$\begin{aligned} x : 28.8 &= 40 : 36 \\ &= 160 : 120, \end{aligned}$$

odnosno

$$x : 28.8 = (40 \cdot 160) : (36 \cdot 120).$$

Odavde je

$$x = \frac{28.8 \cdot 40 \cdot 120}{36 \cdot 160} = \frac{28.8 \cdot 10 \cdot 3}{9 \cdot 4} = \frac{28.8 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 24.$$

Dakle, potrebno je 24 kg konca.

7. **A.** Prirodno područje definicije funkcije f (kao i bilo koje eksponencijalne funkcije) je skup **R**. Funkcija f je strogo rastuća funkcija (jer je baza potencije $a = 3$ strogo veća od 1), strogo pozitivna funkcija (jer za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi nejednakost $f(x) > 0$) i siječe os x u točki $T(0, 1)$ (jer je $f(0) = 3^0 = 1$). Jedini od četiriju prikazanih grafova koji ima sva navedena svojstva je graf **A**.

8. **B.** Koeficijent sličnosti zadanih trokutova možemo izračunati i kao količnik duljine najveće stranice zadanoga trokuta i duljine najveće stranice zadanom trokutu sličnoga trokuta. Taj je koeficijent jednak

$$k = \frac{12.5}{20} = \frac{125}{200} = \frac{5}{8}.$$

Traženi omjer jednak je kvadratu koeficijenta sličnosti, tj.

$$k^2 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64} = 0.390625,$$

Zaokružimo li taj rezultat na tri decimale, dobit ćemo da je traženi omjer (približno) jednak 0.391.

9. **A.** Uočimo da vrijede identiteti:

$$t^2 - 1 = (t - 1) \cdot (t + 1),$$

i

$$t^2 + 2 \cdot t + 1 = (t + 1)^2.$$

Uz pretpostavku $t \neq \pm 1$, imamo redom:

$$\left(\frac{t}{t-1}+\frac{t}{t+1}-\frac{2\cdot t}{t^2-1}\right):\frac{4}{t^2+2\cdot t+1}=\left[\frac{t}{t-1}+\frac{t}{t+1}-\frac{2\cdot t}{(t-1)\cdot(t+1)}\right]:\frac{4}{(t+1)^2}=$$
$$=\left[\frac{t\cdot(t+1)}{(t-1)\cdot(t+1)}+\frac{t\cdot(t-1)}{(t-1)\cdot(t+1)}-\frac{2\cdot t}{(t-1)\cdot(t+1)}\right]\cdot\frac{(t+1)^2}{4}=$$
$$=\left[\frac{t\cdot(t+1)+t\cdot(t-1)-2\cdot t}{(t-1)\cdot(t+1)}\right]\cdot\frac{(t+1)^2}{4}$$
$$=\left[\frac{t^2+t+t^2-t-2\cdot t}{(t-1)\cdot(t+1)}\right]\cdot\frac{(t+1)^2}{4}$$
$$=\left[\frac{2\cdot t^2-2\cdot t}{(t-1)\cdot(t+1)}\right]\cdot\frac{(t+1)^2}{4}=$$
$$=\frac{2\cdot t\cdot(t-1)}{(t-1)\cdot(t+1)}\cdot\frac{(t+1)^2}{4}=$$
$$=\frac{t\cdot(t+1)}{2}$$

10. C. Neka je V vrh piramide, $ABCD$ njezina osnovka, a N ortogonalna projekcija vrha V na osnovku $ABCD$. (N je ujedno nožište visine piramide povučene iz vrha V na osnovku $ABCD$). Neka je S polovište brida piramide AB (ili bilo kojega drugoga brida osnovke) Trokut VNS je pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu N. Odredimo duljine dviju stranica toga trokuta.

Duljina katete NS trokuta VNS jednaka je polovici duljine osnovnoga brida piramide, tj.

$$|NS| = \frac{1}{2} \cdot a .$$

Duljina hipotenuze VS trokuta VNS jednaka je visini povučenoj iz vrha V na stranicu AB trokuta VAB. Budući da svi bridovi piramide $VABCD$ imaju jednaku duljinu, trokut VAB je jednakostraničan trokut čija je duljina stranice $|AB| = a$. Stoga je duljina dužine VS jednaka duljini visine jednakostraničnoga trokuta, tj.

$$|VS| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a .$$

Traženi kut jednak je kutu $\angle VSN$. Iz pravokutnoga trokuta VNS slijedi

$$\cos(\angle VSN) = \frac{|NS|}{|VS|} = \frac{\frac{1}{2}\cdot a}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Odatle je $\angle VSN = 54.73561° \approx 54°44'8''$.

11. D. Uvedemo li zamjenu $t = x + 5$, dobivamo kubnu jednadžbu

$$2 \cdot t^3 - 7 \cdot t^2 + 7 \cdot t - 2 = 0$$

koju možemo dalje transformirati ovako:

$$(2 \cdot t^3 - 2) - (7 \cdot t^2 - 7 \cdot t) = 0$$
$$2 \cdot (t^3 - 1) - 7 \cdot t \cdot (t - 1) = 0$$
$$2 \cdot (t - 1) \cdot (t^2 + t + 1) - 7 \cdot t \cdot (t - 1) = 0$$
$$(t - 1) \cdot [2 \cdot (t^2 + t + 1) - 7 \cdot t] = 0$$
$$(t - 1) \cdot (2 \cdot t^2 + 2 \cdot t + 2 - 7 \cdot t) = 0$$
$$(t - 1) \cdot (2 \cdot t^2 - 5 \cdot t + 2) = 0.$$

