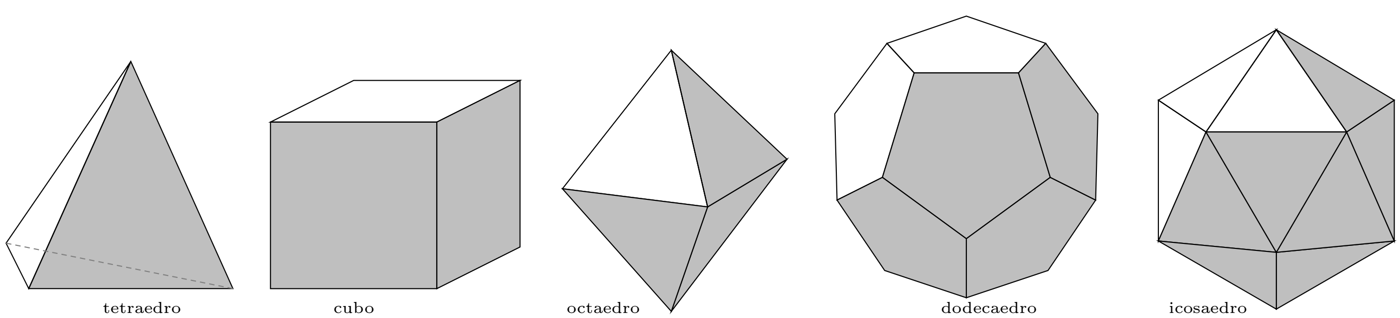
MATEMÁTICAS CCSS

MATEMÁTICAS CCSS

MATEMÁTICAS CCSS

SELECTIVIDAD MURCIA



15 de julio de 2021

Germán Ibáñez
http://www.otrapagina.com/matematicas

Índice general

Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 1

Año 2021

1.1. Julio 2021

- CUESTIÓN 1

  Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

  a) Calcular el valor de a y b para que se cumpla: $AB = BA$.

  b) Para $a = 1$ y $b = 0$, resuelva la ecuación: $XB - A = I$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

  selcs Jul 2021 Solución:

  a) $A\,B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix}$

  $B\,A = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 2a \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$

  Igualando elementos: $12 = 3b; \quad 2 = 2a; \quad 3a = 3; \quad 3b = 12$ Por tanto ha de ser $a = 1; b = 4$

  b) Tenemos: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

  Primero resolvemos la ecuación matricial: $XB - A = I; \quad XB = I + A; \quad XBB^{-1} = (I + A)B^{-1}; \quad X = (I + A)B^{-1}$

  La inversa de B es B^{-1}:

  Método 1: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; 2^a + 1^a \cdot (-6) \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ ya está la matriz unidad en el principio, luego: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

  Método 2: La inversa de una matriz es la adjunta de la traspuesta dividida por el determinante: |B|= 1;

  $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad adj(B^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

  $X = (I + A)B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

- CUESTIÓN 2

Sea el sistema de inecuaciones: $\left.\begin{array}{l} 3x+y\leq 12 \\ y\geq \dfrac{x}{2}-2 \\ x-2y\geq -3 \\ 2x+3y\geq 1 \end{array}\right\}$

a) Representar gráficamente la región del plano S definido por el sistema de inecuaciones anterior y determine los vértices de dicha región.

b) Calcular los puntos de la región S dónde la función $f(x,y)=3x-2y$ alcanza sus valores máximos y mínimos.

selcs Jul 2021 Solución:

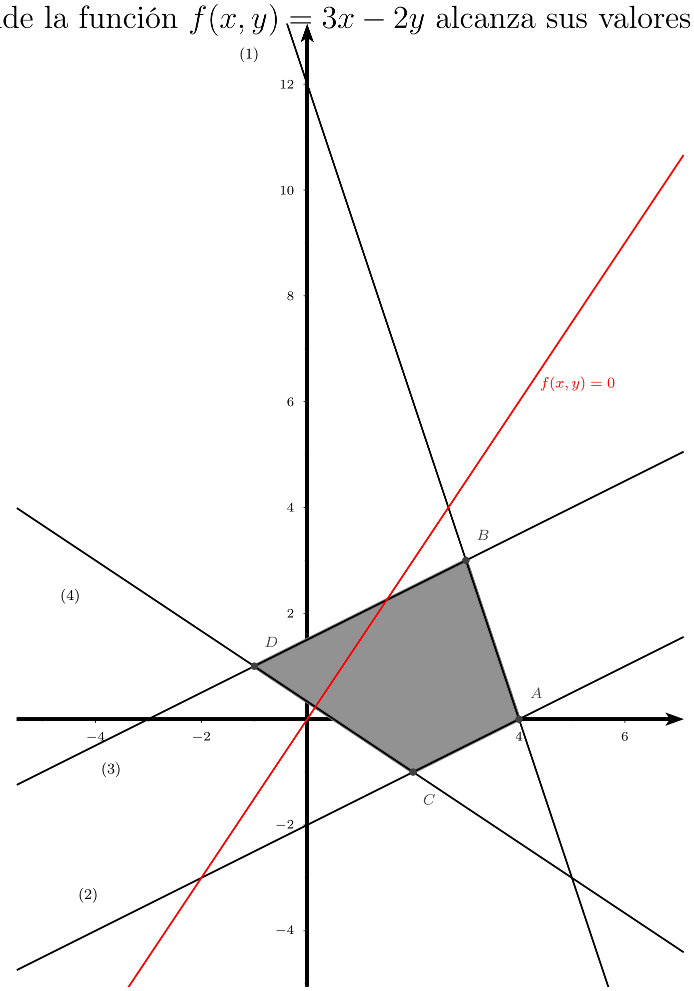
a)

$(1):\quad 3x+y\leq 12\qquad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 4 \\ \hline y & 12 & 0 \end{array}$

$(2):\quad y\geq \dfrac{x}{2}-2\qquad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 4 \\ \hline y & -2 & 0 \end{array}$

$(3):\quad x-2y\geq -3\qquad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 3 \\ \hline y & 3/2 & 0 \end{array}$

$(4):\quad 2x+3y\geq 1\qquad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1/2 \\ \hline y & 1/3 & 0 \end{array}$



Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones

A vértice intersección $\left\{\begin{array}{l} 3x+y=12 \\ y=\dfrac{x}{2}-2 \end{array}\right.$ es $A(4,0)$

B vértice intersección $\left\{\begin{array}{l} 3x+y=12 \\ x-2y=-3 \end{array}\right.$ es $B(3,3)$

C vértice intersección $\left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{x}{2}-2 \\ 2x+3y=1 \end{array}\right.$ es $C(2,-1)$

D vértice intersección $\left\{\begin{array}{l} x-2y=-3 \\ 2x+3y=1 \end{array}\right.$ es $D(-1,1)$

b) La función $f(x,y)=3x-2y$ crece hacia la derecha y hacia abajo.

Trazamos la recta: $f(x,y)=0;\quad x-3y=0\qquad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 3 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$

Por el dibujo es claro que:

Alcanza el máximo en el punto $A(4,0)$ y vale $f(4,0)=3\cdot 4-2\cdot 0=12$

Alcanza el mínimo en el punto $D(-1,1)$ y vale $f(-1,1)=3\cdot(-1)-2\cdot 1=-5$

- CUESTIÓN 3

En un concierto celebrado en Murcia se ha estimado el número de miles de jóvenes que han asistido a él en función de la hora de llegada, t , mediante la función $f(t) = \dfrac{10}{(t-6)^2+1}$. Hallar la hora en el que había el mayor número de personas en el concierto. ¿Cuál fue esa cantidad máxima? Razone la respuesta.

selcs Jul 2021 Solución:

Para hallar el máximo derivamos: $f'(t) = \dfrac{-10\cdot 2(t-6)}{\left((t-6)^2+1\right)^2}$ se anula para $t=6$, estudiamos el crecimiento:

t		6	
f'	$+$		$-$
f	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$

El número máximo es por tanto $f(6) = \dfrac{10}{(6-6)^2+1} = 10$

El número máximo es a las 6 horas de concierto y son 10000 jóvenes

- CUESTIÓN 4

Dada la función $f(x) = ax^2 + 3x + \dfrac{b}{x}$

a) Calcule los valores de a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en el punto $(1,2)$ y determine si ese extremo es un máximo o un mínimo.

b) Si en la función anterior $a=2$ y $b=0$, determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$

selcs Jul 2021 Solución:

a) La función pasa por el punto $(1,2)$, por tanto $f(1) = a\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + \dfrac{b}{1} = a+3+b = 2$

La derivada es $f'(x) = 2ax + 3 - \dfrac{b}{x^2}$

Si tiene un extremo relativo en $x=1$ entonces $f'(1)=0$; $\quad 2a+3-b=0$

Resolvemos el sistema $\left\{\begin{array}{l} a+3+b=2 \\ 2a+3-b=0 \end{array}\right.$ sumando resulta $3a+6=2$; $\quad a = \dfrac{-4}{3}$ sustituyendo en la segunda $b = 2a+3 = 2\dfrac{-4}{3}+3 = \dfrac{1}{3}$

La función resulta $f(x) = -\dfrac{4}{3}x^2 + 3x + \dfrac{1}{3x}$

Para ver si es máximo o mínimo en la derivada: $f'(x) = \dfrac{-8x}{3} + 3 - \dfrac{1}{3x^2} = \dfrac{-8x^3+9x^2-1}{3x^2}$ que se anula para $x=1$, estudiamos el signo a derecha e izquierda

f		1	
f'	$+$		$-$
f	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$

b) Resulta $f(x) = 2x^2 + 3x + \dfrac{0}{x} = 2x^2 + 3x$

Como la derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto y la ecuación de una recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene de pendiente m es: $y - y_0 = m(x - x_0)$, con $m = f'(x_0)$, $\quad y_0 = f(x_0)$

$f(1) = 2+3 = 5$

$f'(x) = 4x+3$; $\quad f'(1) = 7$

La recta tangente es $y - 5 = 7(x - 1)$

- CUESTIÓN 5

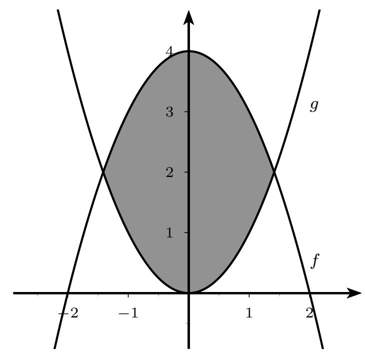
Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x) = -x^2 + 4$ y $g(x) = x^2$. Calcular su área.

selcs Jul 2021 Solución:

La intersección entre las parábolas es:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$-x^2 + 4 = x^2; \quad x^2 = 2; \quad x = \pm\sqrt{2}$



El área será:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \text{f-g} = \int_0^{\sqrt{2}} (-2x^2 + 4)\,dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x\right]_0^{\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{8}}{3} + 4\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Área} = \frac{16\sqrt{2}}{3} = 7'54 \text{ u}^2$$

- CUESTIÓN 6

Dada la función $f(x) = x\,e^{x^2}$:

a) Hallar la pendiente de esta función en el punto $x = 0$.

b) Calcular $\displaystyle\int x\,e^{x^2}\,dx$

c) Calcular $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx$

selcs Jul 2021 Solución:

a) La pendiente es $f'(0)$. Derivando: $f'(x) = e^{x^2} + x\,2x\,e^{x^2} = (1 + 2x^2)\,e^{x^2}; \quad f'(0) = e^0 = 1$

b) $\displaystyle\int x\,e^{x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix}\text{para que esté la derivada del exponente} \\ \text{multiplicamos y dividimos por 2}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

c) $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}(e - 1)$

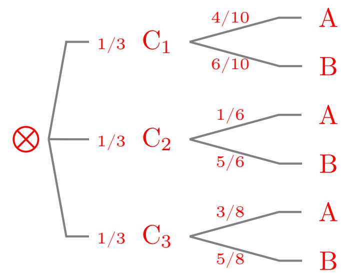
- CUESTIÓN 7

Se dispone de tres cajas con bolas de distintos colores. La primera contiene 10 bolas: 4 azules y 6 blancas. En la segunda caja hay una única bola azul y 5 blancas. En la tercera caja tenemos 3 bolas azules y 5 blancas. Cogemos una bola al azar de cualquiera de las cajas:

a) Calcule la probabilidad de que la bola cogida sea azul.

b) Si la bola elegida es blanca, calcule la probabilidad de que estuviera en la primera caja.

selcs Jul 2021 Solución:



sean C_1, C_2, C_3 las tres cajas

Suceso: $A =$ "sacar bola azul"
Suceso: $B =$ "sacar bola blanca"

$\{C_1, C_2, C_3\}$, forman un sistema completo de sucesos.

a) Por el teorema de la probabilidad total:

$p(A) = p(C_1).p(A/C_1) + p(C_2).p(A/C_2) + p(C_3).p(A/C_3) = \frac{1}{3}\frac{4}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{113}{360} = 0'3138$

b) Por Bayes: como sacar bola blanca es lo contrario de sacar bola azul $p(B) = 1 - p(A) = 1 - \dfrac{113}{360} = \dfrac{247}{360}$

$$p(C_1/B) = \frac{p(B/C_1).p(C_1)}{\sum_1^3 p(B/C_i).p(C_i)} = \frac{\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{247}{360}} = \frac{72}{247} = 0'2914$$

- CUESTIÓN 8

  Dado dos sucesos de un experimento aleatorio A y B tales que $p(\bar{A}) = 0'45, \quad p(B) = 0'35$ y $p(A \cup B) = 0'7$ Calcular las siguientes probabilidades:

  a) $p(A)$

  b) $p(A \cap B)$

  c) $p(B/A)$

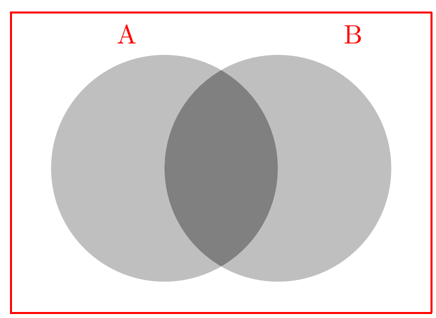
  d) $p(\bar{A}/\bar{B})$

  selcs Jul 2021 Solución:
  a) $p(A) = 1 - p(A^c) = 1 - 0'45 = 0'55$

  b) Como $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, sustituyendo
  $0'7 = 0'55 + 0'35 - p(A \cap B), \quad p(A \cap B) = 0'2$

  c) $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0'2}{0'55} = \dfrac{4}{11} = 0'3636$

  d) $p(A^c/B^c) = \dfrac{p(A^c \cap B^c)}{p(B^c)}$.
  Como $A^c \cap B^c$ es el complementario de $A \cup B$ tenemos que
  $p(A^c \cap B^c) = 1 - 0'7 = 0'3$, además
  $p(B^c) = 1 - p(B) = 1 - 0'35 = 0'65$.
  Por tanto $p(A^c/B^c) = \dfrac{0'3}{0'65} = \dfrac{6}{13} = 0'4615$



1.2. Junio ordinaria 2021

- CUESTIÓN 1

Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\begin{cases} x+3y+z=5 \\ ax+2z=0 \\ ay-z=a \end{cases}$$

Resolverlo para $a=1$.

selcs Jun 2021 Solución:

Aplicando el método de Gauss empezamos a triangular la matriz ampliada, como hay un parámetro habrá que considerar los valores de éste que anulen un denominador

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & -1 & a \end{pmatrix}$$

$$\{2^a - 1^a \cdot a\} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -3a & 2-a & -5a \\ 0 & a & -1 & a \end{pmatrix} \quad \{3^a \cdot (3) + 2^a\} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -3a & 2-a & -5a \\ 0 & 0 & -1-a & -2a \end{pmatrix}$$

Anulamos los coeficientes de la diagonal principal que pasarían dividiendo:

$-3a=0, a=0; \quad -1-a=0, a=-1$. Tenemos entonces:

- Si $a \neq 0, -1$, el sistema es compatible determinado o sea con solución única.
- Si $a=0$ la matriz queda: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ resulta el sistema:

  $\begin{cases} x+3y+z=5 \\ 2z=0 \\ -z=0 \end{cases}$ Compatible indeterminado con infinitas soluciones.

- Si $a=-1$ la matriz queda: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

  la última ecuación sería $0=2$, luego el sistema es incompatible o sea sin solución.

Piden resolver para $a=1$ la matriz queda: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ resulta el sistema:

$\begin{cases} x+3y+z=5 \\ -3y+z=-5 \\ -2z=-2 \end{cases}$ que sustituyendo de abajo arriba da:

$z=1; \quad -3y+1=-5, y=2; \quad x+6+1=5, \quad x=-2$

La solución es $x=-2, y=2, z=1$

- CUESTIÓN 2

En un terreno en la huerta de Beniel se quieren plantar dos tipos distintos de naranjos: A y B. No se puede cultivar más de 8 hectáreas con naranjos de tipo A ni más de 10 hectáreas con naranjos de tipo B. Cada hectárea de naranjos de tipo A necesita 4 m^3 de agua anuales y cada una de tipo B, 3 m3. Se dispone anualmente de 45 m3 de agua. Cada hectárea de tipo A requiere una inversión de 500 € y cada una de tipo B, 225 € . Se dispone de 4575 € para realizar dicha inversión. Si cada hectárea de naranjos de tipo A y B producen, respectivamente, 500 y 300 kilos anuales de naranjas:

a) Calcular las hectáreas de cada tipo de naranjo que se deben planta para maximizar la producción de naranjas. Razone la respuesta.

b) Obtener la producción máxima.

selcs Jun 2021 Solución:

a)

1) Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

$x =$ número de hectáreas de A,
$y =$ número de hectáreas de B.
Producción a maximizar: $F(x, y) = 500x + 300y$

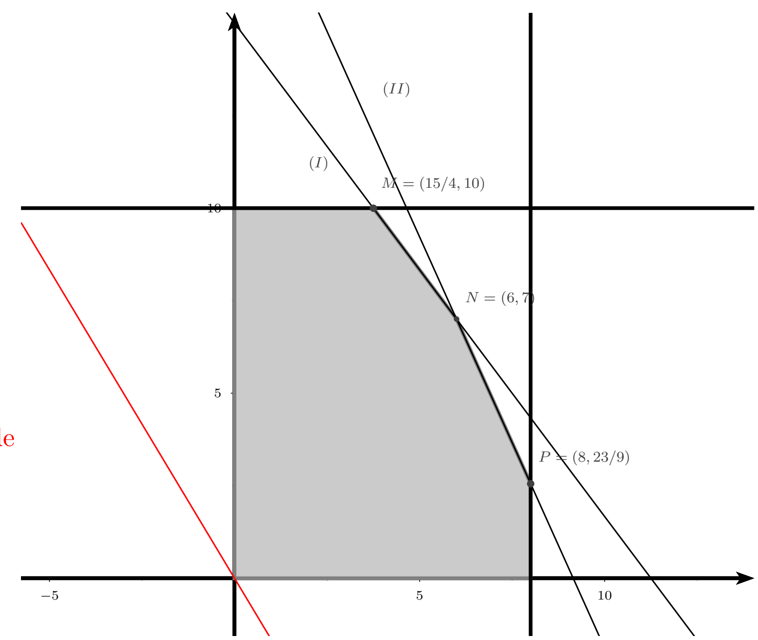
hectáreas de A: $x \leq 8$
hectáreas de B: $y \leq 10$
agua: $4x + 3y \leq 45$
inversión: $500x + 225y \leq 4575$

$4x + 3y \leq 45 \quad (I) \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 11'25 \\ \hline y & 15 & 0 \end{array}$

$500x + 225y \leq 4575 \quad (II) \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 9'15 \\ \hline y & 20'33 & 0 \end{array}$

2) Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones y trazamos la recta:

$F(x, y) = 0, \quad 500x + 300y = 0 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -3 \\ \hline y & 0 & 5 \end{array}$



Buscamos la paralela que pasa por un vértice y da una ordenada mayor en el origen.

Los vértices de la región factible que interesan para maximizar son:

$\begin{cases} y = 10 \\ 4x + 3y = 45 \end{cases}$ M:$(15/4, 10)$

$\begin{cases} 4x + 3y = 45 \\ 500x + 225y = 4575 \end{cases}$ N:$(6, 7)$

$\begin{cases} x = 8 \\ 500x + 225y = 4575 \end{cases}$ P:$(8, 23/9)$

Comprobamos los tres puntos:

$$\begin{cases} \text{M:}F(15/4,10) = 500\cdot 15/4 + 300\cdot 10 = 4875 \\ \text{N:}F(6,7) = 500\cdot 6 + 300\cdot 7 = 5100 \\ \text{P:}F(8,23/9) = 500\cdot 8 + 300\cdot 23/9 = \frac{14300}{3} \approx 4766'6 \end{cases}$$

Luego para obtener la mayor producción habrá que plantar 6 hectáreas de A y 7 hectáreas de B.

b) La máxima producción será entonces: 5100 kg anuales de naranjas.

- CUESTIÓN 3

El coste de producción de x unidades de un determinado producto viene dado por la función $C(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ y su precio de venta es: $p = 50 - \dfrac{x}{4}$ euros. Hallar:

a) El número de unidades que debe venderse diariamente para que el beneficio sea máximo.

b) El precio al que deben venderse las unidades obtenidas en el apartado a).

c) El beneficio máximo.

selcs Jun 2021 Solución:

Suponemos que el precio de venta se refiere al precio por unidad, por tanto si se venden x unidades el importe de la venta es $V(x) = x\cdot\left(50 - \dfrac{x}{4}\right) = 50x - \dfrac{x^2}{4}$

La función que da los beneficios es: $B(x) = 50x - \dfrac{x^2}{4} - \left(\dfrac{x^2}{4} + 35x + 25\right) = -\dfrac{x^2}{2} + 15x - 25$

Para hallar el máximo derivamos: $B'(x) = -x + 15$ se anula para $x = 15$, estudiamos el crecimiento:

x		15	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$
		MÁXIMO	

a) El beneficio máximo se alcanza al vender 15 unidades.

b) El precio al que deben venderse es $p(15) = 50 - \dfrac{15}{4} = 46'25$ €

c) El beneficio máximo al vender 15 unidades es: $B(15) = -\dfrac{15^2}{2} + 15\cdot 15 - 25 = 87'50$ €

- CUESTIÓN 4

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, calcular el valor de a, b y c para que:

a) La función pase por el origen de coordenadas y tenga en el punto (1, ˘1) un mínimo local.

b) Para los valores obtenidos en el apartado anterior, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

selcs Jun 2021 Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx + c$,

Pasa por el origen luego: $f(0) = 0$ es decir $c = 0$

Tiene un mínimo en el punto $(1, -1)$, por tanto:

Pasa por ese punto $f(1) = -1; \quad a + b = -1$

Se anula la derivada en $x = 1$: $f'(x) = 3ax^2 + b, \quad f'(1) = 3a + b = 0$

Resolviendo: $\begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \quad a = \dfrac{1}{2}, b = -\dfrac{3}{2}$

La función es: $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x$

b) Estudiamos el crecimiento de f con el signo de su derivada

$f'(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}; \quad \dfrac{3}{2}(x^2 - 1) = 0; \quad x = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$

x		-1		1	
f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$	MÍNIMO	$\nearrow$

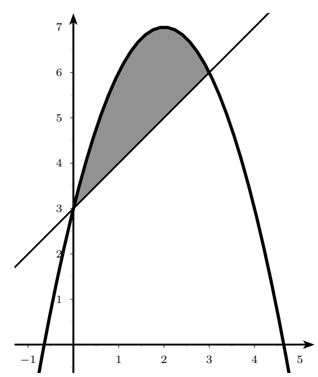
Por tanto la función f:

crece en $(\infty, -1)$, tiene máximo en -1, decrece en $(-1, 1)$, tiene mínimo en 1 y crece en $(1, \infty)$

- CUESTIÓN 5

Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ y la recta $g(x) = 3 + x$. Calcular su área.

selcs Jun 2021 Solución:



La intersección entre la recta y la parábola es:

$\begin{cases} y = -x^2 + 4x + 3 \\ y = 3 + x \end{cases}$

$-x^2 + 4x + 3 = 3 + x; \quad -x^2 + 3x = 0; \quad x = 0, x = 3$

El área será:

$\text{Área} = \displaystyle\int_0^3 \text{parábola - recta} = \int_0^3 (-x^2 + 3x)\, dx =$

$\left[-\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2}\right]_0^3 = -\dfrac{27}{3} + \dfrac{27}{2} = -9 + 13'5 = 4'5 \text{ u}^2$

- CUESTIÓN 6

Dada la función $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$.

b) Calcular $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx$

c) Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx$

selcs Jun 2021 Solución:

a) La derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto y la ecuación de una recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene de pendiente m es: $y - y_0 = m(x - x_0)$, con $y_0 = f(x_0), \quad m = f'(x_0) = f'(0)$

$f(0) = \dfrac{0}{1} = 0$

$f'(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}; \quad f'(0) = 2$

La recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 0$, será: $y = 2x$

b) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \ln(x^2+1) + C$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \left[\ln(x^2+1)\right]_1^2 = \ln 5 - \ln 2 = 0'91629$

- CUESTIÓN 7

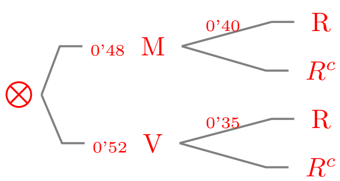
En un viaje de estudios el 52 % de los jóvenes son hombres. De ellos el 35 % son rubios, así como el 40 % de las mujeres. Si elegimos a un estudiante al azar:

a) Calcule la probabilidad de que sea rubio.

b) Sabiendo que NO es rubio, ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

selcs Jun 2021 Solución:

Consideramos los sucesos: M ser mujer, V ser varón, R ser rubio.



$\{M, V\}$, forman un sistema completo de sucesos.

a) Teorema de la probabilidad total: $p(R) = p(R/M) \cdot p(M) + p(R/V) \cdot p(V) = 0'40 \cdot 0'48 + 0'35 \cdot 0'52 = 0'374$

b) Teorema de Bayes:

$p(M/R^c) = \dfrac{p(R^c/M) \cdot p(M)}{p(R^c/M) \cdot p(M) + p(R^c/V) \cdot p(V)} =$ en el denominador está el complementario de rubio:

$= \dfrac{0'60 \cdot 0'48}{1 - 0'374} = 0'460$

- CUESTIÓN 8

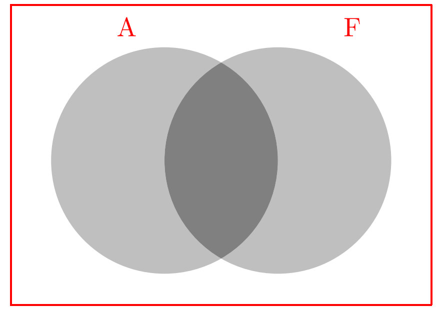
Alex y Fran son dos amigos que practican asiduamente en las pistas el baloncesto. La probabilidad de que Alex enceste un tiro libre es del 65 % y de que lo haga Fran es del 48 %. Dado que los dos sucesos son independientes, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos al lanzar un tiro libre:

a) Ambos encesten un tiro libre.

b) Solo Alex encesta la pelota.

c) Al menos uno de ellos encesta la pelota.

selcs Jun 2021 Solución:



"A" encesta Alex, $p(A) = 0'65$
"F" encesta Fran, $p(F) = 0'48$

a) Piden $p(A \cap F)$. Como son independientes$p(A \cap F) = p(A) \cdot p(F) = 0'65 \cdot 0'48 = 0'312$

b) Es $p(A \cap F^c) = p(A) - p(A \cap F) = 0'65 - 0'312 = 0{,}338$

c) Es la unión: $p(A \cup F) = p(A) + p(F) - p(A \cap F) = 0'65 + 0'48 - 0'312 = 0'8179$

Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 2

Año 2020

2.1. Septiembre 2020

- CUESTIÓN 1

  Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

  a) Calcule $(A - B)$.

  b) Calcule $(A - B)^{-1}$.

  c) Hallar la matriz X que verifica $AX - A = BX + B$.

  selcs Sep 2020 Solución:

  a) $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

  b) La inversa es: $(A - B)^{-1}$:

  Método 1: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; 2^a + 1^a \cdot (-2) \; \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \; 1^a \cdot 2 + 2^a \; \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

  Dividiendo cada fila por el elemento de la diagonal principal: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$; $(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$

  Método 2: La inversa de una matriz es la adjunta de la traspuesta dividida por el determinante: |A-B|= -2;

  $(A - B)^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad adj((AB)^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad (A - B)^{-1} = \dfrac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$

  c) Primero resolvemos la ecuación matricial: $AX - A = BX + B; \quad AX - BX = B + A$

  $(A - B)X = B + A; \quad (A - B)^{-1}(A - B)X = (A - B)^{-1}(B + A); \quad X = (A - B)^{-1}(B + A)$. Resulta:

  $X = (A - B)^{-1}(B + A) = \dfrac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \dfrac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

- CUESTIÓN 2

  Sea S la región del plano definida por las inecuaciones:

$S = \{(x,y) \in R^2 / \quad y \geq 2x - 4, \quad y \leq x - 1, \quad 2y \geq x, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$

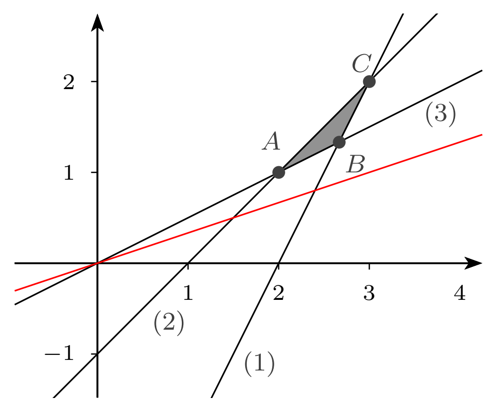
a) Representar la región S y obtener sus vértices.

b) Maximizar la función $f(x,y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el máximo.

c) Minimizar la función $f(x,y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el mínimo.

selcs Sep 2020 Solución:

a)



$(1): \quad y \geq 2x - 4$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & -4 & 0 \end{array}$

$(2): \quad y \leq x - 1$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$

$(3): \quad 2y \geq x$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$

Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones

A vértice intersección $\begin{cases} 2y = x \\ y = x - 1 \end{cases}$ es $A(2,1)$

B vértice intersección $\begin{cases} 2y = x \\ y = 2x - 4 \end{cases}$ es $B(\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$

C vértice intersección $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x - 1 \end{cases}$ es $C(3,2)$

La función $f(x,y)$ crece hacia la derecha y hacia abajo. Vamos a ver los valores que toma en los tres vértices.

Trazamos la recta: $f(x,y) = 0; \quad x - 3y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 3 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$

Los valores de $f(x,y)$ en los vértices son:

$A: \quad f(2,1) = 2 - 3 \cdot 1 = -1$

$B: \quad f(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}) = \frac{8}{3} - 3 \cdot \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} = -1'33$

$C: \quad f(3,2) = 3 - 3 \cdot 2 = -3$

b) La función $f(x,y)$ toma el valor máximo en $A(2,1)$ y vale -1

c) La función $f(x,y)$ toma el valor mínimo en $C(3,2)$ y vale -3

- CUESTIÓN 3

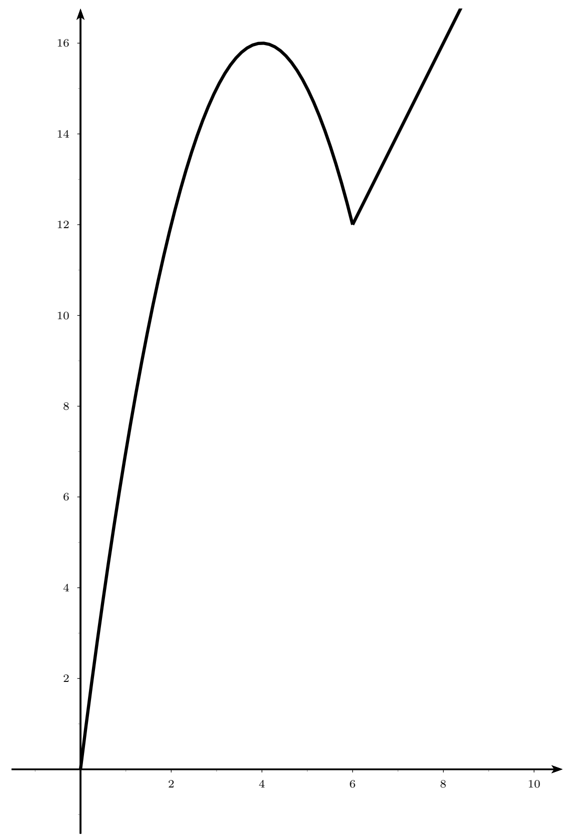
Se ha estimado en una empresa que su beneficio en los próximos 10 años viene dado por la función: $B(t) = \begin{cases} at - t^2 & si \quad 0 \leq t \leq 6 \\ 2t & si \quad 6 < t \leq 10 \end{cases}$ siendo t el tiempo transcurrido en años.

a) Calcular el valor del parámetro a para que la función de beneficios sea continua.

b) Para $a = 8$ represente su gráfica y diga en qué intervalo de tiempo la función crece o decrece.

c) Para $a = 8$ indique en qué momento, de los 6 primeros años, se obtiene el máximo beneficio y cuál es su valor.

selcs Sep 2020 Solución:



a) Hallamos los límites laterales en $t = 6$ para que sea continua

$\lim_{t\to 6^-} B(t) = \lim_{t\to 6^-} at - t^2 = 6a - 36$

$\lim_{t\to 6^+} B(t) = \lim_{t\to 6^+} 2t = 12$

$B(6) = 6a - 36$

Para que sea continua han de coincidir: $6a - 36 = 12; \quad a = 8.$

La función es continua si $a = 8$

b) $B(t) = \begin{cases} 8t - t^2 & si \quad 0 \leq t \leq 6 \\ 2t & si \quad 6 < t \leq 10 \end{cases}$

el primer trozo es la parábola $8t - t^2$

el vértice es: $B'(t) = 8 - 2t = 0, \quad t = 4$ está en $(4, 16)$

t	4	0	6
B	16	0	12

El segundo trozo es la recta $2t$

t	6	10
B	12	20

Por tanto la función $B(t)$ a lo largo de los años: crece en los intervalos $(0, 4)$ y $(6, 10)$; decrece en el intervalo $(4, 6)$

c) Como se ha visto en los primeros 6 años presenta el máximo en $t = 4$ y su valor es $B(4) = 16$

- CUESTIÓN 4

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x^2 - 2)\ln x$

b) $f(x) = e^{4x^3+2}$

selcs Sep 2020 Solución:

a) $f'(x) = 2x\,\ln x + (x^2 - 2)\,\dfrac{1}{x}$

b) $f'(x) = 12x^2\,e^{4x^3+2}$

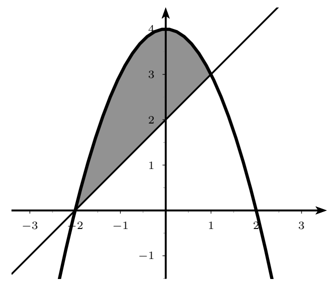
- CUESTIÓN 5

Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x) = 4 - x^2$ y la recta $g(x) = 2 + x$. Calcular su área.

selcs Sep 2020 Solución:

La intersección entre la recta y la parábola es:

$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 2 + x \end{cases} \quad 4 - x^2 = 2 + x; \quad x^2 + x - 2 = 0; \quad x = -2, x = 1$



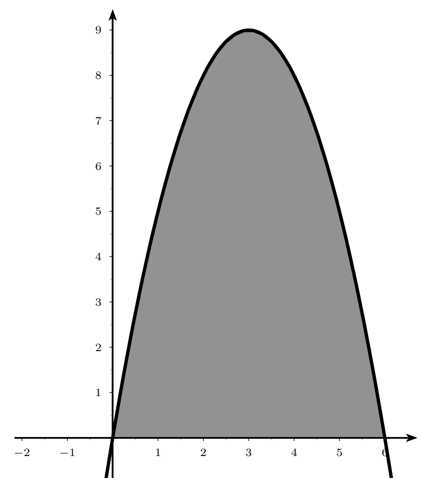
El área será:

Área $= \displaystyle\int_{-2}^{1}$ parábola - recta $= \displaystyle\int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx =$
$\left[-\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1} = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + 2 - \left(\dfrac{8}{3} - 2 - 4 \right) =$
$\dfrac{-2 - 3 + 12}{6} + \dfrac{10}{3} = \dfrac{7}{6} + \dfrac{10}{3} = \dfrac{27}{6} = \dfrac{9}{2}$ u^2

- CUESTIÓN 6

Calcular el área del recinto limitado por la parábola $f(x) = -x^2 + 6x$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Sep 2020 Solución:



La intersección con OX de la parábola es:
$-x^2 + 6x = 0; \quad x = 0, x = 6$

El área será:

Área $= \displaystyle\int_{0}^{6} (-x^2 + 6x)\, dx = \left[-\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{6x^2}{2} \right]_0^6 = \left[-\dfrac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^6 =$
$-\dfrac{6^3}{3} + 3 \cdot 6^2 - 0 = -72 + 108 = 36$ u^2

- CUESTIÓN 7

Entre los alumnos ERASMUS que han llegado este curso a la Universidad de Murcia el 75 % hablan inglés, el 50 % hablan francés y un 5 % no hablan ninguno de estos dos idiomas.

Elegido un alumno al azar:

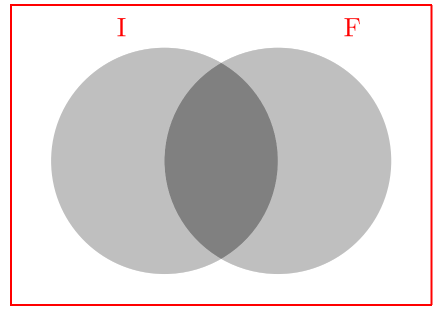
a) Calcule la probabilidad de que hable inglés o francés.

b) Calcule la probabilidad de que hable inglés y francés.

c) Calcule la probabilidad de que, hablando inglés, no hable francés.

selcs Sep 2020 Solución:

"I" sabe inglés, $p(I) = 0'75$
"F" sabe francés, $p(F) = 0'50$



además dicen que $p(I^c \cap F^c) = 0'05$

a) Piden $p(I \cup F)$. Como $I \cup F = (I^c \cap F^c)^c$, entonces $p(I \cup F) = 1 - p(I^c \cap F^c) = 1 - 0'05 = 0'95$
El 95 % habla inglés o francés.

b) Piden $p(I \cap F)$. Como $p(I \cup F) = p(I) + p(F) - p(I \cap F)$, sustituyendo $0'95 = 0'75 + 0'50 - p(I \cap F)$; $\quad p(I \cap F) = 0'30$
El 30 % habla inglés y francés.

c) Piden $p(F^c/I) = \dfrac{p(F^c \cap I)}{p(I)} = \dfrac{p(I) - p(F \cap I)}{p(I)} = \dfrac{0'75 - 0'30}{0'75} = \dfrac{8}{15} = 0'533$

El 53'3 % de los que hablan inglés no hablan francés.

- CUESTIÓN 8

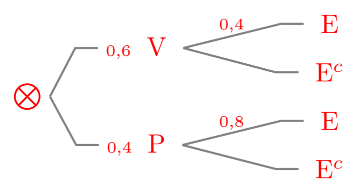
En una empresa multinacional el 60 % de las reuniones se realizan a través de videoconferencia. El 40 % de los empleados que asisten a estas videoconferencias son de países de la Unión Europea, mientras que en las reuniones presenciales solo el 20 % son trabajadores que no pertenecen a la Unión Europea. Si elegimos un trabajador al azar:

a) Calcule la probabilidad de que pertenezca a la Unión Europea.

b) Sabiendo que el trabajador es de la Unión Europea, ¿Cuál es la probabilidad de que haya asistido a la reunión por videoconferencia?

selcs Sep 2020 Solución:

Consideramos los sucesos:
$V =$ "videoconferencia"
$P =$ "presencial"
$E =$ "empleado de la Unión Europea"
Como en las presenciales el 20 % no pertenecen a la Unión Europea, el resto el 80 % si pertenece.



$\{V, P\}$, forman un sistema completo de sucesos.

a) Teorema de la probabilidad total:

$p(E) = p(E/V) \cdot p(V) + p(E/P) \cdot p(P) = 0,4 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,4 = 0,56$

b) Teorema de Bayes:

$$p(V/E) = \frac{p(E/V) \cdot p(V)}{p(E/V) \cdot p(V) + p(E/P) \cdot p(P)} = \frac{0,4 \cdot 0,6}{0,4 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,4} = 0,4286$$

- CUESTIÓN 9

El precio medio de los aspiradores de una gran superficie se distribuye según una distribución normal de desviación típica 100 € . Se toma una muestra aleatoria de 9 aspiradoras de distintas marcas obteniendo un precio medio de 178,89 € . Determine un intervalo de confianza al 99 % para el precio medio.

Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 99 %, el error cometido de estimación del precio no supere los 50 € .

selcs Sep 2020 Solución:

a) Al nivel de confianza del 99 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,58$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 178,89 \pm 2,58 \cdot \dfrac{100}{\sqrt{9}} = 178,89 \pm 86 \begin{cases} 92,89 \\ 264,89 \end{cases}$

El intervalo de confianza para la media es $(92,89; 264,89)$

con probabilidad 99 % μ está en: 

b) Al nivel de confianza del 99 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,58$ El error de la estima viene dado para el nivel de confianza del 99 % por $z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, si se quiere sea menor de 50 entonces

$2,58 \dfrac{100}{\sqrt{n}} \leq 50$

Despejamos n: $\quad 2,58 \dfrac{100}{\sqrt{n}} = 50, \quad \sqrt{n} = \dfrac{2,58 \cdot 100}{50} = 5,16; \quad n \geq 26,6256.$

Así, pues, se tiene la confianza del 99 % de que el error de la estima será menor de 50 solamente si n es 27 o mayor.

- CUESTIÓN 10

Se sabe que el peso de los tarros de cacao de un supermercado es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 1,8 gramos. Se toma una muestra aleatoria de 9 tarros y se obtiene un peso medio de 89 gramos. Obtenga un intervalo de confianza, al 95 %, para la media de esta población.

¿Cuál será el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido de estimación del peso no supere 1 gramo, a un nivel de confianza del 95 %?

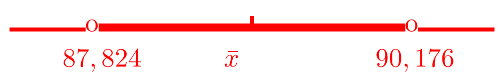
selcs Sep 2020 Solución:

a) Al nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 89 \pm 1,96 \cdot \dfrac{1,8}{\sqrt{9}} = 89 \pm 1,176 \begin{cases} 87,824 \\ 90,176 \end{cases}$

El intervalo de confianza para la media es $(87,824; 90,176)$

con probabilidad 95 % μ está en: 

b) Al nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$ El error de la estima viene dado para el nivel de confianza del 95 % por $z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, si se quiere sea menor de 1 entonces

$1,96 \dfrac{1,8}{\sqrt{n}} \leq 1$

Despejamos n: $\quad 1,96 \dfrac{1,8}{\sqrt{n}} = 1, \quad \sqrt{n} = \dfrac{1,96 \cdot 1,8}{1} = 3,528; \quad n \geq 12,4468.$

Así, pues, se tiene la confianza del 95 % de que el error de la estima será menor de 1 solamente si n es 13 o mayor.