Jedno rješenje ove jednadžbe je očito $t_1 = 1$. Prema Vietèovim formulama, zbroj preostalih dviju rješenja – koja se dobiju rješavanjem kvadratne jednadžbe $2 \cdot t^2 - 5 \cdot t + 2 = 0$ – jednak je:

$$t_2 + t_3 = \frac{5}{2}.$$

Stoga je zbroj svih rješenja kubne jednadžbe $2 \cdot t^3 - 7 \cdot t^2 + 7 \cdot t - 2 = 0$ jednak

$$t_1 + t_2 + t_3 = t_1 + (t_2 + t_3) = 1 + \frac{5}{2} = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}.$$

(*Napomena*: Taj rezultat mogao se izravno dobiti i primjenom odgovarajućih Vietèovih formula za opću kubnu jednadžbu $a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d = 0$.) Sada iz $t = x + 5$ slijedi

$$x_i = t_i - 5, \text{ za svaki } i = 1, 2, 3,$$

tj. sva rješenja polazne jednadžbe su redom:

$$x_1 = t_1 - 5,$$
$$x_2 = t_2 - 5,$$
$$x_3 = t_3 - 5.$$

Njihov je zbroj jednak

$$x_1 + x_2 + x_3 = (t_1 - 5) + (t_2 - 5) + (t_3 - 5) = (t_1 + t_2 + t_3) - 15 = = \frac{7}{2} - 15 = \frac{7-30}{2} = -\frac{23}{2}.$$

12. C. Poznato je da za $a > 0$ kvadratna funkcija $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ postiže najmanju vrijednost $f_{\min} = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}$ za $x_{\min} = \frac{-b}{2 \cdot a}$. U naššem slučaju znamo da je $a = 1$, $f_{min} = -9$ i $x_{min} = 4$, pa dobivamo sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$-9 = \frac{4 \cdot 1 \cdot c - b^2}{4 \cdot 1}$$
$$4 = \frac{-b}{2 \cdot 1}.$$

Iz druge jednadžbe sustava slijedi

$$-b = 8,$$

odnosno $b = -8$. Uvrštavanjem te vrijednosti u prvu jednadžbu sustava dobijemo:

$$\begin{aligned} -9 &= \frac{4 \cdot c - (-8)^2}{4} \\ -9 &= \frac{4 \cdot c}{4} - \frac{64}{4} \\ -9 &= c - 16 \\ -c &= -16 + 9 \\ -c &= -7 \\ c &= 7 \end{aligned}$$

13. D. Izračunajmo najprije koordinate sjecišta zadanih krivulja. U tu svrhu riješit ćemo sustav jedne linearne i jedne kvadratne jednadžbe:

$$y + x - 5 = 0,$$
$$3 \cdot x^2 - y^2 = 3.$$

Iz prve jednadžbe sustava je:

$$y = -x + 5,$$

pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu sustava dobijemo:

$$3 \cdot x^2 - (-x + 5)^2 = 3,$$
$$3 \cdot x^2 - [(-x)^2 + 2 \cdot 5 \cdot (-x) + 5^2] = 3,$$
$$3 \cdot x^2 - [x^2 - 10 \cdot x + 25] = 3,$$
$$3 \cdot x^2 - x^2 + 10 \cdot x - 25 - 3 = 0,$$

$$2 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 28 = 0,$$

$$x^2 + 5 \cdot x - 14 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{(-5) \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14}}{2 \cdot 1} = \frac{(-5) \pm \sqrt{25+56}}{2} = \frac{(-5) \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{(-5) \pm 9}{2} \Rightarrow$$
$$x_1 = \frac{(-5)+9}{2} = \frac{4}{2} = 2,\ x_2 = \frac{(-5)-9}{2} = -\frac{14}{2} = -7$$

Pripadne vrijednosti nepoznanice y su:

$$y_1 = -x_1 + 5 = -2 + 5 = 3,$$
$$y_2 = -x_2 + 5 = -(-7) + 5 = 7 + 5 = 12.$$

Stoga su sjecišta zadanih krivulja $S_1(x_1, y_1) = (2, 3)$ i $S_2(x_2, y_2) = (-7, 12)$. Tražena duljina tetive jednaka je udaljenosti točaka S_1 i S_2. Primjenom formule za udaljenost dviju točaka u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini dobijemo:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-7-2)^2 + (12-3)^2} = \sqrt{(-9)^2 + 9^2} = \sqrt{9^2 + 9^2}$$
$$d = \sqrt{2 \cdot 9^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{9^2} = \sqrt{2} \cdot 9 = 9 \cdot \sqrt{2} \text{ jedinica duljine}$$

14. D. Rješenja prve jednadžbe su $x_1 = -2$ i $x_2 = 5$, a niti jedan od tih brojeva nije prirodan broj. (Oba rješenja su strogo negativni cijeli brojevi.)
Skup svih rješenja druge jednadžbe dobijemo kao uniju skupa svih rješenja jednadžbe $2 \cdot x - 3 = 2$ i skupa svih rješenja jednadžbe $2 \cdot x - 3 = = -2$. Jedino rješenje prve od tih jednadžbi je $x = \frac{5}{2}$, a jedino rješenje potonje jednadžbe je $x = \frac{1}{2}$. Stoga je skup svih rješenja druge jednadžbe $S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ i taj skup ne sadrži niti jedan prirodan broj (njegovi elementi su strogo pozitivni racionalni brojevi $\frac{1}{2}$ i $\frac{5}{2}$.)
Da dobijemo skup svih rješenja treće jednadžbe, zapišimo desnu stranu te jednadžbe kao potenciju s bazom $\frac{1}{2}$. Dobivamo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot x + 3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Izjednačavanjem eksponenata dobivamo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom:

$$2 \cdot x + 3 = 2,$$

čije je jedino rješenje $x = -\frac{1}{2}$. Taj broj nije prirodan broj, nego strogo negativan racionalan broj.
Da dobijemo skup svih rješenja četvrte jednadžbe, koristimo identitet log 10 = 1 i bijektivnost logaritamske funkcije:

$$\log(x - 3) = \log 10,$$
$$x - 3 = 10,$$
$$x = 13.$$

$x = 13$ je prirodan broj, pa zaključujemo da jedino četvrta jednadžba ima rješenje u skupu prirodnih brojeva.

15. A. U zakon zaboravljanja $\log U = \log U_0 - c \cdot \log(t + 1)$ uvrstimo $U_0 = 82$, $c = 0.3$ i $t = 12$ (jer Tin ponovno piše ispit nakon jedne godine, odnosno 12 mjeseci). Dobivamo:

$$\log U = \log 82 - 0.3 \cdot \log(12 + 1)$$
$$\log U = \log 82 - 0.3 \cdot \log 13$$
$$\log U = \log 82 - \log(13^{0.3})$$
$$\log U = \log \frac{82}{13^{0.3}}.$$

Odatle slijedi

$$U = \frac{82}{13^{0.3}} \approx 37{,}99 \approx 38.$$

Dakle, prema zakonu zaboravljanja, nakon godinu dana Tin bi očekivano postigao približno 38 bodova.

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

16. 10 846. Neka je I iznos koji je primila Ida, a P iznos koji je dobio Petar. Iz podatka $I : P = 7 : 5$ slijedi da postoji strogo pozitivan realan broj k takav da je $I = 7 \cdot k$ i $P = 5 \cdot k$. Ukupan zbroj iznosa koji su dobili Ida i Petar treba biti jednak 65 076 kn, tj. mora vrijediti jednakost

$$I + P = 65\,076.$$

Uvrstimo li u ovu jednakost $I = 7 \cdot k$ i $P = 5 \cdot k$, dobit ćemo linearnu jednadžbu

$$7 \cdot k + 5 \cdot k = 65\,076,$$

odnosno

$$12 \cdot k = 65\,076.$$

Odatle je $k = 5\,423$. Razlika iznosa koji je primila Ida i iznosa koji je primio Petar jednaka je

$$I - P = 7 \cdot k - 5 \cdot k = 2 \cdot k = 2 \cdot 5\,423 = 10\,846 \text{ kn.}$$

17. 12 – *a* ili –*a* + 12. Iz druge jednadžbe sustava izrazimo nepoznanicu y:

$$y = -x + 3$$

i uvrstimo u prvu jednadžbu sustava:

$$3 \cdot x + 4 \cdot (-x + 3) = a,$$
$$3 \cdot x - 4 \cdot x + 12 = a,$$
$$-x = a - 12.$$

Odatle je $x = 12 - a$ ili $x = -a + 12$.

18. 1.) 6. Ukupan broj učenika koji su se razboljeli jednak je 3.6% od 750, odnosno

$$r = \frac{3.6}{100} \cdot 750 = 27.$$

Od tih 27 razboljelih učenika, $\frac{2}{9}$ njih imalo je gripu. Njihov ukupan broj jednak je:

$$g = \frac{2}{9} \cdot 27 = 6.$$

2.) $\frac{4}{3}$ **ili približno 1.33.** Ukupan broj učenika koji su se razboljeli, a nisu imali gripu jednak je

$$r_1 = r - g = 27 - 6 = 21.$$

Trećina toga broja iznosi:

$$r_2 = \frac{1}{3} \cdot r_1 = \frac{1}{3} \cdot 21 = 7.$$

Nadalje, polovica broja jednakoga broju učenika koji su imali gripu jednaka je:

$$g_2 = \frac{1}{2} \cdot g = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

Prema tome, posljednjega dana polugodišta u školu nije došlo ukupno

$$s = r_2 + g_2 = 7 + 3 = 10 \text{ učenika.}$$

Preostaje izračunati koliko postotaka iznosi 10 u odnosu na 750. Taj je broj jednak:

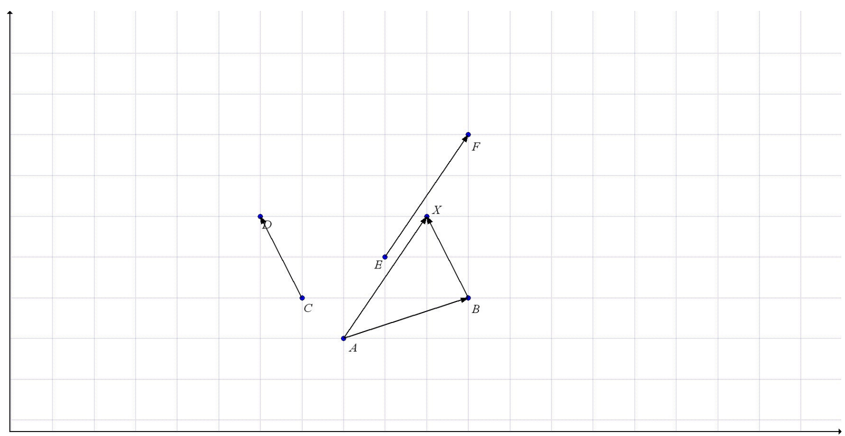
$$p = \frac{10}{750} \cdot 100 = \frac{1000}{750} = \frac{4}{3},$$

tj. $p = \frac{4}{3}$ % ili približno $p \approx 1.33\%$.