2.2. Junio 2020

- CUESTIÓN 1

  Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parametro a:

  $$\begin{cases} x+ay+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

  Resolverlo para $a=3$.

  selcs Jun 2020 Solución:

  Aplicando el método de Gauss empezamos a triangular la matriz ampliada, como hay un parámetro habrá que considerar los valores de éste que anulen un denominador, alteramos el orden de las ecuaciones:

  $$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  $$\{3^a-1^a\}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \{3^a\cdot(-2)+2^a\cdot(a-1)\}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 0 & 0 & a^2-a & 2a-2 \end{pmatrix}$$

  Anulamos los coeficientes de la diagonal principal que pasarían dividiendo: $a^2-a=0, \quad a=0, a=1$ Tenemos entonces:

  - Si $a\neq 0,1$, el sistema es compatible determinado o sea con solución única.
  - Si $a=0$ la matriz queda: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ la última ecuación sería $0=-2$, luego el sistema es incompatible o sea sin solución.
  - Si $a=1$ la matriz queda: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ queda el sistema:

    $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+z=2 \end{cases}$ Compatible indeterminado con infinitas soluciones.

  Para $a=3$ la matriz triangulada queda $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ y el sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+3z=2 \\ 6z=4 \end{cases}$

  sustituyendo hacia arriba en el sistema triangulado:

  Resulta de la tercera $z=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

  Sustituyendo en la segunda $2y=2-3z=2-3\dfrac{2}{3}=0; \quad y=0$.

  Sustituyendo en la primera $x=1-y-z=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

La solución es $x = \frac{1}{3}, y = 0, z = \frac{2}{3}$

- CUESTIÓN 2

La repoblación forestal de un bosque quemado en un gran incendio se va a llevar a cabo por dos empresas diferentes de jardinería. Hay que repoblar con pinos, eucaliptos y chopos. La primera empresa es capaz de plantar, en una semana, 30 pinos, 20 eucaliptos y 20 chopos. La segunda empresa planta 20 pinos, 30 eucaliptos y 20 chopos. El coste semanal se estima en 33.000 € para la primera empresa de jardinería y de 35.000 € para la segunda. Se necesita plantar un mínimo de 60 pinos, 120 eucaliptos y 100 chopos. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

selcs Jun 2020 Solución:

1) Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

$x =$ número de semanas que trabaja la primera empresa,

$y =$ número de semanas que trabaja la segunda empresa.

Coste: $F(x, y) = 33000x + 35000y$

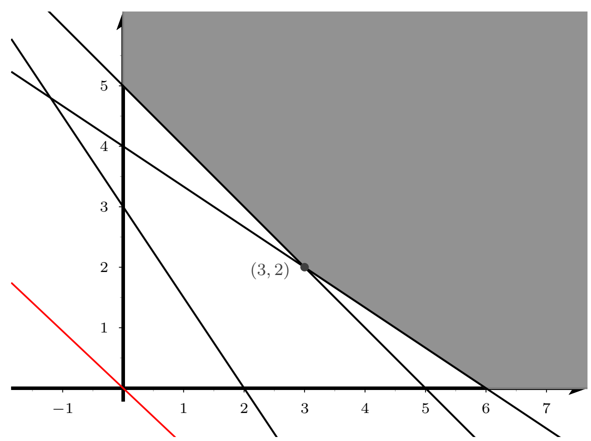
Pinos $30x + 20y \geq 60$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & 3 & 0 \end{array}$

Eucaliptos $20x + 30y \geq 120$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 6 \\ \hline y & 4 & 0 \end{array}$

Chopos $20x + 20y \geq 100$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 5 \\ \hline y & 5 & 0 \end{array}$

2) Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones y trazamos la recta:
$F(x, y) = 0 \quad 33000x + 35000y = 0$

$\begin{array}{c|cc} x & 0 & -3'5 \\ \hline y & 0 & 3'3 \end{array}$



Buscamos la paralela que pasa por un vértice y da una ordenada menor en el origen: es la que pasa por el vértice intersección de

$\left\{ \begin{array}{l} 20x + 30y = 120 \\ 20x + 20y \geq 100 \end{array} \right.$ es $(3, 2)$

Luego para obtener el menor coste habrá la primera empresa trabajará 3 semanas y la segunda 2 semanas.

El coste mínimo será entonces: $F(3, 2) = 33000 \cdot 3 + 35000 \cdot 2 = 169000$ euros.

- CUESTIÓN 3

El beneficio semanal obtenido en una empresa de ordenadores viene dado para la función $B(x) = -2x^2 + 24x - 36$, donde x representa el numero de ordenadores vendidos semanalmente. Calcular el número de ordenadores vendidos cada semana para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es este beneficio máximo?

selcs Jun 2020 Solución:

La función que da los beneficios es: $B(x) = -2x^2 + 24x - 36$

Para hallar el máximo derivamos: $B'(x) = -4x + 24$ se anula para $x = 6$, estudiamos el crecimiento:

x		6	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$

El beneficio máximo es por tanto $B(6) = 36$

- CUESTIÓN 4

Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$:

a) Determinar los valores de a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en $x = 1$ y la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tenga de pendiente $m = -1$.

b) Si en la función anterior $a = -2$ y $b = -4$, determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, así como sus extremos relativos.

selcs Jun 2020 Solución:

a) La derivada es $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Si tiene un extremo relativo en $x = 1$ entonces $f'(1) = 0; \quad 3 + 2a + b = 0$

Si la tangente en $x = 0$ tiene de pendiente -1 quiere decir que $f'(0) = -1; \quad b = -1$, y en consecuencia sustituyendo en la igualdad anterior $3 + 2a - 1 = 0; \quad$ queda $a = -1$

b) La función es $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$

Estudiamos el crecimiento de f con el signo de su derivada

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4; \quad 3x^2 - 4x - 4 = 0; \quad x = \begin{cases} -\frac{2}{3} \\ 2 \end{cases}$

x		$-\frac{2}{3}$		2	
f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$	MÍNIMO	$\nearrow$

Por tanto la función f:

crece en $(\infty, -\frac{2}{3})$, tiene máximo en $-\frac{2}{3}$, decrece en $(-\frac{2}{3}, 2)$, tiene mínimo en 2 y crece en $(2, \infty)$

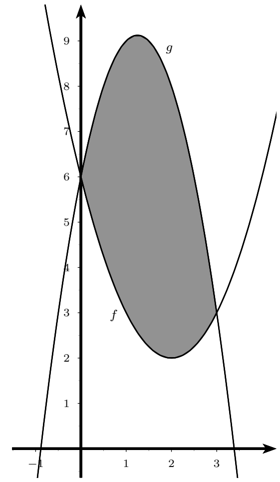
- CUESTIÓN 5

Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x) = x^2 - 4x + 6$ y $g(x) = -2x^2 + 5x + 6$. Calcular su área.

selcs Jun 2020 Solución:

La parábola f es abierta hacia arriba, veamos los puntos de corte con los ejes:
$OX: \quad y=0, \quad x^2-4x+6=0;$
$quadx = \dfrac{4\pm\sqrt{-8}}{4}$, no hay
$OX: \quad x=0, \quad y=6$
La parábola g es abierta hacia abajo, veamos los puntos de corte con los ejes:
$OX: \quad y=0, \quad -2x^2+5x+6=0, \quad 2x^2-5x-6=0, \quad x=\dfrac{5\pm\sqrt{73}}{4}\begin{cases} x\approx 3'38 \\ x\approx 0'88\end{cases}$
$OX: \quad x=0, \quad y=6$
Vamos a hallar los puntos de intersección de las parábolas resolviendo el sistema por igualación:
$\begin{cases} y=x^2-4x+6 \\ y=-2x^2+5x+6\end{cases}$

$$x^2-4x+6=-2x^2+5x+6; \quad 3x^2-9x=0\begin{cases} x=0 \\ x=3\end{cases}$$



Como la parábola g es mayor que la f en el intervalo de integración, el área viene dada por la integral:
$S=\displaystyle\int_0^3 g-f=\int_0^3 -3x^2+9x\,dx == \left[-\frac{3x^3}{3}+9\frac{x^2}{2}\right]_0^3=\left[-x^3+9\frac{x^2}{2}\right]_0^3=-3^3+9\frac{3^2}{2}-(0)=-27+\frac{81}{2}=\frac{27}{2}=13'5\ \mathrm{u}^2$

- CUESTIÓN 6

Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x=1$.

b) Calcular el área de la region del plano limitado por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX y las rectas de ecuación $x=0$ y $x=1$.

selcs Jun 2020 Solución:

a) La derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto y la ecuación de una recta que pasa por el punto (x_0,y_0) y tiene de pendiente m es: $y-y_0=m(x-x_0)$, con $y_0=f(x_0)$, $\quad m=f'(x_0)=f'(0)=0$

$f(1)=\dfrac{1}{2}$

$f'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}; \quad f'(1)=-\dfrac{1}{4}$

La recta tangente a $f(x)$ en el punto $x=1$, será: $y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-1)$

b) Como la función f es positiva en el intervalo de integración, el área que encierra con OX es:

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx=[\ln|x+1|]_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2\ \mathrm{u}^2$

- CUESTIÓN 7

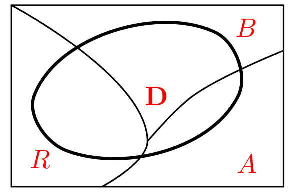
En una ferretería se encuentran mezclados 100 tornillos de color azul, 60 de color blanco y 40 de color rojo. La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es de 0,01 si es azul, 0,02 si es blanco y de 0,03 si es rojo. Un comprador elige un tornillo al azar:

a) Calcule la probabilidad de que el tornillo sea defectuoso.

b) Sabiendo que el tornillo es defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanco?

selcs Jun 2020 Solución:

sea A el suceso "tornillo azul "; $p(A) = \frac{100}{200} = 0'5$
sea B el suceso "tornillo blanco "; $p(B) = \frac{60}{200} = 0'3$
sea R el suceso "tornillo rojo "; $p(R) = \frac{40}{200} = 0'2$
Forman un sistema completo de sucesos



Suceso: $D =$ "coger un tornillo defectuoso"
las probabilidades del suceso D condicionadas por A, B, R son
$p(D/A) = 0'01, p(D/B) = 0'02, p(D/R) = 0'03$

a) Por el teorema de la probabilidad total:

$p(D) = p(A) \cdot p(D/A) + p(B) \cdot p(D/B) + p(R) \cdot p(D/R) = 0'5 \cdot 0'01 + 0'3 \cdot 0'02 + 0'2 \cdot 0'03 = 0'017$

b) Por Bayes: $p(B/D) = \dfrac{p(D/B).p(B)}{p(A) \cdot p(D/A) + p(B) \cdot p(D/B) + p(R) \cdot p(D/R)} = \dfrac{0'3 \cdot 0'02}{0'017} = 0'3529$

- CUESTIÓN 8

Dado dos sucesos independientes A y B se conoce que $P(A) = 0,3$ y que $P(\bar{B}) = 0,4$. Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cup B)$.

b) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

c) $P(A/\bar{B})$.

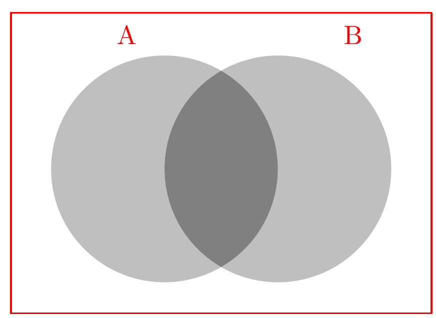
selcs Jun 2020 Solución:

Como $P(B^c) = 0'4$ entonces $p(B) = 1 - P(B^c) = 0'6$
Al ser independientes $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0'3 \cdot 0'6 = 0'18$

a) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'3 + 0'6 - 0'18 = 0'72$

b) El suceso $A^c \cap B^c$ es el complementario de $A \cup B$ luego
$p(A^c \cap B^c) = 1 - 0'72 = 0'28$

c) $p(A/B^c) = \dfrac{p(A \cap B^c)}{p(B^c)} = \dfrac{p(A) - p(A \cap B)}{p(B^c)} = \dfrac{0'3 - 0'18}{0'4} = 0'3$



- CUESTIÓN 9

Se ha estimado que el consumo medio de gasolina de los automóviles de un concesionario se distribuye según una distribución normal con una desviación típica de 0,5 litros. Se han probado 10 automóviles, elegidos aleatoriamente, de este concesionario por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares, obteniendo un consumo medio de 6,5 litros por cada 100km.

a) Determine un intervalo de confianza, al 95 % de confianza, para la media del gasto de gasolina de estos vehículos.

b) Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error cometido del consumo de gasolina sea inferior a 0,2.

selcs Jun 2020 Solución:

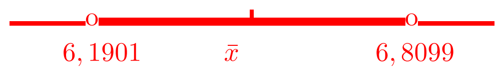
a) Al nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

$$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6,5 \pm 1,96 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{10}} = 6,5 \pm 0,309903211 \left\{ \begin{array}{l} 6,1901 \\ 6,8099 \end{array} \right.$$

El intervalo de confianza para la media es $(6,1901; 6,8099)$

con probabilidad 95 % μ está en:



b) El error de la estima viene dado para el nivel de confianza del 95 % por $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, si se quiere sea menor de 0,2 entonces

$$1,96 \frac{0,5}{\sqrt{n}} \leq 0,2$$

Despejamos n: $\quad 1,9600 \frac{0,5}{\sqrt{n}} = 0,2, \quad \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 0,5}{0,2} = 4,9; \quad n \geq 24,01.$

Así, pues, se tiene la confianza del 95 % de que el error de la estima será menor de 0,2 solamente si n es 25 o mayor.

- CUESTIÓN 10

En un laboratorio farmacéutico se analiza el PH de una solución y se supone que este sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,02. Con un ensayo de 6 mediciones de la misma solución se obtuvo un PH medio de 7,91.

a) Determine un intervalo de confianza al 95 % para la media de todas las determinaciones de PH de la misma solución obtenida por el mismo método.

b) Con el mismo nivel de confianza anterior, ¿cuál será el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea inferior a 0,01?

selcs Jun 2020 Solución:

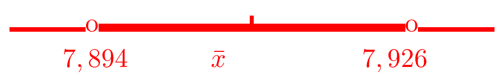
a) Al nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

$$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7,91 \pm 1,96 \cdot \frac{0,02}{\sqrt{6}} = 7,91 \pm 0,016003333 \left\{ \begin{array}{l} 7,894 \\ 7,926 \end{array} \right.$$

El intervalo de confianza para la media es $(7,894; 7,926)$

con probabilidad 95 % μ está en:



b) El error de la estima viene dado para el nivel de confianza del 95 % por $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, si se quiere sea menor de 0,01 entonces

$$1,96 \frac{0,02}{\sqrt{n}} \leq 0,01$$

Despejamos n: $\quad 1,96\dfrac{0,02}{\sqrt{n}} = 0,01, \quad \sqrt{n} = \dfrac{1,96 \cdot 0,02}{0,01} = 3,92; \quad n \geq 15,36.$

Así, pues, se tiene la confianza del 95 % de que el error de la estima será menor de 0,01 solamente si n es 16 o mayor.

Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 3

Año 2019

3.1. Septiembre 2019

- CUESTIÓN A.1

  Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

  $$\left\{\begin{array}{c} 2x+y-z=0 \\ ax-y-z=a-1 \\ 3x-2az=a-1 \end{array}\right.$$

  Resolverlo para $a=0$.

  selcs Sep 2019 Solución:

  Aplicando el método de Gauss empezamos a triangular la matriz ampliada, como hay un parámetro habrá que considerar los valores de éste que anulen un denominador, como el parámetro afecta a x alteramos el orden de las incógnitas:

  $$\left\{\begin{array}{l} y-z+2x=0 \\ -y-z+ax=a-1 \\ -2az+3x=a-1 \end{array}\right.$$

  $$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & a & a-1 \\ 0 & -2a & 3 & a-1 \end{array}\right)$$

  $$\{2^a+1^a\}\left(\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2+a & a-1 \\ 0 & -2a & 3 & a-1 \end{array}\right) \quad \{3^a+2^a\cdot(-a)\}\left(\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2+a & a-1 \\ 0 & 0 & -a^2-2a+3 & -a^2+2a-1 \end{array}\right)$$

  Anulamos los coeficientes de la diagonal principal que pasarían dividiendo: $-a^2-2a+3=0, \quad a=-3, a=1$

  Tenemos entonces:

  - Si $a\neq -3, 1$, el sistema es compatible determinado o sea con solución única.
  - Si $a=-3$ la matriz queda: $\left(\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{array}\right)$ la última ecuación sería $0x=-16$, luego el sistema es incompatible o sea sin solución.

- Si $a = 1$ la matriz queda: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ queda el sistema:

  $\left\{ \begin{array}{l} y - z + 2x = 0 \\ -2z + 3x = 0 \end{array} \right.$ Compatible indeterminado con infinitas soluciones.

Para $a = 0$ sustituyendo en el sistema original queda:

$\left\{ \begin{array}{c} 2x + y - z = 0 \\ -y - z = -1 \\ 3x = -1 \end{array} \right.$ Resulta de la tercera $x = \dfrac{-1}{3}$.

Sumando las dos primeras ecuaciones $2x - 2z = -1; -2z = -1 - 2x; 2z = 1 + 2x = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}; \quad z = \dfrac{1}{6}$.
Sustituyendo en la segunda $-y - z = -1; y + z = 1; y = 1 - z = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

La solución es $x = \dfrac{-1}{3}, y = \dfrac{5}{6}, z = \dfrac{1}{6}$

- CUESTIÓN A.2

Determine el punto de la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 7x + 5$ en la que la pendiente de la recta tangente sea máxima. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?

selcs Sep 2019 Solución:

La pendiente de la recta tangente viene dada por la derivada: $f'(x) = -3x^2 + 12x - 7$, para que sea máxima estudiamos el crecimiento de $f'(x)$ y para ello vemos el signo de su derivada $f''(x) = -6x + 12$ que se anula en $x = 2$, resulta:

x		2	
f''	$+$		$-$
f'	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$

En $x = 2$ la pendiente es máxima y vale $f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 7 = 5$

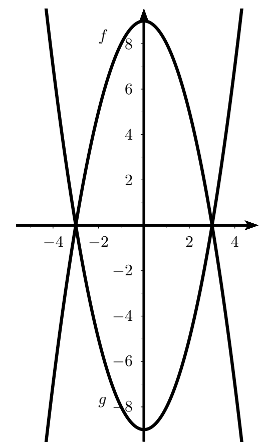
La recta tangente es $y - y_0 = m(x - x_0)$ donde $\left\{ \begin{array}{l} y_0 = f(x_0) \\ m = f'(x_0) \end{array} \right.$

Falta calcular $y_0 = f(2) = 7$. La recta tangente es $y - 7 = 5(x - 2)$

- CUESTIÓN A.3

Representar gráficamente la región limitada por las funciones $f(x) = 9 - x^2$ y $g(x) = x^2 - 9$. Calcular su área.

selcs Sep 2019 Solución:



Por ser la figura simétrica el área es $\int_{-3}^{3}(f-g) = 2\int_{0}^{3}(f-g)$.

Como $f-g = 9-x^2-(x^2-9) = 18-2x^2$ Hacemos:

$\int_0^3 (18-2x^2)\,dx = \left[18x - \frac{2x^3}{3}\right]_0^3 = 54-18 = 36$

El área es 72 u^2

- CUESTIÓN A.4

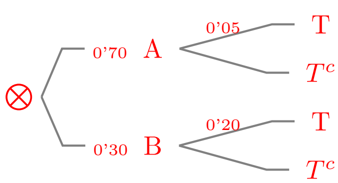
En un taller mecánico el 70 % de los coches que se reparan son del modelo A y el resto de un modelo B. Después de 6 meses, el 95 % de los coches del modelo A no vuelven al taller mientras que del modelo B solo no vuelven el 80 %. Si elegimos un coche al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva al taller antes de 6 meses?

b) Si se observa que antes de los seis meses vuelve al taller, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?

selcs Sep 2019 Solución:

Consideramos los sucesos: A modelo A, B modelo B, T volver al taller.



$\{A, B\}$, forman un sistema completo de sucesos.

a) Teorema de la probabilidad total: $p(T) = p(T/A)\cdot p(A) + p(T/B)\cdot p(B) = 0'05\cdot 0'70 + 0'20\cdot 0'30 = 0'095$

b) Teorema de Bayes:

$$p(B/T) = \frac{p(T/B)\cdot p(B)}{p(T/A)\cdot p(A) + p(T/B)\cdot p(B)} = \frac{0'20\cdot 0'30}{0'095} = 0{,}63157$$

- CUESTIÓN A.5

Se sabe que la estatura de los individuos de Murcia es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 6 cm. Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos y da una media de 176 cm. Obtenga un intervalo de confianza, con un 99 % de confianza, para la media de la estatura de la población.

selcs Sep 2019 Solución:

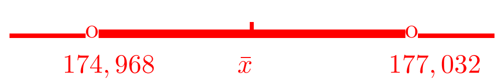
Al nivel de confianza del 99 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,58$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

$$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 176 \pm 2,58\cdot\frac{6}{\sqrt{225}} = 176 \pm 1,032 \begin{cases} 174,968 \\ 177,032 \end{cases}$$

El intervalo de confianza para la media es $(174,968; 177,032)$

con probabilidad 99 % μ está en:



- CUESTIÓN B.1

Un joven emprendedor quiere montar una empresa informática donde comercializará dos tipos de ordenadores. El tipo A dispondrá de 1 disco duro y 1 una unidad de memoria de pequeña capacidad, mientras que el tipo B tendrá 2 discos duros y su unidad de memoria será de alta capacidad. En total cuenta con 40 unidades de memoria de pequeña capacidad y 30 unidades de memoria de alta capacidad y 80 discos duros. Por cada ordenador del tipo A espera obtener un beneficio de 150 euros y del tipo B de 250 euros.

a) ¿Cuál es la mejor decisión sobre el número de ordenadores a montar de cada tipo?

b) Con esta producción, ¿habría algún excedente en el material mencionado?

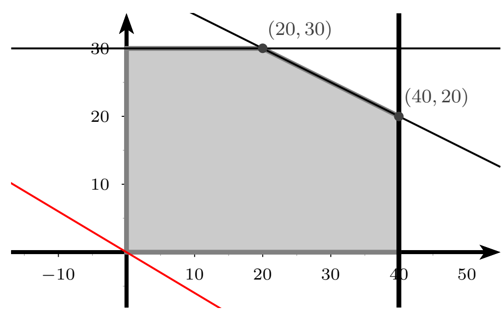
selcs Sep 2019 Solución:

a)

1) Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

$x =$ número de ordenadores A,

$y =$ número de ordenadores B. Beneficio: $F(x,y) = 150x + 250y$



discos duros $1x + 2y \leq 80$
memoria baja capacidad $1x \leq 40$
memoria alta capacidad $1y \leq 30$

$x + 2y \leq 80 \quad (1)$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 80 \\ \hline y & 40 & 0 \end{array}$

2) Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones y trazamos la recta:

$F(x,y) = 0, \quad 150x + 250y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -25 \\ \hline y & 0 & 15 \end{array}$

Buscamos la paralela que pasa por un vértice y da una ordenada mayor en el origen.

Hay dos puntos a comprobar:

$$\begin{cases} F(20,30) = 150 \cdot 20 + 250 \cdot 30 = 10500 \\ F(40,20) = 150 \cdot 40 + 250 \cdot 20 = 11000 \end{cases}$$

Luego para obtener el mayor beneficio habrá que hacer 40 de A y 20 de B.

El beneficio máximo será entonces: 11000 euros.

b)

discos duros $1x + 2y \leq 80, \quad 40 + 2 \cdot 20 = 80$ se utilizan todos

memoria baja capacidad $1x \leq 40, \quad 40 = 40$ se utilizan todos

memoria alta capacidad $1y \leq 30, \quad 20 \leq 30$ sobran 10

- CUESTIÓN B.2

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

b) $f(x) = x\, e^{2x}$

selcs Sep 2019 Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$

b) $f'(x) = e^{2x} + 2\,x\,e^{2x}$

- CUESTIÓN B.3

Dada la función $f(x) = 2\,e^{x+1}$

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $x = 1$.

b) Calcular el área de la región del plano limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

selcs Sep 2019 Solución:

a) La recta tangente es $y - y_0 = m(x - x_0)$ donde $\left\{ \begin{array}{l} y_0 = f(x_0) \\ m = f'(x_0) \end{array} \right.$

En nuestro caso:

$y_0 = f(1) = 2\,e^{1+1} = 2\,e^2$

$f'(x) = 2\,e^{x+1}, \quad f'(1) = 2\,e^2$

La recta tangente es: $y - 2\,e^2 = 2\,e^2(x - 1)$

b) Como la función es siempre positva en el intervalo, el área viene dada directamente por la integral:

$\displaystyle\int 2\,e^{x+1}\,dx = 2\,e^{x+1} + C$

Área $= \displaystyle\int_0^1 2\,e^{x+1}\,dx = \left[2\,e^{x+1}\right]_0^1 = 2\,e^2 - 2\,e$

- CUESTIÓN B.4

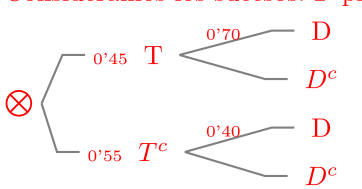
En un hospital de la región de Murcia se está probando una nueva terapia para dejar de fumar. De los pacientes que entran en este ensayo el 45 % prueba la terapia y el resto no. Después de un año el 70 % de los que siguieron la terapia y el 40 % de los que no la siguieron han dejado de fumar. Se elige al azar a un paciente fumador de este hospital:

a) Calcule la probabilidad de que después de un año haya dejado de fumar.

b) Si transcurrido un año el paciente sigue fumando, calcule la probabilidad de que haya seguido la nueva terapia.

selcs Sep 2019 Solución:

Consideramos los sucesos: T prueba terapia, T^c no prueba terapia, D deja de fumar.



$\{T, T^c\}$, forman un sistema completo de sucesos.

a) Teorema de la probabilidad total: $p(D) = p(D/T)\cdot p(T) + p(D/T^c)\cdot p(T^c) = 0'45\cdot 0'70 + 0'55\cdot 0'40 = 0'535$

b) Teorema de Bayes:

$$p(T/D^c) = \frac{p(D^c/T)\cdot p(T)}{p(D^c/T)\cdot p(T) + p(D^c/T^c)\cdot p(T^c)} = \frac{0'30\cdot 0'45}{0'30\cdot 0'45 + 0'60\cdot 0'55} = 0'2903$$

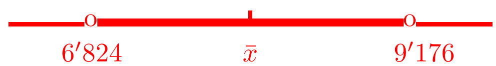
- CUESTIÓN B.5

En un estudio realizado por una empresa se ha obtenido que el intervalo de confianza de una variable, a un nivel de confianza del 95 %, es: $(6'824, 9'176)$. Hallar la media y el tamaño de la muestra para obtener dicho intervalo conociendo que la varianza de la distribución es de 9. Explique cada uno de los pasos realizados.

selcs Sep 2019 Solución:

El intervalo de confianza para la media $(6'824, 9'176)$

expresa que con probabilidad 95 % μ está en:



El intervalo de confianza tiene de extremos:

$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. La media de la muestra es el centro del intervalo, luego $\bar{x}$ es el punto medio del intervalo $\bar{x} = \dfrac{6'824 + 9'176}{2} = 8$ es la media de la muestra

El radio del intervalo es el **error** $= 9'176 - 8 = 1'176$, lo que nos falta es calcular el tamaño de la muestra:

Al nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$ El error de la estima viene dado por $z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, si se quiere sea de 1,176 entonces

$$1,96\frac{3}{\sqrt{n}} = 1,176$$

Despejamos n: $\sqrt{n} = \dfrac{1,96\cdot 3}{1,176} = 5$; $n = 25$. Es el tamaño de la muestra.

3.2. Junio 2019

- CUESTIÓN A.1 Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

  a) Calcule A^{-1}.

  b) Calcule el valor del parámetro a para que $B + C = A^{-1}$.

  c) Calcule el valor del parámetro a para que $A + B + C = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

  selcs Jun 2019 Solución:

  a) Hallamos la inversa de: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

  Adjuntamos a la derecha la matriz unidad

  $$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) 2^a \cdot (-2) + 1^a \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) 1^a + 2^a \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

  Ahora dividimos cada fila por su elemento de la diagonal principal:

  $$\begin{array}{l} 1^a/2 \\ 2^a/(-1) \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \text{ Queda: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

  b) $B + C = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$ Para que $A^{-1} = B + C$ ha de ser $a = 0$

  c) $A + B + C = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{pmatrix}$

  $3I = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ para que sean iguales ha de ser $a = 0$

- CUESTIÓN A.2

  Una empresa, que vende un cierto artículo al precio unitario de 40 euros, tiene por función de coste, $C(x) = 2x^2 + 4x + 98$, donde x es el número de unidades producidas del artículo. Calcular el número de unidades que debe vender para que el beneficio de la empresa sea máximo. Obtener el beneficio (ingresos menos los costes) máximo obtenido.

  selcs Jun 2019 Solución:

  La función que da los beneficios es: $B(x) = 40x - (2x^2 + 4x + 98) = -2x^2 + 36x - 98$

  Para hallar el máximo derivamos: $B'(x) = -4x + 36$ se anula para $x = 9$, estudiamos el crecimiento:

x		9	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$
		MÁXIMO	

  El beneficio máximo es por tanto $B(9) = 64$

- CUESTIÓN A.3

Dada la función $f(x)=\begin{cases} x+a & si \quad x<1 \\ x^2-2 & si \quad 1\le x\le 3 \\ x+b & si \quad x>3 \end{cases}$

a) Determinar a y b para que la función sea continua en todo R.

b) Hallar $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$.

selcs Jun 2019 Solución:

a) Para que sea continua igualamos los límites laterales en $x=1$ y en $x=3$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x+a=1+a$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^2-2=-1$

Por tanto ha de ser $a=-2$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x^2-2=9-2=7$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} x+b=3+b$

Por tanto ha de ser $7=3+b, \quad b=4$

b) $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3 (x^2-2)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x\right]_1^3=\frac{3^3}{3}-2\cdot 3-\left[\frac{1^3}{3}-2\cdot 1\right]=\frac{14}{3}$

- CUESTIÓN A.4

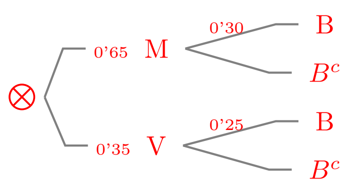
En el coro universitario el 65 % de sus componentes son mujeres. El 30 % de las mujeres y el 25 % de los hombres son bilingües. Si elegimos al azar a un componente del coro:

a) ¿Cuál es la probabilidad que sea bilingüe?

b) Sabiendo que es bilingüe, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

selcs Jun 2019 Solución:

Consideramos los sucesos: M ser mujer, V ser varón, B ser bilingüe.



$\{M,V\}$, forman un sistema completo de sucesos.

a) Teorema de la probabilidad total: $p(B)=p(B/M)\cdot p(M)+p(B/V)\cdot p(V)=0'65\cdot 0'30+0'35\cdot 0'25=0'2825$

b) Teorema de Bayes:

$$p(M/B)=\frac{p(B/M)\cdot p(M)}{p(B/M)\cdot p(M)+p(B/V)\cdot p(V)}=\frac{0'65\cdot 0'30}{0'2825}=0{,}6902$$

- CUESTIÓN A.5

El tiempo, en años, de renovación de un ordenador portátil se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica de 0’9 años. Si tomamos al azar a 900 usuarios, se obtiene una media muestral de 3’5 años. Hallar el intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de renovación de un ordenador portátil.

selcs Jun 2019 Solución:

Buscamos el intervalo de confianza al 95 % para la media de la población, sabiendo que: $\bar{x} = 3'5, \sigma = 0'9, n = 900$

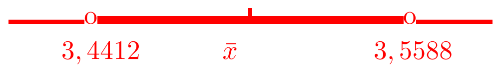
al nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

$$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3,5 \pm 1,96 \cdot \frac{0,9}{\sqrt{900}} = 3,5 \pm 0,0588 \begin{cases} 3,4412 \\ 3,5588 \end{cases}$$

El intervalo de confianza para la media es $(3,4412; 3,5588)$

con probabilidad 95 % μ está en:



- CUESTIÓN B.1: En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B, siendo sus precios unitarios de 15 euros y 12 euros, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesitan $\frac{1}{2}$ kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requieren 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿Cuántos dulces deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta.

selcs Jun 2019 Solución:

1) Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

$x =$ número de dulces A,

$y =$ número de dulces B. Beneficio: $F(x, y) = 15x + 12y$

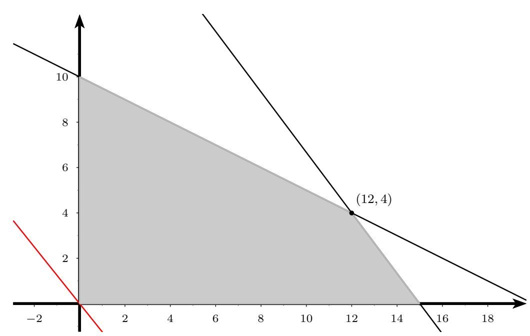
$0'5x + y \leq 10$
$8x + 6y \leq 120$

$0'5x + y \leq 10 \quad (1)$

x	0	20
y	10	0

$8x + 6y \leq 120 \quad (2)$

x	0	15
y	20	0



2) Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones y trazamos la recta:

$F(x, y) = 0; \quad 15x + 12y$

x	0	-12
y	0	15

Buscamos la paralela que pasa por un vértice y da una ordenada mayor en el origen.

El vértice intersección de

$$\begin{cases} 0'5x + y = 10 \\ 8x + 6y = 120 \end{cases} \quad \text{es } (12, 4)$$

Hay dos puntos a comprobar:

$$\begin{cases} F(12, 4) = 15 \cdot 12 + 12 \cdot 4 = 228 \\ F(15, 0) = 15 \cdot 15 = 225 \end{cases}$$

Luego para obtener el mayor beneficio habrá que hacer 12 de A y 4 de B.

El beneficio máximo será entonces: 228 euros.

- CUESTIÓN B.2: a) Sea la función $f(x) = ax^3 + bx$, calcular los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 1)$ y que en este punto la pendiente de la recta tangente vale -3.

  b) Si en la función anterior $a = 1$ y $b = -12$, determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos extremos.

  selcs Jun 2019 Solución:

  a) Pasa por el punto $(1, 1)$, $\quad f(1) = a + b = 1$

  La pendiente de la recta tangente vale -3: $f'(x) = 3ax^2 + b, \quad f'(1) = 3a + b = -3$

  $\left\{\begin{array}{l} a+b=1 \\ 3a+b=-3 \end{array}\right.$ restando: $-2a = 4; \quad a = -2, b = 3$ La función es $f(x) = -2x^3 + 3x$

  b) Se trata de estudiar el crecimiento de $f(x) = x^3 - 12x$, para ello anulamos la derivada:

  $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0, \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

x		-2		2	
f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		MÁXIMO		MÍNIMO	

  Además $f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = 16, ; \quad f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = -16$

  Por tanto la función crece hasta $x = -2$ donde tiene un máximo que vale 16, luego decrece desde $x = -2$ hasta $x = 2$ donde tiene un mínimo que vale -16 y luego vuelve a crecer en adelante.

- CUESTIÓN B.3: Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la recta $y = 6 - 2x$ y la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$. Calcular su área.

  selcs Jun 2019 Solución:

  La parábola tiene de puntos de corte con los ejes:

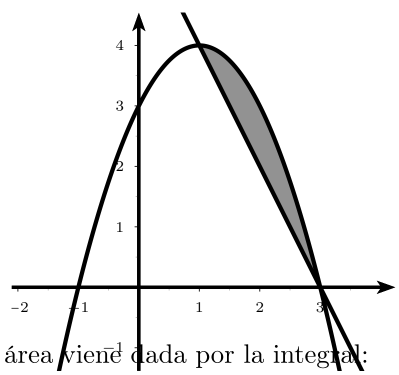
  $OX: \quad y = 0, \quad -x^2 + 2x + 3 = 0 \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

  $OX: \quad x = 0, \quad y = 3$

  Vamos a hallar los puntos de intersección con la recta resolviendo el sistema por igualación:

  $\left\{\begin{array}{l} y=6-2x \\ y=-x^2+2x+3 \end{array}\right.$

  $6 - 2x = -x^2 + 2x + 3; \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

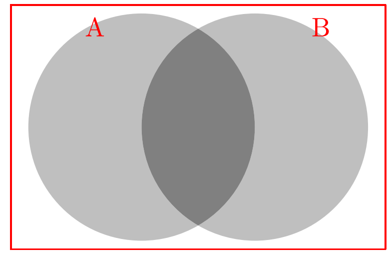
  

  Como la parábola es mayor que la recta en el intervalo de integración, el área viene dada por la integral:

  $$S = \int_1^3 \left[-x^2 + 2x + 3 - (6 - 2x)\right] dx = \int_1^3 (-x^2+4x-3)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 3x\right]_1^3 = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^3 =$$
  $$-\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - \left(-\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1\right) = \frac{4}{3}$$

- CUESTIÓN B.4: Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $p(A) = 0'3, p(B) = 0'2$ y $p(A/B) = 0'5$. Calcular $p(A \cap B)$ y $p(A \cup B)$.

  selcs Jun 2019 Solución:

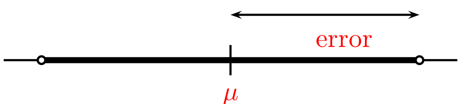


$p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B) = 0'5 \cdot 0'2 = 0'1$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'3 + 0'2 - 0'1 = 0'4$

- CUESTIÓN B.5: El tiempo en minutos de conexión a Internet de los estudiantes de un centro de secundaria, sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. Para poder estimar la media del tiempo de conexión, se construye un intervalo de confianza con un error menor o igual a 5 minutos, con un nivel de confianza del 95 %. Determine cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar.

selcs Jun 2019 Solución:



Hemos de hallar el tamaño de la muestra al nivel de confianza 95 % , sabiendo que $\sigma = 10$, si queremos un error menor que 5 .

Al nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$ El error de la estima viene dado para el nivel de confianza del 95 % por $z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, si se quiere sea menor de 5 entonces

$1,9600 \dfrac{10}{\sqrt{n}} \leq 5$

Despejamos n: $\quad 1,96 \dfrac{10}{\sqrt{n}} = 5, \quad \sqrt{n} = \dfrac{1,96 \cdot 10}{5} = 3,92; \quad n \geq 15,3664.$

Así, pues, se tiene la confianza del 95 % de que el error de la estima será menor de 5 solamente si n es 16 o mayor.

Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 4

Año 2018

4.1. Septiembre 2018

- CUESTIÓN A1.

  Dadas las matrices

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

  Hallar $x,\ y,\ z$ para que se cumpla $A^t(B+C) = D$

  selcs Sep 2018 Solución:

  $$B + C = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ z+1 \end{pmatrix}; \qquad A^t(B+C) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ z+1 \end{pmatrix} =$$

  $$\begin{pmatrix} 2x - 3y - z - 1 \\ -x + y + 2z + 2 \\ 0 + y - z - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

  Queda el sistema:

  $$\begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ -x + y + 2z = -1 \\ y - z = -4 \end{cases} \text{ Ponemos la segunda ecuación arriba: } \begin{cases} -x + y + 2z = -1 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ y - z = -4 \end{cases}$$

  La matriz asociada es: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

  Triangulando: $2^a + 1^a \cdot 2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} 3^a + 2^a \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

  $$\begin{cases} -x + y + 2z = -1 \\ y - 3z = -2 \\ 2z = -2 \end{cases} \qquad x = -6; \quad y = -5; \quad z = -1$$

- CUESTIÓN A2.

Dada la función $f(x) = x^3 \ln(2x+5) + ax + b$ con a y b números reales. Hallar a y b para que se cumpla $f(0) = 2$ y $f'(0) = 1$

selcs Sep 2018 Solución:

$f(0) = 2; \quad b = 2$

$f'(x) = 3x^2 \ln(2x+5) + x^3 \dfrac{2}{2x+5} + a = 3x^2 \ln(2x+5) + \dfrac{2x^3}{2x+5} + a; \qquad f'(0) = 1; \quad a = 1$

- CUESTIÓN A3.

Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_1^2 \left(-x^3 + 3x - 2\right)\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+1}\, dx$

c) $\displaystyle\int 2\, e^{2x}\, dx$

selcs Sep 2018 Solución:

a) $\displaystyle\int_1^2 \left(-x^3 + 3x - 2\right)\, dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = -\frac{2^4}{4} + \frac{3\cdot 2^2}{2} - 2\cdot 2 - (-\frac{1^4}{4} + \frac{3\cdot 1^2}{2} - 2\cdot 1) =$

$-4 + 6 - 4 - (-\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{2} - 2) = -\dfrac{5}{4}$

b) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+1}\, dx = \{$ está arriba la derivada de lo de abajo $\} = \ln(x^3+1) + C$

c) $\displaystyle\int 2\, e^{2x}\, dx = \{$ está multiplicando la derivada del exponente $\} = e^{2x} + C$

- CUESTIÓN A4.

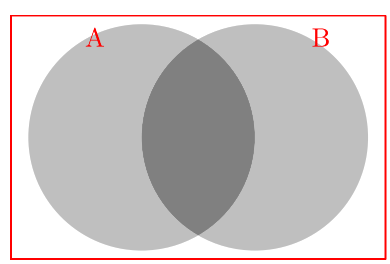
Sabiendo que $p(A \cup B) = 0'95; \quad p(A \cap B) = 0'35$ y $p(A/B) = 0'5$. Hallar $p(A), p(B), p(\bar{A} \cap \bar{B})$

selcs Sep 2018 Solución:

$p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B)$, sustituyendo $0'35 = 0'5 \cdot p(B)$, resulta $p(B) = 0'7$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, sustituyendo $0'95 = p(A) + 0'7 - 0'35$, resulta $p(A) = 0'6$

$A^c \cap B^c$ es el suceso contrario de $A \cup B$ por tanto $p(A^c \cap B^c) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0'95 = 0'05$



- CUESTIÓN A5.

En una muestra aleatoria de 100 individuos se ha obtenido para el peso una media de 60 kg. Se sabe que el peso en la población de la que procede la muestra sigue una distribución normal con una desviación típica de 20 kg.

a) Obtener un intervalo de confianza al 92 % para el peso medio de la población.

b) ¿Qué error máximo se comete en la estimación anterior?