19. 1.) Postupak: *Korak* 1. Nacrtamo vektor jednak vektoru $\overrightarrow{CD}$ čiji je početak u točki B. Neka je X krajnja točka toga vektora.

Korak 2. Prema pravilu trokuta, vektor $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ jednak je vektoru $\overrightarrow{AX}$.

Korak 3. Nacrtamo vektor jednak vektoru $\overrightarrow{AX}$ čiji je početak u točki E. Krajnja točka toga vektora je tražena točka F. (Vidjeti Sliku 1.)



Slika 1.

2.) –1. Zadani vektori bit će okomiti ako i samo ako njihov skalarni umnožak bude jednak nuli. Stoga imamo redom:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$
$$6 \cdot 2 + (-4) \cdot (2 \cdot k + 5) = 0$$
$$12 - 8 \cdot k - 20 = 0$$
$$(-8) \cdot k = 20 - 12$$
$$(-8) \cdot k = 8$$
$$k = -1$$

20. 1.) –3. Pomnožimo zadanu jednadžbu s najmanjim zajedničkim višekratnikom svih razlomaka koji se pojavljuju u njoj, tj. s $NZV(5, 4) = 20$. Dobivamo:

$$4 \cdot 2 \cdot (x - 2) = 5 \cdot 1 \cdot (x - 5),$$
$$8 \cdot x - 16 = 5 \cdot x - 25$$
$$8 \cdot x - 5 \cdot x = -25 + 16$$
$$3 \cdot x = -9.$$

Odatle je $x = -3$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U SVIBNJU 2011. – VIŠA RAZINA

2.) ⟨–3, 1⟩. Nultočke kvadratne funkcije $f(x) = x^2 + 2 \cdot x - 3$ dobijemo rješavajući kvadratnu jednadžbu $x^2 + 2 \cdot x - 3 = 0$. Njezina su rješenja $x_1 = -3$ i $x_2 = 1$. Budući da je vodeći koeficijent (koeficijent uz x^2) jednak 1, tj. strogo pozitivan, funkcija f poprima strogo negativne vrijednosti isključivo na otvorenom intervalu određenom njezinim nultočkama, tj. za $x \in \langle -3, 1\rangle$. Stoga je skup svih rješenja polazne jednadžbe interval $\langle -3, 1\rangle$.

21. 1.) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$. Iz slike očitamo koordinate središta kružnice: $S(1, -3)$. Budući da kružnica prolazi točkom $A(1, 2)$, njezin je polumjer jednak udaljenosti točaka A i S, tj. $r = 5$. Stoga traženu jednadžbu kružnice dobijemo tako da u opći oblik jednadžbe kružnice

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

uvrstimo $p = 1$, $q = -3$ i $r = 5$. Dobijemo:

$$k \ldots\ (x - 1)^2 + [y - (-3)]^2 = 5^2,$$

odnosno

$$k \ldots\ (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

2.) $y = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x - \frac{4}{3}$. Iz podatka da je tražena tangenta usporedna s pravcem $y = -\frac{1}{3} \cdot x$ zaključujemo da je koeficijent smjera te tangente $k = -\frac{1}{3}$. Stoga jednadžbu tangente možemo zapisati u obliku:

$$y = -\frac{1}{3} \cdot x + l.$$

Odredimo sjecište tangente i zadane kružnice. Primijetimo: Prema uvjetu zadatka, to sjecište mora pripadati III. kvadrantu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. To znači da su vrijednosti obiju koordinata sjecišta tangente i zadane kružnice strogo negativni realni brojevi. Iz gornje jednadžbe tangente slijedi

$$l = y + \frac{1}{3} \cdot x,$$

pa iz činjenice da tangenta prolazi točkom $T = (x_T, y_T)$ čije su obje koordinate strogo negativni realni brojevi zaključujemo da vrijedi nejednakost

$$l < 0.$$

Naime, tada vrijedi:

$$l = y_T + \frac{1}{3} \cdot x_T.$$

Po pretpostavci vrijede nejednakosti $x_T < 0$ i $y_T < 0$, pa je svaki pribrojnik na desnoj strani gornje jednakosti strogo negativan. Stoga je i njihov zbroj strogo negativan, a otuda izravno slijedi $l < 0$.

Rješavamo sustav jedne linearne jednadžbe i jedne kvadratne jednadžbe:

$$y = -\frac{1}{3} \cdot x + l,$$
$$x^2 + (y-2)^2 = 10.$$

Taj je sustav najlakše riješiti tako da prvu jednadžbu sustava uvrstimo u drugu. Dobivamo:

$$x^2 + \left(-\frac{1}{3} \cdot x + l - 2\right)^2 = 10$$
$$x^2 + \left(-\frac{1}{3} \cdot x\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot x\right) \cdot (l-2) + (l-2)^2 = 10$$

$$x^2 + \frac{1}{9} \cdot x^2 - \frac{2}{3} \cdot (l-2) \cdot x + (l-2)^2 - 10 = 0 \,/ \cdot 9$$
$$10 \cdot x^2 - 6 \cdot (l-2) \cdot x + 9 \cdot (l-2)^2 - 90 = 0$$

Dobivena kvadratna jednadžba (po nepoznanici x) mora imati točno jedno realno rješenje jer svaka tangenta kružnice siječe tu kružnicu u točno jednoj točki. To znači da diskriminanta dobivene kvadratne jednadžbe treba biti jednaka nuli. Budući da je:

$$D = [(-6) \cdot (l-2)]^2 - 4 \cdot 10 \cdot [9 \cdot (l-2)^2 - 90] = 36 \cdot (l-2)^2 - 360 \cdot (l-2)^2 + 3\,600,$$

odnosno

$$D = (-324) \cdot (l-2)^2 + 3600,$$

dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$(-324) \cdot (l-2)^2 + 3600 = 0,$$

odnosno

$$(l-2)^2 = \frac{100}{9}.$$

Odatle je

$$l - 2 = \pm\frac{10}{3}.$$

Zbog ranije dobivene nejednakosti $l < 0$, ne može biti $l - 2 = \frac{10}{3}$, pa preostaje

$$l - 2 = -\frac{10}{3},$$

odnosno

$$l = -\frac{10}{3} + 2 = \frac{-10 + 6}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Stoga je tražena jednadžba tangente (u eksplicitnom obliku) $t \ldots\ y = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x - \frac{4}{3}$

22. 1.) $-\frac{1}{2}$. Najprije riješimo jednadžbu

$$\frac{2 \cdot x - 1}{x} = 4$$

Množenjem te jednadžbe s x dobijemo:

$$2 \cdot x - 1 = 4 \cdot x,$$

odnosno

$$2 \cdot x - 4 \cdot x = 1,$$

odnosno

$$(-2) \cdot x = 1.$$

Odatle je $x = -\frac{1}{2}$. Tako uvrštavanjem $x = -\frac{1}{2}$ u jednakost $f\left(\frac{2 \cdot x - 1}{x}\right) = x$ dobijemo:

$$f(4) = -\frac{1}{2}.$$

2.) [3, 7⟩. Vrijednost drugoga korijena (kao realne funkcije inverzne funkciji x^2) je uvijek nenegativan realan broj, pa iz podataka u zadatku slijedi da mora vrijediti nejednakost

$$0 \le \sqrt{x - 3} < 2.$$

Kvadriranjem te nejednakosti (koje smijemo provesti jer su svi članovi nejednakosti nenegativni realni brojevi i koje neće izmijeniti niti jedan od znakova nejednakosti) dobijemo:

$$0 \le x - 3 < 4.$$

Dodamo li 3 svakom članu ove nejednakosti, znakovi nejednakosti neće se promijeniti. Stoga je:

$$3 \le x < 7.$$

Prema tome, traženi skup je interval $[3, 7\rangle$.

23. 1.) –26. Navedene točke pripadat će istom pravcu ako i samo ako je površina trokuta određenoga tim točkama jednaka nuli. Tu površinu računamo iz izraza:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left| 3 \cdot (-1 - y) + 2 \cdot (y - 4) + (-3) \cdot [4 - (-1)] \right|.$$

Dobivamo:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left| -3 - 3 \cdot y + 2 \cdot y - 8 + (-3) \cdot 5 \right|$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot \left| -y - 26 \right|$$

Iz uvjeta $P = 0$ i svojstva $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ slijedi:

$$-y - 26 = 0,$$

odnosno

$$-y = 26.$$

Odavde je $y = -26$.

2.) $y = \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot x + 43$. Odredimo najprije točki čija je ordinata $y = 3$, a pripada zadanom pravcu. U tu svrhu u jednadžbu zadanoga pravca uvrstimo $y = 3$. Dobivamo:

$$2 \cdot x - 5 \cdot 3 - 17 = 0,$$

odnosno

$$2 \cdot x = 17 + 15,$$

odnosno

$$2 \cdot x = 32.$$

Odavde je $x = 16$. Prema tome, točka $S(16, 3)$ pripada zadanom pravcu, ali i traženom pravcu jer traženi pravac siječe zadani pravac upravo u točki S. Nadalje, odredimo koeficijent smjera zadanoga pravca. U tu svrhu iz zadane jednadžbe pravca izrazimo varijablu y:

$$(-5) \cdot y = (-2) \cdot x + 17,$$
$$y = \frac{2}{5} \cdot x - \frac{17}{5}.$$

Koeficijent smjera zadanoga pravca je $k = \frac{2}{5}$. Koeficijent smjera traženoga pravca – koji je okomit na zadani – je suprotan i recipročan u odnosu na koeficijent smjera zadanoga pravca:

$$k_1 = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{\frac{2}{5}} = -\frac{5}{2}.$$

Preostaje napisati jednadžbu pravca koji prolazi točkom $S(16, 3)$ i ima koeficijent smjera $k_1 = -\frac{5}{2}$. Ta jednadžba glasi:

$$y - 3 = \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot (x - 16)$$
$$y = \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot x + 40 + 3$$
$$y = \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot x + 43$$

24. 1.) 41. Zadani niz je aritmetički niz čiji je prvi član $a_1 = 97$, a razlika $d = -4$. Stoga je petnaesti član toga niza jednak

$$a_{15} = a_1 + (15 - 1) \cdot d = 97 + 14 \cdot (-4) = 97 - 56 = 41.$$

2.) 1 225. Odredimo najprije ukupan broj svih strogo pozitivnih članova zadanoga niza. Zadani niz je strogo padajući (jer je $d = -4 < 0$), pa tražimo prvi $n \in \mathbf{N}$ takav da je $a_n < 0$. Budući da je $a_n = = a_1 + (n - 1) \cdot d$, uvrštavanjem $a_1 = 97$ i $d = -3$ dobivamo nejednadžbu:

$$97 + (n - 1) \cdot (-4) < 0,$$

odnosno

$$97 - 4 \cdot n + 4 < 0,$$

odnosno

$$(-4) \cdot n < -97 - 4,$$

odnosno

$$(-4) \cdot n < -101.$$

Dijeljenjem ove nejednadžbe s (–4) znak nejednakosti će se promijeniti, pa dobivamo:

$$n > \frac{101}{4} = 25\frac{1}{4}.$$

Odatle zaključujemo da su prvih 25 članova niza strogo pozitivni cijeli brojevi, a da su svi članovi niza, počevši od 26. člana, strogo negativni cijeli brojevi. Stoga je traženi zbroj jednak zbroju prvih 25 članova zadanoga niza. Uvrstimo li $n = 25$, $a_1 = 97$ i $d = -4$ u formulu