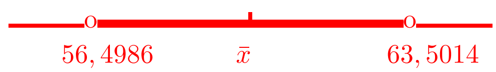
selcs Sep 2018 Solución:

a) al nivel de confianza del 92 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,7506$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

$$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 60 \pm 1,7506 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 60 \pm 3,5013 \begin{cases} 56,4986 \\ 63,5014 \end{cases}$$

El intervalo de confianza para la media es $(56,4986; 63,5014)$

con probabilidad 92 % μ está en: 

b) El error es el radio del intervalo de confianza ERROR$= z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,7506 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 3,5013$

- CUESTIÓN B1.

  Un agricultor puede utilizar, como máximo, 120 hectáreas de terreno para dos tipos de cultivo, A y B. Quiere dedicar, al menos, 25 hectáreas al cultivo A, y el terreno dedicado al cultivo B debe ser como mínimo el doble que el dedicado al cultivo A. Cada hectárea de cultivo A le produce 300 € de beneficio, mientras que cada hectárea de cultivo B le produce 215 € . Hallar las hectáreas que debe dedicar a cada uno de los cultivos para conseguir el máximo beneficio. ¿A cuánto ascenderá dicho beneficio?

selcs Sep 2018 Solución:

1) Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

$x =$ número de hectáreas A,

$y =$ número de hectáreas B. Beneficio: $F(x, y) = 300x + 215y$

$x + y \leq 120$
$x \geq 25$
$y \geq 2x$

$x + y \leq 120 \quad (1)$

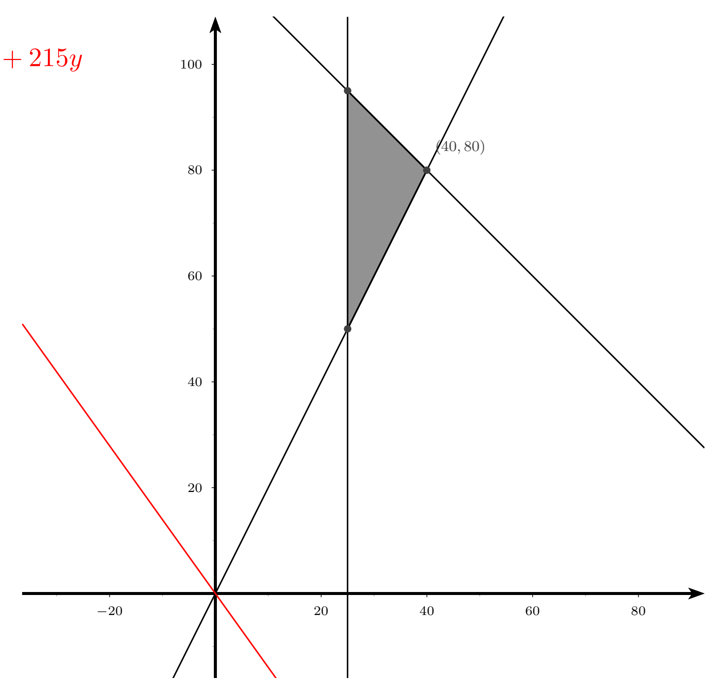
x	0	120
y	120	0

$y \geq 2x \quad (2)$

x	0	50
y	0	100

2) Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones y trazamos la recta:
$F(x, y) = 0; \quad 300x + 215y = 0$

x	0	$-21'5$
y	0	30



Buscamos la paralela que pasa por un vértice y da una ordenada mayor en el origen, probaremos en dos puntos:

El de intersección de:

$$\begin{cases} x+y=120 \\ y=2x \end{cases}$$ es $(40,80)$ que da de beneficio $F(40,80)=300\cdot 40+215\cdot 80=29200$ euros.

El otro punto es $(25,95)$ que da de beneficio $F(25,95)=300\cdot 25+215\cdot 95=27925$ euros.

Luego para obtener el mayor beneficio habrá que dedicar 40 hectáreas a A y 80 hectáreas a B.

El beneficio máximo será entonces: $F(40,80)=300\cdot 40+215\cdot 80=29200$ euros.

- CUESTIÓN B2.

  Dada la función $f(x)=5x^3\,e^{2x}+\dfrac{1}{x^2+1}$

  a) Calcular $f'(0)$

  b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(0,1)$

  selcs Sep 2018 Solución:

  a) $f'(x)=15x^2\,e^{2x}+5x^3\,2\,e^{2x}-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2};\quad f'(0)=0$

  b) Como la derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto y la ecuación de una recta que pasa por el punto (x_0,y_0) y tiene de pendiente m es: $y-y_0=m(x-x_0)$, con $m=f'(x_0)=f'(0)=0$

  La recta tangente a $f(x)$ en el punto $(0,1)$, será: $y-1=0$

- CUESTIÓN B3. Hallar el valor del parámetro a para que se cumpla $\displaystyle\int_0^1 \left(ax^3-9x^2+10\right)\,dx=2a$

  selcs Sep 2018 Solución:

  $$\int_0^1 \left(ax^3-9x^2+10\right)\,dx=\left[\frac{ax^4}{4}-\frac{9x^3}{3}+10x\right]_0^1=\frac{a\cdot 1^4}{4}-\frac{9\cdot 1^3}{3}+10\cdot 1-0=\frac{a}{4}-3+10=\frac{a}{4}+7$$

  Igualando $\dfrac{a}{4}+7=2a$ y resolviendo $2a-\dfrac{a}{4}=7;\quad \dfrac{7a}{4}=7;\qquad a=4$

- CUESTIÓN B4.

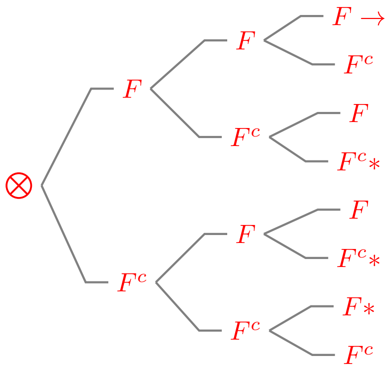
  En un grupo hay 12 mujeres y 8 hombres. Se eligen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, tres personas.

  a) Hallar la probabilidad de que las tres personas sean mujeres.

  b) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres personas no sean del mismo sexo?

  c) Hallar la probabilidad de que salgan, al menos, dos hombres.

  selcs Sep 2018 Solución:



Llamemos $F =$ "elegir mujer"

a) Probabilidad de tres mujeres " $\rightarrow$":
$\frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{10}{18} = \frac{1320}{6840} = \frac{11}{57} = 0'1929$

b) Probabilidad de no tres del mismo sexo:
Hallamos primero la probabilidad de tres hombres:
$\frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} = \frac{336}{6840} = \frac{14}{285} = 0'04912$

La probabilidad de no tres del mismo sexo es lo contrario de tres hombres o tres mujeres por tanto,
Probabilidad de no tres del mismo sexo:
$1 - \left(\frac{11}{57} + \frac{14}{285}\right) = \frac{72}{95} = 0'7578$

c) La probabilidad de que salgan, al menos, dos hombres es que salgan dos hombres o tres hombres. Hallamos primero la probabilidad de dos hombres

probabilidad de dos hombres (son tres ramas" $*$"): $\frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19} \cdot \frac{7}{18} + \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19} \cdot \frac{7}{18} + \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{12}{18} = 3 \cdot \frac{672}{6840} = \frac{28}{95}$

La probabilidad de que salgan, al menos, dos hombres es: $\frac{28}{95} + \frac{14}{285} = \frac{98}{285} = 0'3438$

- CUESTIÓN B5.

En una muestra aleatoria de tamaño 150 de individuos de una población se ha obtenido que 32 utilizan el tranvía. Hallar un intervalo de confianza al 99 % para la proporción de individuos de la población que utilizan el tranvía.

selcs Sep 2018 Solución:

Los datos son: proporción de la muestra $\hat{p} = \frac{32}{150} = 0,2133, n = 150$

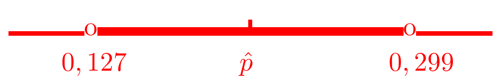
Para el nivel de confianza del 99 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,58$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

$$\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,2133 \pm 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,2133 \cdot 0,7867}{150}} = 0,2133 \pm 0,0863 \begin{cases} 0,1270 \\ 0,2996 \end{cases}$$

El intervalo de confianza para la proporción es $(0,1270; 0,2990)$

con probabilidad 99 % p está en:



4.2. Junio 2018

- CUESTIÓN A1.

Discutir el siguiente sistema en función del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ ax+y-2z=4 \end{array}\right.$$

Resolverlo para $a=2$.

selcs Jun 2018 Solución:

Aplicando el método de Gauss empezamos a triangular la matriz ampliada, como hay un parámetro habrá que considerar los valores de éste que anulen un denominador, como el parámetro afecta a x alteramos el orden de las incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{l} -z+2y+x=6 \\ z+y=1 \\ -2z+y+ax=4 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{rrrr} -1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & a & 4 \end{array}\right) \quad \left\{\begin{array}{l} 2^a+1^a \\ 3^a+1^a\cdot(-2) \end{array}\right\} \left(\begin{array}{rrrr} -1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & -2+a & -8 \end{array}\right) \quad \{3^a+2^a\} \left(\begin{array}{rrrr} -1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 \end{array}\right)$$

Tenemos entonces:

- Si $a\neq 1$, el sistema es compatible determinado o sea con solución única.
- Si $a=1$ la última ecuación sería $0x=-1$, luego el sistema es incompatible o sea sin solución.

Para $a=2$ queda el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} -z+2y+x=6 \\ 3y+x=7 \\ x=-1 \end{array}\right. \quad \text{Y sustituyendo hacia arriba: } y=\frac{8}{3};\, z=-\frac{5}{3}$$

- CUESTIÓN A2.

Una empresa fabrica un determinado producto, que vende al precio unitario de 15 euros. La función de costes, que representa el coste (en unidades monetarias) en función del número de unidades de producto, es $C(x)=2x^2-45x+300$, donde x es el número de unidades del producto. Hallar el número de unidades que ha de vender para obtener el máximo beneficio, sabiendo que el beneficio es igual al ingreso total obtenido por la venta menos los costes. Calcular el beneficio máximo.

selcs Jun 2018 Solución:

Ingresos: $I(x)=15x$

Función de beneficio: $B(x)=I(x)-C(x)=15x-(2x^2-45x+300)=-2x^2+60x-300$. Es un función parabólica. Buscamos el máximo:

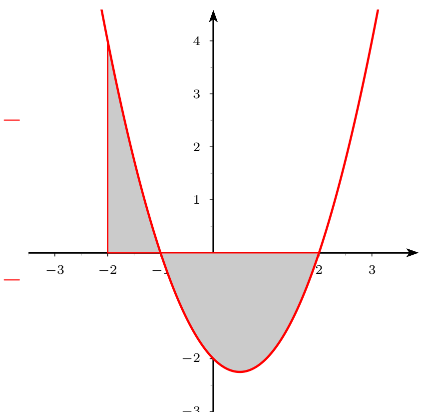
$B'(x)=-4x+60=0; \quad x=15$ El máximo beneficio se produce fabricando 15 unidades y ese beneficio es $B(15)=-450+900-300=150$ €

- CUESTIÓN A3.

Hallar el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $y = x^2 - x - 2$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$. Hacer la representación gráfica de dicha área.

selcs Jun 2018 Solución:

Al ser una parábola para representar hallamos los puntos de corte con OX se hace $y = 0$ y resulta: $\quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$



$$S_1 = \int_{-2}^{-1} x^2 - x - 2dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-2}^{-1} = \left(\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 2(-2)\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1)\right) = \frac{11}{6}u^2$$

$$S_2 : \int_{-1}^{2} x^2 - x - 2dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1)\right) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2\cdot 2\right) = -\frac{9}{2}$$

El área total encerrada es por tanto $\dfrac{11}{6} + \dfrac{9}{2} = \dfrac{38}{6} = \dfrac{19}{3}u^2$

- CUESTIÓN A4.

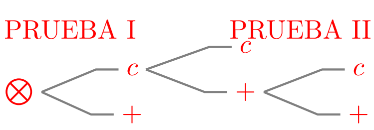
El examen de una asignatura consta de tres pruebas. La primera prueba es superada por el 80 % de los alumnos que la realizan. Esta prueba es eliminatoria, por lo que si no se supera no se pueden realizar las otras, y se suspende la asignatura. La segunda prueba tiene dos convocatorias en las que puede superarse, la ordinaria y la extraordinaria (para alumnos que no la hayan superado en la ordinaria). Superan esta prueba el 35 % de los alumnos en la convocatoria ordinaria y el 50 % de los alumnos que se presentan a la extraordinaria. La tercera prueba solo pueden realizarla los alumnos que tienen las otras dos pruebas superadas, y la supera el 75 % de los alumnos presentados.

a) Calcular la probabilidad de superar las dos primeras pruebas.

b) Si el requisito para aprobar la asignatura es que se superen las tres pruebas, hallar la probabilidad de aprobar la asignatura.

selcs Jun 2018 Solución:

a)



c representa aprobar, las dos trayectorias superiores que acaban en c corresponden con superar las dos primeras pruebas cuya probabilidad será:
$p = 0'8 \cdot 0'35 + 0'8 \cdot 0'65 \cdot 0'5 = 0'54$

b) La probabilidad de aprobar las tres pruebas será por tanto $p' = 0'54 \cdot 0'75 = 0'405$

- CUESTIÓN A5.

En una muestra aleatoria de tamaño 200 de árboles de una población se ha obtenido que 45 tienen una plaga. Hallar un intervalo de confianza al 90 % para la proporción de árboles de la población que tienen la plaga.

selcs Jun 2018 Solución:

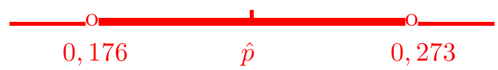
Los datos son: proporción de la muestra $\hat{p} = \dfrac{45}{200} = 0,2250, n = 200$

Para el nivel de confianza del 90 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,65$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

$$\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,2250 \pm 1,65 \cdot \sqrt{\frac{0,2250 \cdot 0,7750}{200}} = 0,2250 \pm 0,0487 \begin{cases} 0,1763 \\ 0,2737 \end{cases}$$

El intervalo de confianza para la proporción es $(0,1760; 0,2730)$

con probabilidad 90 % p está en: 

- CUESTIÓN B1.

  Una fabrica produce dos modelos de bolsos, tipo A y tipo B. Cada bolso tipo A requiere 5 m^2 de piel y 5 horas de trabajo y cada bolso del modelo B requiere 5 m^2 de piel y 10 horas de trabajo. Dispone de 200 m^2 de piel y 225 horas de trabajo. Además, quiere producir mayor o igual número de bolsos tipo A que B. El beneficio obtenido es de 50 euros cada bolso tipo A y 80 euros por cada bolso tipo B. Hallar el numero de bolsos que debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

selcs Jun 2018 Solución:
Sean:
$x =$ número de bolsos tipo A
$y =$ número de bolsos tipo B
Beneficio: $f(x, y) = 50x + 80y$ €

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 5y \leq 200 \\ 5x + 10y \leq 225 \\ x \geq y \end{array}\right\}$$

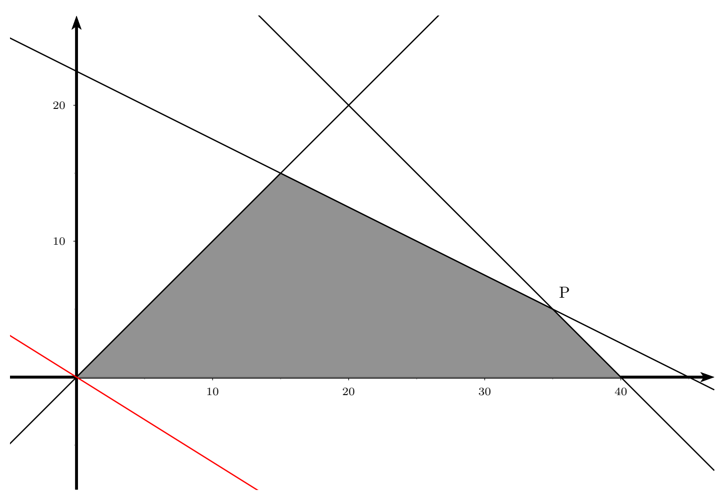
Representamos: $5x + 5y \leq 200$ $\begin{array}{c|cc} x & 40 & 0 \\ \hline y & 0 & 40 \end{array}$

$5x + 10y \leq 225$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 45 \\ \hline y & 22'5 & 0 \end{array}$

$x \geq y$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 40 \\ \hline y & 0 & 40 \end{array}$

Ahora la función igualada a 0:

$f(xy) = 50x + 80y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -40 \\ \hline y & 0 & 25 \end{array}$



Para maximizar el beneficio tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ más alejada, la que pasa por el punto P, hallamos sus coordenadas: $\begin{cases} 5x + 5y = 200 \\ 5x + 10y = 225 \end{cases}$ $x = 35, y = 5$.

$P(35, 5)$; $\quad f(35, 5) = 50 \cdot 35 + 80 \cdot 5 = 2150$

Por tanto el beneficio máximo resulta de hacer 35 bolsos del tipo A y 5 bolsos del tipo B, obteniendo así 2150 € .

- CUESTIÓN B2.

  Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{5x+1}}$

b) $g(x) = x^2 \ln x^2$

c) $h(x) = e^{-3x+x^2}$

selcs Jun 2018 Solución:

a) $f(x) = (5x+1)^{-\frac{1}{5}}$; $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{5}(5x+1)^{-\frac{6}{5}} \cdot 5 = \dfrac{1}{\sqrt[5]{(5x+1)^6}}$

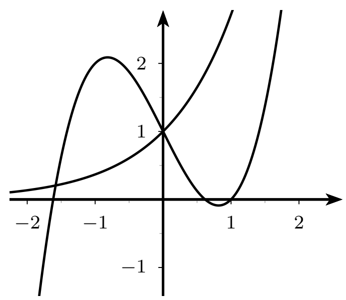
b) $g'(x) = 2x \ln x^2 + x^2 \dfrac{1}{x^2} 2x = 2x \ln x^2 + 2x$

c) $h'(x) = e^{-3x+x^2}(-3+2x)$

- CUESTIÓN B3.

  Dadas las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^3 - 2x + 1$ cuyas gráficas aparecen en la siguiente figura.

  Hallar el área del recinto acotado limitado por las dos gráficas y las rectas $x = -1$ y $x = 0$.



selcs Jun 2018 Solución:

Área $= \displaystyle\int_{-1}^{0} (x^3 - 2x + 1 - e^x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^2 + x - e^x\right]_{-1}^{0} = -e^0 - \left(\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^2 - 1 - e^{-1}\right) = -1 - \left(\frac{1}{4} - 1 - 1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{e} = 1'1178$

- CUESTIÓN B4.

  La probabilidad de que un autobús llegue con retraso a una parada es 0’2. Si pasa cuatro veces a lo largo del día por la parada, calcular la probabilidad de que:

  a) No llegue con retraso ninguna de las veces.

  b) Llegue con retraso al menos una vez.

  c) Al menos tres veces llegue con retraso.

  d) Llegue con retraso exactamente dos veces consecutivas.

selcs Jun 2018 Solución:

Es como tirar una moneda 4 veces, con probabilidad de cara (retraso) 0’2.

a) Ninguna vez retraso equivale a 4 veces puntual: $++++$, por tanto $p_a = 0'8^4 = 0'4096$

b) Retraso al menos una vez, complementario del anterior $p_b = 1 - 0'8^4 = 0'5904$

c) Al menos tres veces retraso:

$$\text{tres retrasos } +ccc; \quad c+cc; \quad cc+c; \quad ccc+ \quad p = 4 \cdot 0'2^3 \cdot 0'8 = 0'0256$$

cuatro retrasos: $p = 0'2^4 = 0'0016$

Resulta: al menos tres veces retraso: $p_c = 4 \cdot 0'2^3 \cdot 0'8 + 0'2^4 = 0'0272$

d) Con retraso dos veces consecutivas: $cc++; \quad +cc+; \quad ++cc \quad p_d = 3 \cdot 0'2^2 \cdot 0'8^2 = 0{,}0768$

- CUESTIÓN B5.

La altura para una determinada población sigue una distribución normal con una desviación típica conocida σ. Para hallar un intervalo de confianza para la media de la población se ha tomado una muestra aleatoria simple de 100 individuos, obteniéndose una altura media de 145 cm. Si el intervalo de confianza con un nivel de significación 0'05 construido a partir de los datos anteriores es $(135'2, 154'8)$, hallar el valor de σ.

selcs Jun 2018 Solución:

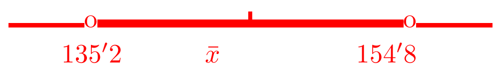
Al nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Por tanto el error (radio del intervalo de confianza) es:

$154'8 - 145 = 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}, \quad 1'96 \dfrac{\sigma}{10} = 9'8, \quad \sigma = \dfrac{9'8 \cdot 10}{1'96} = 50$

con probabilidad 95 % μ está en:



Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 5

Año 2017

5.1. Septiembre 2017

- CUESTIÓN A1. Tres automóviles A, B y C salen del mismo punto en tres momentos distintos y los tres circulan a una velocidad constante de 100 km por hora. Actualmente la suma de las distancias recorridas por los tres es de 800 km y la distancia recorrida por A es el triple de la recorrida por B. Hallar la distancia recorrida por cada uno de ellos en la actualidad, sabiendo que cuando pase media hora (es decir, cuando todos hayan recorrido 50 km más) la suma de las distancias recorridas por A y B será 50 km más que la recorrida por C.

  selcs Sep 2017 Solución:

  $x =$ distancia recorrida por A

  $y =$ distancia recorrida por B

  $z =$ distancia recorrida por C

  $$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=800 \\ x=3y \\ x+50+y+50=z+50+50 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} x+y+z=800 \\ x-3y=0 \\ x+y-z=0 \end{array}\right.$$

  que resuelto da $x = 300, y = 100, z = 400$, que son los km recorridos por cada uno.

- CUESTIÓN A2. Dada la función $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$

  donde a y b son números reales, hallar el valor de a y b para que se cumpla que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1$.

  selcs Sep 2017 Solución:

  $f(0) = b = 1$, luego la función queda $f(x) = \dfrac{ax+1}{x^2+1}$

  $f'(x) = \dfrac{a(x^2+1)-(ax+1)2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-ax^2-2x+a}{(x^2+1)^2}$, por tanto $f'(0) = \dfrac{a}{1} = 1; \quad a = 1$

  La función que cumple las condiciones es $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

- CUESTIÓN A3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x+1 & si \quad x < -3 \\ x^2+2x+1 & si \quad -3 \leq x \end{cases}$

  a) Hacer la representación gráfica de dicha función.

  b) Hallar el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y la recta $y = 2x+5$.

  selcs Sep 2017 Solución:

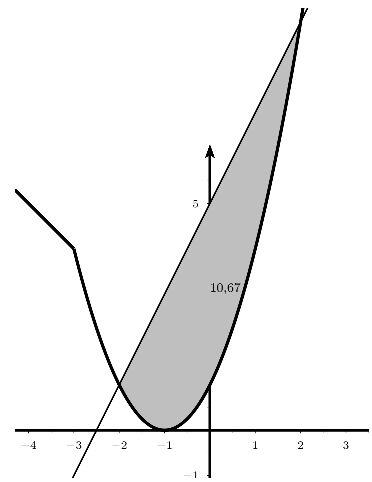
  a) primer trozo de recta $-x+1$ $\begin{array}{c|cc} x & -3 & -4 \\ \hline y & 4 & 5 \end{array}$

  segundo trozo de parábola x^2+2x+1, el vértice está en $(-1, 0)$

x	-3	-1	0
y	4	0	1

  b) Hacemos la intersección de $y = x^2+2x+1$ con $y = 2x+5$:
  $x^2+2x+1 = 2x+5; \quad x^2 = 4; \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

  $$\text{Área} = \int_{-2}^{2} \text{recta - parábola} = \int_{-2}^{2} (-x^2+4)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2} =$$
  $$-\frac{8}{3}+8-\left(\frac{8}{3}-8\right) = 16-\frac{16}{3} = \frac{32}{3}\ \text{u}^2$$



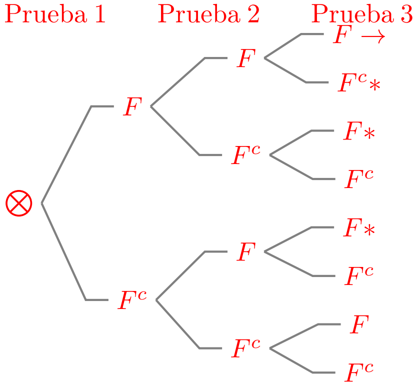
- CUESTIÓN A4. Para que un producto cosmético tenga el informe favorable de una agencia de sanidad debe superar tres pruebas de evaluación de garantía sanitaria. Las pruebas son independientes y todos los productos se someten a las tres pruebas. Se sabe, por otras ocasiones, que la probabilidad de superar la primera prueba es 0,8, la de superar la segunda es 0,75 y la de superar la tercera 0,85. Hallar:

  a) La probabilidad de que un producto tenga el informe favorable.

  b) La probabilidad de que un producto no tenga el informe favorable por fallar solamente en una prueba.

  selcs Sep 2017 Solución:

  Prueba 1 Prueba 2 Prueba 3



  F prueba favorable

  a) Probabilidad de los tres favorables " $\rightarrow$": $0'8 \cdot 0'75 \cdot 0'85 = 0'51$

  b) Probabilidad de dos favorables " $*$": $0'8 \cdot 0'75 \cdot 0'15 + 0'8 \cdot 0'25 \cdot 0'85 + 0'2 \cdot 0'75 \cdot 0'85 = 0'3875$

- CUESTIÓN A5. El consumo de carne por persona en un año para una población es una variable aleatoria con distribución normal con desviación típica igual a 2 Kg. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 individuos y se obtienen los siguientes consumos anuales por persona (en Kg): 24; 20; 12; 10; 30; 27; 35; 30; 25; 39.

Determinar el intervalo de confianza al 90 % para el consumo medio de carne por persona al año para la población.

selcs Sep 2017 Solución:

La media de la muestra es $\bar{x} = \dfrac{24+20+12+10+30+27+35+30+25+39}{10} = 25'2$

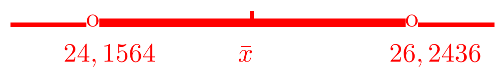
Al nivel de confianza del 90 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,65$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 25,2 \pm 1,65 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{10}} = 25,2 \pm 1,043551628 \begin{cases} 24,1564 \\ 26,2436 \end{cases}$

El intervalo de confianza para la media es $(24,1564; 26,2436)$

con probabilidad 90 % μ está en:



- CUESTIÓN B1. Una perfumería prepara dos lotes de productos, el lote 1 contiene 2 perfumes, 2 jabones y 1 crema corporal y el lote 2 está formado por 1 perfume, 2 jabones y 2 cremas corporales. Sabiendo que dispone de 150 perfumes, 180 jabones y 150 cremas corporales y que el beneficio obtenido es de 45 euros por cada lote del tipo 1 y de 30 euros por cada lote del tipo 2, hallar el número de lotes que debe hacer de cada tipo para obtener el beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio?

selcs Sep 2017 Solución:

1) Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

x = número de lotes 1,

y = número de lotes 2. Beneficio: $F(x,y) = 45x + 30y$

$2x + y \leq 150$
$2x + 2y \leq 180$
$x + 2y \leq 150$

$2x + y \leq 150$

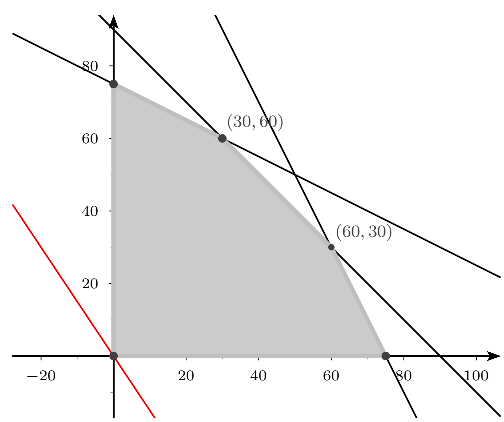
x	0	75
y	150	0

$2x + 2y \leq 180$

x	0	90
y	90	0

$x + 2y \leq 150$

x	0	75
y	150	0



2) Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones y trazamos la recta:

$F(x,y) = 0; \quad 45x + 30y = 0$

x	0	−30
y	0	45

Buscamos la paralela que pasa por un vértice y da una ordenada mayor en el origen: es la que pasa por el vértice intersección de

$\begin{cases} 2x + y = 150 \\ 2x + 2y = 180 \end{cases}$ es $(60, 30)$

Luego para obtener el mayor beneficio habrá que hacer 60 lotes de 1 y 30 lotes de 2.

El beneficio máximo será entonces: $F(50, 50) = 45 \cdot 60 + 30 \cdot 30 = 3600$ euros.

- CUESTIÓN B2. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

  a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}$

  b) $g(x) = x^2\, e^{x^2}$

  c) $h(x) = \dfrac{\ln(x^2)}{x}$

  selcs Sep 2017 Solución:

  a) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1} - \frac{2x}{2\sqrt{2x+1}}}{2x+1}$

  b) $g'(x) = 2x\, e^{x^2} + x^2 \cdot 2x\, e^{x^2}$

  c) $h'(x) = \dfrac{\frac{2x}{x^2}\, x - \ln(x^2)}{x^2}$

- CUESTIÓN B3. Dada la función $f(x) = 2e^{2x-2}$ hallar la función primitiva $F(x)$ que cumple que $F(1) = 0$.

  selcs Sep 2017 Solución:

  $\displaystyle\int 2e^{2x-2}\, dx = e^{2x-2} + C$

  $F(1) = e^{2\cdot 1-2} + C = e^0 + C = 1 + C = 0$ la primitiva buscada es $F(x) = e^{2x-2} - 1$

- CUESTIÓN B4. En un grupo el 60 % de los alumnos aprueba la asignatura A y el 30 % aprueba la asignatura B. Se sabe, además, que el 10 % de los alumnos que aprueba la asignatura B aprueba también la asignatura A. Hallar el porcentaje de alumnos del grupo que aprueba alguna de las dos asignaturas.

  selcs Sep 2017 Solución:

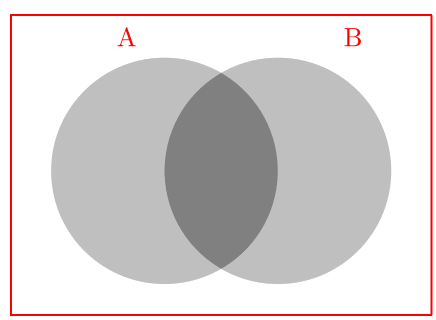
  "A" aprobar A, $p(A) = 0'6$
  "B" aprobar B, $p(B) = 0'3$

  además dicen que $p(A/B) = 0'1$

  Piden $p(A \cup B)$. Como $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, necesitamos $p(A \cap B)$ que obtendremos de la condicionada:
  $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}, \quad 0'1 = \dfrac{p(A \cap B)}{3}, \quad p(A \cap B) = 0'03$

  Aprobar alguna $p(A \cup B) = 0'6 + 0'3 - 0'03 = 0'87$.

  El 87 % aprueba alguna asignatura.



- CUESTIÓN B5. La estatura de los individuos de una población es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 0,4 m. Para estimar la media se toma una muestra aleatoria de tamaño n y se encuentra un valor medio de la estatura igual a 1,6 m. Si el intervalo de confianza al 95 % construido a partir de esos datos es $(1'5216, 1'6784)$, calcular el valor de n .

selcs Sep 2017 Solución:

Como el error es el radio del intervalo de confianza, nos dicen que error $= 1'6784 - 1'6 = 0'0784$

Al nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,9600$ El error de la estima viene dado para el nivel de confianza del 95 % por $z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, si se quiere sea menor de 0,0784 entonces

$1,9600 \dfrac{0,4}{\sqrt{n}} \leq 0,0784$

Despejamos n: $\quad 1,9600 \dfrac{0,4}{\sqrt{n}} = 0,0784, \quad \sqrt{n} = \dfrac{1,96 \cdot 0,4}{0,0784} = 10; \quad n \geq 100.$

Así, pues, se tiene la confianza del 95 % de que el error de la estima será 0,0784 si n es 100.

5.2. Junio 2017

- CUESTIÓN A1.

Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcular A^t.

a) Calcular $A \cdot B$.

b) Hallar la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple $A \cdot B \cdot X = C + I$ donde $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad.

selcs Jun 2017 Solución:

a) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) Despejando X resulta $(AB)X = C + I$; $(AB)^{-1}(AB)X = (AB)^{-1}(C + I)$; $X = (AB)^{-1}(C + I)$

Hallamos $(AB)^{-1}$:

Método 1: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $2^a \cdot (-3) + 1^a$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $1^a \cdot 5 + 2^a \cdot (-2)$ $\begin{pmatrix} 15 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Dividiendo cada fila por el elemento de la diagonal principal: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}$

La inversa es: $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}$

Método 2: La inversa de una matriz es la adjunta de la traspuesta dividida por el determinante: |AB|= -5;

$(AB)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $adj((AB)^t) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $(AB)^{-1} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}$

$C + I = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -0 \end{pmatrix}$

$(AB)^{-1}(C + I) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

- CUESTIÓN A2.

El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo t (en años) viene dado por la función $f(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000 \quad 0 \le t \le 11$

Calcular:

a) La cantidad de agua almacenada en el último año ($t = 11$).

b) El año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo.

c) El volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo.

selcs Jun 2017 Solución:

$f(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000 \quad 0 \leq t \leq 11$

a) $f(11) = 8407$ millones de litros.

b) Para hallar el máximo estudiamos el crecimiento de f con el signo de su derivada

$$f'(t) = 3\,t^2 - 48\,t + 180 = 0; \quad t = \left\{ \begin{array}{l} 10 \\ 6 \end{array} \right.$$

t		6		10	
f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$	MÍNIMO	$\nearrow$

c) $f(6) = 8432$ millones de litros.

- CUESTIÓN A3.

Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_1^2 \left(-x^2 + 3x + 1\right)\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{x+2}\, dx$

selcs Jun 2017 Solución:

a) $\displaystyle\int_1^2 \left(-x^2 + 3x + 1\right)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3\,x^2}{2} + x\right]_1^2 = -\frac{2^3}{3} + \frac{3\,2^2}{2} + 2 - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{3\,1^2}{2} + 1\right) = \frac{19}{6}$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{x+2}\, dx = 2\ln(x+2) + C$

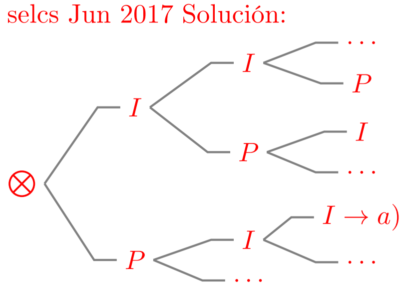
- CUESTIÓN A4.

Una urna contiene tres bolas numeradas del 1 al 3. Se extraen sucesivamente las tres bolas.

a) Calcular la probabilidad de que las dos últimas bolas extraídas sean impares.

b) Determinar si los siguientes sucesos son independientes: S_1, : "sale número par antes de alguno de los impares" y S_2 :"los dos números impares salen consecutivamente".

selcs Jun 2017 Solución:



Sea I salir impar, P salir par.

a) Llamamos A al suceso "las dos últimas bolas extraídas son impares":

$p(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3}$

b) S_1 se corresponde con dos ramas la del apartado anterior A y la que está encima, por tanto $p(S_1) = p(A) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

S_2 se corresponde también con dos ramas la del apartado anterior A y la primera, por tanto $p(S_2) = p(A) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

La intersección es precisamente la rama de del apartado a) $S_1 \cap S_2 = A; \quad p(S_1 \cap S_2) = \frac{1}{3}$

Por otro lado: $p(S_1) \cdot p(S_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ que como no coincide con el anterior nos indica que S_1 y S_2 no son independientes.

- CUESTIÓN A5.

En una muestra aleatoria de 175 individuos de una población se ha obtenido que 30 tienen más de 65 años. Hallar un intervalo de confianza al 90 % para la proporción de mayores de 65 años de la población.

selcs Jun 2017 Solución:

Los datos son: proporción de la muestra $\hat{p} = \frac{30}{175} = 0,1714, n = 175$

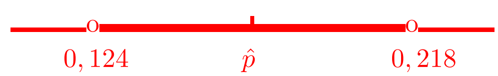
Para el nivel de confianza del 90 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,65$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

$$\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,1714 \pm 1,65 \cdot \sqrt{\frac{0,1714 \cdot 0,8286}{175}} = 0,1714 \pm 0,0470 \begin{cases} 0,1244 \\ 0,2184 \end{cases}$$

El intervalo de confianza para la proporción es $(0,1240; 0,2180)$

con probabilidad 90 % p está en:



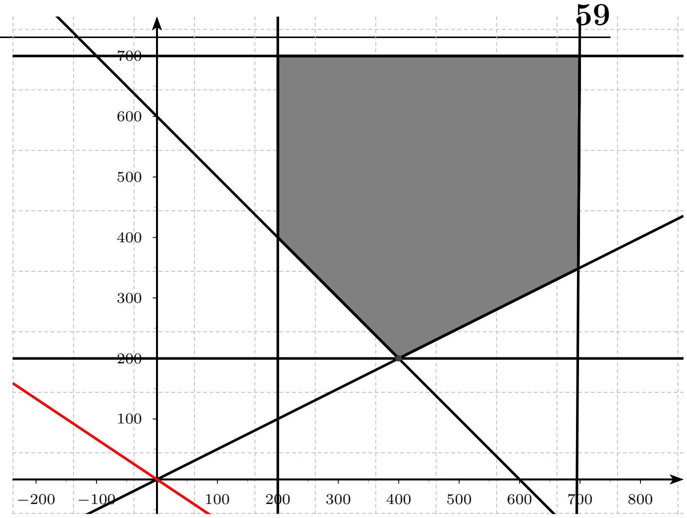
- CUESTIÓN B1.

Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B. Hallar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste. Determinar dicho coste mínimo.

selcs Jun 2017 Solución: 1) Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

$x =$ m de tela de A,

$y =$ m de tela de B. Coste: $F(x, y) = 2x + 3y$



$200 \leq x \leq 700$
$200 \leq xy \leq 700$
$x + y \geq 600 \quad (1)$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 600 \\ \hline y & 600 & 0 \end{array}$

$x \leq 2y \quad (2)$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 200 \\ \hline y & 0 & 100 \end{array}$

2) Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones y trazamos la recta:
$F(x, y) = 0 \quad 2x + 3y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -300 \\ \hline y & 0 & 200 \end{array}$

Buscamos la paralela que pasa por un vértice y da una ordenada menor en el origen: es la que pasa por el vértice intersección de

$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 600 \end{cases}$ es $(400, 200)$

Luego para obtener el menor coste habrá que comprar 400 metros de A y 200 metros de B.

El coste mínimo será entonces: $F(400, 200) = 2 \cdot 400 + 3 \cdot 200 = 1400$ euros.

- CUESTIÓN B2.

  Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 7\,x^2 + a; \quad g(x) = \sqrt{2\,x - 1} + bx$ donde a y b son números reales, hallar a y b sabiendo que $f(1) = g(1)$ y $f'(1) = g'(1)$.

  selcs Jun 2017 Solución: $f(x) = x^3 - 7\,x^2 + a; \quad f(1) = -6 + a; \qquad g(x) = \sqrt{2\,x - 1} + bx; \quad g(1) = 1 + b$. Igualando: $-6 + a = 1 + b$

  $f'(x) = 3x^2 - 14\,x; \quad f'(1) = -11; \qquad g(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2\,x - 1}} + b; \quad g'(1) = 1 + b$. Igualando: $-11 = 1 + b$

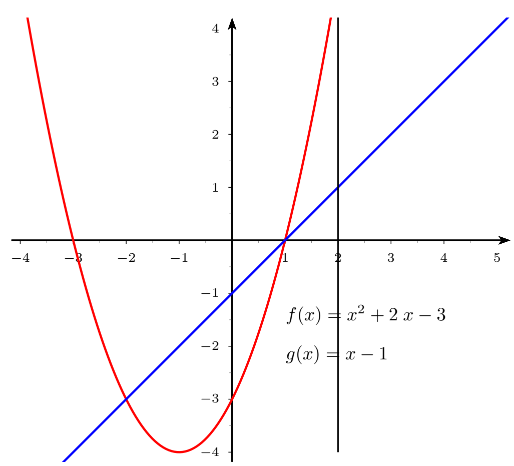
  Luego $b = -12$ y por tanto $a = -5$

- CUESTIÓN B3.

  Hallar el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2\,x - 3$, la recta $y = x - 1$ y las rectas $x = 1$ y $x = 2$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

  selcs Jun 2017 Solución:

$$S = \int_1^2 \text{ parábola} - \text{recta } =$$
$$\int_1^2 \left(x^2 + 2x - 3 - (x - 1)\right)\, dx =$$
$$\int_1^2 (x^2 + x - 2)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 =$$
$$\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 4 - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 2\right) = \frac{11}{6}\ \text{u}^2$$



- CUESTIÓN B4.

  En una población se ha determinado que de cada 100 consumidores de agua mineral, 30 consumen la marca A, 25 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30 % de consumidores de A, el 20 % de consumidores de B y el 40 % de consumidores de C son mujeres. Se selecciona al azar un consumidor de agua mineral de esa población y resulta ser mujer, hallar la probabilidad de que consuma la marca A.

  selcs Jun 2017 Solución:

  $\{A, B, C\}$ forman sistema completo de sucesos. Sea M por el teorema de Bayes:

  $p(A/M) = \dfrac{p(M/A) \cdot p(A)}{p(M/A) \cdot p(A) + p(M/B) \cdot p(B) + p(M/C) \cdot p(C)} = \dfrac{0'30 \cdot 0'30}{0'30 \cdot 0'30 + 0'25 \cdot 0'20 + 0'45 \cdot 0'40} = \dfrac{0'09}{0'32} = 0'281$

- CUESTIÓN B5.

  La duración de un tipo de bombillas sigue una distribución normal con desviación típica de 120 horas. Para estimar la duración media se quiere calcular un intervalo de confianza al 99 %. Determinar el tamaño mínimo que debe tener la muestra utilizada para que el error cometido en la estimación sea menor de 25 horas.

  selcs Jun 2017 Solución:

  al nivel de confianza del 99 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,58$ El error de la estima viene dado para el nivel de confianza del 99 % por $z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, si se quiere sea menor de 25 entonces

  $2,5800 \dfrac{120}{\sqrt{n}} \leq 25$

  Despejamos n: $\quad 2,5800 \dfrac{120}{\sqrt{n}} = 25, \quad \sqrt{n} = \dfrac{2,58 \cdot 120}{25} = 12,384; \quad n \geq 153,3635.$

  Así, pues, se tiene la confianza del 99 % de que el error de la estima será menor de 25 solamente si n es 154 o mayor.

Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 6

Año 2016

6.1. Septiembre 2016

- CUESTIÓN A1.

  Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} y & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & z \\ x & 2 & y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 9 \\ 3 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

  a) Calcular $C^t + I$, siendo I la matriz identidad.

  b) Hallar $x, \quad y, \quad z$ para que se cumpla que $AB = C^t + I$.

  selcs Sep 2016 Solución:

  a) $C^t + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 10 \\ 6 & 9 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 10 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

  b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} y & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & z \\ x & 2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+x & 2 & 3\,y \\ -1 & -2 & 6-2\,z \\ 4\,x+2 & 9 & z+4\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 10 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

  Igualando términos correspondientes: $f(x) = \begin{cases} y+x=2 \\ 3y=3 \\ 6-2z=10 \\ 4x+2=6 \\ z+4y=2 \end{cases}$ de donde resulta $y=1, x=1, z=-2$

- CUESTIÓN A2.

  Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

  a) $f(x) = x^5 \ln x + 2e^x$

  b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[7]{2x+5}}$

  c) $h(x) = \dfrac{x^2-1}{x+3}$

selcs Sep 2016 Solución:

a) $f'(x) = 5x^4 \ln x + x^5 \dfrac{1}{x} + 2e^x = 5x^4 \ln x + x^4 + 2e^x$

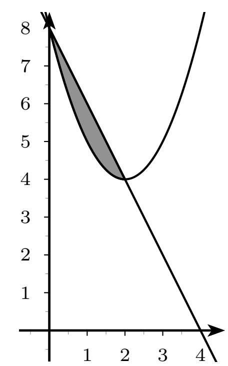
b) $g(x) = (2x+5)^{\frac{-1}{7}}$, $\qquad g'(x) = \dfrac{-1}{7}(2x+5)^{\frac{-8}{7}} \cdot 2 = \dfrac{-2}{7\sqrt[7]{(2x+5)^8}}$

c) $h'(x) = \dfrac{2x(x+3) - (x^2-1)\cdot 1}{(x+3)^2} = \dfrac{x^2+6x+1}{(x+3)^2}$

- CUESTIÓN A3.

Calcular el area del recinto acotado limitado por la curva $y = x^2 - 4x + 8$ y la recta $y = -2x + 8$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Sep 2016 Solución:



Hallemos los puntos de corte entre las gráficas:

$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 8 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \quad x^2 - 4x + 8 = -2x + 8; \quad x^2 - 2x = 0; \quad x = 0, x = 2$

El área viene dada por: $S = \displaystyle\int_0^2 \text{recta} - \text{parábola} =$

$$\int_0^2 (-2x+8) - (x^2 - 4x + 8)\, dx = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \text{ u}^2$$

- CUESTIÓN A4.

Se sabe que el 28 % de una población padece algún tipo de alergia. El 45 % de los individuos de la población que sufren alergia son mujeres. Además, de la parte de la población que no padece alergia, el 35 % son mujeres.

a) Calcular la probabilidad de que al elegir al azar un individuo de la población sea mujer.

b) Se ha elegido un individuo al azar y es mujer; calcular la probabilidad de que no padezca alergia.

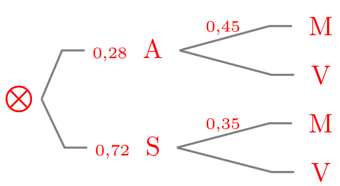
selcs Sep 2016 Solución:

Llamamos M al suceso " ser mujer".

Llamamos V al suceso " ser varón".

Llamamos A al suceso " tener alergia".

Llamamos S al suceso " no tener alergia".



$\{A, S\}$, forman un sistema completo de sucesos.

a) Teorema de la probabilidad total:

$p(M) = p(M/A) \cdot p(A) + p(M/S) \cdot p(S) + p() \cdot p() = 0,45 \cdot 0,28 + 0,35 \cdot 0,72 = 0,378$

b) Teorema de Bayes:

$$p(S/M) = \frac{p(M/S) \cdot p(S)}{p(M/S) \cdot p(S) + p(M/A) \cdot p(A)} = \frac{0,35 \cdot 0,72}{0,35 \cdot 0,72 + 0,45 \cdot 0,28} = 0,6667$$

- CUESTIÓN A5.

Para estimar la proporción de individuos de una población que utilizan el comercio electrónico se ha realizado una encuesta a una muestra aleatoria de 200 individuos, de los cuales 90 han respondido que utilizan el comercio electrónico. Con estos datos, hallar un intervalo de confianza del 95 % para la proporción de individuos de la población que utilizan el comercio electrónico.

selcs Sep 2016 Solución:

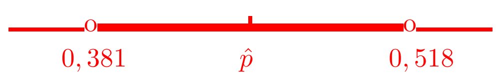
Los datos son: proporción de la muestra $\hat{p} = \dfrac{90}{200} = 0,4500, n = 200$

Para el nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

$$\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,4500 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,4500 \cdot 0,5500}{200}} = 0,4500 \pm 0,0689 \begin{cases} 0,3811 \\ 0,5189 \end{cases}$$

El intervalo de confianza para la proporción es $(0,3810; 0,5180)$

con probabilidad 95 % p está en: 

- CUESTIÓN B1.

Una empresa necesita, como mínimo, 180 uniformes de mujer y 120 de hombre. Los encarga a dos talleres A y B. El taller A confecciona diariamente 6 uniformes de mujer y 2 de hombre con un coste de 75 euros al día. El taller B hace diariamente 4 uniformes de mujer y 3 de hombre con un coste diario de 90 euros. ¿Cuántos días debe trabajar cada taller para satisfacer las necesidades de la empresa con el mínimo coste?, ¿cuánto vale dicho coste?

selcs Sep 2016 Solución: 1) Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

$x = n^0$ de días de de trabajo de taller A,

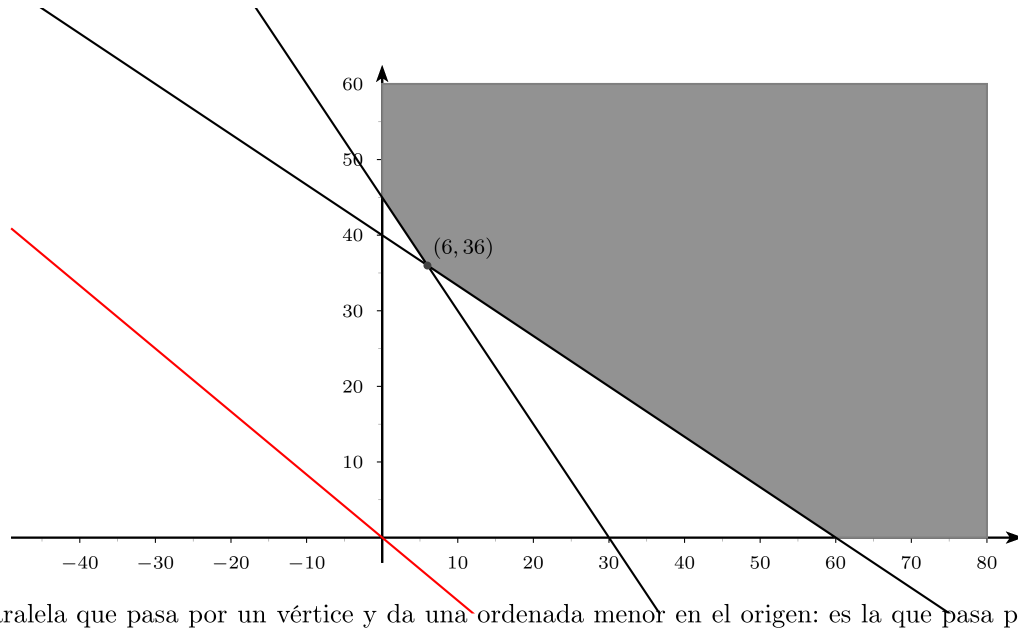
$y = n^0$ de días de de trabajo de taller B. Coste: $F(x, y) = 75x + 90y$

Uniformes de mujer: $6x + 4y \geq 180 \quad (1)$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 30 \\ \hline y & 45 & 0 \end{array}$

Uniformes de hombre: $2x + 3y \geq 120 \quad (2)$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 60 \\ \hline y & 40 & 0 \end{array}$

además: $0 \leq x; \quad 0 \leq y$

2) Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones y trazamos la recta: $F(x, y) = 0 \quad 75x + 90y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -90 \\ \hline y & 0 & 75 \end{array}$



Buscamos la paralela que pasa por un vértice y da una ordenada menor en el origen: es la que pasa por el vértice intersección de

$\left\{\begin{array}{l} 6x+4y=180 \\ 2x+3y=120 \end{array}\right.$ es $(6,36)$

Luego para obtener el menor coste habrá que trabajar 6 días en A y 36 días en B.

El coste mínimo será entonces: $F(6,36)=75\cdot 6+90\cdot 36=3690$ euros será el mínimo coste.

- CUESTIÓN B2.

Dada la función $f(x)=\left\{\begin{array}{lll} -x+1 & si & x\leq -2 \\ 2x+7 & si & -2<x<1 \\ ax^2-5x+6 & si & x\geq 1 \end{array}\right.$ donde $a\in R$

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x=-2$

b) Hallar a para que la función sea continua en $x=1$

c) Para $a=1$ hacer la representación gráfica de la función.

selcs Sep 2016 Solución:

a) Para que sea continua en $x=-2$ han de ser iguales los límites $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ y coincidir con $f(-2)$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}(-x+1)=3$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(2x+7)=3$

Como $f(-2)=-(-2)+1=3$, por tanto es continua en $x=-2$

b) De modo parecido:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+7)=9$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax^2-5x+6)=a-5+6$

Igualando $a-5+6=9,\quad a=8$ para que sea continua.

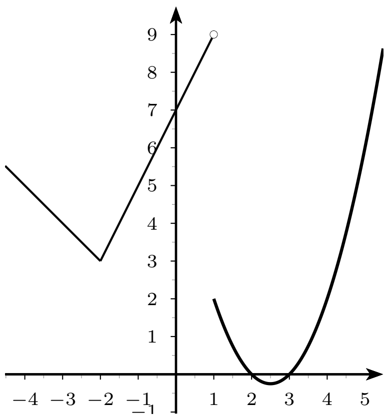
c) Representamos: $f(x) = \begin{cases} -x+1 & si \quad x \leq -2 \\ 2x+7 & si \quad -2 < x < 1 \\ x^2-5x+6 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ donde $a \in R$

Tramo recto $y = -x+1$ $\begin{array}{c|cc} x & -4 & -2 \\ \hline y & 5 & 3 \end{array}$

Tramo recto $y = 2x+7$ $\begin{array}{c|cc} x & -2 & 1 \\ \hline y & 3 & 9 \end{array}$

Trozo de parábola $y = x^2 - 5x + 6$.

Corte con OX : $\quad x^2 - 5x + 6 = 0, \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$ Punto de comienzo $\begin{array}{c|c} x & 1 \\ \hline y & 2 \end{array}$



- CUESTIÓN B3.

Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int (-x + 2e^x)dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 (x^2 - \frac{x^3}{2} - 1)dx$

selcs Sep 2016 Solución:

a) $\displaystyle\int (-x + 2e^x)\, dx = -\frac{x^2}{2} + 2e^x + C$

b) $\displaystyle\int_1^2 (x^2 - \frac{x^3}{2} - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} - x\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{8} - 2 - (\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{8} - 1) = -\frac{13}{24}$

- CUESTIÓN B4.

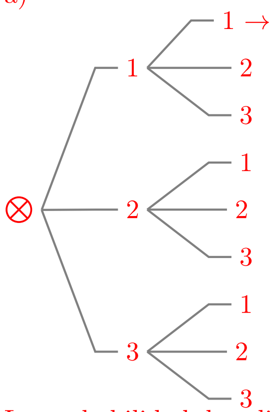
En una urna hay bolas numeradas del 1 al 3, hay 30 bolas con el número 1, 60 con el número 2 y 90 con el número 3. Se realiza el experimento de sacar dos bolas consecutivamente sin reemplazamiento.

a) Hallar la probabilidad de que en las dos salga 1.

b) Hallar la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea par.

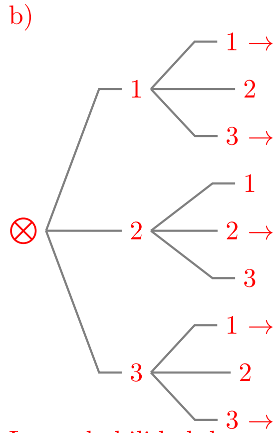
selcs Sep 2016 Solución:

a)



La probabilidad de salir uno las dos veces es:
$\dfrac{30}{180} \cdot \dfrac{29}{179} = \dfrac{29}{1074} = 0'027$

b)



La probabilidad de sumar par es:
$\dfrac{30}{180} \cdot \dfrac{29}{179} + \dfrac{30}{180} \cdot \dfrac{90}{179} + \dfrac{60}{180} \cdot \dfrac{59}{179} + \dfrac{90}{180} \cdot \dfrac{30}{179} + \dfrac{90}{180} \cdot$
$\dfrac{89}{179} = \dfrac{99}{179} = 0'553$

- CUESTIÓN B5.

Según un informe sobre calidad de infraestructuras turísticas, la puntuación media de los alojamientos turísticos de un país es, como mínimo, de 7,8, con una desviación típica de 0,7. Para comprobar esta información, se toma una muestra aleatoria de 150 alojamientos, para los que se obtiene una puntuación media de 7,5. Si la puntuación es una variable normal:

a) Plantear un contraste para determinar si se puede aceptar la afirmación del informe. Dar la expresión de la región de aceptación.

b) Con un nivel de significación del 4 %, ¿se puede aceptar lo que dice el informe?

selcs Sep 2016 Solución:

a) Al hablar de cumplir un mínimo de calidad nos están indicando un contraste unilateral con región de aceptación ilimitada por la derecha

El contrate es pues $H_0 : \mu \geq 7,8$ frente a $H_1 : \mu < 7,8$.

Entonces el intervalo de aceptación tiene de extremo:

$\bar{x} - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7,8 - z_\alpha \cdot \dfrac{0,7}{\sqrt{150}} = 7,8 - 0'0571 z_\alpha$, siendo z_α el valor crítico correspondiente al nivel de significación que se indique.

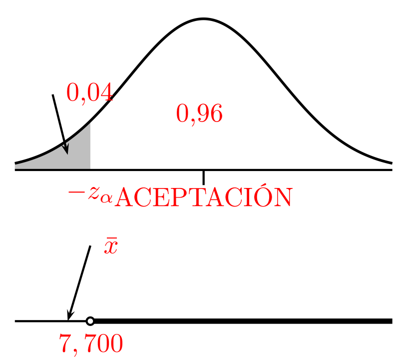
Si el valor de la muestra es mayor entonces se acepta que la puntuación media de los alojamientos turísticos de un país es, como mínimo, de 7,8 con ese nivel de significación.

b)

Contrastamos $H_0 : \mu = 7,8$ frente a $H_1 : \mu < 7,8$.
La desviación típica es $\sigma = 0,7$. El tamaño muestral es $n = 150$.
El nivel de significación $\alpha = 0,04$, corresponde con $z_\alpha = 1,750686071$.

Entonces el intervalo de aceptación tiene de extremo:
$\bar{x} - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7,8 - 1,750686071 \cdot \dfrac{0,7}{\sqrt{150}} = 7,8 - 0,10 = 7,70$
El intervalo de aceptación es $(7,70; \infty)$

Como $\bar{x} = 7,5$ queda fuera del intervalo, se rechaza H_0



6.2. Junio 2016

- CUESTIÓN A1.

  En una empresa trabajan empleados de las categorías A, B y C. El salario mensual de cada trabajador es de 1200, 1700 y 2200 euros, según que pertenezca a la categoría A, B y C, respectivamente. Todos los trabajadores destinan el 5 % de su salario a un plan de pensiones, lo que asciende en un mes a un total de 4930 euros. El número de trabajadores de la categoría A es el 150 % de los de la categoría B. El número de trabajadores de la categoría B más el de la C supera en 3 al número de trabajadores de la categoría A. Hallar el número de trabajadores de cada categoría que tiene la empresa.

  selcs Jun 2016 Solución:

  x: número de trabajadores de categoría A

  y: número de trabajadores de categoría B

  z: número de trabajadores de categoría C

  $\begin{cases} \frac{5}{100}1200x + \frac{5}{100}1700y + \frac{5}{100}2200z = 4930 \\ x = \frac{150}{100}y \\ y + z = x + 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y - z = -3 \\ x - 1,5y = 0 \\ 60x + 85y + 110z = 4930 \end{cases}$

  La matriz asociada es: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1,5 & 0 & 0 \\ 60 & 85 & 110 & 4930 \end{pmatrix}$

  Triangulando: $\begin{matrix} 2^a \cdot 1 + 1^a \cdot -1 \\ 3^a \cdot 1 + 1^a \cdot -60 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -0,5 & 1 & 3 \\ 0 & 145 & 170 & 5110 \end{pmatrix}$ $3^a \cdot -0,5 + 2^a \cdot -145$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -0,5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -230 & -2990 \end{pmatrix}$

  $\begin{cases} x - y - z = -3 \\ -0,5y + z = 3 \\ -230z = -2990 \end{cases}$ $x = 30; \quad y = 20; \quad z = 13$

- CUESTIÓN A2.

  Dada la función $f(x) = \dfrac{ax^2 - 2b}{x^2 + 1}$ donde $a, b \in R$

  a) Hallar el dominio de $f(x)$

  b) Hallar a y b para que la función tenga una asíntota horizontal en $y = 2$ y pase por el punto $(0, 4)$

  c) Para $a = 1$ y $b = 1$ hallar $f'(x)$.

  selcs Jun 2016 Solución:

  a) Como el denominador no se puede anular el dominio es R

  b) Asíntota horizontal $y = n$: $\quad n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2 - 2b}{x^2 + 1} = a = 2.$

  Pasa por el punto $(0, 4)$, es decir $f(0) = 4$; $\quad f(0) = \dfrac{-2b}{1} = -2b = 4; \quad b = -2$

  c) Para $a = 1$ y $b = 1$ queda $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 1}$. Entonces:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{6x}{(x^2+1)^2}$$

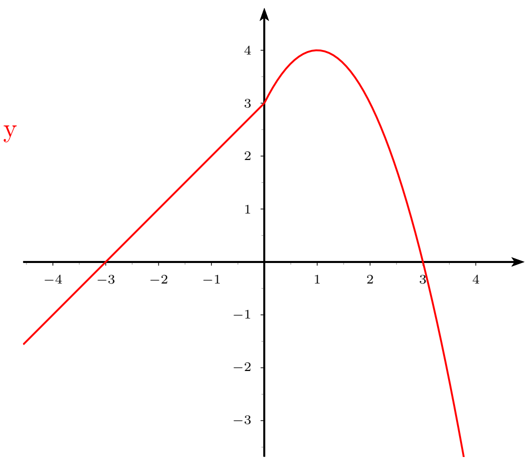
- CUESTIÓN A3.

  Se considera la función definida por: $f(x) = \begin{cases} x+3 & si \quad x < 0 \\ -x^2+2x+3 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

  a) Representar gráficamente la función f .

  b) Calcular el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

  selcs Jun 2016 Solución:

  a) El primer trozo es una recta que pasa por los puntos $(0,3)$ y $(-3,0)$
  El segundo es una parábola:

  Puntos de corte con OX: $y = 0$; $\quad -x^2+2x+3 = 0, \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

  Puntos de corte con OY: $x = 0$; $\quad y = 3$
  Máximo: $f'(x) = -2x+2 = 0$; $\quad x = 1; y = f(1) = 4$

  b) El primer trozo es un triángulo de base 3 y altura 3: $S_1 = \dfrac{3 \cdot 3}{2} = \dfrac{9}{2} = 4'5$

  El segundo: área encerrada por la parábola con el eje OX entre 0 y 3.

  $$S_2 = \int_0^3 (-x^2+2x+3)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_0^3 = -\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3\cdot 3 - 0 = 9$$

  Por tanto el área pedida es 13'5 u^2

- CUESTIÓN A4.

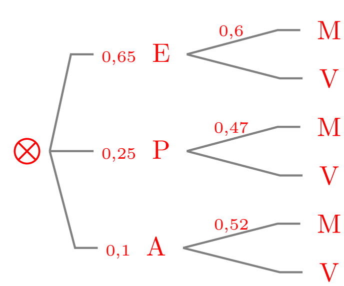
  En una universidad, el 65 % de sus miembros son estudiantes, el 25 % profesores y el 10 % personal de administración y servicios. Son mujeres el 60 % de los estudiantes, el 47 % de los profesores y el 52 % del personal de administración y servicios. Si seleccionamos al azar un integrante de esa universidad:

  a) Determinar la probabilidad de que sea mujer.

  b) Sabiendo que la persona seleccionada ha resultado ser hombre, hallar la probabilidad de que sea estudiante.

  selcs Jun 2016 Solución:

  Llamamos M al suceso " ser mujer".
  Llamamos V al suceso " ser varón".
  Llamamos E al suceso " ser estudiante".
  Llamamos P al suceso " ser profesor".
  Llamamos A al suceso " ser de administración y servicios".

$\{E, P, A, \}$, forman un sistema completo de sucesos.

a) Teorema de la probabilidad total:

$p(M) = p(M/E) \cdot p(E) + p(M/P) \cdot p(P) + p(M/A) \cdot p(A) = 0,6 \cdot 0,65 + 0,47 \cdot 0,25 + 0,52 \cdot 0,1 = 0,5595$

b) Teorema de Bayes:

$$p(E/V) = \frac{p(V/E) \cdot p(E)}{p(V/E) \cdot p(E) + p(V/P) \cdot p(P) + p(V/A) \cdot p(A)} = \frac{0,4 \cdot 0,65}{0,4 \cdot 0,65 + 0,53 \cdot 0,25 + 0,48 \cdot 0,1} = 0,5902$$

- CUESTIÓN A5.

En una población el tiempo de desplazamiento de los trabajadores al lugar de trabajo sigue una distribución normal con desviación típica de 15 minutos. Tras realizar una encuesta a una muestra aleatoria de 60 trabajadores se ha encontrado que el tiempo medio de desplazamiento es de 45 minutos. Hallar un intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio de desplazamiento al lugar de trabajo de los individuos de la población.

selcs Jun 2016 Solución:

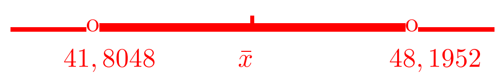
al nivel de confianza del 90 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,65$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

$$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 45 \pm 1,65 \cdot \frac{15}{\sqrt{60}} = 45 \pm 3,195211261 \begin{cases} 41,8048 \\ 48,1952 \end{cases}$$

El intervalo de confianza para la media es $(41,8048; 48,1952)$

con probabilidad 90 % μ está en:



- CUESTIÓN B1.

Un supermercado necesita, al menos, 80 docenas de huevos de tamaño pequeño, 120 docenas de tamaño mediano y 90 docenas de tamaño grande. Se abastece en dos granjas A y B. La granja A suministra lotes de 4 docenas de huevos pequeños, 12 docenas de medianos y 2 docenas de grandes, y el coste de cada lote es de 6 euros. La granja B proporciona lotes de 2 docenas de huevos pequeños, 2 docenas de medianos y 6 docenas de grandes, con un coste de 4 euros por lote. Además, la granja A puede suministrar, como máximo, 50 lotes y la granja B puede suministrar, como máximo, 60 lotes. Hallar el número de lotes que debe comprar a cada granja para satisfacer sus necesidades con el mínimo coste.

selcs Jun 2016 Solución:

1) Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

$x = n^0$ de lotes de A,

$y = n^0$ de lotes de B. Coste: $F(x, y) = 6x + 4y$

Pequeños:

$4x + 2y \geq 80 \quad (1)$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 20 \\ \hline y & 40 & 0 \end{array}$

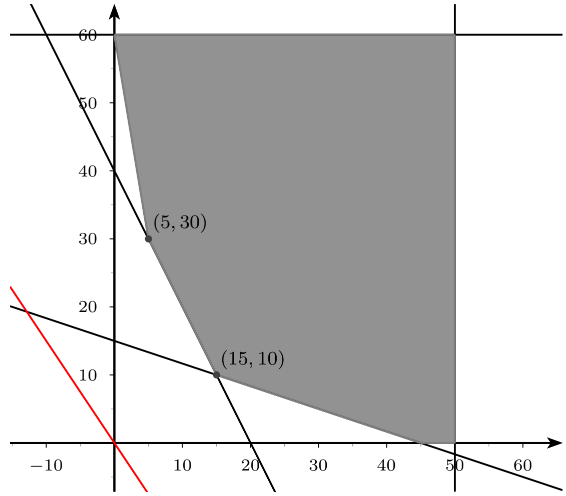
Medianos:

$12x + 2y \geq 120 \quad (2)$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 10 \\ \hline y & 60 & 0 \end{array}$

Grandes:

$2x + 6y \geq 90; \quad (3)$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 0 \\ \hline y & 45 & 15 \end{array}$

además: $0 \leq x \leq 50; \quad 0 \leq y \leq 60$



2) Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones y trazamos la recta:

$F(x, y) = 0 \quad 6x + 4y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -20 \\ \hline y & 0 & 30 \end{array}$

Buscamos la paralela que pasa por un vértice y da una ordenada menor en el origen: es la que pasa por el vértice intersección de

$\begin{cases} 4x + 2y = 80 \\ 2x + 6y = 90 \end{cases}$ es $(15, 10)$

Luego para obtener el menor coste habrá que comprar 15 lotes de A y 10 lotes de B.

El coste mínimo será entonces: $F(15, 10) = 6 \cdot 15 + 4 \cdot 10 = 130$ euros.

- CUESTIÓN B2.

Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{x^2-2}\sqrt{x+1}$

b) $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 2}$

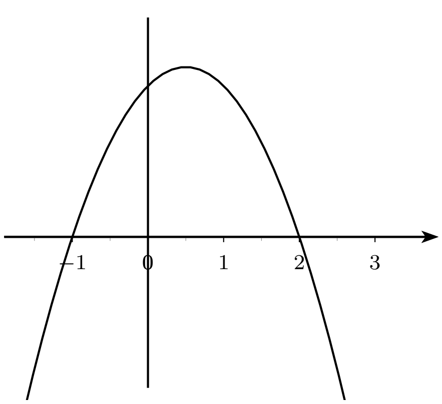
selcs Jun 2016 Solución:

a) $f'(x) = 2xe^{x^2-2}\sqrt{x+1} + e^{x^2-2}\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

b) $g'(x) = \dfrac{(3x^2-1)(x^2+2) - (x^3-x)2x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{x^4 + 7\,x^2 - 2}{(x^2+2)^2}$

- CUESTIÓN B3.

La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = -x^2 + x + a$ donde $a \in R$.



Sabiendo que el área encerrada por el recinto acotado que limita la curva con el eje OX vale $\frac{9}{2}$ utilizar esta información para hallar el valor del parámetro a.

selcs Jun 2016 Solución:

$S = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + a)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + a\,x \right]_{-1}^{2} = -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 2a - \left[-\frac{-1}{3} + \frac{1}{2} - a \right] == -\frac{3}{2} + 3a = \frac{9}{2}$ luego $a = 2$

- CUESTIÓN B4.

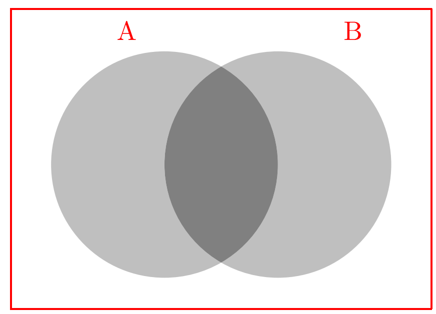
  Cierto día, la probabilidad de que llueva en la ciudad A es 0'3, la de que no llueva en la ciudad B es 0'6 y la de que llueva, al menos, en una de las dos ciudades es 0'5.

  a) Calcular la probabilidad de no llueva en ninguna de las dos ciudades.

  b) Calcular la probabilidad de que llueva en las dos. ¿Son independientes los sucesos "llueve en la ciudad A" y "llueve en la ciudad B"?

  selcs Jun 2016 Solución:
  "A" llueve en A, $p(A) = 0'3$
  "B" llueve en B, $p(B) = 1 - 0'6 = 0'4$

  además dicen que $p(A \cup B) = 0'5$

  a) No llueva en ninguna es: $A^c \cap B^c$ es el complementario de $(A \cup B)$, por tanto
  $p(A^c \cap B^c) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0'5 = 0'5$

  b) Que llueva en las dos es $A \cap B$, como $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ resulta: $0'5 = 0'3 + 0'4 - p(A \cap B)$, luego $p(A \cap B) = 0'2$

  Por otro lado $p(A) \cdot p(B) = 0'3 \cdot 0'4 = 0'12$ como no coincide con $p(A \cap B) = 0'2$ podemos afirmar que NO son independientes

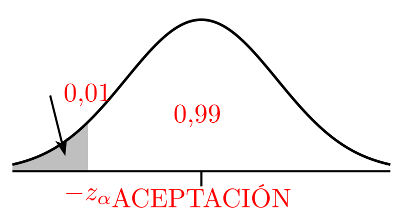
- CUESTIÓN B5.

  Según un estudio, el porcentaje de adultos de la Unión Europea que hablan una lengua extranjera es del 64 %. En una muestra aleatoria tomada en España de 250 adultos se ha obtenido que 128 hablan una lengua extranjera. A partir de estos datos, plantear un contraste para determinar si se puede aceptar que el porcentaje de adultos que hablan una lengua extranjera en España es igual al de la Unión Europea frente a la alternativa de que es menor, como parecen indicar los datos. ¿A qué conclusión se llega para un nivel de significación de 0'01?

  selcs Jun 2016 Solución:
  Contrastamos $H_0 : p = 0,64$ frente a $H_1 : p < 0,64$.
  El tamaño muestral es $n = 250$.
  El nivel de significación $\alpha = 0,01$, corresponde con $z_\alpha = 2,33$.

  Entonces el intervalo de aceptación tiene de extremo:
  $p - z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,64 - 2,33 \cdot \sqrt{\frac{0,64(1-0,64)}{250}} = 0,64 - 0,071 = 0,569$
  El intervalo de aceptación es $(0,569; \infty)$

  Como $\hat{p} = 0,512$ queda fuera del intervalo, se rechaza H_0

Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 7

Año 2015

7.1. Septiembre 2015

- CUESTIÓN A1.

  Hallar x, y, z para que se verifique:

  $$\begin{pmatrix} 1 & y \\ -1 & -\frac{y}{2} \\ 2 & \frac{y}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

  selcs Sep 2015 Solución:

  Operando las matrices: $\begin{pmatrix} x-2y \\ -x+y \\ 2x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y+z \\ -x+y-2z \\ 2x-y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

  la matriz asociada es: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

  Triangulando: $\begin{matrix} 2^a + 1^a \\ 3^a + 1^a \cdot (-2) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \; 3^a + 2^a \cdot 3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{pmatrix}$

  Volviendo a sistema: $\begin{cases} x-2y+z=-4 \\ -y-z=-4 \\ -4z=-12 \end{cases}$ Resulta: $z=3, \quad y=1, \quad x=-5$

- CUESTIÓN A2.

  Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

  a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$

  b) $g(x) = (x-1)\ln x$

  c) $h(x) = e^{2x^5-1}$

  selcs Sep 2015 Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$

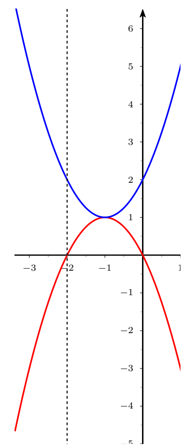
b) $g'(x) = \ln x + \dfrac{x-1}{x}$

c) $h'(x) = 10x^4.e^{2x^5-1}$

- CUESTIÓN A3.

Hallar el area del recinto acotado limitado por las curvas $f(x) = x^2+2x+2$, $g(x) = -x^2-2x$ y las rectas $x = -2$ y $x = 0$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Sep 2015 Solución:



Veamos los puntos de corte entre las dos: $\begin{cases} y = x^2+2x+2 \\ y = -x^2-2x \end{cases}$

$x^2+2x+2 = -x^2-2x; \quad 2x^2+4x+2 = 0; \quad x^2+2x+1 = 0; \quad x = 1$ doble

$$S = \int_{-2}^{0} (f-g)\,dx = \int_{-2}^{0} (2x^2+4x+2)\,dx = \left(\frac{2\,x^3}{3} + 2\,x^2 + 2\,x\right)_{-2}^{0} = \frac{4}{3}$$

- CUESTIÓN A4.

En un grupo de estudiantes, un 10 % sabe inglés y alemán, un 50 % sabe inglés pero no alemán y, entre los que saben alemán, un 40 % sabe inglés.

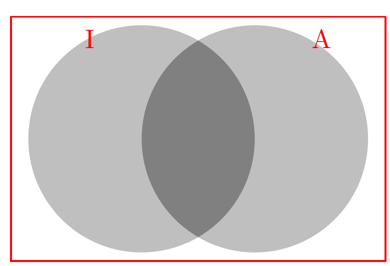
a) ¿Qué porcentaje de estudiantes sabe inglés?

b) ¿Qué porcentaje sabe alemán?

c) ¿Qué porcentaje sabe alguno de los dos idiomas?

selcs Sep 2015 Solución:

Sea: I = saber inglés; A = saber alemán. Los datos son:
$p(I \cap A) = 0'1$
$p(I \cap A^c) = 0'5$
$p(I/A) = 0'4$



a) $p(I) = p(I \cap A) + p(I \cap A^c) = 0'1 + 0'5 = 0'6$; el 60 % sabe Inglés

b) Como $p(I/A) = \dfrac{p(I \cap A)}{p(A)}$, despejando: $p(A) = \dfrac{p(I \cap A)}{p(I/A)} = \dfrac{0'1}{0'4} = 0'25$; el 25 % sabe Alemán.

c) $p(I \cup A) = p(I) + p(A) - p(I \cap A) = 0'6 + 0'25 - 0'1 = 0'75$

- CUESTIÓN A5.

De una muestra aleatoria de 600 alumnos de una universidad, 121 tienen beca. Calcular un intervalo de confianza al 90 % para la proporción de alumnos de la universidad que tienen beca.

selcs Sep 2015 Solución:

Los datos son: proporción de la muestra $\hat{p} = \dfrac{121}{600} = 0,2017, n = 600$

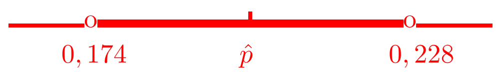
Para el nivel de confianza del 90 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,65$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

$$\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,2017 \pm 1,65 \cdot \sqrt{\frac{0,2017 \cdot 0,7983}{600}} = 0,2017 \pm 0,0270 \begin{cases} 0,1746 \\ 0,2287 \end{cases}$$

El intervalo de confianza para la proporción es $(0,1740; 0,2280)$

con probabilidad 90 % p está en:



- CUESTIÓN B1.

Se quiere elaborar una dieta con dos preparados alimenticios, A y B. Una porción de A contiene 30 mg de calcio, 10 mg de fósforo y 40 mg de magnesio, y cuesta 5 euros. Una porción de B contiene 40 mg de calcio, 30 mg de fósforo y 20 mg de magnesio, y cuesta 3 euros. La dieta debe aportar, al menos, 350 mg de calcio, 150 mg de fósforo y 300 mg de magnesio. Hallar cuántas porciones de cada preparado deben utilizarse para satisfacer estos requisitos con el mínimo coste.

selcs Sep 2015 Solución:

Sean x = número de porciones de A ; y = número de porciones de B

	Cal	Fos	Mag	coste
A	30	10	40	5
B	40	30	20	3

Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

Función objetivo a minimizar

coste: $F = 5x + 3y$

Calcio: $30x + 40y \geq 350$

x	0	35/3
y	35/4	0

Fósforo: $10x + 30y \geq 150$

x	0	15
y	5	0

Magnesio: $40x + 20y \geq 300$

x	0	7′5
y	15	0

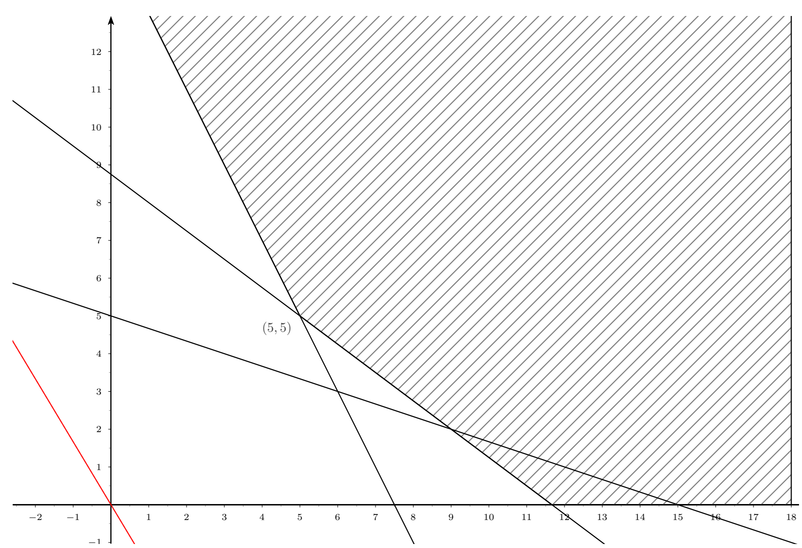
además: $x \geq 0 \quad y \geq 0$

Buscamos la paralela que pasa por un vértice y da una ordenada menor en el origen: es la que pasa por el vértice intersección de

$$\begin{cases} 30x + 40y = 350 \\ 40x + 20y = 300 \end{cases}$$

es $(5,5)$

El mínimo sería en $F(5,5) = 5 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 40$, por tanto



El menú que cuesta menos se hace con 5 porciones de A y 5 de B y cuesta 40 € .

- CUESTIÓN B2.

En las cuatro primeras horas de un concierto, el número de miles de asistentes después de t horas, una vez comenzado, varía según la función: $f(t) = 2t^3 - 27t^2 + 84t, \quad 0 \leq t \leq 4$.

Hallar el número máximo de asistentes al concierto en ese intervalo de tiempo.

selcs Sep 2015 Solución:

$f'(t) = 6\,t^2 - 54\,t + 84 = 0; \quad t = 7, t = 2$ Dentro del dominio queda $t = 2$, estudiamos el crecimiento:

t		2	
f'	$+$		$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$
		MÁXIMO	

máximo de asistentes $f(2) = 76$ mil a las dos horas

- CUESTIÓN B3.

Hallar las siguientes integrales:

a) $S = \displaystyle\int_0^2 (x^3 + 2x - 1)\,dx$

a) $S = \displaystyle\int (5e^x + 3)\,dx$

selcs Sep 2015 Solución:

a) $S = \displaystyle\int_0^2 (x^3 + 2x - 1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^2 - x\right]_0^2 = 6$

a) $S = \displaystyle\int (5e^x + 3)\,dx = 5e^x + 3x + C$

- CUESTIÓN B4.

Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, se sabe que $P(A) = 0'5, \quad P(B) = 0'3$ y $P(A \cup B) = 0'6$. ¿Son A y B independientes?

selcs Sep 2015 Solución:

Dos sucesos son independientes si la probabilidad de la intersección es igual al producto de las probabilidades.

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B); \quad 0'6 = 0'5 + 0'3 - p(A \cap B); \quad p(A \cap B) = 0'2$

$p(A) \cdot p(B) = 0'5 \cdot 0'3 = 0'15$

Luego son distintos por tanto los sucesos A y B no son independientes

- CUESTIÓN B5.

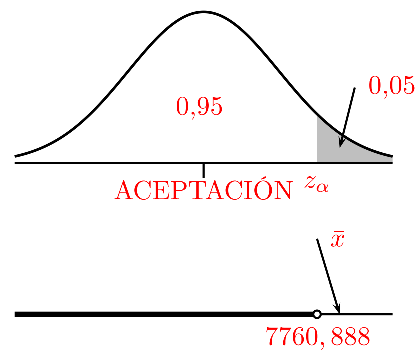
Antes del lanzamiento de una campaña de publicidad, el ingreso diario por las ventas en unos grandes almacenes seguía una normal de media 7500 euros y desviación típica de 1000 euros. Pasados unos meses de la introducción de la campaña, para una muestra de 40 días se obtuvo una media de ingreso diario de 8000 euros. Si el ingreso diario sigue siendo normal con la misma desviación típica, plantear un contraste para contrastar la hipótesis de que con dicha medida la situación sigue igual, frente a que ha mejorado, como parecen indicar los datos. ¿A qué conclusión se llega para un nivel de significación del 5 %?

selcs Sep 2015 Solución:

Contrastamos $H_0 : \mu = 7500$ frente a $H_1 : \mu > 7500$.
La desviación típica es $\sigma = 1000$. El tamaño muestral es $n = 40$.
El nivel de significación $\alpha = 0,05$, corresponde con $z_\alpha = 1,65$.

Entonces el intervalo de aceptación tiene de extremo:
$\bar{x} + z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7500 + 1,65 \cdot \dfrac{1000}{\sqrt{40}} = 7500 + 260,89 = 7760,89$
El intervalo de aceptación es $(-\infty; 7760,89)$
Como $\bar{x} = 8000$ queda fuera del intervalo, se rechaza H_0

Efectivamente se llega a la conclusión de que la situación ha mejorado



7.2. Junio 2015

- CUESTIÓN A1.

  Dadas las matrices

  $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

  a) Calcular $B^t + 2C\cdot$.

  b) Hallar la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple $AX = B^t + 2C$

  selcs Jun 2015 Solución:

  a) $B^t + 2C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

  b) $AX = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ 0 & 0 \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

  Igualando los elementos: $\begin{cases} 2a-c=3 \\ 2b-d=2 \\ -a=2 \\ -b=-5 \end{cases}$ que tiene como soluciones $a=-2, \quad b=5, \quad c=-7, \quad d=8$

  $X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$

- CUESTIÓN A2.

  Dada la funcion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, calcular:

  a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

  b) Los maximos y minimos relativos.

  c) Los puntos de corte con los ejes.

  selcs Jun 2015 Solución:

- CUESTIÓN A3.

  Hallar una primitiva $F(x)$ de la funcion $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ que cumpla que $F(1) = 0$

  selcs Jun 2015 Solución:

  $\int (x^3 - 2x^2 + x - 2)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C$

  $F(1) = 0; \quad \frac{1}{4} - 2\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + C = 0; \quad C = \frac{23}{12}$

  $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{23}{12}$

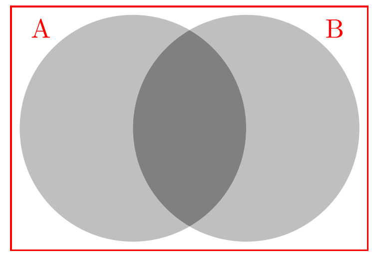
- CUESTIÓN A4.

La probabilidad de aprobar la asignatura A es 2/3 y la de aprobar la asignatura B es 1/2. Además, la probabilidad de aprobar las dos es 1/4.

a) Hallar la probabilidad de no aprobar ninguna de las dos asignaturas.

b) Calcular la probabilidad de aprobar A, pero no B.

selcs Jun 2015 Solución:



Piden a) $p(A^c \cap B^c) = 1 - p(A \cup B)$

como $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{12}$

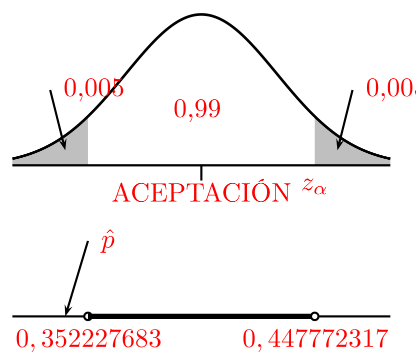
resulta: $p(A^c \cap B^c) = 1 - \dfrac{11}{12} = \dfrac{1}{12}$

b) $p(A \cap B^c) = p(A) - p(A \cap B) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{12}$

- CUESTIÓN A5.

Un estudio sociológico afirma que la proporción de estudiantes de una población es 2/5. Si en una muestra aleatoria de 700 individuos de la población hay 100 estudiantes, ¿puede admitirse a un nivel de confianza del 99 % la afirmación del estudio?

selcs Jun 2015 Solución:
Contrastamos $H_0 : p = 2/5 = 0'4$ frente a $H_1 : p \neq 0'4$.
El tamaño muestral es $n = 700$.
El nivel de significación $\alpha = 0,01$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,58$.



Entonces el intervalo de aceptación tiene de extremos:
$p \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} = 0,4 \pm 2,58 \cdot \sqrt{\dfrac{0,4(1-0,4)}{700}} = 0,4 \pm 0,048 \begin{cases} 0,352227683 \\ 0,447772317 \end{cases}$
El intervalo de aceptación es $(0,352227683; 0,447772317)$

Como $\hat{p} = 100/700 = 0,1428$ queda fuera del intervalo, se rechaza H_0

- CUESTIÓN B1.

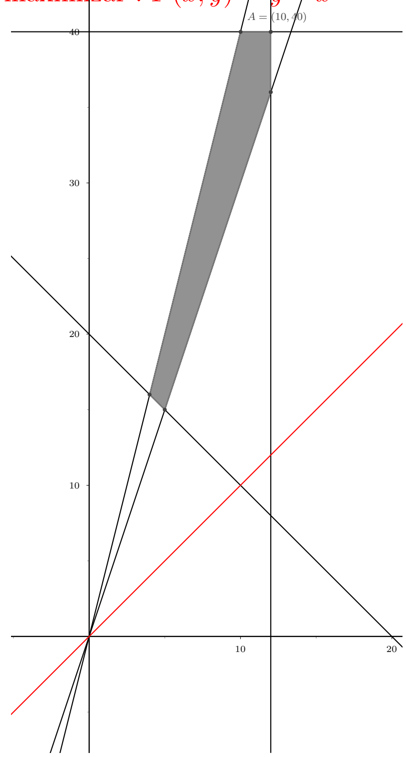
En un edificio público se quieren colocar, al menos, 20 máquinas expendedoras entre las de bebidas calientes y las de bebidas frías. Hay disponibles 12 máquinas de bebidas calientes y 40 de bebidas frías. Se pretende que el número de expendedoras de bebidas calientes no sea superior a una tercera parte del de bebidas frías y que, por lo menos, una quinta parte del total de máquinas que se coloquen sean de bebidas calientes. Cumpliendo las condiciones anteriores, ¿qué combinación de máquinas de cada tipo hace que la diferencia del número de máquinas de bebidas frías menos el de bebidas calientes colocadas sea mayor?

selcs Jun 2015 Solución:

1) Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

$x = n^0$ de máquinas expendedoras de bebidas calientes,

$y = n^0$ de máquinas expendedoras de bebidas calientes. Hay que maximizar : $F(x, y) = y - x$



$x + y \geq 20$

x	0	20
y	20	0

$x \leq 12 \quad y \leq 40$

$x \leq \dfrac{y}{3}$

x	0	10
y	0	30

$x \geq \dfrac{x+y}{5}$

x	0	10
y	0	40

2) Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones y trazamos la recta:

$F(x, y) = 0 \quad y - x = 0$

x	0	20
y	0	20

Buscamos la paralela que pasa por un vértice y da una ordenada mayor en el origen: es la que pasa por el vértice intersección $(10, 40)$

Luego para obtener la mayor diferencia habrá que poner 10 máquinas expendedoras de bebidas calientes y 40 de máquinas expendedoras de bebidas frías

La mayor diferencia será entonces: $F(10, 40) = 40 - 10 = 30$.

- CUESTIÓN B2.

Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$, donde a , b y c son numeros reales, hallar los valores de a , b y c para que la función cumpla las siguientes condiciones:

a) pase por el origen de coordenadas,

b) su derivada se anule en $x = 0$ y además

c) la pendiente de la tangente a su gráfica en $x = 1$ valga 2.

selcs Jun 2015 Solución:

Las condiciones se traducen en:

a) $f(0) = 0$; por tanto $c = 0$

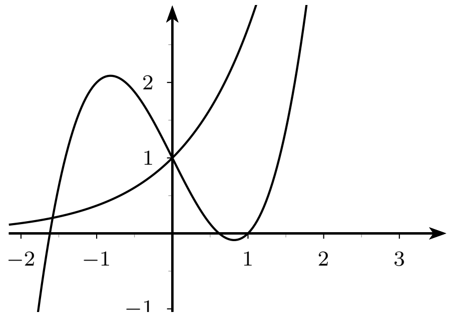
b) $f'(0) = 0$; $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + b$; luego $b = 0$

c) $f'(1) = 2$; $f'(2) = 4 \cdot 1^3 + 3a \cdot 1^2 = 2; \quad 4 + 3a = 2; \quad a = \dfrac{-2}{3}$

La función es $f(x) = x^4 - \dfrac{2}{3}\,x^3$

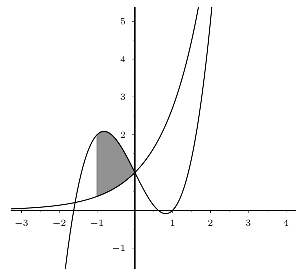
- CUESTIÓN B3.

Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 2x + 1$ y $g(x) = e^x$ cuyas gráficas aparecen en la siguiente figura,



Hallar el area encerrada por las dos graficas y las rectas $x = -1$ y $x = 0$.

selcs Jun 2015 Solución:



$$\int_{-1}^{0} (f-g)\,dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - 2x + 1 - e^x)\,dx =$$

$$\left[\frac{4}{4} - x^2 + x - e^x\right]_{-1}^{0} = 0 - e^0 - (\frac{1}{4} - 1 - 1 - e^{-1}) =$$

$$-1 - \frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{e} = \frac{3}{4} + \frac{1}{e} = 1'1178$$

- CUESTIÓN B4.

  Se lanza dos veces consecutivas un dado equilibrado, con las caras numeradas del 1 al 6.

  a) Determinar el número de resultados de este experimento aleatorio.

  b) Sea A el suceso "en los dos lanzamientos se obtiene un número mayor que 4" y B el suceso "en los dos lanzamientos se obtiene un número par". Calcular la probabilidad de A y la de B.

  c) ¿Son A y B independientes?

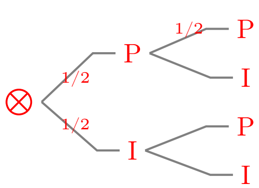
selcs Jun 2015 Solución:

a) El espacio muestral es $E = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2)\ldots(6,6)\}$ tiene 36 elementos equiprobables.

b)

$A = \{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$ luego $p(A) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

Como B tiene muchos resultados consideramos salir par o impar al tirar el dado:



$p(B) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

c) Son independientes si se cumple que $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$;

$A \cap B = \{(6,6)\}; \quad p(A \cap B) = \dfrac{1}{36}$

$p(A) \cdot p(B) = \dfrac{4}{36} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{36}$

Luego efectivamente A y B son independientes.

- CUESTIÓN B5.

  La altura de los edificios de una ciudad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 20 m. Calcular el tamaño mínimo que ha de tener una muestra aleatoria de dichos edificios para que el error cometido al estimar la altura media sea inferior a 2 m, con un nivel de confianza del 97 %.

  selcs Jun 2015 Solución:

  Para el nivel de confianza del 97 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,1701$

  El error de la estima viene dado para el nivel de confianza del 97 % por $z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, si se quiere sea menor de 2 entonces

  $2,1701\dfrac{20}{\sqrt{n}} \leq 2$

  Despejamos n: $\quad 2,1701\dfrac{20}{\sqrt{n}} = 2, \quad \sqrt{n} = \dfrac{2,170090378 \cdot 20}{2} = 21,70090378; \quad n \geq 470,9292.$

  Así, pues, se tiene la confianza del 97 % de que el error de la estima será menor de 2 solamente si n es 471 o mayor.

Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 8

Año 2014

8.1. Septiembre 2014

- CUESTIÓN A1.

  Dadas las matrices

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \\ a & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

  Hallar a y b para que se cumpla que $A \cdot B = B + C^t$.

  selcs Sep 2014 Solución:

  $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \\ a & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3a+1 & b+1 \\ 1-2a & b-2 \end{pmatrix}$$

  $$B + C^t = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \\ a & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ 4 & b+1 \\ a-2 & 1 \end{pmatrix}$$

  Para que sean iguales ha de ser $a = 1, \quad b = 3$

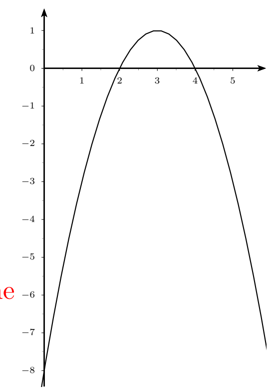
- CUESTIÓN A2.

  El beneficio semanal (en miles de euros) que obtiene una fábrica por la producción de aceite viene dado por la función $B(x) = -x^2 + 6x - 8$ donde x representa los hectolitros de aceite producidos en una semana.

  a) Representar la función $B(x)$ con $x \geq 0$.

  b) Calcular los hectolitros de aceite que se debe producir cada semana para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

  selcs Sep 2014 Solución:



a) Es un trozo de parábola abierta hacia abajo:
Puntos de corte:
Con OY : $x = 0; y = -8$

Con OX : $y = 0; -x^2 + 6x - 8 = 0; \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$

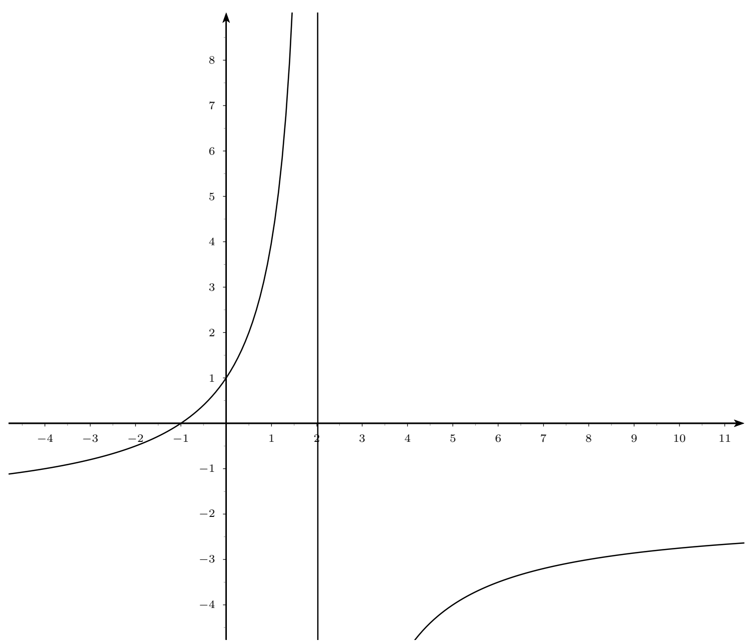
Máximo: $B'(x) = -2x + 6 = 0$, para $x = 3$

b) $B'(x) = -2x+6 = 0$, para $x = 3$; $B(3) = 1$; el beneficio máximo se obtiene produciendo 3 hectolitros y es de 1000 € .

- CUESTIÓN A3.

Dada la función $f(x) = \dfrac{-2x^2 - 6x - 4}{x^2 - 4}$ hallar su dominio, los puntos de corte con los ejes y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en $x = 1$.

selcs Sep 2014 Solución:



Dominio:

$x^2 - 4 = 0$; $x = \pm 2$; $dom(F) = R - \{-2, 2\}$

Cortes con los Ejes:

Con OY se hace $x = 0; y = f(0) = \dfrac{-4}{-4} = 1$

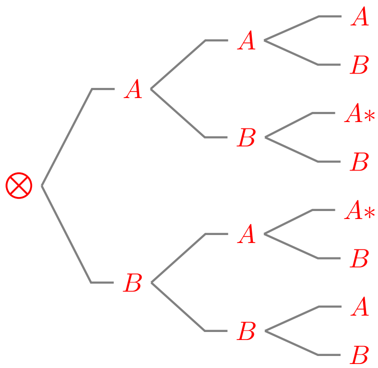
Con OX se hace $y = 0; \dfrac{-2x^2 - 6x - 4}{x^2 - 4} = 0$; $-2x^2 - 6x - 4 = 0$; $x = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$. Como -2 no pertenece al dominio, corte con $0X$ es $x = -1$.

$f'(x) = \dfrac{6}{x^2 - 4\,x + 4}$; $m = f'(1) = 6$ es la pendiente de la recta tangente en $x = 1$

- CUESTIÓN A4.

Un archivador contiene 15 exámenes desordenados, entre los cuales se encuentran dos que tienen la puntuación máxima. Con el fin de encontrarlos, vamos sacando uno tras otro, ¿cuál es la probabilidad de que la tarea finalice exactamente en el tercer intento?

selcs Sep 2014 Solución:



El problema se puede resolver considerando hacer tres extracciones sin devolución, sea A examen de puntuación máxima. Interesan las ramas con dos A y que terminan en A

$$p(ABA) + p(BAA) = \frac{2}{15}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{1}{13} + \frac{13}{15}\cdot\frac{2}{14}\cdot\frac{1}{13} = \frac{2}{105}$$

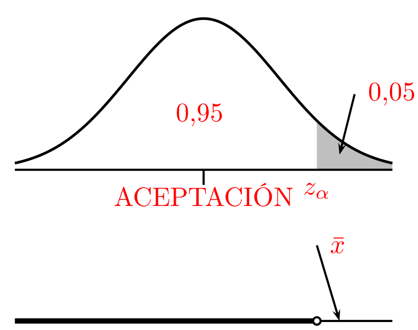
- CUESTIÓN A5.

Según un informe de una universidad, la edad media de finalización de un determinado grado no supera los 23 años. Sabiendo que la edad de finalización sigue una normal con desviación típica de 2 años y que una muestra aleatoria de 100 graduados dio una media de finalización del grado a los 24 años, ¿se puede aceptar, con un nivel de significación del 0'05, la afirmación de la universidad?

selcs Sep 2014 Solución:

Contrastamos $H_0 : \mu = 23$ frente a $H_1 : \mu > 23$.
La desviación típica es $\sigma = 2$. El tamaño muestral es $n = 100$.
El nivel de significación $\alpha = 0,05$, corresponde con $z_\alpha = 1,65$.

Entonces el intervalo de aceptación tiene de extremo:
$\bar{x} + z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 23 + 1,65 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{100}} = 23 + 0,33 = 23,33$
El intervalo de aceptación es $(-\infty; 23,33)$
Como $\bar{x} = 24$ queda fuera del intervalo, se rechaza H_0



- CUESTIÓN B1.

Un profesor proporciona a sus alumnos un listado con 20 problemas del tema 1 y 20 del tema 2. Cada problema del tema 1 vale 5 puntos y cada problema del tema 2 vale 8 puntos. Los alumnos pueden hacer problemas de los dos temas, pero con las siguientes condiciones:

1) El número de problemas realizados del tema 1 no puede ser mayor que el número de problemas del tema 2 más 2, ni ser menor que el número de problemas del tema 2 menos 8.

2) La suma de 4 veces el número de problemas realizados del tema 1 con el número de problemas realizados del tema 2 no puede ser mayor que 38.

Hallar cuántos problemas del tema 1 y del tema 2 hay que hacer para obtener la máxima puntuación.

selcs Sep 2014 Solución:

Sean:
x = número de problemas del tema 1
y = número de problemas del tema 2
Puntuación: $f(x,y) = 5x + 8y$ puntos

$$\left.\begin{array}{l} x \leq y+2 \\ x \geq y-8 \\ 4x+y \leq 38 \end{array}\right\}$$

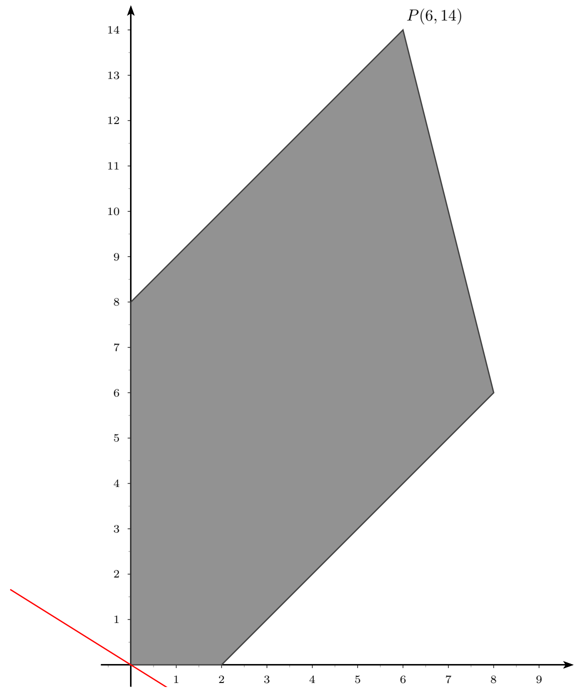
Representamos: $x \leq y+2$ $\begin{array}{c|cc} x & 2 & 5 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$

$x \geq y-8$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 3 \\ \hline y & 8 & 11 \end{array}$

$4x+y \leq 38$ $\begin{array}{c|cc} x & 9'5 & 9 \\ \hline y & 0 & 2 \end{array}$

Ahora la función igualada a 0:

$f(xy) = 5x + 8y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -8 \\ \hline y & 0 & 5 \end{array}$



Para maximizar la puntuación tomaríamos la paralela a $f(x,y) = 0$ más alejada, la que pasa por el punto P, hallamos sus coordenadas: $\left\{\begin{array}{l} x = y-8 \\ 4x+y = 38 \end{array}\right.$ $\quad x = 6, y = 14$.

$P(6,14)$; $\quad f(6,14) = 5 \cdot 6 + 8 \cdot 14 = 142$

Por tanto la puntuaciónl máxima resulta de hacer 6 problemas del tema 1 y 14 problemas del tema 2, obteniendo así 142 puntos.

- CUESTIÓN B2.

Dada la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + x - a}{x^2 - b}$

a) Hallar a y b sabiendo que $x = 1$ y $x = -1$ son sus asíntotas verticales y que $f(0) = -1$.

b) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, hallar el resto de las asíntotas y hallar su función derivada $f'(x)$.

selcs Sep 2014 Solución: a) Las asíntotas verticales resultan de anularse el denominador, pues en su proximidad la función se aleja a infinito.

El denominador de segundo grado es $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$, luego $b = 1$

Como el punto de corte con OY es $f(0) = -1$: $\quad \dfrac{-a}{-b} = -1; \quad a = -1$

b) $f(x) = \dfrac{-x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$

Asíntota horizontal: $y = n$; $\quad n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2+x+1}{x^2-1} = -1$ $\quad$ Asíntota horizontal: $y = -1$

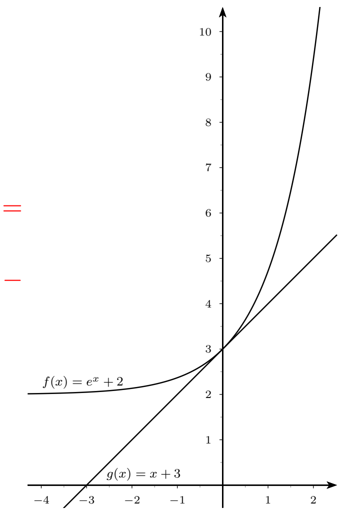
La derivada es $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 1}{(x^2-1)^2}$

- CUESTIÓN B3.

Dadas las funciones $f(x) = e^x + 2$ y $g(x) = x + 3$, cuyas gráficas están representadas en la siguiente figura, hallar el área comprendida entre las dos curvas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

selcs Sep 2014 Solución:

$S = \int_0^2 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^2 [e^x + 2 - (x + 3))]dx =$
$\int_0^2 [e^x - x - 1))]dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x\right]_0^2 = e^2 - \frac{4}{2} - 2 -$
$e^0 = e^2 - 5$ u^2



- CUESTIÓN B4.

Según un estudio, el 35 % de una población utiliza el autobús, mientras que el 65 % restante no lo hace. En cuanto al tranvía, es utilizado por la mitad y no por la otra mitad. Un 30 % no utiliza ninguno de los dos transportes. Si se elige un individuo de la población al azar:

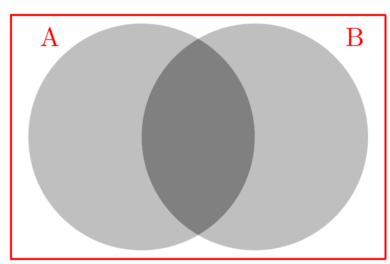
a) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice alguno de los dos transportes?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice los dos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice el tranvía, sabiendo que utiliza el autobús?

selcs Sep 2014 Solución:

Llamamos A al suceso "utilizar autobús"; $p(A) = 0'35$
Llamamos B al suceso "utilizar tranvía"; $p(B) = 0'50$
No utilizar ninguno: $p(A^c \cap B^c) = 0'30$



a) Utilizar alguno $A \cup B$ es lo contrario de no utilizar ninguno luego $p(A \cup B) = 1 - p(A^c \cap B^c) = 1 - 0'30 = 0'70$

b) Utilizar ambos $A \cap B$, lo obtenemos a partir de la unión:
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
$0'70 = 0'35 + 0'50 - p(A \cap B); \quad p(A \cap B) = 0'15$

c) $p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0'15}{0'35} = 0'43$

- CUESTIÓN B5.

Tomando al azar una muestra de 90 alumnos de una facultad, se encontró que 50 de ellos eran mujeres. Hallar, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo de confianza para estimar la proporción de alumnos de la facultad que son mujeres.

selcs Sep 2014 Solución:

Los datos son: proporción de la muestra $\hat{p} = \dfrac{50}{90} = 0,5556, n = 90$

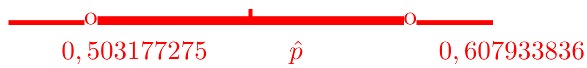
Para el nivel de confianza del 90 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,65$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

$$\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,5556 \pm 1,65 \cdot \sqrt{\frac{0,5556 \cdot 0,4444}{90}} = 0,5556 \pm 0,0524 \begin{cases} 0,5032 \\ 0,6079 \end{cases}$$

El intervalo de confianza para la proporción es $(0,5032; 0,6079)$

con probabilidad 90 % μ está en:



8.2. Junio 2014

- CUESTIÓN A1.

  Discutir el siguiente sistema por el método de Gauss, según los valores del parámetro a , siendo a un número real distinto de 0.

  $$\begin{cases} ax + y - 2az = 1 \\ ax - y = 2 \\ ax + y + (a-1)z = 3a - 1 \end{cases}$$

  Resolverlo para $a = 1$.

  selcs Jun 2014 Solución:

  $$\begin{pmatrix} a & 1 & -2a & 1 \\ a & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & a-1 & 3a-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} a & 1 & -2a & 1 \\ 0 & -2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 3a-1 & 3a-2 \end{pmatrix}$$

  Ya está triangulada, pasando a sistemas resulta:

  $$\begin{cases} ax + y - 2az = 1 \\ -2y + 2z = 1 \\ (3a-1)z = 3a - 2 \end{cases}$$

  Por tanto para $3a - 1 \neq 0$ se puede despejar la z y sustituyendo obtenemos las demás incógnitas (no hay problema con ax de la primera ecuación pues nos dicen que es distinto de 0)

  Luego para $a \neq \frac{1}{3}$ sistema compatible determinado, solución única.

  Para $a = \frac{1}{3}$ quedaría la última ecuación $0z = 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 = -1$, sin solución. El sistema sería incompatible.

  Para $a = 1$ el sistema queda: $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ sustituyendo en el triangulado: $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -2y + 2z = 1 \\ 2z = 1 \end{cases}$

  de solución sustituyendo hacia arriba: $z = \dfrac{1}{2}$; $\quad -2y + 1 = 1; y = 0; \quad x - 1 = 1; x = 2$

- CUESTIÓN A2. El coste de fabricación de un modelo de teléfono móvil viene dado por la función $C(x) = x^2 + 10x + 325$, donde x representa el número de teléfonos móviles fabricados. Supongamos que se venden todos los teléfonos fabricados y que cada teléfono se vende por 80 euros.

  a) Determinar la función de beneficio (definido como ingreso menos coste) que expresa el beneficio obtenido en función de x .

  b) ¿Cuántos teléfonos deben fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

  c) ¿Para qué valores de x se tienen pérdidas (beneficios negativos)?

  selcs Jun 2014 Solución:

  a) Beneficio: $B(x) = 80x - C(x) = -x^2 + 70x - 325$, la gráfica es una parábola abierta hacia abajo.

  b) Buscamos el máximo de $B(x)$, derivando $B'(x) = -2x + 70; -2x + 70 = 0; \quad x = 35; \quad B(35) = 900$ €

c) Buscamos $B(x) = 0$; $\quad -x^2 + 70x - 325 = 0$; $\quad \begin{cases} x = 5 \\ x = 65 \end{cases}$, se producen pérdidas si fabrican menos de 5 móviles o más de 65.

- CUESTIÓN A3.

Hallar las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int (x^5 - 2x + 3)dx$ $\qquad\qquad$ b) $\displaystyle\int (2\,e^x + 5)dx$

selcs Jun 2014 Solución:

a) $\displaystyle\int (x^5 - 2x + 3)dx = \frac{x^6}{6} - \frac{2x^2}{2} + 3x = \frac{x^6}{6} - x^2 + 3x + C$

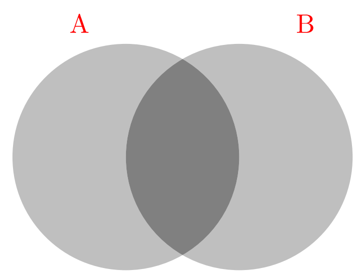
b) $\displaystyle\int (2\,e^x + 5)dx = 2\,e^x + 5x + C$

- CUESTIÓN A4.

Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, calcule $P(A)$ y $P(B)$ sabiendo que son independientes y que $P(A^c) = 0'6$ y $P(A \cup B) = 0'7$.

selcs Jun 2014 Solución:

$p(A) = 1 - p(A^c) = 1 - 0'6 = 0'4$



Como son independientes $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Entonces:
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B)$
sustituyendo:
$0'7 = 0'4 + p(B) - 0'4 \cdot p(B)$; $\quad 0'7 = 0'4 + 0'6 \cdot p(B)$
$p(B) = \dfrac{0'3}{0'6} = \dfrac{1}{2} = 0'5$

- CUESTIÓN A5.

El peso (en gramos) de los pollos que llegan a un matadero sigue una distribución normal con desviación típica de 315 g. Sabiendo que una muestra de 64 pollos ha dado un peso medio de 2750 g, hallar un intervalo de confianza para el peso medio con un nivel de confianza del 97 %.

selcs Jun 2014 Solución:

Los datos son: $\bar{x} = 2750, \sigma = 315, n = ,64$

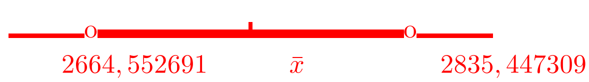
Para el nivel de confianza del 97 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,170090378$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

$$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2750 \pm 2,170090378 \cdot \frac{315}{\sqrt{64}} = 2750 \pm 85,44730862 \begin{cases} 2664,552691 \\ 2835,447309 \end{cases}$$

El intervalo de confianza para la media de la nueva producción de lámparas es $(2664,552691; 2835,447309)$

con probabilidad 97 % μ está en:



- CUESTIÓN B1.

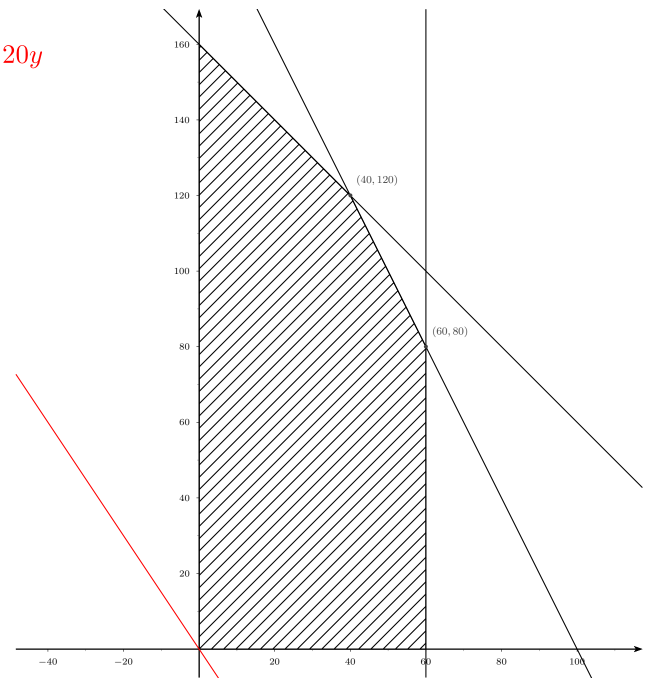
  Una fábrica de tintas dispone de 1000 kg del color A, 800 kg del color B y 300 kg del color C, con los que fabrica dos tipos de tinta, una para la etiqueta de un refresco y otra para un cartel. Cada bote de tinta de la etiqueta necesita 10 kg del color A, 5 kg del color B y 5 kg del color C y el de tinta del cartel requiere 5 kg de A y 5 kg de B. Obtiene un beneficio de 30 euros por cada bote de tinta para etiquetas y de 20 euros por cada uno de tinta para carteles. Si vende todos los botes fabricados, ¿cuántos botes de cada tipo de tinta debe fabricar para maximizar su beneficio?, ¿cuál es el beneficio máximo?

  selcs Jun 2014 Solución:

  1) Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

  $x = n^0$ de botes de tinta para etiqueta,

  $y = n^0$ de botes de tinta para cartel. Ganancia: $F(x, y) = 30x + 20y$



  color A:

  $10x + 5y \leq 1000 \quad (1) \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 100 \\ \hline y & 200 & 0 \end{array}$

  color B:

  $5x + 5y \leq 800 \quad (2) \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 40 \\ \hline y & 40 & 0 \end{array}$

  color C:

  $5x \leq 300; \quad x \leq 60$

  además: $x \geq 0 \quad y \geq 0$ pues x e y no pueden ser negativas

  2) Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones y trazamos la recta:

  $F(x, y) = 0 \quad 30x + 20y = 0 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -205 \\ \hline y & 0 & 30 \end{array}$

  Buscamos la paralela que pasa por un vértice y da una ordenada mayor en el origen: es la que pasa por el vértice intersección de

  $$\left\{ \begin{array}{l} 10x + 5y = 1000 \\ 5x + 5y = 800 \end{array} \right. \quad \text{es } (40, 120)$$

  Luego para obtener la mayor ganancia el fabricante deberá producir 40 botes de tinta para etiqueta y 120 botes de tinta para cartel.

  El beneficio máximo será entonces: $F(40, 120) = 30 \cdot 40 + 20 \cdot 140 = 3600$ euros.

- CUESTIÓN B2.

  La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = x^2 + 4x + a$, siendo a un número real. Calcular a para que el área encerrada por la gráfica, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 3$ valga 57 .

  selcs Jun 2014 Solución:

  Como la función es positiva en la zona de integración el área viene dada directamente por la integral:

$S = \displaystyle\int_0^3 (x^2 + 4x + a)dx =$

Hallamos la primitiva

$\displaystyle\int (x^2 + 4x + a)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + ax = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + ax + C$

$S = \displaystyle\int_0^3 (x^2 + 4x + a)dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + ax\right]_0^3 = \frac{27}{3} + 18 + 3a - 0 = 27 + 3a = 57; \quad 3a = 30; \quad a = 10$

- CUESTIÓN B3.

Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x+2}$ b) $g(x) = \ln(x^2 - 5x)$

selcs Jun 2014 Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{e^{2x} \cdot 2 \cdot (x+2) - e^{2x}}{(x+2)^2}$

b) $g'(x) = \dfrac{2x-5}{x^2-5x}$

- CUESTIÓN B4.

En una población el 60 % de los individuos toma diariamente leche y el 40 % toma diariamente yogur. Además, el 30 % de los individuos toma leche y yogur diariamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo tome a diario leche pero no yogur?

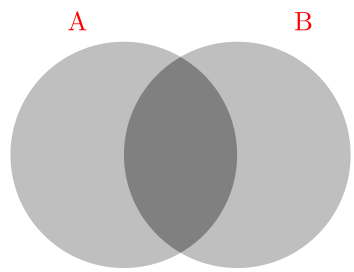
b) ¿Cuál es la probabilidad de que tome a diario leche o yogur?

c) Si un individuo toma diariamente leche, ¿qué probabilidad hay de que también tome a diario yogur?

selcs Jun 2014 Solución:

$A =$ suceso tomar leche $B =$ suceso tomar yogur

Piden a) $p(A \cap B^c)$; b) Entendemos que es la unión no exclusiva $p(A \cup B)$; c) $p(B/A)$



b) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'6 + 0'4 - 0'3 = 0'7$

c) $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0'3}{0'6} = 0'5$

a) Como $A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$ disjunta, sustituyendo: $p(A) = p(A \cap B^c) + p(A \cap B); 0'6 = p(A \cap B^c) + 0'3; \quad p(A \cap B^c) = 0'3$

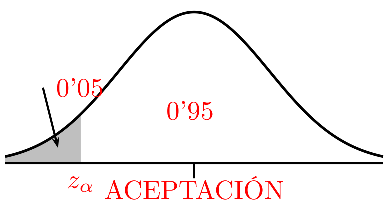
- CUESTIÓN B5.

El tiempo de espera para recibir un tratamiento médico es, en promedio, de 30 días. Después de tomar medidas para intentar reducirlo, para una muestra de 80 pacientes el tiempo medio de espera es de 27 días. Suponiendo que el tiempo de espera sigue una distribución normal con una desviación típica igual a 8, plantear un test para contrastar que las medidas no han mejorado la situación frente a que sí lo han hecho. ¿Cuál es la conclusión a la que se llega con un nivel de significación del 5 %?

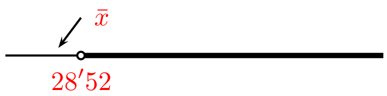
selcs Jun 2014 Solución:

Como debemos suponer que la campaña es para disminuir el tiempo de espera, el test más adecuado sería el unilateral izquierdo;

Contrastamos $H_0 : \mu = 30$ frente a $H_1 : \mu < 30$,
En test unilateral el nivel significación $\alpha = 0'05$ corresponde con $z_\alpha = 1'65$.



El extremo de la región de aceptación es $\mu - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - 1'65 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 30 - 1'65 \dfrac{8}{\sqrt{80}} = 28'52$.
que da el intervalo $(28'52, \infty)$.
Como $\bar{x} = 27$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que la media tiempo de espera siga igual $\mu = 30$, cabe pensar que las medidas han sido efectivas.



Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 9

Año 2013

9.1. Septiembre 2013

- CUESTIÓN A1.

  En un avión viajan un total de 360 pasajeros, el número de hombres duplica al de la suma de las mujeres y los niños. El número de adultos menos el de niños duplica al número de hombres menos el de mujeres. Determinar el número de hombres, mujeres y niños que viajan en el avión.

  selcs Sep 2013 Solución:

  x: número de hombres

  y: número de mujeres

  z: número de niños

  $$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=360 \\ x=2(y+z) \\ x+y-z=2(x-y) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x+y+z=360 \\ x-2y-2z=0 \\ -x+3y-z=0 \end{array}\right.$$

  $$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 360 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & +3 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2^a\cdot -1^a \\ 3^a\cdot +1^a \end{array} \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 360 \\ 0 & -3 & -3 & -360 \\ 0 & 4 & 0 & 360 \end{array}\right)$$

  queda $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=360 \\ -3y-3z=-360 \\ 4y=360 \end{array}\right.$ resulta: $x=240, y=90, z=30$

- CUESTIÓN A2.

  Se sabe que la expresión que representa el número de personas $N(t)$ que acude un día a un centro médico, en función del número de horas t que lleva abierto, es $N(t)=a\,t^2+bt, \quad 0\leq t\leq 8, \quad a,b\in R$. Sabiendo que el número máximo de personas que ha habido ese día ha sido de 128, y que se ha producido a las 4 horas de abrir, calcule a y b .

  selcs Sep 2013 Solución:

  $N'(t)=2at+b; \quad N'(4)=8a+b=0; \quad b=-8a$

$N(4) = 16a + 4b = 128; \quad 16a - 32a = 128; \quad a = -8; \quad b = 64$

$N(t) = -8t^2 + 64$

- CUESTIÓN A3.

a) Calcule la derivada de las funciones $f(x) = e^{x^2-2x}$ y $g(x) = \ln(x^7 + 1)$

b) Calcule $\displaystyle\int_1^3 (x^2 - 3x - 1)dx$

selcs Sep 2013 Solución:

a) $f'(x) = (2x-2)\, e^{x^2-2x}, \qquad g'(x) = \dfrac{7x^6}{x^7+1}$

b) $\displaystyle\int_1^3 (x^2 - 3x - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - x\right]_1^3 = -\frac{16}{3}$

- CUESTIÓN A4.

Un archivador contiene 70 exámenes del grupo 1, 50 del grupo 2, 100 del grupo 3 y 25 del grupo 4. El 5 % de los exámenes del grupo 1, el 3 % de los del grupo 2 y el 8 % del grupo 3 está suspenso. En el grupo 4 no hay ningún suspenso.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir un examen al azar, esté suspenso?

b) Se ha elegido un examen y está suspenso, ¿cuál es la probabilidad de que sea del grupo 2?

selcs Sep 2013 Solución:

$S =$ suspenso, G_1, G_2, G_3, G_4 los grupos, forman un sistema completo de sucesos.

a) Teorema de la probabilidad total:

$p(S) = p(S/G_1) \cdot p(G_1) + p(S/G_2) \cdot p(G_2) + p(S/G_3) \cdot p(G_3) + p(S/G_4) \cdot p(G_4) = 0'05 \cdot \dfrac{70}{245} + 0'03 \cdot \dfrac{50}{245} + 0'08 \cdot \dfrac{100}{245} + 0 \cdot \dfrac{25}{245} = 0'053061$

b) Teorema de Bayes:

$$p(G_2/S) = \frac{p(S/G_2) \cdot p(G_2)}{p(S/G_1) \cdot p(G_1) + p(S/G_2) \cdot p(G_2) + p(S/G_3) \cdot p(G_3) + p(S/G_4) \cdot p(G_4)} = \frac{0'006122}{0'053061} = 0'1153$$

- CUESTIÓN A5.

De una muestra aleatoria de 700 individuos de una población, 100 son mujeres. Hallar un intervalo de confianza al 98 % para la proporción de mujeres de esa población.

selcs Sep 2013 Solución:

Los datos son: $\hat{p} = \dfrac{100}{700} = \dfrac{1}{7}, n = 700$. Para el 98 % corresponde un valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'33$

Los extremos del intervalo de confianza al(98 %)para la proporción p son:

$$\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \frac{1}{7} \pm 2'33 \sqrt{\frac{1/7 \cdot 6/7}{700}} = \begin{cases} = 0'1120 \\ = 0'1736 \end{cases}$$

- CUESTIÓN B1.

Para elaborar un menú se dispone de un primer plato y un segundo plato. Una porción del primer plato contiene 6 mg de vitamina C, 2 mg de hierro y 20 mg de calcio, y aporta 110 calorías. Una porción del segundo contiene 3 mg de vitamina C, 2 mg de hierro y 40 mg de calcio, y aporta 65 calorías. ¿Cuántas porciones de cada plato deben utilizarse para que el menú aporte el menor número de calorías, sabiendo que debe contener al menos 36 mg de vitamina C, 20 mg de hierro y 240 mg de calcio?

selcs Sep 2013 Solución:

Sean x = número de porciones del primer plato P_1; y = número de porciones del segundo plato P_2

	C	Fe	Ca	Calorías
P_1	6	2	20	110
P_2	3	2	40	65

Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

Función objetivo a minimizar calorías: $F = 110x + 65y$

Vitamina C: $6x + 3y \geq 36$

x	0	6
y	12	0

Hierro: $2x + 2y \geq 20$

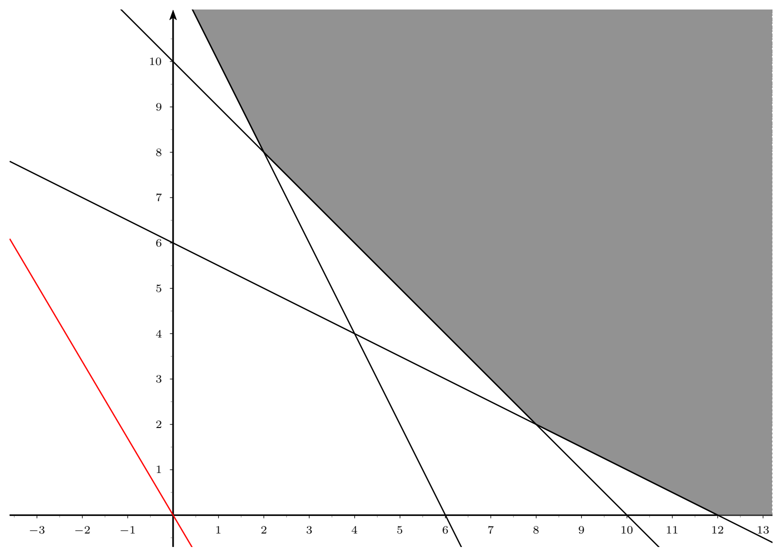
x	0	10
y	10	0

Calcio: $20x + 40y \geq 240 \quad (3)$

x	0	12
y	6	0

además: $x \geq 0 \quad y \geq 0$

El mínimo sería en $F(2,8) = 110 \cdot 2 + 65 \cdot 8 = 740$, por tanto



El menú que aporta el menor número de calorías se hace con 2 porciones del plato P_1 y 8 del plato P_2 y contiene 740 calorías.