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right],$$

dobit ćemo:

$$S_{25} = \frac{25}{2} \cdot \left[2 \cdot 97 + (25-1) \cdot (-4)\right] = \frac{25}{2} \cdot (194 - 96) = \frac{25}{2} \cdot 98 = 25 \cdot 49 = 1\ 225.$$

25. 1.) 24. U zadanu jednadžbu uvrstimo $t = 7$. Dobivamo:

$$T(7) = 16 \cdot \cos\left(\frac{7 \cdot \pi - 15 \cdot \pi}{12}\right) + 32 = 16 \cdot \cos\left(-\frac{8}{12} \cdot \pi\right) + 32 = 16 \cdot \cos\left(-\frac{2}{3} \cdot \pi\right) + 32.$$

Funkcija $f(x) = \cos x$ je parna funkcija, tj. za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi jednakost

$$f(-x) = f(x).$$

Stoga je:

$$T(7) = 16 \cdot \cos\left(\frac{2}{3} \cdot \pi\right) + 32 = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 32 = -8 + 32 = 24.$$

2.) 18 sati 43 minute 5 sekundi. U zadanu formulu uvrstimo $T(t) = 41$ i riješimo dobivenu jednadžbu po nepoznanici t uvažavajući nejednakost $0 \leq t \leq 24$. Dobivamo:

$$41 = 16 \cdot \cos\left(\frac{t \cdot \pi - 15 \cdot \pi}{12}\right) + 32$$
$$41 - 32 = 16 \cdot \cos\left(\frac{t \cdot \pi - 15 \cdot \pi}{12}\right)$$

$$9 = 16 \cdot \cos\left(\frac{t \cdot \pi - 15 \cdot \pi}{12}\right)$$
$$\cos\left(\frac{t \cdot \pi - 15 \cdot \pi}{12}\right) = \frac{9}{16}$$
$$\frac{t \cdot \pi - 15 \cdot \pi}{12} = \arccos\frac{9}{16}$$
$$t \cdot \pi - 15 \cdot \pi = 12 \cdot \arccos\frac{9}{16}$$
$$t \cdot \pi = 12 \cdot \arccos\frac{9}{16} + 15 \cdot \pi$$
$$t = \frac{12}{\pi} \cdot \arccos\frac{9}{16} + 15$$

Izračunom pomoću kalkulatora (pri čemu $\arccos\frac{9}{16}$ treba iskazati u radijanima) dobivamo:

$t \approx 18.71$ h = 18 sati 43 minute 5 sekundi.

3.) 48. Najviša temperatura postiže se kad je vrijednost funkcije cos jednaka 1 (jer je najveća vrijednost funkcije cos jednaka 1.) Ispitajmo postoji li $t \in [0, 24]$ takav da je $\cos\left(\frac{t \cdot \pi - 15 \cdot \pi}{12}\right) = 1$. Imamo redom:

$$\cos\left(\frac{t \cdot \pi - 15 \cdot \pi}{12}\right) = 1$$
$$\frac{t \cdot \pi - 15 \cdot \pi}{12} = 2 \cdot k \cdot \pi$$
$$t \cdot \pi - 15 \cdot \pi = 24 \cdot k \cdot \pi / : \pi$$
$$t - 15 = 24 \cdot k$$
$$t = 24 \cdot k + 15,\ k \in \mathbf{Z}$$

Iz zahtjeva $t \in [0, 24]$ slijedi

$$0 \le t \le 24,$$

odnosno

$$0 \le 24 \cdot k + 15 \le 24.$$

Postojanje broja $t \in [0, 24]$ takvoga da je $\cos\left(\frac{t\cdot\pi - 15\cdot\pi}{12}\right) = 1$ ekvivalentno je postojanju cijeloga broja k takvoga da je $0 \le 24 \cdot k + 15 \le 24$. Oduzmemo li 15 od svakoga člana ove nejednakosti, dobit ćemo:

$$-15 \le 24 \cdot k \le 9,$$

odnosno nakon dijeljenja s 24,

$$-\frac{5}{8} \le k \le \frac{3}{8}.$$

Jedini cijeli broj za kojega vrijedi ta nejednakost je $k = 0$. Za $k = 0$ pripadna vrijednost varijable t iznosi

$$t = 24 \cdot 0 + 15 = 15.$$

Stoga možemo zaključiti da je najviša temperatura u promatranom danu postignuta u 15 sati i da je iznosila

$$T(15) = 16 \cdot 1 + 32 = 16 + 32 = 48°\text{C}.$$

26. **$|BD| \approx 2.215$ cm, $|AC| \approx 13.673$ cm.** Izračunajmo najprije kut $\angle BDA$. Koristeći sinusov poučak dobivamo:

$$\frac{10.80}{\sin(\angle BDA)} = \frac{12.12}{\sin 122°}.$$

Odatle je

$$\sin(\angle BDA) = \frac{10.80}{12.12} \cdot \sin 122° = 0.75568642231760730034411738695183,$$

pa je

$$\angle BDA = 49.085384032434522442677966210109° \approx 49°5'7''.$$

Stoga je kut $\angle DAB$ jednak

$$\angle DAB = 180° - (122° + 49°5'7'') = 8°54'53''.$$

Primijenimo kosinusov poučak na trokut ABD:

$$|BD| = \sqrt{|AD|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |AB| \cdot \cos\angle DAB} = \sqrt{12.12^2 + 10.80^2 - 2 \cdot 12.12 \cdot 10.80 \cdot \cos(8°54'53'')}$$

$$|BD| = 2.2146842626263523826666366609056 \text{ cm}$$

Dakle, $|BD| \approx 2.215$ cm. Budući da je D polovište dužine BC (jer je AD težišnica na stranicu BC), duljina dužine BC je dvostruko veća od duljine dužine BD. Dakle,

$$|BC| = 4.42936852525270476533327332181130 \text{ cm.}$$

Preostaje primijeniti kosinusov poučak na trokut ABC:

$$|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos\angle ABC}$$
$$|AC| = \sqrt{10.80^2 + 4.429368525^2 - 2 \cdot 10.80 \cdot 4.42936852525 \cdot \cos 122°}$$
$$|AC| = 13.67329485 \text{ cm}$$

Zaključimo: $|BD| \approx 2.215$ cm, $|AC| \approx 13.673$ cm**.**

27. $(x, y) = \left(\frac{5}{2}, -1\right)$. Koristeći identitet

$$\log_a a = 1, \text{ za svaki } a > 0,\ a \neq 1$$
,

prvu jednadžbu sustava transformiramo na sljedeći način:

$$\log_5(8 \cdot x) = \log_5 5 + \log_5 4$$
$$\log_5(8 \cdot x) = \log_5(5 \cdot 4)$$
$$\log_5(8 \cdot x) = \log_5(20)$$
$$8 \cdot x = 20$$

Otuda je $x = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$. Uvrstimo li dobiveni rezultat u drugu jednadžbu sustava, dobijemo:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^y = \frac{2}{5}$$
$$\left(\frac{5}{2}\right)^y = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1}$$
$$y = -1$$

Dakle, rješenje polaznoga sustava je $x = \frac{5}{2}$, $y = -1$, odnosno uređeni par $(x, y) = \left(\frac{5}{2}, -1\right)$.

28. 1.) 308. Pčelar je napunio 4 posude s ukupno $4 \cdot 50 = 200$ litara meda. U petu posudu stavio je ukupno $\frac{40}{100} \cdot 50 = 20$ litara meda. Stoga je ukupni obujam meda

$$V = 200 + 20 = 220 \text{ litara} = 220 \text{ dm}^3,$$

a njegova ukupna masa

$$m = \rho \cdot V = 1.4 \text{ kg/dm}^3 \cdot 220 \text{ dm}^3 = 308 \text{ kg}.$$

2.) 10 780. Traženi iznos jednak je 308 kg · 35 kn/kg = 10 780 kn.

3.) 0.714. Obujam 1 kg meda jednak je $V = \frac{m}{\rho} = \frac{1 \text{ kg}}{1.4 \text{ kg/dm}^3} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \approx 0.714 \text{ dm}^3$

III. ZADATCI PRODUŽENIH ODGOVORA

29. 1.) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $T(1, -2)$. Nultočke zadane funkcije su sva realna rješenja jednadžbe $f(x) = 0$. Imamo redom:

$$\begin{gathered} f(x) = 0 \\ x^3 - 3 \cdot x^2 = 0 \\ x^2 \cdot (x - 3) = 0. \end{gathered}$$

Umnožak dvaju realnih brojeva jednak je nuli ako i samo ako je barem jedan od tih brojeva jednak nuli. Iz $x^2 = 0$ slijedi $x = 0$, a iz $x - 3 = 0$ slijedi $x = 3$. Stoga su sve nultočke zadane funkcije $x_1 = 0$ i $x_2 = 3$.
Ordinatu točke čija je apscisa jednaka 1 odredit ćemo tako da izračunamo $f(1)$:

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = 1 - 3 \cdot 1 = -2.$$

Dakle, tražena je točka $T(1, -2)$.

2.) $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x$. Prva derivacija zadane funkcije jednaka je:

$$f'(x) = (x^3)' - (3 \cdot x^2)' = 3 \cdot x^{3-1} - 3 \cdot (x^2)' = 3 \cdot x^2 - 3 \cdot (2 \cdot x^{2-1}) = 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x^1 = 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x.$$

3.) f ima lokalni maksimum 0 u točki $x = 0$, a lokalni minimum –4 u točki $x = 2$. Kandidate za lokalne ekstreme (tzv. stacionarne točke) dobijemo rješavajući jednadžbu $f'(x) = 0$. Imamo redom:

$$\begin{gathered} 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x = 0 \quad /:3, \\ x^2 - 2 \cdot x = 0, \\ x \cdot (x - 2) = 0. \end{gathered}$$

Analogno kao i u **1.)** zaključujemo da su sva rješenja posljednje jednadžbe $x_3 = 0$ i $x_4 = 2$. Odredimo drugu derivaciju funkcije f:

$$\begin{gathered} f''(x) = [f'(x)]' = (3 \cdot x^2 - 6 \cdot x)' = (3 \cdot x^2)' - (6 \cdot x)' = 3 \cdot (x^2)' - 6 \cdot (x)' \\ f''(x) = 3 \cdot (2 \cdot x^{2-1}) - 6 \cdot (1 \cdot x^{1-1}) = 6 \cdot x^1 - 6 \cdot x^0 = 6 \cdot x - 6. \end{gathered}$$

Dakle, $f''(x) = 6 \cdot x - 6$. Izračunamo $f''(x_3)$ i $f''(x_4)$:

$$f''(x_3) = f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = 0 - 6 = -6,$$
$$f''(x_4) = f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 12 - 6 = 6.$$

Prema f'' – testu, funkcija f ima strogi lokalni maksimum $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0 - 0 = 0$ u točki $x = 0$ jer je vrijednost druge derivacije te funkcije u navedenoj točki strogo manja od nule. Analogno, f ima strogi lokalni minimum $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 3 \cdot 4 = 8 - 12 = -4$ u točki $x = 2$ jer je vrijednost druge derivacije te funkcije u navedenoj točki strogo veća od nule.