- CUESTIÓN B2.

Los ingresos obtenidos por la fabricación de x unidades diarias de cierto producto vienen dados por $I(x) = -28x^2 + 5256x$, y los costes vienen dados por la función $C(x) = 22x^2 + 4456x + 814$.

a) Determinar la función que expresa los beneficios obtenidos por la fabricación de x unidades diarias del producto (sabiendo que los beneficios se definen como los ingresos menos los costes) y calcular el número de unidades diarias que hay que fabricar para obtener un beneficio máximo.

b) ¿Cuánto vale dicho beneficio máximo?

selcs Sep 2013 Solución:

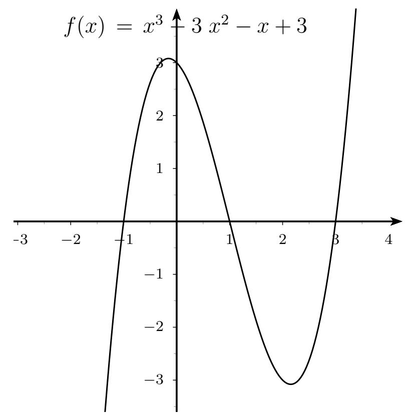
$B(x) = I(x) - C(x) = -50x^2 + 800x - 814$

a) La gráfica es una parábola abierta hacia abajo, basta hallar el máximo,$B'(x) = -100x + 800$; que se anula para $x = 8$, luego el máximo se consigue fabricando 8 unidades diarias.

b) Beneficio máximo es $B(8) = 2386$

- CUESTIÓN B3.

Se da la siguiente gráfica, que corresponde a la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, y se pide calcular el área que encierra la gráfica de la función con el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.



selcs Sep 2013 Solución:

$\text{Área} = \int_{-1}^{1} f + \left|\int_{1}^{2} f\right|$

$\int (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + 3x = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - \dfrac{x^2}{2} + 3x$

$\int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx = \left[\dfrac{x^4}{4} - x^3 - \dfrac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} = 4$

$\int_{1}^{2} (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx = \left[\dfrac{x^4}{4} - x^3 - \dfrac{x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{2} = -\dfrac{7}{4}$

$\text{Área} = 4 + \dfrac{7}{4} = \dfrac{23}{4}$

- CUESTIÓN B4.

Sean A y B dos sucesos independientes de un mismo experimento aleatorio, tales que $p(A) = 0'2$ y $P(B) = 0'8$.

a) Calcular $p(A \cap B)$ y $p(A \cup B)$

b) Calcular $p(A/B)$

selcs Sep 2013 Solución:

a) Por ser independientes $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0'2 \cdot 0'8 = 0'16$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'2 + 0'8 - 0'16 = 0'84$

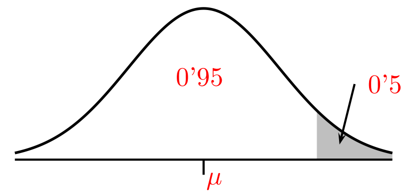
b) $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0'16}{0'8} = 0'2$

- CUESTIÓN B5.

Hace veinte años la edad en que la mujer tenía su primer hijo seguía una distribución normal con media 29 años y desviación típica de 2 años. Recientemente en una muestra aleatoria de 144 mujeres se ha obtenido, para dicha edad, una media de 31 años. Con un nivel de significación de 0,05 ¿se puede afirmar que la edad media en la que la mujer tiene su primer hijo es mayor actualmente que hace veinte años?

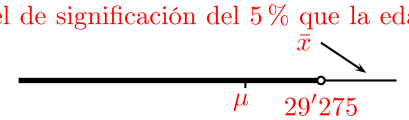
selcs Sep 2013 Solución:

Contrastamos $H_0 : \mu = 29$ frente a $H_1 : \mu > 29$,
es test unilateral.
Desv. tip. $\sigma = 2$ años
$n = 144$
nivel significación $\alpha = 0'05$ corresponde con $z_\alpha = 1'65$.



El extremo de la región de aceptación es $\mu + z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu + 1'65 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 29 + 1'65 \dfrac{2}{\sqrt{144}} = 29'275$.

Como la media de la muestra 31 mayor que 29'275, se rechaza al nivel de significación del 5 % que la edad media en la que la mujer tiene su primer hijo sigue siendo 29 años.



9.2. Junio 2013

- CUESTION A1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 3 & c & 1 \end{pmatrix},$$

a) Hallar a, b y c para que se cumpla que $A \cdot B = C^t \cdot$. (C^t denota la traspuesta de C)

b) Para $a = 0$ calcular la inversa de A .

selcs Jun 2013 Solución:

a) $A.B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & b+2 \\ -5 & 2 \\ 2a-1 & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Resulta igualando elementos $b + 2 = 3$; $\quad 2 = c$; $\quad 2a - 1 = 1$; ; $\quad a.b = 1$, en definitiva $a = 1, b = 1, c = 2$

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1^a + 3^a \cdot (-5) \\ 2^a + 3^a \cdot (-6) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} 1^a - 2^a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

no hace falta dividir cada fila por su elemento de la diagonal principal por ser 1:

las últimas tres columnas es la matriz inversa.

- CUESTION A2. Las funciones $I(t) = -0'5t^2 + 17t$ y $C(t) = 0'5t^2 - t + 32$ con $0 \leq t \leq 18$ representan, respectivamente, los ingresos y los costes de una empresa en miles de euros en función de los años trascurridos desde su comienzo y en los últimos 18 años.

a) ¿Para que valores de t , desde su inicio, los ingresos coincidieron con los costes?

b) Hallar la función que expresa los beneficios (ingresos menos costes) en función de t y representarla gráficamente.

c) ¿Cuantos años después del comienzo de su actividad la empresa alcanzo el beneficio máximo? Calcular el valor de dicho beneficio.

selcs Jun 2013 Solución:

a) Igualando $I(t) = C(t)$; $-0'5t^2 + 17t = 0'5t^2 - t + 32$; $t^2 - 18t + 32 = 0$; $t = 2, t = 16$

b) $B(t) = I(t) - C(t) = -t^2 + 18t - 32$

c) Es en el vértice de la parábola $B'(t) = -2t + 18 = 0$, $t = 9$, $B(9) = 49$

- CUESTION A3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

  a) $f(x) = e^{x^3+2x}$ b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

  selcs Jun 2013 Solución:

  a) $f'(x) = (3x^2 + 2)e^{x^3+2x}$

  b) $g'(x) = \left((2x-1)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\dfrac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 = -\dfrac{1}{\sqrt{(2x-1)^3}}$

- CUESTION A4. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0'2, P(B) = 0'5$ y $P(A \cup B) = 0'65$.

  a) ¿Son independientes ambos sucesos? Razonar la respuesta.

  b) Calcular $P(A/B)$.

  selcs Jun 2013 Solución:

  a) Hallamos la probabilidad de la intersección: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; $0'65 = 0'2 + 0'5 - P(A \cap B)$ resulta $P(A \cap B) = 0'05$, como es distinta de $P(A) \cdot P(B) = 0'2 \cdot 0'5 = 0'1$ podemos afirmar que A y B son dependientes.

  b) $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0'05}{0'5} = 0'1$

- CUESTION A5. Según un estudio realizado en el año 2000, en una población la proporción de personas que tenia sobrepeso era del 24 %. En los últimos años ha disminuido la actividad física que realizan los individuos, lo que hace sospechar que dicha proporción ha aumentado. Para contrastarlo, se ha tomado recientemente una muestra aleatoria de 1195 individuos, de los cuales 310 tienen sobrepeso. Con un nivel de significación del 1 %, ¿se puede rechazar que la proporción sigue siendo del 24 % e inclinarnos por que dicha proporción ha aumentado?

  selcs Jun 2013 Solución:

  Contraste de hipótesis unilateral para la proporción:

  $H_0 : p = 0'24$ se acepta que se mantiene la proporción.

$H_1 : p > 0'24$ cabe pensar que la proporción ha subido.

Para el nivel de significación $0'01$, ese área a la derecha bajo la normal corresponde con $z_\alpha = 2'33$.

La región de aceptación tiene como extremo:

$$p + z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0'24 + 2'33\sqrt{\frac{0'24 \cdot 0'76}{1195}} = 0'2688$$

Luego la región de aceptación es el intervalo $(-\infty, 0'2688)$.

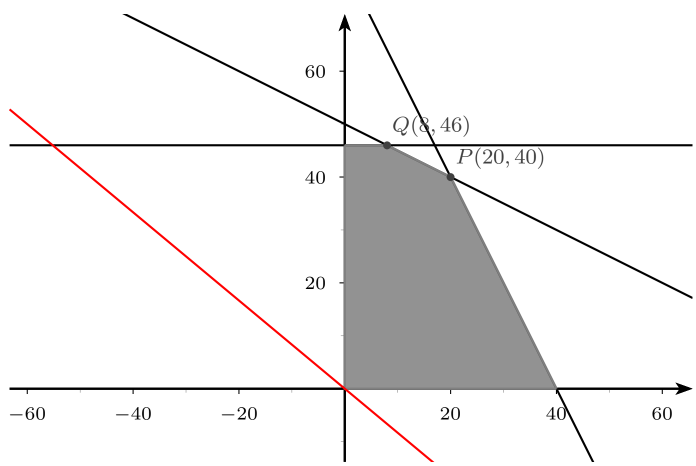
Como la proporción de la muestra $\hat{p} = \dfrac{310}{1195} = 0,2594$ está dentro del intervalo de aceptación se acepta H_0

Luego los resultados muestrales llevan a mantener que no ha aumentado el sobrepeso.

- CUESTION B1. Una pastelería dispone de 100 kg de masa, 80 kg de crema de chocolate y 46 kg de nata. Con estos ingredientes elabora dos tipos de tartas: la tarta de chocolate, que requiere para su elaboración 1 kg de masa y 2 kg de crema de chocolate, y la tarta de chocolate y nata, que requiere 2 kg de masa, 1 kg de crema de chocolate y 1 kg de nata. Por cada tarta de chocolate se obtiene un beneficio de 10 euros, y de 12 euros por cada una de chocolate y nata. Suponiendo que vende todas las tartas, ¿cuántas tartas de cada tipo debe preparar para maximizar su beneficio?, ¿cual es el beneficio máximo?

  selcs Jun 2013 Solución:
  Sean:
  $x =$ número de tartas de chocolate
  $y =$ número de tartas de nata y chocolate
  Ganancia: $f(x, y) = 10x + 12y$ euros

$$\left.\begin{array}{ll} \text{masa} & x + 2y \leq 100 \\ \text{chocolate} & 2x + y \leq 80 \\ \text{nata} & y \leq 46 \end{array}\right\}$$



Representamos: $x + 2y \leq 100$

x	0	100
y	50	0

$2x + y \leq 80$

x	0	40
y	80	0

Ahora la función igualada a 0:

$f(xy) = 10x + 12y = 0$

x	0	-60
y	0	50

Para maximizar los ingresos tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ más alejada, la que pasa por el punto P, hallamos sus coordenadas: $\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 100 \\ 2x + y = 80 \end{array}\right.$ $\quad x = 20, y = 40$.

$P(20, 40)$; $\quad f(20, 40) = 10 \cdot 20 + 12 \cdot 40 = 680$

Por tanto el máximo beneficio resulta de hacer 20 tartas de chocolate y 40 de chocolate y nata, obteniendo así 680 € por la venta.

- CUESTION B2. Dada la función $f(x) = x^4 + ax + b$, hallar a y b sabiendo que en $x = 1$ la función tiene un extremo relativo (un máximo o un mínimo relativo) y que $f(1) = 2$. ¿Se trata de un máximo o de un mínimo relativo?

  selcs Jun 2013 Solución:

Como tiene un extremo relativo en $x = 1$ se tiene que $f'(1) = 0$; $f'(x) = 4x^3 + a$; $f'(1) = 4 + a = 0$; $a = -4$

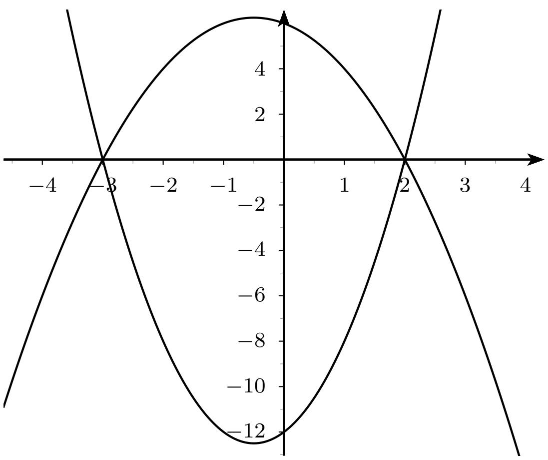
Además $f(1) = 2$; $1 - 4 + b = 2$; $b = 5$ luego la función es $f(x) = x^4 - 4x + 5$

Para ver si es máximo o mínimo estudiamos el crecimiento: $f'(x) = 4x^3 - 4 = 0$; $x^3 = 1$; $x = 1$,

x		1	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$
		MÍNIMO	

O también por el criterio de la segunda derivada $f''(x) = 4x^3$; $f''(1) = 4 > 0$ es un mínimo.

- CUESTION B3. Dadas las parabolas $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$ y $g(x) = -x^2 - x + 6$ cuyas gráficas se presentan a continuación, hallar el area de recinto acotado encerrado entre ambas.



selcs Jun 2013 Solución:

El área viene dada por la integral de la mayor menos la menor en el intervalo de integración:

$$S = \int_{-3}^{2} g - f = \int_{-3}^{2} (-3x^2 - 3x + 18)dx = \left[-x^3 - \frac{3x^2}{2} + 18x\right]_{-3}^{2} =$$

$$-8 - 6 + 36 - (27 - \frac{27}{2} - 54) = 62'5 \text{ u}^2$$

- CUESTION B4. En una clase hay 15 chicos y 15 chicas que van a realizar el siguiente experimento aleatorio: se tiene una caja azul con 10 bolas numeradas de 1 a 10 y una caja verde con 5 bolas numeradas de 1 a 5, se elige al azar una persona de la clase, si es una chica, extrae una bola de la caja azul, y si es un chico, extrae una bola de la caja verde.

  a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer un numero par?

  b) Si el numero extraído ha sido par, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraído por una chica?

selcs Jun 2013 Solución:

Consideramos los sucesos M ser chica, V ser chico, P ser par y I ser impar

M, V es sistema completo de sucesos, como hay 15 de cada $p(M) = p(V) = \dfrac{1}{2}$

a) Por el Teorema de la probabilidad total:

$p(P) = p(M) \cdot p(P/M) + p(V) \cdot p(P/V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$

b) Por el teorema de Bayes:

$p(M/P) = \frac{p(P/M) \cdot p(M)}{p(M) \cdot p(P/M) + p(V) \cdot p(P/V)} = \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{9}{20}} = \frac{5}{9}$

- CUESTION B5. El tiempo de espera para ser atendido en la caja de un establecimiento sigue una distribución normal de desviación típica 5 minutos. Calcular el tamaño mínimo de la muestra para estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el tiempo medio de espera con un error que no sea superior a medio minuto. ¿Cuál es dicho tamaño mínimo para un nivel de confianza del 99 %?

selcs Jun 2013 Solución:

error $= z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

El error de la estima viene dado para el nivel de confianza del 95 % por $1'96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, si se quiere sea menor de 0'5 entonces $1'96 \frac{5}{\sqrt{n}} \leq 0'5$

Despejamos n, $1'96 \frac{5}{\sqrt{n}} = 0'5$, $\quad \sqrt{n} = \frac{1'96 \cdot 5}{0'5} = 19'6 \quad n \geq 384'16$.

Así, pues, se tiene la confianza del 95 % de que el error de la estima será menor de 0'5 solamente si n es 385 o mayor.

Análogamente el error de la estima viene dado para el nivel de confianza del 99 % por $2'58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, si se quiere sea menor de 0'5 entonces $2'58 \frac{5}{\sqrt{n}} \leq 0'5; \quad n > 665,64$

Se tiene la confianza del 99 % de que el error de la estima será menor de 0'5 solamente si n es 666 o mayor.

Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 10

Año 2012

10.1. Septiembre 2012

- CUESTIÓN A1.

  Un cliente ha comprado en un supermercado botellas de agua de medio litro, 2 litros y 5 litros, cuyos precios respectivos son 0,5 euros, 1 euro y 3 euros. En total ha comprado 24 botellas, que corresponden a una cantidad de 36 litros, y que le han costado 22 euros. Determinar cuántas botellas de cada tipo ha comprado.

  selcs Sep 2012 Solución:

  x: número de botellas de 1/2 litro

  y: número de botellas de 2 litros

  z: número de botellas de 5 litros

  $$\begin{cases} x+y+z=24 \\ x/2+2y+5z=36 \\ x/2+y+3z=22 \end{cases}$$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 1/2 & 2 & 5 & 36 \\ 1/2 & 1 & 3 & 22 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a \cdot 2 + 1^a.(-1) \\ 3^a \cdot 2 + 1^a.(-1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 3 & 9 & 48 \\ 0 & 1 & 5 & 20 \end{pmatrix} 3^a \cdot (-3) + 2^a \cdot 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 3 & 9 & 48 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

  queda $\begin{cases} x+y+z=24 \\ 3y+9z=48 \\ 6z=12 \end{cases}$ sustituyendo hacia arriba resulta: $z=2, y=10, x=12$

- CUESTIÓN A2.

  Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{4-x^2}$

  a) Hallar su dominio.

  b) Determinar las asíntotas.

c) Hallar su función derivada $f'(x)$.

selcs Sep 2012 Solución:

a) El denominador se anula para $x = \pm 2$, luego el dominio es $R - \{-2, 2\}$

b) Asíntotas verticales, la función se irá a infinito en los puntos en que se anule el denominador:

Asíntotas verticales

- $x = -2$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{2x^2+1}{4-x^2} = \lim_{x \to -2^-} \frac{2x^2+1}{(2-x)(2+x)} = \frac{9}{(4) \cdot 0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{2x^2+1}{4-x^2} = \lim_{x \to -2^+} \frac{2x^2+1}{(2-x)(2+x)} = \frac{9}{(4) \cdot 0^+} = +\infty$$

- $x = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{2x^2+1}{4-x^2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{2x^2+1}{(2-x)(2+x)} = \frac{9}{0^+ \cdot 4} = \infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{2x^2+1}{4-x^2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{2x^2+1}{(2-x)(2+x)} = \frac{9}{0^- \cdot 4} = -\infty$$

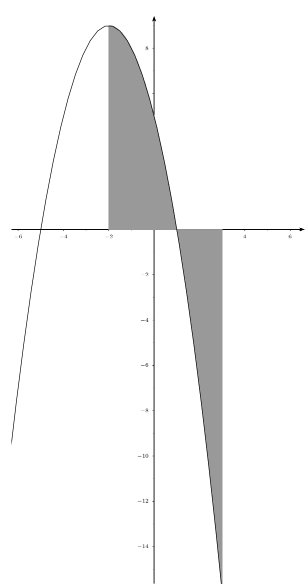
Asíntota horizontal $y = n$: $\quad n = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+1}{4-x^2} = -2; \quad y = -2$

c) $f'(x) = \dfrac{18x}{(4-x^2)^2}$

- CUESTIÓN A3.

Calcular el area del recinto limitado por la parabola de ecuación $y = -x^2 - 4x + 5$, el eje OX, y las rectas $x = -2$ y $x = 3$ y hacer una representación gráfica aproximada de dicha area.

selcs Sep 2012 Solución:



$-x^2 - 4x + 5 = 0$, tiene soluciones reales $x = -5, x = 1$, por tanto el área viene dada por las integrales:

$$S_1 = \int_{-2}^{1} (-x^2 - 4x + 5)dx = \left[-\frac{x^3}{3} - 2\,x^2 + 5\,x \right]_{-2}^{1} = 18$$

$$S_2 : \int_{1}^{3} (-x^2 - 4x + 5)dx = \left[-\frac{x^3}{3} - 2\,x^2 + 5\,x \right]_{1}^{3} = -\frac{44}{3}, \text{ luego}$$

$S_2 = \dfrac{44}{3}$

Por tanto el área total es $S = \dfrac{98}{3}$ u^2

- CUESTIÓN A4.

Según una encuesta de opinión, el 30 % de una determinada población aprueba la gestión del político A, mientras que el 70 % restante la desaprueba. En cambio, el político B es aprobado por la mitad y no por la otra mitad. Un 25 % de la población no aprueba a ninguno de los dos. Si se elige un individuo de la población al azar:

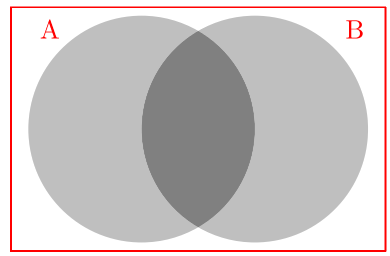
a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe a alguno de los dos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe a los dos políticos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no apruebe a alguno de los dos?

selcs Sep 2012 Solución:

Llamamos A al suceso "aprobar A"; $p(A) = 0'3$
Llamamos B al suceso "aprobar B"; $p(B) = 0'5$
Por tanto no aprobar ambos: $p(A^c \cap B^c) = 0'25$



a) Aprobar alguno $A \cup B$ es lo contrario de no aprobar ambos luego $p(A \cup B) = 1 - p(A^c \cap B^c) = 1 - 0'25 = 0'75$

b) Aprobar ambos $A \cap B$, lo obtenemos a partir de la unión: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$; $\quad 0'75 = 0'3 + 0'5 - p(A \cap B)$; $\quad p(A \cap B) = 0'05$

c) No aprobar alguno $A^c \cup B^c$ es lo contrario de que aprueben los dos $p(A^c \cup B^c) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0'05 = 0'95$

- CUESTIÓN A5.

Se supone que el número de horas semanales dedicadas al estudio por los estudiantes de una universidad sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica 6. Para estimar la media de horas semanales de estudio se quiere utilizar una muestra de tamaño n . Calcular el valor mínimo de n para que con un nivel de confianza del 99 %, el error en la estimación sea menor de 1 hora.

selcs Sep 2012 Solución:

Los datos son: $\sigma = 6$, error $= 1$, nivel de significación $= 0'01$.

Para el nivel de significación $= 0'01$ corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$

Entonces el error viene dado por:

$$\text{error} = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2'58 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} \leq 1$$

$$2'58 \cdot \frac{6}{1} \leq \sqrt{n}; \quad n \geq 239'6$$

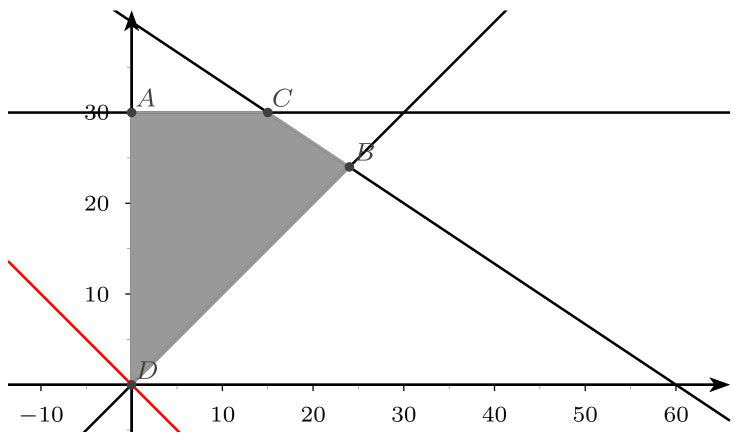
- CUESTIÓN B1.

Un ayuntamiento desea ajardinar dos tipos de parcelas, tipo A y tipo B, y dispone de 6000 euros para ello. El coste de la parcela A es de 100 euros y el de la B de 150 euros. Se considera conveniente ajardinar al menos tantas parcelas de tipo B como las del tipo A y, en todo caso, no ajardinar más de 30 parcelas de tipo B. ¿Cuántas parcelas de cada tipo tendrá que ajardinar para maximizar el número total de parcelas ajardinadas?, ¿agotará el presupuesto disponible?

selcs Sep 2012 Solución:

Sean:
$x =$ número de parcelas A
$y =$ número de parcelas B
Total de parcelas: $f(x, y) = x + y$

$$\left.\begin{array}{l} 100x + 150y \leq 6000 \\ x \leq y \\ y \leq 30 \end{array}\right\}$$



Representamos:

$100x + 150y = 6000$

x	0	60
y	40	0

$x = y$

x	0	30
y	0	30

Ahora la función igualada a 0:

$f(xy) = x + y = 0$

x	0	-30
y	0	30

Para maximizar el coste tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ que pasa por el punto B que sería la más lejana: sustituyamos los valores correspondientes a ese punto:

$B(24, 24)$; $\quad f(24, 24) = 24 + 24 = 48$ parcelas, es el mayor número de parcelas.

El coste sería $100 \cdot 24 + 150 \cdot 24 = 6000$ € ., que sí agota el presupuesto disponible.

- CUESTIÓN B2.

Una empresa estima que el beneficio que obtiene por cada unidad de producto que vende depende del precio de venta según la función: $B(x) = -3x^2+12x-9$, siendo $B(x)$ el beneficio y x el precio por unidad de producto, ambos expresados en euros.

a) ¿Entre que precios la función $B(x)$ es creciente?

b) ¿En que precio se alcanza el beneficio máximo?

c) ¿En que precio el beneficio es 3?

selcs Sep 2012 Solución:

a) Derivamos: $S'(x) = -6x + 12$

Anulamos la derivada: $-6x + 12 = 0; \quad x = 2$

x		2	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$
		MÁXIMO	

Será creciente entre 0 y 2.

b) El beneficio máximo corresponderá con $x = 2$

c) $B(x) = -3x^2 + 12x - 9 = 3; x = 2$, precisamente donde alcanza el máximo, en $x = 2$

- CUESTIÓN B3.

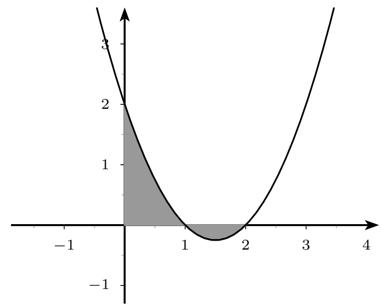
Calcular el área comprendida entre la parabola de ecuación $y = x^2 - 3x + 2$, el eje OX, la recta x $x = 0$ y la recta $x = 2$, y hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Sep 2012 Solución:

$x^2 - 3x + 2 = 0$, tiene soluciones reales $x = 1, x = 2$, por tanto el área viene dada por las integrales:

$$S_1 = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{5}{6}$$

$$S_2 : \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^2 = -\frac{1}{6}, \text{ luego } S_2 = \frac{1}{6}$$



Por tanto el área total es $S = \frac{6}{6} = 1$ u^2

- CUESTIÓN B4.

El 60 % de los dependientes de un centro comercial tienen 35 años o más, y de ellos el 75 % tienen contrato indefinido. Por otra parte, de los dependientes con menos de 35 años el 30 % tienen contrato indefinido.

a) Seleccionado un dependiente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga contrato indefinido?

b) Elegido al azar un dependiente que tiene contrato indefinido, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 35 años?

selcs Sep 2012 Solución:

Llamamos I al suceso "tener contrato indefinido".

Llamamos A_1 al suceso "tener más de 35 años o más "; $p(A_1) = 0'6; \quad p(I/A_1) = 0'75$

Llamamos A_2 al suceso "tener menos de 35 años"; $p(A_2) = 0'4; \quad p(P/A) = 0'30$

$\{A_1, A_2\}$ forman sistema completo de sucesos.

a) Teorema de la probabilidad total

$p(I^c) = p(I^c/A_1) \cdot p(A_1) + p(I^c/A_2) \cdot p(A_2) = 0'25 \cdot 0'6 + 0'7 \cdot 0'4 = 0'43$

b) Teorema de Bayes

$$p(A_2/I) = \frac{p(I/A_2) \cdot p(A_2)}{p(I/A_1) \cdot p(A_1) + p(I/A_2) \cdot p(A_2)} = \frac{0'3 \cdot 0'4}{0'75 \cdot 0'6 + 0'3 \cdot 0'4} = \frac{0'12}{0'57} = 0'2105$$

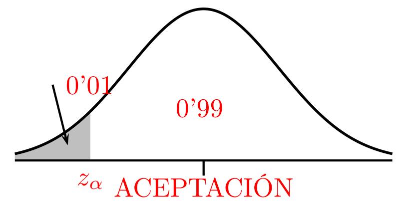
- CUESTIÓN B5.

Se sabe que en una población el nivel de colesterol en la sangre se distribuye normalmente con una media de 160 u. y una desviación típica de 20 u. Si una muestra de 120 individuos de esa población que siguen una determinada dieta, supuestamente adecuada para bajar el nivel de colesterol, tiene una media de 158 u. ¿Se puede afirmar que el nivel medio de colesterol de los que siguen la dieta es menor que el nivel medio de la población en general, para un nivel de significación de 0,01?

selcs Sep 2012 Solución:

Como es para disminuir el colesterol, el test adecuado sería el unilateral izquierdo;
Contrastamos $H_0 : \mu = 160$ frente a $H_1 : \mu < 160$,
En test unilateral el nivel significación $\alpha = 0'01$ corresponde con $z_\alpha = 2'33$.

El extremo de la región de aceptación es $\mu - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - 2'33 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 160 - 2'33 \dfrac{20}{\sqrt{120}} = 155'74$.
que da el intervalo $(155'74, \infty)$.
Como $\bar{x} = 158$ queda dentro del intervalo, se acepta la hipótesis nula de que la media del nivel de colesterol siga igual $\mu = 160$, cabe pensar que la dieta no ha sido efectiva.



10.2. Junio 2012

- CUESTIÓN A1.

  María y Luis han realizado un desplazamiento en coche que ha durado 13 horas y durante el cual, un tiempo ha conducido María, otro ha conducido Luis y el resto han descansado. Luis ha conducido 2 horas más de las que han descansado, y el total de horas de descanso junto con las de conducción de Luis es 1 hora menos que las que ha conducido María. Encontrar el número de horas que ha conducido cada uno y las que han descansado.

  selcs Jun 2012 Solución:

  Sea:

  x tiempo que conduce María

  y tiempo que conduce Luis

  z tiempo que descansan

  $\begin{cases} x+y+z=13 \\ y=z+2 \\ z+y=x-1 \end{cases}$ reordenado: $\begin{cases} x+y+z=13 \\ y-z=2 \\ x-y-z=1 \end{cases}$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} 3^a - 1^a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -12 \end{pmatrix} 3^a + 2^a \cdot 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

  queda $\begin{cases} x+y+z=13 \\ y-z=2 \\ -4z=-8 \end{cases}$ sustituyendo hacia arriba resulta:

  $x = 7, y = 4, z = 2$

- CUESTIÓN A2.

  Dada la función

  $$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x-1 & \text{si} \quad -1 \le x < 2 \\ ax^2 - 6ax + 5 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad en $x = -1$.

b) Hallar a para que la función sea continua en $x = 2$.

c) Para $a = 1$ hacer una representación gráfica de la función.

selcs Jun 2012 Solución: a) Estudiamos los límites laterales en $x = -1$:

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (3x+1) = -2$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x-1) = -2$

además $f(-1) = -2$

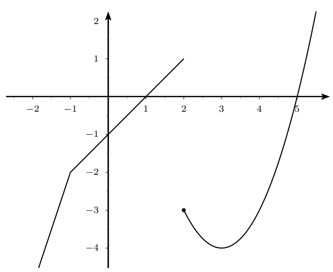
Por tanto la función es continua en $x = -1$.

b) Estudiamos los límites laterales en $x = 2$:

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x-1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (ax^2 - 6ax + 5) = 4a - 12a + 5 = -8a + 5$

Para que sea continua han de coincidir por tanto $-8a + 5 = 1, \quad a = \dfrac{1}{2}$

c) 

- CUESTIÓN A3. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

  a) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2}{x - 1}$

  b) $g(x) = (1 - x)^2 e^x$

  c) $h(x) = \ln(2x^2 + 2)$

  selcs Jun 2012 Solución:

  a) $f'(x) = \dfrac{4x^3 - 5x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

  b) $g'(x) = e^x(x^2 - 1)$

  c) $h'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

- CUESTIÓN A4.

  La probabilidad de que cuando un autobús llegue a un determinado semáforo lo encuentre en rojo es $0,2$. Si pasa tres veces a lo largo de un día por el semáforo, calcular la probabilidad de que:

  a) Las tres veces lo encuentre en rojo.

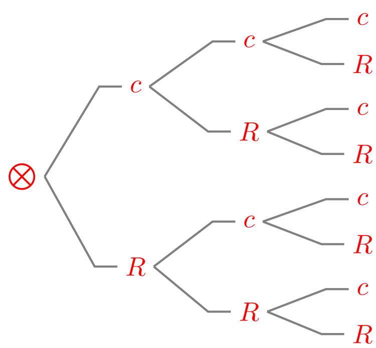
b) Lo encuentre en rojo solo la segunda vez.

c) Esté en rojo dos de las veces.

d) Lo encuentre en rojo al menos una vez.

selcs Jun 2012 Solución:

Sea R encontrarlo en rojo:



a) $p($ tres en rojo$) = 0'2^3 = 0'008$

b) $p($ solo segunda en rojo$) = 0'8 \cdot 0'2 \cdot 0,8 = 0'128$

c) $p($ dos veces en rojo$) = 0'2{\cdot}0'2{\cdot}0'8 + 0'2{\cdot}0'8{\cdot}0'2 + 0'8{\cdot}0'2{\cdot}0'2 = 0'096$

d) $p($ al menos una vez rojo$) = 1 - p($ ninguna en rojo$) = 1 - 0'8^3 = 0'488$

- CUESTIÓN A5.

La puntuación de un test psicotécnico para una determinada población sigue una Normal con una desviación típica conocida σ. Para hallar un intervalo de confianza para la media de la población se ha tomado una muestra aleatoria simple de 100 individuos, obteniéndose una puntuación media de 25 puntos. Si el intervalo de confianza con un nivel de significación 0'05 construido a partir de los datos anteriores es $(24'02, 25'98)$, hallar el valor de σ.

selcs Jun 2012 Solución:

El intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{x}$ es el centro del intervalo, por tanto en nuestro caso

$\bar{x}\dfrac{24'02 + 25'98}{2} = 25$

Para el nivel de significación 0'05, corresponde $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

Sustituyendo en el extremos superior: $\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 25'98$

$$25 + 1'96 \frac{\sigma}{\sqrt{100}} = 25'98$$

$$25 + 1'96 \frac{\sigma}{10} = 25'98; \quad 1'96 \frac{\sigma}{10} = 0'98; \quad \sigma = \frac{9'8}{1'96} = 5$$

- CUESTIÓN B1.

Sea el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \geq 2 \\ 2x + y \leq 6 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{array}\right\}$$

a) Representar gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Considerar la función $f(xy) = 3x + y$. Calcular, si existen, los puntos que dan el valor mínimo de la función en la región definida por el sistema.

c) Considerar la función $g(x, y) = 3x + 3y$. Calcular, si existen, los puntos que dan el valor mínimo de la función en la región definida por el sistema.

selcs Jun 2012 Solución:

Representamos el sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{ll} x + y \geq 2 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array} \\ 2x + y \leq 6 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 3 \\ \hline y & 6 & 0 \end{array} \end{array}\right.$$

b) Ahora la función f igualada a 0:

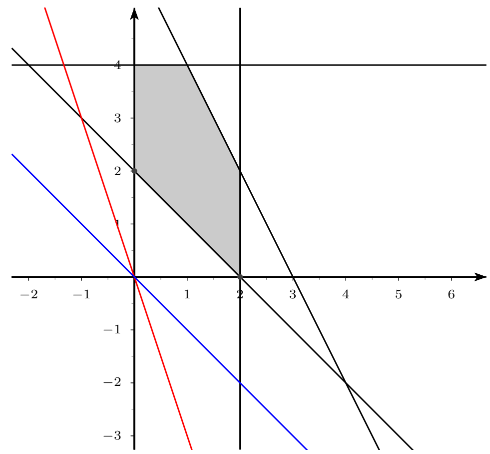
$f(x, y) = 3x + y = 0$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -1 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$

Vemos que el mínimo se da en el punto: $(0, 2)$

c) Ahora la función g igualada a 0:

$g(x, y) = 3x + 3y = 0$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -1 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$

Vemos que el mínimo se da en el segmento de extremos: $(0, 2), (2, 0)$



- CUESTIÓN B2.

Una panadería ha comprobado que el número de panes de un determinado tipo que vende semanalmente depende de su precio x en euros según la función $f(x) = 4500 - 1500x$, donde $f(x)$ es el número de panes vendidos cada semana y x el precio por unidad de pan. Calcular:

a) La función $l(x)$ que expresa los ingresos semanales por la venta de ese tipo de pan en función del precio por unidad de pan, x .

b) El precio al que hay que vender cada pan para que dichos ingresos semanales sean máximos. ¿A cuánto ascenderán los ingresos semanales máximos?.

selcs Jun 2012 Solución:

a) $l(x) = x \cdot (4500 - 1500x) = 4500x - 1500x^2$

b) Derivando e igualando a 0: $l'(x) = 4500 - 3000x = 0, \quad x = \dfrac{4500}{3000} = 1'5$ €

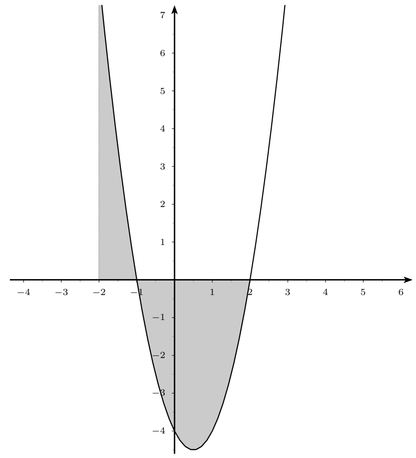
Los ingresos serán: $l(1'5) = 4500 \cdot 1'5 - 1500 \cdot 1'5^2 = 3375$ €

- CUESTIÓN B3.

Hallar el área delimitada por la parábola $y = 2x^2 - 2x - 4$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$, y hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Jun 2012 Solución:

$y = 2x^2 - 2x - 4$



$S_1 = \int_{-2}^{-1} (2x^2 - 2x - 4)dx = \left[\frac{2\,x^3}{3} - x^2 - 4\,x\right]_{-2}^{-1} = \frac{11}{3}$

$S_2 = \int_{-1}^{2} (2x^2 - 2x - 4)dx = \left[\frac{2\,x^3}{3} - x^2 - 4\,x\right]_{-1}^{2} = -9$

Área total $S = \frac{11}{3} + 9 = \frac{38}{3} = 12'66$ u^2

- CUESTIÓN B4.

  La probabilidad de que un alumno apruebe la asignatura A es $\frac{1}{2}$, la de que apruebe la asignatura B es $\frac{3}{8}$ y la de que no apruebe ninguna de las dos es $\frac{1}{4}$

  a) Calcular la probabilidad de que apruebe al menos una de las dos asignaturas.

  b) Calcular la probabilidad de que apruebe las dos asignaturas.

  c) Hallar la probabilidad de que apruebe la asignatura A, sabiendo que ha aprobado la B.

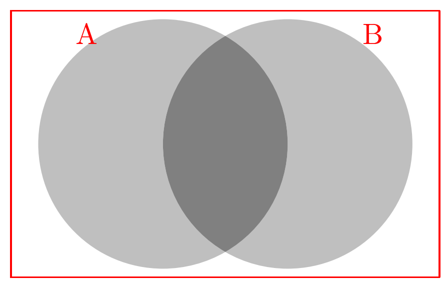
  selcs Jun 2012 Solución:

  a) $p(A \cup B) = p(\text{aprobar al menos una}) = 1 - p(\text{no aprobar ninguna}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

  b) $p(A \cup B) == p(A) + p(B) - p(A \cap B)$; $\quad \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - p(A \cap B)$

  despejando $p(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$

  c) $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$



- CUESTIÓN B5.

  Hace 10 años, el 65 % de los habitantes de cierta Comunidad Autónoma estaba en contra de la instalación de una central nuclear. Recientemente, se ha realizado una encuesta a 300 habitantes y 190 se mostraron contrarios a la instalación. Con estos datos y con un nivel de significación de 0,01 ¿se puede afirmar que la proporción de contrarios a la central sigue siendo la misma?

  selcs Jun 2012 Solución:

  $H_0 : p = 0'65$

  $H_1 : p \neq 0'65$

  Se elige un **ensayo bilateral**.

  Para el nivel de significación $0'01$, se corresponde con $z_\alpha = 2'58$.

  El intervalo de aceptación tiene como extremos:

$$p \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = p \pm 2'58\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0'65 \pm \sqrt{\frac{0'65 \cdot 0'35}{300}} = 0'65 \pm 0'0275 = \begin{cases} = 0'6225 \\ = 0'6775 \end{cases}$$

La proporción muestral $\frac{190}{300} = 0'6333$ queda dentro, se acepta la hipótesis de que la proporción de contrarios a la central no ha variado.

Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 11

Año 2011

11.1. Septiembre 2011

- CUESTIÓN A1. Tres familias han comprado naranjas, manzanas y melocotones. La familia A ha comprado 1 kg de cada fruta y ha pagado 10 euros, la familia B ha pagado 24 euros por 2kg de naranjas y 4 kg de melocotones, y la familia C se ha llevado 3 kg de manzanas y 3 kg de melocotones y ha pagado 24 euros. Calcular el precio de 1 kg de cada una de las frutas.

  selcs Sep 2011 Solución:

  Llamemos:

  x: precio del kg de naranjas

  y: precio del kg de manzanas

  z: precio del kg de melocotones

  $$\begin{cases} x+y+z=10 \\ 2x+4z=24 \\ 3y+3z=24 \end{cases}$$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 0 & 4 & 24 \\ 0 & 3 & 3 & 24 \end{pmatrix} \; 2^a + 1^a.(-2) \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 24 \end{pmatrix} 3^a{,}2+2^a{,}3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 60 \end{pmatrix}$$

  queda $\begin{cases} x+y+z=10 \\ -2y+2z=4 \\ 12z=60 \end{cases}$ sustituyendo hacia arriba resulta: $z=5, y=3, x=2$

- CUESTIÓN A2. Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 2$ calcular:

  a) El dominio de definición.

  b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Los máximos y los mínimos.

selcs Sep 2011 Solución:

a) El dominio por ser un polinomio es todo R.