4.) $\boldsymbol{t \ldots y = 9 \cdot x + 5}$. Koeficijent smjera tražene tangente jednak je vrijednosti prve derivacije funkcije f za $x = -1$. Stoga računamo:

$$k = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 3 \cdot 1 + 6 = 9.$$

Nadalje, vrijednost zadane funkcije za $x = -1$ jednaka je

$$y_T = f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 = (-1) - 3 \cdot 1 = (-1) - 3 = -4.$$

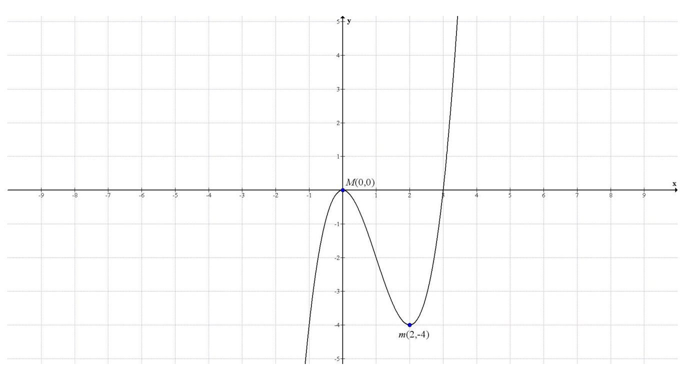
Dakle, tangenta dodiruje graf funkcije f u točki $T(-1, -4)$. (*Napomena*: Koordinate te točke mogli smo očitati i iz Slike 2.) Preostaje napisati jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T(-1, -4)$ i ima koeficijent smjera $k = 9$:

$$t \ldots y - (-4) = 9 \cdot [x - (-1)],$$
$$y + 4 = 9 \cdot (x + 1),$$
$$y = 9 \cdot x + 9 - 4,$$
$$y = 9 \cdot x + 5.$$

5.) Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 2. Korisno je uočiti da vrijede jednakosti:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Prirodno područje definicije funkcije f, kao i svakoga polinoma, je skup **R**. Iz grafa se može vidjeti da f doista ima lokalne, ali ne i globalne ekstreme.



Slika 2.

30. 36°52'12''. Iz pravokutnoga trokuta OA_1B slijedi

$$\cos\alpha = \frac{|OA_1|}{|OB|} = \frac{|OA_1|}{r},$$

a otuda je

$$|OA_1| = r \cdot \cos\alpha.$$

Analogno, iz pravokutnoga trokuta OA_2B_1 slijedi

$$\cos\alpha = \frac{|OA_2|}{|OB_1|} = \frac{|OA_2|}{|OA_1|} = \frac{|OA_2|}{r\cdot\cos\alpha},$$

a odavde je

$$|OA_2| = r \cdot \cos^2\alpha.$$

Nastavljajući induktivno dalje zaključujemo da za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi jednakost

$$\cos\alpha = \frac{|OA_{n+1}|}{|OA_n|},$$

odnosno da za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi jednakost:

$$|OA_n| = r \cdot \cos^n\alpha.$$

Uvedemo li oznaku $A_0 = A$ i $B_0 = B$, onda je zbroj duljina svih kružnih lukova jednak:

$$l = \sum_{n=0}^{+\infty} \overset{\frown}{A_nB_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|OA_n|\cdot\pi\cdot\alpha}{180°} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r\cdot\cos^n\alpha\cdot\pi\cdot\alpha}{180°} = \frac{r\cdot\pi\cdot\alpha}{180°}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\cos^n\alpha =$$
$$= \frac{r\cdot\pi\cdot\alpha}{180°}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(\cos\alpha)^n = \frac{r\cdot\pi\cdot\alpha}{180°}\cdot\frac{(\cos\alpha)^0}{1-\cos\alpha} = \frac{r\cdot\pi\cdot\alpha}{180°}\cdot\frac{1}{1-\cos\alpha}$$

Ovdje smo primijenili identitet

$(\cos\alpha)^0 + (\cos\alpha)^1 + (\cos\alpha)^2 + \ldots =$ (zbroj beskonačnoga konvergentnoga geometrijskoga reda kojemu je prvi član $a_1 = (\cos\alpha)^0 = 1$, a količnik $q = \cos\alpha$) $= \dfrac{1}{1-\cos\alpha}$.

Iz zadanih podataka dobivamo jednadžbu

$$\frac{10\cdot\pi\cdot\alpha}{180°}\cdot\frac{1}{1-\cos\alpha} = \frac{5\cdot\pi\cdot\alpha}{18}.$$

Tu jednadžbu dalje transformiramo ovako:

$$\frac{2}{180°}\cdot\frac{1}{1-\cos\alpha}=\frac{1}{18}$$
$$\frac{1}{90°}\cdot\frac{1}{1-\cos\alpha}=\frac{1}{18}$$
$$90\cdot(1-\cos\alpha)=18$$
$$1-\cos\alpha=\frac{18}{90}$$
$$1-\cos\alpha=\frac{1}{5}$$
$$\cos\alpha=1-\frac{1}{5}$$
$$\cos\alpha=\frac{5-1}{5}$$
$$\cos\alpha=\frac{4}{5}$$

Odatle slijedi $\alpha=\arccos\frac{4}{5}\approx 36{,}869897645844°\approx 36°52'12''$.