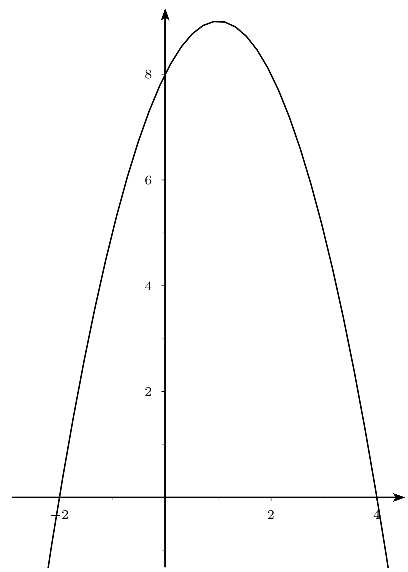
b) Derivando $f'(x) = x^2 - 4x - 5$ que se anula para $x = 5, x = -1$

x		-1		5	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

c) Observamos que hay un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 5$

- CUESTIÓN A3. Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = -x^2 + 2x + 8$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Sep 2011 Solución:



Hallamos los puntos de corte con el eje de abcisas $-x^2+2x+8=0$, resulta: $x = -2, x = 4$
El área que encierra la parábola con el eje OX viene dada por:
$S = \int_{-2}^{4} (-x^2 + 2x + 8)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 8\,x \right]_{-2}^{4} = -\frac{4^3}{3} + 4^2 + 8 \cdot 4 - (\frac{-2^3}{3} + (-2)^2 + 8 \cdot (-2)) = 36 \text{ u}^2$

- CUESTIÓN A4. En un supermercado se juntan tres partidas con el mismo número de latas de conserva procedentes de tres almacenes A, B y C. Se sabe que caducan en 2012 el 10 % de las latas del almacén A, el 8 % del B y el 12 % del C.

a) Calcular la probabilidad de que una lata elegida al azar caduque en 2012.

b) Se ha elegido una lata aleatoriamente y caduca en 2012, ¿cuál es la probabilidad de que proceda del almacén C?

selcs Sep 2011 Solución:

a) Sea D el suceso caducar en 2012

La tercera parte de los botes proviene de A, caducan el 10 %
La tercera parte de los botes proviene de B, caducan el 8 %$\{A, B, C\}$ forman sistema completo de sucesos.
La tercera parte de los botes proviene de C, caducan el 12 %
Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$$p(D) = p(A) \cdot p(D/A) + p(B) \cdot p(D/B) + p(C) \cdot p(D/C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{100} = \frac{1}{3} \cdot \frac{30}{100} = \frac{1}{10}$$

b) Por el teorema de Bayes:

$$p(C/D) = \frac{p(D/C)\cdot p(C)}{p(A)\cdot p(D/A) + p(B)\cdot p(D/B) + p(C)\cdot p(D/C)} = \frac{\frac{12}{100}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{10}} = \frac{4}{10}$$

- CUESTIÓN A5. Se sabe que el ingreso anual por hogar en España es una variable normal de media 29400 euros y desviación típica de 17400 euros. Se extrae una muestra aleatoria simple de 400 hogares de la Comunidad de Murcia obteniéndose un ingreso anual medio por hogar de 26600 euros. Suponiendo que el ingreso anual por hogar en la Comunidad de Murcia es una variable normal con la misma desviación típica, decidir con un nivel de significación del 5 % si existe una diferencia significativa entre el ingreso anual medio por hogar en España y el ingreso anual medio por hogar en la Comunidad de Murcia.

selcs Sep 2011 Solución:

Contrastamos $H_0 : \mu = 29400$ frente a $H_1 : \mu \neq 29400$,

La desviación típica es $\sigma = 17400$

El nivel de significación del 5 %, $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 29400 \pm 1'96\frac{17400}{\sqrt{400}} = 29400 \pm 1705{,}2 = \begin{cases} 27694'8 \\ 31105'2 \end{cases}$

que da el intervalo $(27694'8, 31105'2)$.

Como $\bar{x} = 26600$ € queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 29400$ años., cabe pensar que hay una diferencia significativa entre el ingreso anual medio por hogar en España y el ingreso anual medio por hogar en la Comunidad de Murcia.

- CUESTIÓN B1. Un veterinario desea dar a uno de sus animales una dieta que contenga por lo menos 40g de un nutriente A, 60g de un nutriente B y 230g del nutriente C cada día. Existen en el mercado dos productos, P 1 y P 2 que en cada bote contienen los siguientes gramos de esos elementos nutritivos:

	Nutriente A	Nutriente B	Nutriente C
P_1	40	10	60
P_2	10	60	100

Si el precio de un bote del producto P 1 es de 10 euros y el de un bote del producto P 2 es de 16 euros, determinar:

a) ¿Qué cantidad de botes de P 1 y de P 2 debe utilizar para obtener la dieta deseada con el mínimo precio?

b) ¿Qué cantidad de cada elemento nutritivo le dará si decide gastar lo menos posible?

selcs Sep 2011 Solución:

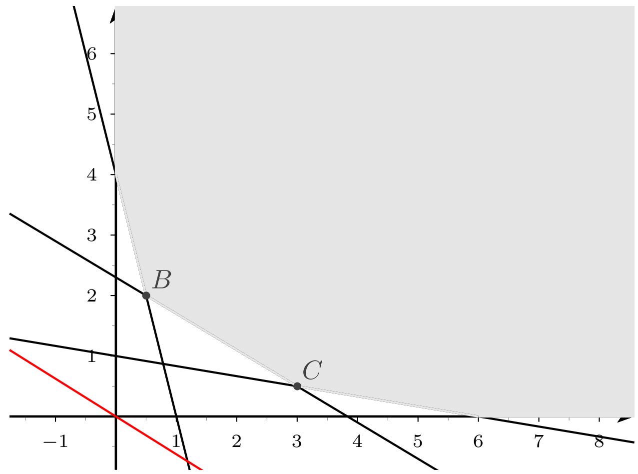
$x =$ número de botes del producto P_1
$y =$ número de botes del producto P_2

$$\begin{cases} 40x + 10y \geq 40 \\ 10x + 60y \geq 60 \\ 60x + 100y \geq 230 \end{cases}$$

Coste: $f(x, y) = 10x + 16y$

Representamos:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 40x + 10y \geq 40 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 4 & 0 \end{array} \\ 10x + 60y \geq 60 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 6 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array} \\ 60x + 100y \geq 230 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 3'8 \\ \hline y & 2'3 & 0 \end{array} \end{array} \right.$$



Ahora la función igualada a 0:

$$f(x, y) = 10x + 16y = 0 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -1'6 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$$

Para minimizar hallamos y probamos los puntos B y C

$$\begin{cases} 40x + 10y = 40 \\ 60x + 100y = 230 \end{cases} \quad B = (0'5, 2) \quad f(0'5, 2) = 10 \cdot 0'5 + 16 \cdot 2 = 37$$

$$\begin{cases} x + 6y = 6 \\ 6x + 10y = 23 \end{cases} \quad C = (3, 0'5) \quad f(3, 0'5) = 10 \cdot 3 + 16 \cdot 0'5 = 38$$

a) Por tanto para minimizar el coste debe mezclar medio bote de P_1con 2 botes de P_2.

b) Nutriente A: $0'5 \cdot 40 + 2 \cdot 10 = 40$ gr

Nutriente B: $0'5 \cdot 10 + 2 \cdot 60 = 125$ gr

Nutriente C: $0'5 \cdot 60 + 2 \cdot 100 = 230$ gr

- CUESTIÓN B2. Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{3x^2 + 4}{x^2 - 3x + 2}$ calcular:

  a) El dominio de definición.

  b) Las asíntotas.

  selcs Sep 2011 Solución:

  a) Como es una función racional el dominio serán todos los números reales excepto los que anulen el denominador: $x^2 - 3x + 2 = 0$, $\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$, Dominio$(f) = R - \{1, 2\}$

  b) Asíntotas verticales, la función se irá a infinito en los puntos en que se anule el denominador:

  Asíntotas verticales

  - $x = 1$

    $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{3x^2 + 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{3x^2 + 4}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{7}{0^- \cdot (-1)} = \infty$$

    $$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{3x^2 + 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{3x^2 + 4}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{7}{0^+ \cdot (-1)} = -\infty$$

  - $x = 2$

    $$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{3x^2 + 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{3x^2 + 4}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{16}{1 \cdot 0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{3x^2+4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3x^2+4}{(x-1)(x-2)} = \frac{7}{1\cdot 0^+} = \infty$$

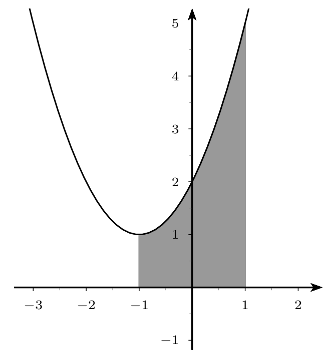
Asíntota horizontal $y = n$: $\quad n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4}{x^2-3x+2} = 3; \quad y = 3$

- CUESTIÓN B3. Calcular el área comprendida entre la curva $y = x^2 + 2x + 2$, el eje $0X$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Sep 2011 Solución:

$x^2 + 2x + 2 = 0$, no tiene soluciones reales, por tanto la parábola está siempre por encima del eje de abcisas, el área viene dada directamente por la integral:

$S = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2+2x+2)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right]_{-1}^{1} = \frac{14}{3}$ u^2



- CUESTIÓN B4. En el desempate de la final del Mundial, cinco futbolistas, A, B, C, D y E lanzan un penalti cada uno. Las probabilidades de marcar de cada uno de ellos son $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$, respectivamente. Calcular:

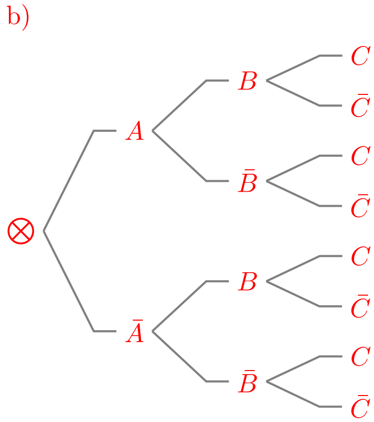
  a) La probabilidad de que todos marquen.

  b) La probabilidad de que en los tres primeros lanzamientos, los de los jugadores A, B y C, al menos uno de ellos marque.

selcs Sep 2011 Solución:

a) Es la intersección de todos y como son independientes la probabilidad de que marquen todos es el producto:
$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{15}$

b)



Que acierte al menos uno es lo contrario de fallar los tres:

$p(\text{fallar los tres}) = p(\bar{A})\cdot p(\bar{B})\cdot p(\bar{C}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

La probabilidad de que acierte al menos uno de los tres es $\frac{23}{24}$

- CUESTIÓN B5. Una muestra aleatoria de 150 viviendas de una población tiene un precio medio por metro cuadrado de 2950 euros. Suponiendo que el precio por metro cuadrado es una variable normal con desviación típica de 600 euros, ¿entre qué límites se encuentra el verdadero precio medio por metro cuadrado de todas las viviendas de la población con un nivel de confianza de 0,99?

selcs Sep 2011 Solución:

Los datos son: $\bar{x} = 2950, \sigma = 600, n = 150$.

Para el nivel de confianza del 99 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2950 \pm 2'58 \cdot \dfrac{600}{\sqrt{150}} = 2950 \pm 126'39 \left\{ \begin{array}{l} 2823'61 \\ 3076'39 \end{array} \right.$

El intervalo de confianza para precio medio por metro cuadrado de todas las viviendas es $(2823'61, 3076'39)$

11.2. Junio 2011

- CUESTIÓN A1.

  Discutir el siguiente sistema en función del parámetro λ y resolverlo para $\lambda = 1$:

  $$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \lambda x + 2y = \lambda \\ 2x + \lambda y + 4z = -1 \end{cases}$$

  selcs Jun 2011 Solución:

  a) Triangulemos la matriz asociada:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 2 & 0 & \lambda \\ 2 & \lambda & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2^a\text{fila} - 1^a \cdot \lambda \\ 3^a\text{fila} - 1^a \cdot 2 \end{array} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \{3^a\text{fila} + 2^a\}$$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -3 \end{pmatrix}$$

  queda el sistema: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ (2-\lambda)y - \lambda z = 0 \\ (2-\lambda)z = -3 \end{cases}$ y resulta de la última ecuación:

  $z = \dfrac{-3}{2-\lambda}$ que es válida para $\lambda \neq 2$ y sustituyendo en la anterior da:

  $(2-\lambda)y = \lambda z = \lambda \dfrac{-3}{2-\lambda}$; $\quad y = \dfrac{-3\lambda}{(2-\lambda)^2} =$ que es válida para $\lambda \neq 2$

  y sustituyendo por fin en la primera:

  $x = 1 - y - z = 1 - \dfrac{-3\lambda}{(2-\lambda)^2} - \dfrac{-3}{2-\lambda}$ que es válida también para $\lambda \neq 2$

  Para $\lambda = 2$ después de la triangulación resultaría el sistema: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2z = 0 \\ 0z = -3 \end{cases}$ que muestra por la última ecuación que es incompatible.

  En conclusión:

  Para $\lambda \neq 2$ Sistema compatible determinado solución única.

  Para $\lambda = 2$ Sistema incompatible no tiene solución.

  La discusión es más simple si consideramos que puede ser un sistema tipo Cramer:

  Hacemos el determinante de la matriz de coeficientes:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & 4 \end{vmatrix} = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2$$

  Para $\lambda \neq 2$ no se anula el determinante de la matriz de coeficientes luego el sistema es tipo Cramer con solución única.

  Para $\lambda = 2$ sustituyendo queda el sistema que triangulando hemos visto que resulta incompatible.

  b) Para $\lambda = 1$ el sistema es:

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y=1 \\ 2x+y+4z=-1 \end{cases}$ Vamos a buscar la solución independientemente del primer apartado:

Triangulemos:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 2^a\text{fila} - 1^a \\ 3^a\text{fila} - 1^a \cdot 2 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \{3^a\text{fila} + 2^a\} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

El sistema queda: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y-z=0 \\ z=-3 \end{cases}$ La soluciones son $z=-3, y=-3, x=1+3+3=7$

- CUESTIÓN A2.

  Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{x^2}{x^2-x-6}$ calcular:

  a) El dominio de definición.

  b) Las asíntotas.

  selcs Jun 2011 Solución:

  a) Es una función racional, estará definida para todo x que no anule el denominador.

  $x^2-x-6=0$, tiene como soluciones $x=-2, x=3$

  Dominio $R - \{-2, 3\}$

  b) Asíntotas verticales: la función se irá a infinito cuando se anule solo el denominador:

  Estudiemos los límites laterales

  Para $x=-2$

  $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2}{x^2-x-6} = \dfrac{4}{0^+} = \infty$

  $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^2}{x^2-x-6} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty$

  Para $x=3$

  $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2}{x^2-x-6} = \dfrac{9}{0^-} = -\infty$

  $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2}{x^2-x-6} = \dfrac{9}{0^+} = \infty$

  Asíntota horizontal, $y=n:\quad n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, como es una racional sirve para los dos lados:

  $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2-x-6}$ Dividiendo numerador y denominador por x^2, resulta: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}} = 1$

  La asíntota horizontal es $y=1$

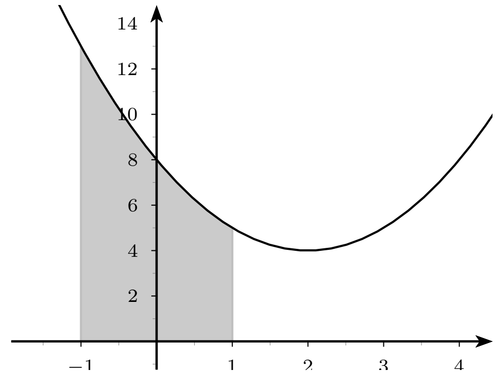
- CUESTIÓN A3.

  Calcular el area comprendida entre la curva $y = x^2-4x+8$, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=1$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

  selcs Jun 2011 Solución:

La parábola tiene el mínimo en $2x-4=0, \quad x=2, \quad f(2)=4$ y corta al eje OY en $y=8$

Área$=\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-4x+8)dx = \left[\frac{x^3}{3}-2x^2+8x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}-2+8-(\frac{-1}{3}-2-8)=\frac{2}{3}+16=\frac{50}{3}=16'6666$ u^2



- CUESTIÓN A4.

Juan y Andrés juegan en común una quiniela cada semana. Juan la rellena el 40 % de las semanas y el resto de las semanas la rellena Andrés. El porcentaje de veces que la quiniela de Juan tiene algún premio es el 5 % y el de la que rellena Andrés es el 8 %.

a) Calcular la probabilidad de que una semana, elegida al azar, la quiniela tenga algún premio.

b) Si cierta semana la quiniela ha obtenido algún premio, calcular la probabilidad de que la haya rellenado Juan.

selcs Jun 2011 Solución:

Llamamos P al suceso "tener premio".

Llamamos J al suceso "quiniela rellenada por Juan "; $p(J)=0'40; \quad p(P/J)=0'05$

Llamamos A al suceso "quiniela rellenada por Andrés "; $p(A)=0'60; \quad p(P/A)=0'08$

$\{J,A\}$ forman sistema completo de sucesos.

a) Por el teorema de la probabilidad total:

$p(P)=p(P/J)\cdot p(J)+p(P/A)\cdot p(A)=0'40\cdot 0'05+0'60\cdot 0'08=0'068$

b) Por el teorema de Bayes:

$$p(J/P)=\frac{p(P/J)\cdot p(J)}{p(P/J)\cdot p(J)+p(P/A)}=\frac{0'40\cdot 0'05}{0'40\cdot 0'05+0'60\cdot 0'08}=0'75=\frac{0'02}{0'068}=0'2941$$

- CUESTIÓN A5.

Se sabe que el tiempo diario que los jóvenes dedican a actividades con el ordenador sigue una distribución normal con desviación típica de 15 minutos. Para una muestra aleatoria simple de 225 jóvenes se ha obtenido un tiempo medio de 100 minutos al día. Dar un intervalo de confianza al 90 % para el tiempo diario medio dedicado al ordenador de todos los jóvenes.

selcs Jun 2011 Solución:

Los datos son: $\bar{x}=100, \sigma=15, n=225$.

Para el nivel de confianza del 90 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}}=1'65$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=100\pm 1'65\cdot\dfrac{15}{\sqrt{225}}=100\pm 1'65=\begin{cases}98'35\\101'65\end{cases}$

El intervalo de confianza para el tiempo diario medio dedicado al ordenador es $[98'35, 101'65]$

- CUESTIÓN B1.

Una cadena de supermercados compra naranjas a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden las naranjas a 1000 y 1500 euros por tonelada, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 2 toneladas y un máximo de 7 y para satisfacer su demanda, la cadena debe comprar en total como mínimo 6 toneladas. La cadena debe comprar como máximo al distribuidor A el doble de naranjas que al distribuidor B. ¿Qué cantidad de naranjas debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste? Determinar dicho coste mínimo.

selcs Jun 2011 Solución:

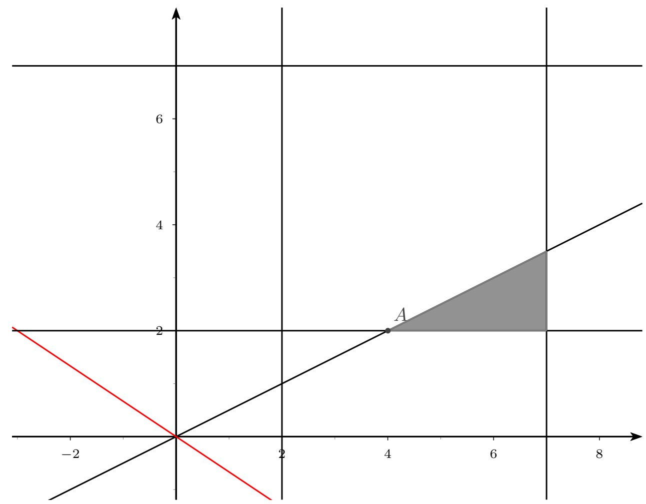
Sean:
$x =$ número de toneladas compradas a A
$y =$ número de toneladas compradas a B
Coste: $f(x, y) = x + 1'5y$ en miles de euros

$$\left.\begin{array}{l} 2 \leq x \leq 7 \\ 2 \leq y \leq 7 \\ x \leq 2y \end{array}\right\}$$

Representamos: $x \leq 2y$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 4 \\ \hline y & 0 & 2 \end{array}$

Ahora la función igualada a 0:

$f(xy) = x + 1'5y = 0$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -3 \\ \hline y & 0 & 2 \end{array}$



Para minimizar el coste tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ que pasa por el punto A que sería la más cercana: comprobemos los valores correspondientes a esos puntos:

$A(8, 4)$; $\quad f(4, 2) = 4 + 1'5 \cdot 2 = 7$

Por tanto el mínimo coste resulta de comprar 4 toneladas a A y 2 toneladas a B. El coste sería 7.000 € .

- CUESTIÓN B2.

Dada la curva de ecuación $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$ calcular:

a) El dominio de definición.

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Los máximos y los mínimos.

selcs Jun 2011 Solución:

a) Como es una función polinómica el dominio es todo R.

b) La derivada es $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$, estudiemos el crecimiento:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array} \right.$$

x		-1		3	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$	MÍNIMO	$\nearrow$

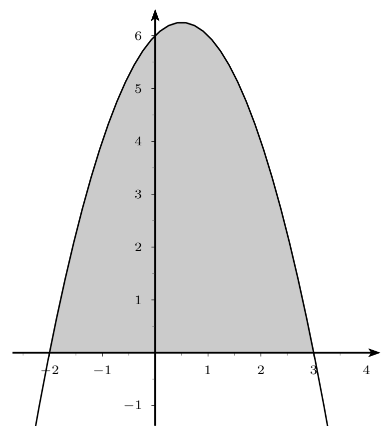
Sustituyendo: $f(-1) = 14$, $\quad f(3) = -18$.

La curva tiene un máximo en $(-1, 14)$ y un mínimo en $(3, -18)$

- CUESTIÓN B3.

  Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = -x^2 + x + 6$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

  selcs Jun 2011 Solución:

  Los punto de corte con OX de la parábola son $-x^2 + x + 6 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 3 \end{array} \right.$

  Área$= \displaystyle\int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^{3} = -9 + \frac{9}{2} + 18 - (\frac{8}{3} + 2 - 12) = \frac{9}{2} - \frac{8}{3} + 19 = \frac{125}{6} = 20'83333$ u^2

- CUESTIÓN B4.

  En una biblioteca hemos cogido un libro de la estantería de los libros de Historia, otro de la de Matemáticas y otro de la de Física. Si los devolvemos al azar a cada una de las estanterías, calcular la probabilidad de que al menos uno de los libros se coloque en la estantería que le corresponde.

  selcs Jun 2011 Solución:

  Se correspondería con las ordenaciones de las cifras 1,2,3 en las que algún número conserva el orden natural.

  Casos posibles $P_3 = 6$

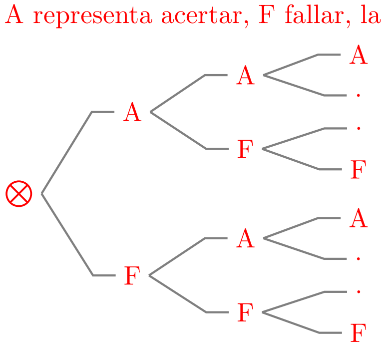
  Casos favorables: 123,132,321,213 en total 4.

  p(acertar al menos uno) $= 4/6 = 2/3$

  Otro planteamiento:

  Se correspondería con una urna con tres bolas numeradas de 1 a 3, se hacen tres extracciones sucesivas sin reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que coincida en número de la bola con el número de extracción?

  A representa acertar, F fallar, la tercera extracción no tiene alternativas:



La probabilidad de la última trayectoria, que fallen las tres, es: $\frac{2}{3} . \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

Por tanto la probabilidad de acertar al menos una vez es $p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

- CUESTIÓN B5.

  Se sabe que la edad de los profesores de una Comunidad Autónoma sigue una distribución normal con varianza de 5 años. Una muestra aleatoria de 200 profesores de dicha Comunidad tiene una media de 45 años. ¿Se puede afirmar con un nivel de significación del 0,05 que la edad media de todos los profesores de la Comunidad es de 46 años?

  selcs Jun 2011 Solución:

  Contrastamos $H_0 : \mu = 46$ frente a $H_1 : \mu \neq 46$,

  La desviación típica es $\sigma = \sqrt{5} = 2'23$

  El nivel de confianza del 95 %, $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 46 \pm 1'96 \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{200}} = 46 \pm 0{,}3099 = \begin{cases} 45'6901 \\ 46'3099 \end{cases}$

  que da el intervalo $(45'6901, 46'3099)$.

  Como $\bar{x} = 45$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 46$ años., cabe pensar que hay una diferencia significativa entre la media de las edades de la muestra y la media de las edades que se presuponía para los profesores de la Comunidad Autónoma .

Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 12

Año 2010

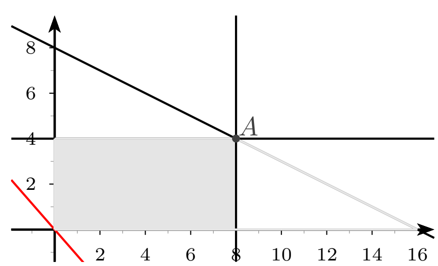
12.1. Septiembre 2010

- CUESTIÓN A.1 En una empresa se producen dos tipos de artículos A y B, en cuya elaboración intervienen tres departamentos: cortado, montaje y embalado. Cada departamento trabaja 8 horas al día y mientras el producto A requiere sólo una hora de montaje y media de embalado, el producto B requiere dos horas de cortado y una de embalado. El beneficio que se obtiene por cada unidad de A es de 40 euros y por cada unidad de B de 35 euros. ¿Cómo debe distribuirse la producción diaria para maximizar el beneficio?

  selcs Sep 2010 Solución:

  Sean:
  $x =$ número de artículos A
  $y =$ número de artículos B
  Ganancia: $f(x, y) = 40x + 35y$ euros

  $$\left.\begin{array}{ll} \text{cortado} & 2y \leq 8 \\ \text{montaje} & x \leq 8 \\ \text{embalado} & \frac{1}{2}x + y \leq 8 \end{array}\right\}$$

  Representamos: $\dfrac{1}{2}x + y \leq 8$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 16 \\ \hline y & 8 & 0 \end{array}$

  Ahora la función igualada a 0:

  $f(xy) = 40x + 35y = 0$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -7 \\ \hline y & 0 & 8 \end{array}$

  Para maximizar los ingresos tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ que pasa por el punto A que sería la más alejada: comprobemos los valores correspondientes a esos puntos:

  $A(8, 4)$; $\quad f(8, 4) = 40 \cdot 8 + 35 \cdot 4 = 460$

  Por tanto el máximo beneficio resulta de fabricar 8 artículos A y fabricar 4 artículos B.

- CUESTIÓN A.2 Dada la curva de ecuación: $y = \dfrac{3x^2 - 5x - 6}{x^2 - x - 2}$ calcular:

  a) Dominio

b) Asíntotas

selcs Sep 2010 Solución:

a) Dominio: Anulamos el denominador:

$x^2 - x - 2 = 0 \quad \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{array}$

Por tanto: Dominio $= R - \{-1, 2\}$

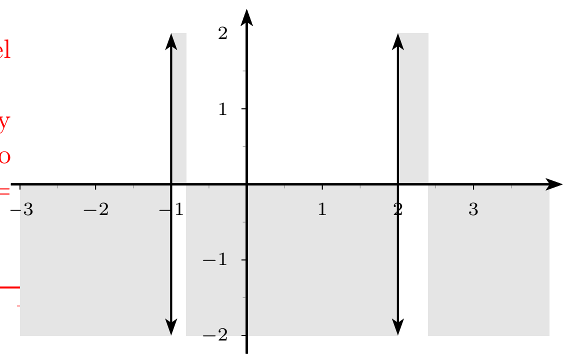
b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

- verticales valores de x en los que la función se va a infinito:
  Asíntotas verticales, valores de x que anulan al denominador: $x = -1, x = 2$. Pero hemos de comprobar que el numerador no tiene alguna raíz común: $3x^2 - 5x - 6 = 0 \quad \begin{array}{l} x_1 = \frac{5-\sqrt{97}}{6} = -0'808 \\ x_2 = \frac{5+\sqrt{97}}{6} = 2'47 \end{array}$

  Por tanto son asíntotas verticales $x = -1, x = 2$.
- Asíntota horizontal $y = n$: $\quad n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 5x - 6}{x^2 - x - 2} = 3$
  Luego la asíntota horizontal es $y = 3$

Con el regionamiento podemos saber el lado por el que la curva se acerca a la asíntota:
Para ello consideramos las raíces del numerador y denominador: resulta que delimitan región de cambio de signo de y : $\quad x = -1, x = -0'808, x = 2, x = 2'47$

x		-1		$-0'808$		2		$2'47$	
y	$+$		$-$		$+$		$-$		



- CUESTIÓN A.3 Calcular el área comprendida entre la curva $y = x^2 - 6x + 10$, el eje OX y las rectas $x = 3$ y $y = -2x + 10$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Sep 2010 Solución:

Buscamos los puntos de corte de las dos funciones:
$\left\{ \begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 10 \\ y = -2x + 10 \end{array} \right.$
$x^2 - 6x + 10 = -2x + 10; \quad x^2 - 4x = 0; \quad x = 0, x = 4$

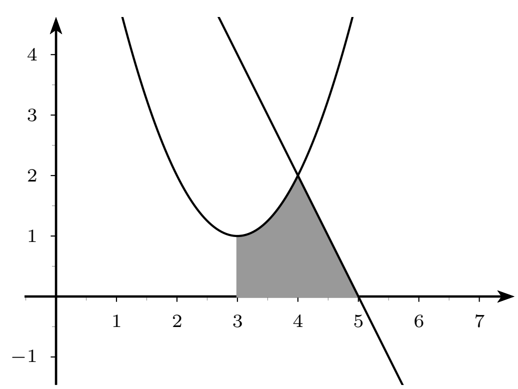
Área$= \displaystyle\int_3^4$ parábola $+$ Triángulo

$\displaystyle\int_3^4 (x^2 - 6x + 10) \quad dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 10x \right]_3^4 = \frac{4}{3} u^2$

La altura del triángulo es la ordenada del punto de corte correspondiente a $x = 4$, sustituyendo en la recta $y = -2 \cdot 4 + 10 = 2$

triángulo: $S = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{1 \cdot 2}{2} = 1$

Área $= \dfrac{4}{3} + 1 = \dfrac{7}{3}$ u^2



- CUESTIÓN A.4 Una fábrica de jabón recibe de tres proveedores A, B y C agua destilada en botellas en la proporción 80 %, 15 % y 5 % respectivamente. El control de calidad de la fábrica estima que debido a la mayor o menor impureza del agua deja pasar los tipos A, B y C con una probabilidad de 1, 0.4 y 0.03 respectivamente. ¿Qué probabilidad hay de que el control de calidad deje pasar una botella cualquiera?

  selcs Sep 2010 Solución:

  Teorema de la probabilidad total:

  Sea A el suceso botella que proviene de A: "botella de tipo A", $p(A) = 0'80$

  Sea B el suceso botella que proviene de B:"botella de tipo B", $p(B) = 0'15$

  Sea C el suceso botella que proviene de C:"botella de tipo C", $p(C) = 0'05$

  $\{A, B, C\}$ forman sistema completo de sucesos.

  Sea D el suceso "pasar el control de calidad"

  $p(D) = p(D/A) \cdot p(A) + p(D/B) \cdot p(B) + (D/C) \cdot p(C) = 1 \cdot 0'80 + 0'4 \cdot 0'15 + 0'03 \cdot 0'05 = 0'8615$

- CUESTIÓN A.5 Se sabe que el precio de los libros de bachiller es una variable aleatoria normal con media 38.2 euros y desviación típica de 5.25 euros. Una muestra aleatoria simple de 16 libros de Química de distintas editoriales tiene un precio medio de 42.3 euros. Se quiere decidir si existe diferencia significativa entre la media del precio de los libros de Química y la media del precio de los libros de bachiller en general con un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$.

  selcs Sep 2010 Solución:

  Contrastamos $H_0 : \mu = 38'2$ frente a $H_1 : \mu \neq 38'2$,

  La desviación típica es $\sigma = 5'25$

  El nivel de significación $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 38'2 \pm 1'96 \dfrac{5'25}{\sqrt{16}} = 38'2 \pm 0'3726 = \begin{cases} 40'7725 \\ 35'6275 \end{cases}$

  que da el intervalo $(35'6275, 40'7725)$.

  Como $\bar{x} = 42'3$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 38'2$ € , cabe pensar que hay una diferencia significativa entre el precio medio de los libros de Química y el de los libros de bachiller en general.

- CUESTIÓN B.1 Calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

  selcs Sep 2010 Solución:

  Ejercicio ya propuesto en junio 2007 cuestión 1.A

- CUESTIÓN B.2 ¿Cuál es el número que al sumarlo con 25 veces su inverso se obtiene un valor mínimo?

  selcs Sep 2010 Solución:

  Sea x el número

La función a minimizar es: $S(x) = x + 25 \cdot \dfrac{1}{x}$ mínimo

Derivamos: $S'(x) = 1 - \dfrac{25}{x^2} = \dfrac{x^2 - 25}{x^2}$

Anulamos la derivada: $\dfrac{x^2 - 25}{x^2} = 0; \quad x^2 - 25 = 0; \quad x = \pm 5$

La solución es $x = 5$ comprobemos que es mínimo viendo el crecimiento:

x		5	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$
		MÍNIMO	

- CUESTIÓN B.3 Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = 4x - x^2$ e $y = x$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

  selcs Sep 2010 Solución:

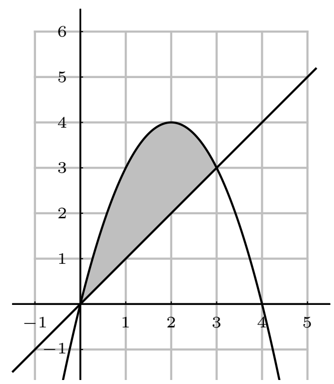
  Al ser una parábola para representar hallamos los puntos de corte con OX se hace $y = 0$ y resulta: $\quad 4x - x^2 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

  Los puntos de corte entre la recta y la parábola son:

  $4x - x^2 = 0 \quad \begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y = x \end{cases} \qquad 4x - x^2 = x; \quad 3x - x^2 = 0; \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

  $$S = \int_0^3 \text{parábola} - \text{recta} = \int_0^3 3x - x^2 dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{9}{2} = 4'5u^2$$

  El área total encerrada es por tanto $4'5u^2$

- CUESTIÓN B.4 Una comisión delegada de cierto ayuntamiento está formado por 10 concejales de los cuáles 5 pertenecen al partido A, 4 al B y 1 al C. Se eligen 3 personas al azar y sucesivamente de dicha comisión.

  a) Calcular la probabilidad de que las tres pertenezcan al partido A.

  b) Calcular la probabilidad de que las tres pertenezcan al partido C.

  selcs Sep 2010 Solución:

  Sucesivamente sin devolución: entonces las probabilidades varían en las sucesivas elecciones: La probabilidades de los sucesos que pide son:

  a) $p($ ”tres del partido A” $) = \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{12}$

  b) $p($ ”tres del partido C” $)$ es suceso imposible, luego su probabilidad es 0.

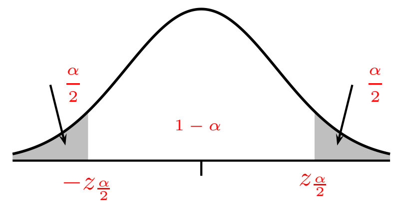
- CUESTIÓN B.5 Se está observando la asistencia anual a congresos de los profesionales de la medicina. Se sabe que la variable aleatoria es normal con desviación típica igual a 4 veces por año. Se toma una muestra de 70 profesionales de la medicina cuya asistencia media es de

3 veces por año. Dar un intervalo de confianza al 98 % para la media de la asistencia anual a congresos de todos los profesionales de medicina.

selcs Sep 2010 Solución:

Los datos son: $\bar{x} = 3, \sigma = 4, n = 70$.
El nivel de confianza es 98 %, como no es usual, tenemos que buscar en las tablas de la normal el valor crítico que corresponde. Para el 98 %, corresponde buscar en las tablas una probabilidad 0'9900, el valor que más se aproxima es 2'33: $p(X \leq x_0) = 0'9900, \quad x_0 = 2'33$
El valor crítico es por tanto $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'33$.

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3 \pm 2'33 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{70}} = 3 \pm 1'1139 \begin{cases} 1{,}8861 \\ 4'1139 \end{cases}$
El intervalo de confianza para la media de asistencias anuales a congresos es $(1{,}8861, 4'1139)$



12.2. Junio 2010

- CUESTIÓN A.1 En una encuesta realizada por una televisión local se ha detectado que un programa con 20 min. de variedades y un minuto de publicidad capta 30.000 espectadores, mientras que otro programa con 10 min. de variedades y un minuto de publicidad capta 10.000 espectadores. Para un determinado período, la dirección de la red decide dedicar como máximo 80 min. de variedades y 6 min. de publicidad. ¿Cuántas veces deberá aparecer cada programa con objeto de captar el máximo número de espectadores?

  selcs Jun 2010 Solución:

  Sean:
  x = número de veces que aparece el programa de 20 min. de variedades y un minuto de publicidad
  y = número de veces que aparece el programa de 10 min. de variedades y un minuto de publicidad
  Número de espectadores en miles: $f(x, y) = 30x+10y$

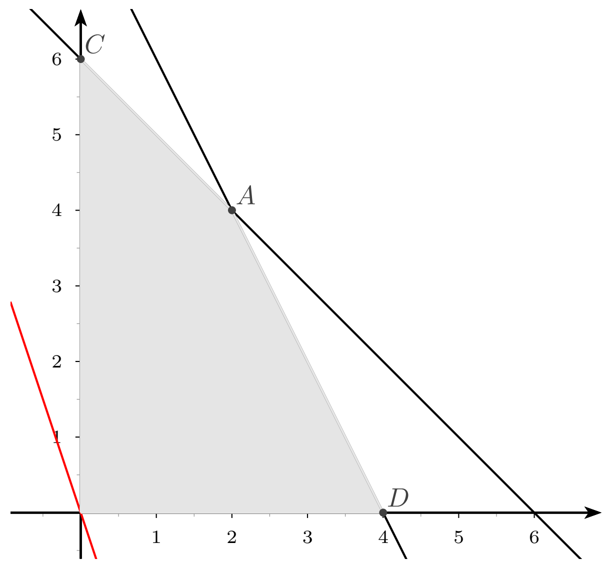
  $$\left\{\begin{array}{ll} \text{variedades} & 20x + 10y \leq 80 \\ \text{publicidad} & x + y \leq 6 \end{array}\right.$$

  Representamos: $20x + 10y \leq 80$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 4 \\ \hline y & 8 & 0 \end{array}$

  $x + y \leq 6$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 6 \\ \hline y & 6 & 0 \end{array}$

  Ahora la función igualada a 0:

  $f(xy) = 30x + 10y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -1 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$



  Para maximizar el número de espectadores tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ que pasa por el punto A o D que sería la más alejada: comprobemos los valores correspondientes a esos puntos:

  $A(2, 4)$; $f(2, 4) = 30 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = 100$

  $D(4, 0)$; $f(4, 0) = 30 \cdot 4 + 6 \cdot 00 = 120$

  Por tanto el máximo número de espectadores se produce emitiendo 4 veces el programa de 20 min. de variedades y un minuto de publicidad y ninguna el otro.

- CUESTIÓN A.2 Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{x-2}{x^2 + 2x - 3}$ calcular:

  a) Dominio

  b) Asíntotas

  selcs Jun 2010 Solución:

  a) Dominio: Anulamos el denominador:

  $$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

  Por tanto: Dominio $= R - \{-3, 1\}$

  b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

  - verticales valores de x en los que la función se va a infinito:
    Asíntotas verticales, valores de x que anulan al denominador: $x = -3, x = 1$

- Asíntota horizontal $y = n$: $n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x^2+2x-3} = 0$
  Luego la asíntota horizontal es $y = 0$

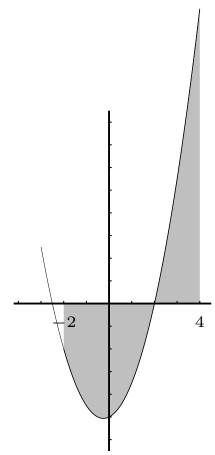
Con el regionamiento podemos saber el lado por el que la curva se acerca a la asíntota:

Para ello consideramos las raíces del numerador y denominador: resulta que delimitan región de cambio de signo de y : $x = -3, x = 1, x = 2$

x		-3		1		2	
y	$-$		$+$		$-$		$+$

- CUESTIÓN A.3 Calcular el área comprendida entre la curva $y = 3x^2 + 2x - 16$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 4$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

  selcs Jun 2010 Solución:

  Al ser una parábola para representar hallamos los puntos de corte con OX se hace $y = 0$ y resulta: $3x^2 + 2x - 16 = 0;$

  $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4\cdot 3\cdot 16}}{6} = \frac{-2\pm\sqrt{4+192}}{6} = \frac{-2\pm\sqrt{196}}{6} \begin{cases} x_1 = \frac{-2+14}{6} = 2 \\ x_2 = \frac{-2-14}{6} = -\frac{8}{3} \end{cases}$

  $S_1 : \int_{-2}^{2} 3x^2 + 2x - 16dx = \left[x^3 + x^2 - 16\,x\right]_{-2}^{2} = -48u^2$

  $S_2 = \int_{2}^{4} 3x^2 + 2x - 16dx = \left[x^3 + x^2 - 16\,x\right]_{2}^{4} = 36u^2$

  El área total encerrada es por tanto $84u^2$

- CUESTIÓN A.4 Una fábrica de coches tiene tres cadenas de producción A, B y C. La cadena A fabrica el 50 % del total de coches producidos, la B el 25 % y la C el resto. La probabilidad de que un coche resulte defectuoso es: 1/2 en la cadena A, 1/4 en la cadena B y 1/6 en la cadena C. Calcular la probabilidad de que un coche elegido al azar sea defectuoso.

  selcs Jun 2010 Solución:

  Llamamos D al suceso " ser defectuoso".

  Llamamos A al suceso "coche fabricado en la cadena A"; $p(A) = \frac{50}{100}$

  Llamamos B al suceso "coche fabricado en la cadena B" ; $p(A) = \frac{25}{100}$

  Llamamos C al suceso "coche fabricado en la cadena C"; $p(A) = \frac{25}{100}$

  $\{A, B, C\}$ forman sistema completo de sucesos.

  Por el Teorema de la probabilidad total

  $p(D) = p(D/A)\cdot p(A) + p(D/B)\cdot p(B) + +(D/C)\cdot p(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{50}{100} + \frac{1}{4}\cdot\frac{25}{100} + \frac{1}{6}\cdot\frac{25}{100} = \frac{17}{48} = 0'35416$

- CUESTIÓN A.5 A una muestra aleatoria de 100 alumnos de segundo de bachillerato se les hizo una prueba de madurez, obteniendo una media muestral de 205 puntos. Suponiendo que la puntuación obtenida en la prueba de madurez es una variable aleatoria normal, ¿entre qué límites se encuentra la madurez media de los alumnos de segundo de bachillerato con un nivel de confianza de 0.99 si la varianza de la población es de 576?

  selcs Jun 2010 Solución:

  Los datos son: $\bar{x} = 205, \sigma^2 = 576, n = 100$.

  Para el nivel de confianza del 99 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

  Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

  $$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 205 \pm 2'58 \cdot \frac{\sqrt{576}}{\sqrt{100}} = 205 \pm \frac{12}{5} = 205 + 6'192 \begin{cases} 198{,}808 \\ 211{,}192 \end{cases}$$

  El intervalo de confianza para la madurez media es $(202'6, 207'4)$

- CUESTIÓN B.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

  $$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + y + 2z = -\lambda \\ 2x + 3y = \lambda \end{cases}$$

  a) Resolverlo para $\lambda = 3$

  b) Estudiarlo para cualquier valor de λ.

  selcs Jun 2010 Solución:

  a)

  Para $\lambda = 3$ resulta $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + y + 2z = -3 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$

  que tiene como matriz asociada:

  $$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

  y triangulando por Gauss resulta:

  $$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 12 \end{array} \right)$$

  que sustituyendo hacia arriba da como soluciones: $z = -3, \quad y = -3, \quad x = 6$.

  b)

  Tiene como matriz asociada:

  $$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -\lambda \\ 2 & 3 & 0 & \lambda \end{array} \right)$$

  y triangulando por Gauss resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -\lambda \\ 2 & 3 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a - 1^a \\ 3^a + 1^a \times (-2) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 3 & -4 & \lambda \end{pmatrix} \; 3^a + 2^a \times (-3) \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & -4 & 4\lambda \end{pmatrix}$$

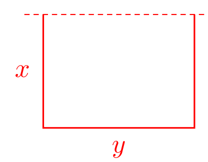
que sustituyendo hacia arriba da como soluciones:

$z = -\lambda, y = -\lambda, x = 2\lambda$ que sirve para cualquier valor de λ

- CUESTIÓN B.2 Un terrateniente posee unos terrenos al borde de un río. Allí desea cercar una parcela y montar una playa privada con todo tipo de servicios. Para ello dispone de 4000 metros de alambrada. ¿Cuál es la superficie máxima, de forma rectangular, que puede cercar y cuál la longitud de ribera apta para el baño?

selcs Jun 2010 Solución:

Superficie: $S = x \cdot y$ máxima
Longitud: $2x + y = 4000$. Despejamos y:
$y = 4000 - 2x$
Sustituyendo en S: $S(x) = x(4000 - 2x) = 4000x - 2x^2$ máxima



Ahora anulamos la derivada:

$S'(x) = 4000 - 4x = 0; \quad x = 1000$

Por las condiciones del enunciado la solución es 1000, hagamos no obstante el estudio del crecimiento en ese punto:

x		1000	
$S'(x)$	$+$		$-$
$S(x)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

la longitud de ribera apta para el baño es $y = 4000 - 2 \cdot 1000 = 2000$ m

la superficie máxima rectangular que puede cercar es $S = 1000 \cdot 2000 = 2000000$ m^2

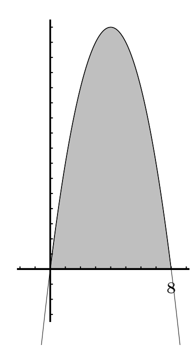
- CUESTIÓN B.3 Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = -x^2+8x$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Jun 2010 Solución:

Para representar hallamos los puntos de corte con OX se hace $y = 0$ y resulta:
$-x^2 + 8x = 0;$

$$x(-x+8) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

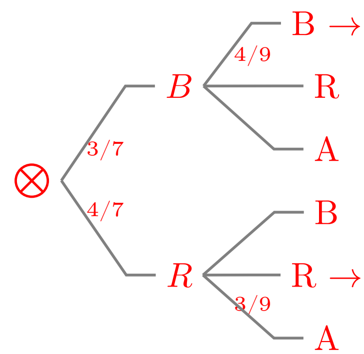
$$S = \int_0^8 -x^2 + 8x dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} \right]_0^8 = \frac{256}{3} u^2$$



- CUESTIÓN B.4 En un cajón de un armario, Juan guarda desordenadamente 3 pares de calcetines blancos y 4 pares de calcetines rojos; en otro cajón guarda 4 corbatas blancas, 3 rojas y 2 azules. Para vestirse saca al azar del primer cajón un par de calcetines y del segundo una corbata. Hallar la probabilidad de que los calcetines y la corbata sean del mismo color.

  selcs Jun 2010 Solución: COMPROBAR

  A partir del diagrama en árbol, sumando las probabilidades correspondientes a las dos ramas:
  $p(\text{ el mismo color}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{9} = \frac{8}{21} = 0'38095$



- CUESTIÓN B.5 Se sabe que las calificaciones de los alumnos de segundo de bachiller en matemáticas es una variable aleatoria normal de media 5.5 y varianza 1.69. Se extrae una muestra aleatoria de 81 alumnos que cursan el bachiller bilingüe obteniéndose una media muestral de 6.8 puntos en las calificaciones de dichos alumnos en la asignatura de matemáticas. Se quiere decidir si existe una diferencia significativa entre la media de las calificaciones en matemáticas de los alumnos del bachiller bilingüe y la media de las calificaciones en matemáticas de los alumnos de segundo de bachiller en general con un nivel de significación $\alpha = 0'01$

  selcs Jun 2010 Solución:

  Contrastamos $H_0 : \mu = 5'5$ frente a $H_1 : \mu \neq 5'5$,

  La desviación típica es $\sigma = \sqrt{1'69} = 1'3$

  El nivel de significación $\alpha = 0'01$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 2'58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5'5 \pm 2'58 \frac{1'3}{\sqrt{81}} = 5'5 \pm 0'3726 = \begin{cases} 5'8726 \\ 5'1274 \end{cases}$

  que da el intervalo $(5'127, 5'872)$.

  Como $\bar{x} = 6'8$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 5'5$ gr., cabe pensar que hay una diferencia significativa entre la media de las calificaciones en matemáticas de los alumnos del bachiller bilingüe y la media de las calificaciones en matemáticas de los alumnos de segundo de bachiller en general.

Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 13

Año 2009

13.1. Septiembre 2009

- CUESTIÓN 1.A. Un señor acertó cinco números en la lotería primitiva, dos de los cuales eran el 23 y el 30. Propuso a sus hijos que si averiguaban los otros tres, se podrían quedar con el premio. La suma del primero con el segundo excedía en dos unidades al tercero; el segundo menos el doble del primero era diez unidades menor que el tercero y la suma de los tres era 24. ¿Cuáles son los tres números que faltan?

  selcs Sept 2009 Solución:

  Sean de los tres números que faltan:

  x un número

  y otro número

  z el número restante

  las condiciones se pueden expresar:

  $$\left\{\begin{array}{l} x+y=z+2 \\ y-2x=z-10 \\ x+y+z=24 \end{array}\right. \qquad \text{reordenando} \left\{\begin{array}{l} x+y-z=2 \\ -2x+y-z=-10 \\ x+y+z=24 \end{array}\right.$$

  Tiene como matriz asociada:

  $$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & -10 \\ 1 & 1 & 1 & 24 \end{array}$$

  Que triangulando por Gauss resulta:

  $$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -22 \end{array}$$

  que sustituyendo hacia arriba da como soluciones: $z=11, \quad y=9, \quad x=4.$

  Estos son los tres números que faltan.

- CUESTIÓN 1.B. Una escuela prepara una excursión para cuatrocientos alumnos. La empresa de transportes dispone de ocho autocares de cuarenta plazas y diez de cincuenta plazas, pero sólo dispone de nueve conductores. El alquiler de un autocar grande es de ochenta euros y el de uno pequeño de sesenta euros.

  a) Calcular cuántos autocares de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela.

  b) ¿Cuántas plazas sobrarán?

  Identificar en el planteamiento las variables, las restricciones y la función a optimizar.

  selcs Sept 2009 Solución:

  $x =$ número de autobuses de 40 plazas
  $y =$ número de autobuses de 50 plazas
  Precio total: $f(x, y) = 60x + 80y$ € buscamos el mínimo

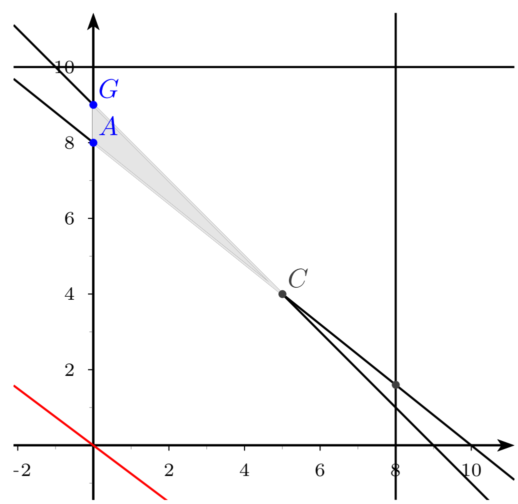
  $$\begin{cases} 40x + 50y \geq 400 \\ x \leq 8 \\ y \leq 10 \\ x + y \leq 9 \end{cases}$$

  Representamos:

  $$\begin{cases} 40x + 50y \geq 400 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 10 \\ \hline y & 8 & 0 \end{array} \\ x + y \leq 9 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 9 \\ \hline y & 9 & 0 \end{array} \end{cases}$$

  Ahora la función igualada a 0:

  $$f(xy) = 60x + 80y = 0 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -4 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$$

  Para minimizar el precio tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ que pasa por el punto $C(5, 4)$, o sea 5 autobuses de 40 plazas y 4 de 50 plazas, entonces el importe sería: $f(5, 4) = 60 \cdot 5 + 80 \cdot 4 = 620$ € .

  Con ello el total de plazas contratadas sería de : $5 \cdot 40 + 4 \cdot 50 = 400$, no sobra ninguna.

- CUESTIÓN 2.A. Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{3x^2}{x^2 + 1}$ determinar:

  a) Dominio

  b) Máximos y mínimos

  c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

  d) Asíntotas

  selcs Sept 2009 Solución:

  a) Dominio y regionamiento: El denominador no se anula nunca luego el dominio es R

  El numerador y el denominador son siempre positivos luego la función es siempre positiva.

  b) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

  con $OY : x = 0$, resulta $y = 0$

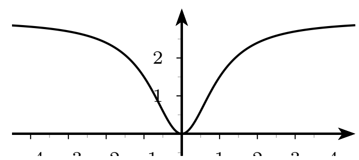
  con $OX : y = 0$, resulta el mismo

c) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales, no podemos anular el denominador, no hay.

Asíntota horizontal $y = n$: $n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2}{x^2+1} = 3$; $y = 3$



d) Extremos y crecimiento: $f'(x) = \dfrac{6x}{(x^2+1)^2}$ Se anula para $x = 0$

x		0	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$
		MÍNIMO	

- CUESTIÓN 2.B.

Dada la parábola de ecuación $y = x^2 - 8x + 12$ hallar el punto en el que la recta tangente es paralela al eje de abscisas.

selcs Sept 2009 Solución:

Que la recta tangente a la parábola sea paralela al eje de abcisas supone que su pendiente es cero, por tanto buscamos el punto de la parábola en que se anula su derivada:

$f'(x) = 2x - 8 = 0$; $x = 4$ la ordenada del punto es $f(4) = 16 - 32 + 12 = -4$

El punto buscado es $(4, -4)$

- CUESTIÓN 3.A.

Hallar dos números cuya suma sea 20, sabiendo que su producto es máximo. Razonar el método utilizado.

selcs Sept 2009 Solución:

Sean los números x, $20 - x$

El producto $f(x) = x \cdot (20 - x) = 20x - x^2$ ha de ser máximo.

Derivamos y anulamos la derivada: $f'(x) = 20 - 2x = 0$ Tiene de solución $x = 10$, comprobemos que es máximo con el crecimiento:

x		10	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$
		MÁXIMO	

- CUESTIÓN 3.B.

Calcular el área de la región del plano comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 3x^2$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Sept 2009 Solución:

Buscamos los puntos de corte de las dos funciones, $f: \quad y = 4 - x^2; \qquad g: \quad y = 3x^2$:

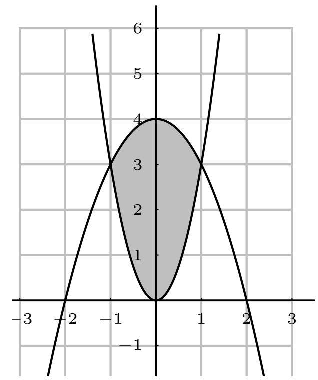
$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 3x^2 \end{cases}$$

$3x^2 = 4 - x^2; \quad 4x^2 = 4; \quad x = \pm 1$

Área $= 2 \cdot S_1$ $S_1 = \displaystyle\int_0^1$ f - g =

$$S_1 = \int_0^1 (4 - 4x^2) \quad dx = \left[4x - \frac{4x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

Área $= \frac{16}{3} u^2$

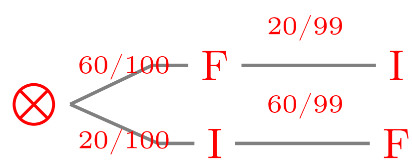


- CUESTIÓN 4.A.

A un congreso de científicos asisten cien congresistas, de ellos ochenta hablan francés y cuarenta hablan inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que dos congresistas elegidos al azar no puedan entenderse sin intérpretes?

selcs Sept 2009 Solución:

Como todos hablan algún idioma por tanto hay 20 que hablan los dos idiomas:
Llamamos I al suceso "saber sólo inglés" son 20 de los cien
Llamamos F al suceso "saber sólo francés" son 60 de los cien
Llamamos B al suceso "saber los dos idiomas" son 20 de los cien



Sumando las probabilidades de las dos ramas: $p(\text{ no entenderse }) = \dfrac{60}{100} . \dfrac{20}{99} + \dfrac{20}{100} . \dfrac{60}{99} = 0'24$

- CUESTIÓN 4.B.

En un I.E.S. se realizan dos competiciones deportivas: baloncesto y fútbol. El 20 % de los alumnos participan en la de baloncesto, de los cuáles el 40 % son de primero de bachillerato y el 30 % participan en la de fútbol, de los cuáles el 25 % son de primer curso de bachillerato. Ningún alumno puede participar en dos competiciones.

Elegido al azar un alumno, ¿cuál es la probabilidad de que sea de segundo de bachillerato?

selcs Sept 2009 Solución:

Teorema de la Probabilidad Total

Sea I ser de 1º de Bachiller, sea II ser de 2º de Bachiller.

Sea B participar en baloncesto, dicen que $p(B) = 0'2$ y F participar en fútbol, dicen que $p(F) = 0'3$.

Como $p(I/B) = 0'4$ en consecuencia: $p(II/B) = 0'6$

Como $p(I/F) = 0'25$ en consecuencia: $p(II/F) = 0'75$

Entonces por el teorema mencionado:

$p(II) = p(II/B) \cdot p(B) + p(II/F) \cdot p(F) = 0'6 \cdot 0'2 + 0'75 \cdot 0'3 = 0'27$

- CUESTIÓN 5.A.

  El promedio de las puntuaciones obtenidas en historia por un número elevado de alumnos es de 6,50 puntos. Un determinado curso se examinaron cincuenta alumnos obteniendo una puntuación promedio de 7,25 puntos. Suponiendo que la variable puntuación obtenida en historia es una normal con desviación típica igual a uno, ¿podemos afirmar con un nivel de significación de 0,05 que variaron las calificaciones?

  selcs Sept 2009 Solución:

  Test bilateral

  El nivel de significación $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6'5 \pm 1'96 \dfrac{1}{\sqrt{50}} = 6'5 \pm 0'277 = \begin{cases} 6'7771 \\ 6'2229 \end{cases}$

  que da el intervalo $(6'222, 6'777)$.

  Como $\bar{x} = 7'25$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 6'5$, hay motivo para pensar que han cambiado las calificaciones.

- CUESTIÓN 5.B.

  Una muestra aleatoria simple de veinticinco estudiantes responden a una prueba de inteligencia espacial, obteniendo una media de cien puntos. Se sabe que la variable inteligencia espacial de todos los alumnos es una variable normal con una desviación típica igual a diez, pero se desconoce la media. ¿Entre qué límites se hallará la verdadera inteligencia espacial media de todos los alumnos, con un nivel de confianza de 0,99?

  selcs Sept 2009 Solución:

  Los datos son: $\bar{x} = 100, \sigma = 10, n = 25$.

  Para el nivel de confianza del 99 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

  Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100 \pm 2'58 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{25}} = 100 \pm 5'16 \begin{cases} 105'16 \\ 94'84 \end{cases}$

  El intervalo de confianza para la media μ es $(94'84, 105'16)$

13.2. Junio 2009

- CUESTIÓN 1.A.

  Estudiar el siguiente sistema para los distintos valores de λ y resolverlo para el valor $\lambda = 1$

$$\begin{cases} x + y - z = \lambda \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

selcs Jun 2009 Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

Iniciamos Gauus triangulando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k & 0 \end{pmatrix} \{2^a - 1^a; 3^a + 1^a \times (-2)\} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & k \\ 0 & -2 & 3 & 1-k \\ 0 & -1 & k+2 & -2k \end{pmatrix} \{3^a \times (-2) + 2^a\} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1-k \\ 0 & 0 & -2k-1 & 1+3k \end{pmatrix}$$

una vez triangulada volvemos a sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - 3z = 1 - k \\ (-2k-1)z = 1 + 3k \end{cases} \text{ resulta despejando y sustituyendo de abajo hacia arriba}$$

$(-2k-1)z = 1 + 3k; \quad z = \dfrac{1+3k}{-2k-1}$ que solo no se puede efectuar si se anula el denominador, por tanto:

Si $k \neq \dfrac{-1}{2}$ el sistema tiene solución única, es compatible determinado

Si $k = \dfrac{-1}{2}$, el sistema no tiene solución, el sistema es incompatible.

Resolvemos para $k = 1$ $\quad \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2y - 3z = 0 \\ -3z = 4 \end{cases}$

Luego $z = \dfrac{-4}{3}$ sustituyendo de abajo hacia arriba y despejando

$y = \dfrac{3z}{2} = \dfrac{3\frac{-4}{3}}{2} = -2; \quad x = 1 + y - z = 1 - 2 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{5}{3}$

- CUESTIÓN 1.B.

  Un atleta debe tomar por lo menos 4 unidades de vitamina A, 6 unidades de vitamina B y 23 de vitamina C cada día. Existen en el mercado dos productos, P_1 y P_2, que en cada bote contienen las siguientes unidades de esas vitaminas:

	A	B	C
P_1	4	1	6
P_2	1	6	10

Si el precio de un bote del producto P_1 es de 100 euros y el de un bote del producto P_2 es de 160 euros, averiguar:

a) ¿Como deben mezclarse ambos productos para obtener la dieta deseada con el mínimo precio?

b) ¿Que cantidad tomara de cada vitamina si decide gastar lo menos posible?

selcs Jun 2009 Solución:

$x =$ número de botes del producto P_1

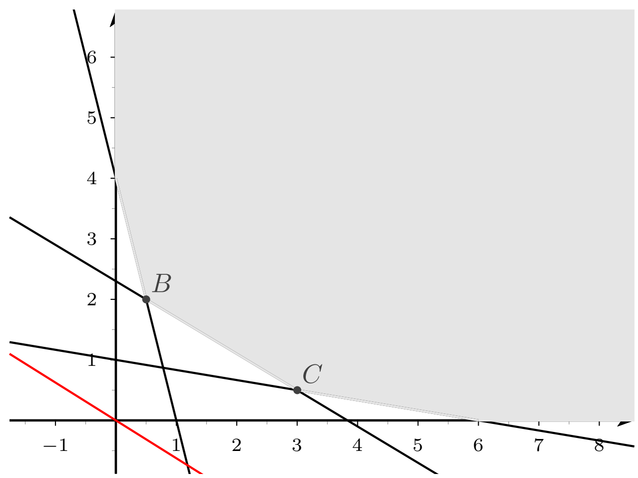
$y =$ número de botes del producto P_2

$$\begin{cases} 4x + y \geq 4 \\ x + 6y \geq 6 \\ 6x + 10y \geq 23 \end{cases}$$

Coste: $f(x, y) = 100x + 160y$

Representamos:

$$\begin{cases} 4x + y \geq 4 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 4 & 0 \end{array} \\ x + 6y \geq 6 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 6 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array} \\ 6x + 10y \geq 23 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 3'8 \\ \hline y & 2'3 & 0 \end{array} \end{cases}$$



Ahora la función igualada a 0:

$$f(xy) = 100x + 160y = 0 \qquad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -1'6 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$$

Para minimizar hallamos y probamos los puntos B y C

$$\begin{cases} 4x + y = 4 \\ 6x + 10y = 23 \end{cases} \quad B = (0'5, 2) \quad f(0'5, 2) = 100 \cdot 0'5 + 160 \cdot 2 = 370$$

$$\begin{cases} x + 6y = 6 \\ 6x + 10y = 23 \end{cases} \quad C = (3, 0'5) \quad f(3, 0'5) = 100 \cdot 3 + 160 \cdot 0'5 = 380$$

a) Por tanto para minimizar el coste debe mezclar medio bote de P_1con 2 botes de P_2.

b) Vitamina A: $0'5 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 4$ unidades

Vitamina B: $0'5 \cdot 1 + 2 \cdot 6 = 12'5$ unidades

Vitamina C: $0'5 \cdot 6 + 2 \cdot 10 = 23$ unidades

- CUESTIÓN 2.A.

La función $f(x) = x^3 + px^2 + q$ tiene un valor mínimo relativo igual a 3 en el punto de abscisa $x = 2$. Hallar los valores de los parámetros p y q .

selcs Jun 2009 Solución:

Que la función $f(x) = x^3 + px^2 + q$ tenga un mínimo en el punto $(2, 3)$ se desdobla en dos condiciones:

Pasa por el punto $(2, 3)$ luego $f(2) = 3$ por tanto $2^3 + p \cdot 2 + q = 3, \quad 8 + 4p + q = 3 \quad 4p + q = -5$

La derivada $f'(x) = 3x^2 + 2px$ se anula en $x = 2$, luego $f'(2) = 0$, $\quad 12 + 4p = 0$ despejando $p = \dfrac{-12}{4} = -3$

Sustituyendo en la ecuación anterior: $4(-3) + q = -5$, $\quad q = 7$

La función es: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$

- CUESTIÓN 2.B.

  Dada la curva $y = \dfrac{x+1}{x^2+x-2}$ calcular:

  a) El dominio.

  b) Las asíntotas.

  c) Hacer una representación gráfica de la misma.

  selcs Jun 2009 Solución:

  a) Dominio y regionamiento: $y = \dfrac{x+1}{x^2+x-2}$

  Anulamos el denominador:

  $x^2 + x - 2 = 0 \quad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{matrix}$

  Por tanto: Dominio $= R - \{1, -2\}$

  b) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

  con $OY : x = 0$, resulta $y = -\dfrac{1}{2}$

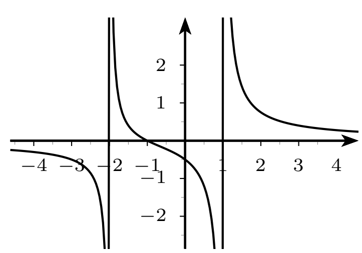
  con $OX : y = 0$, resulta $x + 1 = 0$, $\quad x = -1$

  c) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

  verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

  Asíntotas verticales, valores de x que anulan al denominador: $x = -1, x = 2$

  Asíntota horizontal $y = n$: $\quad n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x^2+x-2} = 0$; $\quad y = 0$



  d) Extremos y crecimiento: $f'(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{(x^2+x-2)^2}$

  Anulamos: $x^2+2x+3 = 0$ no tiene solución, luego la derivada es siempre positiva y por tanto la función es siempre creciente

- CUESTIÓN 3.A.

  Hallar las dimensiones de un campo rectangular de 3600 metros cuadrados de superficie para poderlo cercar con una valla de longitud minima.

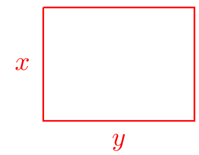
  selcs Jun 2009 Solución:

Longitud: $L = 2x + 2y$ mínima

Área: $x \cdot y = 3600$. Despejamos y:

$y = \dfrac{3600}{x}$

Sustituyendo en L: $L(x) = 2x + 2\dfrac{3600}{x}$ mínima



Ahora anulamos la derivada:

$$L'(x) = 2 - 2\frac{3600}{x^2} = \frac{2x^2 - 2 \cdot 3600}{x^2} = 0; \quad x^2 = 3600, \quad x = \pm 60$$

Por las condiciones del enunciado la solución es 60, hagamos no obstante el estudio del crecimiento en ese punto:

x		60	
$L'(x)$	$-$		$+$
$L(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
		MIN	

- CUESTIÓN 3.B.

Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ y la recta $y = x + 2$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

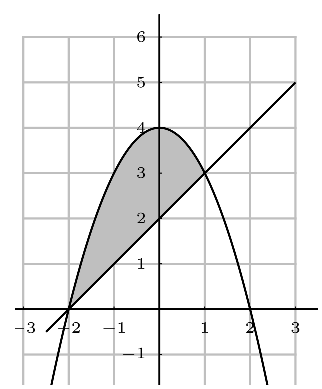
selcs Jun 2009 Solución:

Buscamos los puntos de corte de las dos funciones: $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$

$4 - x^2 = x + 2; \quad x^2 + x - 2 = 0; \quad x = 1, x = -2$

Área$= \displaystyle\int_{-2}^{1}$ parábola $-$recta $=$

$dx = \int_{-2}^{1}(-x^2 - x + 2) \quad dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}u^2$



- CUESTIÓN 4.A.

En un centro escolar los alumnos pueden optar por cursar como lengua extranjera ingles o francés. En un determinado curso el 90 % de los alumnos estudia inglés y el resto francés. El 30 % de los alumnos que estudian inglés son varones. De los que estudian francés, el 40 % son chicos. Elegido un alumno al azar, ¿cual es la probabilidad de que sea chica?

selcs Jun 2009 Solución:

Teorema de la Probabilidad Total

Sea I ser de Inglés,dicen que $p(I) = 0'9$, sea F ser de Francés, en consecuencia: $p(F) = 0'1$.

Sea V ser varón, y M ser mujer.

Como $p(V/I) = 0'3$ en consecuencia: $p(M/I) = 0'7$

Como $p(V/F) = 0'4$ en consecuencia: $p(M/F) = 0'6$

Entonces por el teorema mencionado:

$p(M) = p(M/I) \cdot p(I) + p(M/F) \cdot p(F) = 0'7 \cdot 0'9 + 0'6 \cdot 0'1 = 0'69$

- CUESTIÓN 4.B.

  Se estima que la probabilidad de que un jugador de balonmano marque un gol al lanzar un tiro de siete metros es del 75 %. Si en un partido le corresponde lanzar tres de estos tiros, calcular:

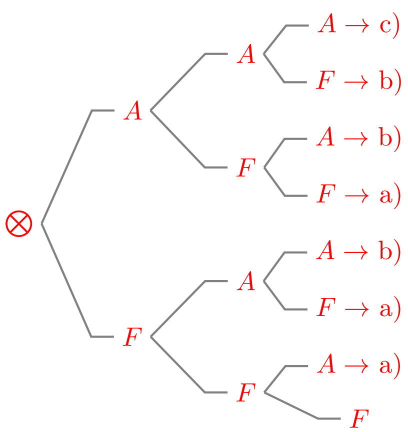
  a) la probabilidad de marcar un gol tras realizar los tres lanzamientos

  b) la probabilidad de marcar dos goles tras realizar los tres lanzamientos

  c) la probabilidad de marcar tres goles tras realizar los tres lanzamientos

  d) la probabilidad de marcar solo en el primer lanzamiento

  selcs Jun 2009 Solución:



a) Entendemos exactamente 1 acierto entre los tres lanzamientos: hay tres ramas que lo cumplen: $p($ un acierto $= 3 \cdot 0'75 \cdot 0'25^2 = 0'140625$

b) Entendemos exactamente 2 acierto entre los tres lanzamientos: hay tres ramas que lo cumplen: $p($ dos acierto $= 3 \cdot 0'75^2 \cdot 0'25 = 0'421875$

c) Es la primera rama: $p($ tres acierto $= 0'75^3 = 0'421875$

d) Es la rama $\otimes \quad A \rightarrow \quad F \rightarrow \quad F$, luego $p($ solo un acierto en el primero $= 0'75 \cdot 0'25^2 = 0'046875$

- CUESTIÓN 5.A.

  El numero de accidentes mortales en una ciudad es, en promedio, de doce mensuales. Tras una campaña de señalización y adecentamiento de las vías urbanas, se contabilizaron en seis meses sucesivos 8, 11, 9, 7, 10 y 9 accidentes mortales. Suponiendo que el numero de accidentes mortales en dicha ciudad tiene una distribución normal con una desviación típica igual a 1,3 ¿podemos afirmar que la campana fue efectiva con un nivel de significación de 0,01?

  selcs Jun 2009 Solución:

  Para test bilateral:

  El nivel de significación $\alpha = 0'01$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 2'58 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 12 \pm 2'58 \dfrac{1'3}{\sqrt{6}} = 12 \pm 1'3692 = \begin{cases} 13'3692 \\ 10'6308 \end{cases}$

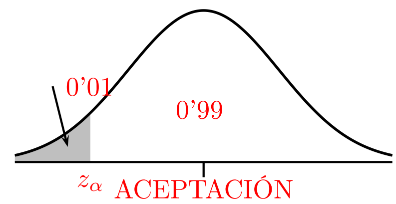
  que da el intervalo $(10'6308, 13'3692)$.

Como $\bar{x} = \frac{8+11+9+7+10+9}{6} = 9$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 12$, cabe pensar que la campaña ha sido efectiva.

Como debemos suponer que la campaña es para disminuir el número de accidentes, el test más adecuado sería el unilateral izquierdo;

Contrastamos $H_0 : \mu = 12\,\%$ frente a $H_1 : \mu < 12\,\%$,
En test unilateral el nivel significación $\alpha = 0'01$ corresponde con $z_\alpha = 2'33$.

El extremo de la región de aceptación es $\mu - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - 2'33 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 12 - 2'33 \dfrac{1'3}{\sqrt{6}} = 12 - 1'2365 = 10'7635$.
que da el intervalo $(10'7635, \infty)$.
Como $\bar{x} = \frac{8+11+9+7+10+9}{6} = 9$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que la media de accidentes siga igual $\mu = 12$, cabe pensar que la campaña ha sido efectiva.



- CUESTIÓN 5.B.

Se sabe que el peso de los recién nacidos sigue una distribución normal con media desconocida y desviación típica igual a 0,75 kilogramos. Si en una muestra aleatoria simple de cien de ellos se obtiene una media muestral de 3 kilogramos, calcular un intervalo de confianza para la media poblacional que presente una confianza del 95 %.

selcs Jun 2009 Solución:

Los datos son: $\bar{x} = 3, \sigma = 0'75, n = 100$.

Para el nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3 \pm 1'96 \cdot \dfrac{0'75}{\sqrt{100}} = 3 \pm 0'075 \begin{cases} 2'925 \\ 3'075 \end{cases}$

El intervalo de confianza para la media de la nueva producción de lámparas es $(2'925, 3'075)$

Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 14

Año 2008

14.1. Septiembre 2008

- CUESTIÓN 1.A.

  Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar una matriz B tal que $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

  selcs Sept 2008 Solución:

  Primero resolvemos la ecuación matricial:

  $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = A^{-1}.\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

  Calculemos ahora la inversa de A:

  $|A| = -3; \quad , adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

  Luego

  $B = A^{-1}.\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- CUESTIÓN 1.B.

  Un fabricante de coches lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo A a un precio de 15000 euros y el modelo B a un precio de 20000 euros. La oferta está limitada por las existencias que son 20 coches del modelo A y 10 del modelo B, queriendo vender al menos, tantas unidades del modelo A como del modelo B. Por otra parte, para cubrir gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos en ella deben ser, al menos, de 60000 euros.

  a) Plantear el problema y representar gráficamente su conjunto de soluciones.

  b) ¿Cuántos coches deberá vender de cada modelo para maximizar sus ingresos? ¿Cuál es su importe?

  selcs Sept 2008 Solución:

$x =$ número de coches de modelo A
$y =$ número de coches de modelo B
Ingresos: $f(x, y) = 15x + 20y$ en miles de euros

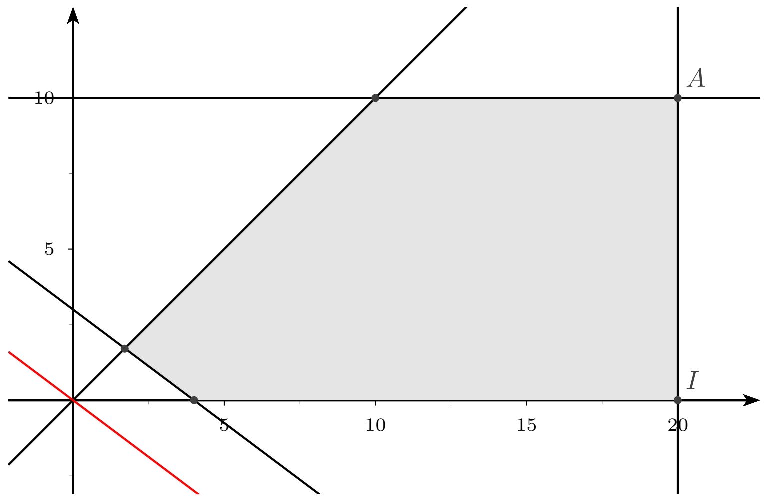
$$\begin{cases} x \leq 20 \\ y \leq 10 \\ x \geq y \\ 15x + 20y \geq 60 \end{cases}$$

Representamos (trabajaremos en miles):

$$\begin{cases} x \geq y & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 10 \\ \hline y & 0 & 10 \end{array} \\ 15x + 20y > 60 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 4 \\ \hline y & 3 & 0 \end{array} \end{cases}$$

Ahora la función igualada a 0:

$$f(xy) = 15x + 20y = 0 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 20 \\ \hline y & 0 & -15 \end{array}$$



Para maximizar los ingresos tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ que pasa por el punto A, o sea vender 20 coches del A y 10 del B, entonces el importe de los ingresos sería: $f(20, 10) = 500$, es decir 500.000 € .

- CUESTIÓN 2.A.

Considérense las funciones siguientes: $f(x) = x - 2; \quad g(x) = x^2$

a) Hallar los máximos y los mínimos de la función $y = f(x).g(x)$.

b) Hallar dos primitivas diferentes de la función $y = f(x).g(x)$

selcs Sept 2008 Solución:

a) Llamemos $h(x)$ a la función producto: $h(x) = x^2(x - 2) = x^3 - 2x^2$

Para hallar los máximos y los mínimos estudiaremos el crecimiento de la función, lo que viene dado por el signo de la derivada y para ello empezamos anulando la derivada:

$h'(x) = 3x^2 - 4x; \quad 3x^2 - 4x = 0; \quad x(x^{-}4) = 0$ que tiene como soluciones $x = 0, x = \dfrac{4}{3}$

x		0		$\frac{4}{3}$	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		MÁXIMO		MÍNIMO	

b) $\displaystyle\int h(x)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + C$ Por tanto dando dos valores a la constante de integración C obtenemos dos primitivas: $F_1(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{2x^3}{3} + 1$, $F_2(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{2x^3}{3} + 2$

- CUESTIÓN 2.B.

Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{1}{2(x + 1)}$ determinar:

a) Los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas.

c) Hacer una representación gráfica aproximada de la curva.

selcs Sept 2008 Solución:

Se trata de una hipérbola por tanto para representarla veremos los puntos de corte y las asíntotas:

a) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY: x = 0$, resulta $y = \dfrac{1}{2}$

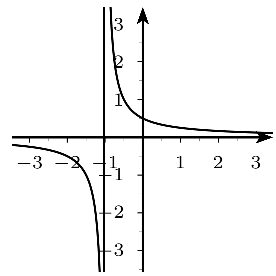
con $OX: y = 0$, resulta que no hay solución

b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales, anulamos el denominador $2(x+1) = 0, \quad x = -1$ pues $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{2(x+1)} = \pm\infty$

Asíntota horizontal $y = n: \quad n = \displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2(x+1)} = 0; \quad y = 0$



- CUESTIÓN 3.A.

Descomponer el número 25 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo.

selcs Sept 2008 Solución:

Los números son $x, \quad 25 - x$

La función a minimizar es: $f(x) = 2x^2 + 3(25-x)^2 = 5x^2 - 150x + 1875$

Derivamos y anulamos la derivada: $f'(x) = 10x - 150 = 0; \quad x = 15$

Estudiamos el crecimiento:

x		15	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$
		MÍNIMO	

- CUESTIÓN 3.B.

Calcular el área de la región del primer cuadrante limitada por la parábola $y = x^2$, la recta $y = -x + 2$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Sept 2008 Solución:

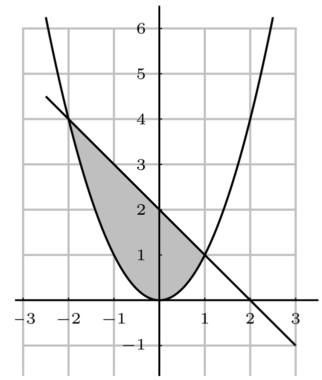
Buscamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x+2 \end{cases}$$

$x^2 = -x+2; \quad x^2 + x - 2 = 0; \quad x = 1, x = -2$

Área$= \displaystyle\int_{-2}^{1}$ recta $-$ parábola $=$

$dx = \int_{-2}^{1}(-x^2 - x + 2) \quad dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}u^2$



- CUESTIÓN 4.A.

El 70 % de los estudiantes aprueba una asignatura A y un 60 % aprueba otra asignatura B. Sabemos, además, que un 35 % del total aprueba ambas.

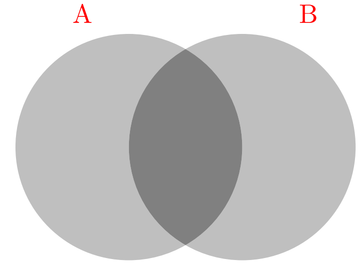
a) Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar apruebe la asignatura B, supuesto que ha aprobado la A.

b) Calcular la probabilidad de que dicho estudiante apruebe la asignatura B, supuesto que no ha aprobado la A.

selcs Sept 2008 Solución:

Llamamos A al suceso "aprobar A"; $p(A) = 0'7$
Llamamos B al suceso "aprobar B"; $p(B) = 0'6$
Por tanto aprobar ambas: $p(A \cap B) = 0'35$

a) Aprobar B supuesto aprobado A: $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0'35}{0'7} = 0'5$



b) Piden calcular la probabilidad de aprobar B supuesto no aprobado A: $p(B/A^c) = \dfrac{p(B \cap A^c)}{p(A^c)}$, busquemos estas probabilidades:

Tenemos que $p(A^c) = 1 - p(A) = 0'3$
Además tenemos la igualdad de conjuntos: $(B \cap A^c) \cup (B \cap A) = B$ siendo los sucesos incompatibles (unión disjunta), por tanto: $p(B \cap A^c) + p(B \cap A) = p(B); \quad p(B \cap A^c) + 0'35 = 0'6$, luego $p(B \cap A^c) = 0'25$.
Sustituyendo.

$p(B/A^c) = \dfrac{p(B \cap A^c)}{p(A^c)} = \dfrac{0'25}{0'3} = 0'833$

- CUESTIÓN 4.B.

Una fábrica produce tornillos niquelados y dorados, siendo el 75 % de los tornillos que produce niquelados. El porcentaje de tornillos defectuosos producidos es del 4 % para los tornillos niquelados y del 5 % para los dorados. Se elige al azar un tornillo y resulta no ser defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que sea niquelado?

selcs Sept 2008 Solución:

Llamamos B al suceso "no ser defectuoso".

Llamamos N al suceso "ser niquelado "; $p(N) = 0'75; \quad p(B/N) = 0'96$

Llamamos D al suceso "ser dorado "; $p(D) = 0'25; \quad p(B/D) = 0'95$

$\{D, N\}$ forman sistema completo de sucesos. Por el teorema de Bayes:

$$p(N/B) = \frac{p(B/N) \cdot p(N)}{p(B/N) \cdot p(N) + p(B/D) \cdot p(D)} = \frac{0'96 \cdot 0'75}{0'96 \cdot 0'75 + 0'95 \cdot 0'25} = 0'75$$

- CUESTIÓN 5.A.

  Supongamos que un fabricante de lámparas eléctricas de duración media igual a 2000 horas, y desviación típica igual a 300 horas, trata de compararlas con otras de un nuevo método de fabricación, para ver si éstas son de mayor duración. Para ello, examina una muestra aleatoria de 100 lámparas cuya vida media es de 2380 horas. Suponiendo que el nuevo método no cambia la variabilidad en duración de lámpara a lámpara y por tanto la desviación típica en duración es la misma que en el proceso anterior, construir un intervalo de confianza para la media de la población de lámparas que se fabricarán por el nuevo método con una confianza del 95 %.

  selcs Sept 2008 Solución:

  Los datos son: $\bar{x} = 2380, \sigma = 300, n = 100$.

  Para el nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

  Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2380 \pm 1'96 \cdot \dfrac{300}{\sqrt{100}} = 2380 \pm 58'8 \begin{cases} 2321'2 \\ 2438'8 \end{cases}$

  El intervalo de confianza para la media de la nueva producción de lámparas es $[2321'2, 2438'8]$

- CUESTIÓN 5.B.

  Se está calibrando una balanza. Para ello se pesa una "pesa de prueba" de 1000 gramos 60 veces, obteniéndose un peso medio de 1000,6 gramos. Si la desviación típica de la población es de 2 gramos ¿podemos aceptar la hipótesis nula 0 $H_0 : \mu = 1000$ frente a la alternativa $H_1 : \mu \neq 1000$ con una confianza del 99 %?

  selcs Sept 2008 Solución:

  Contrastamos $H_0 : \mu = 1000$ gr frente a $H_1 : \mu \neq 1000$ gr, consideramos test bilateral.

  Los datos son: $\bar{x} = 1000'6, \sigma = 2, n = 60$.

  El nivel de confianza del 99 %, $\alpha = 0'01$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 2'58 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1000 \pm 2'58 \dfrac{2}{\sqrt{60}} = 1000 \pm 0{,}6661 = \begin{cases} 1000'6661 \\ 999{,}3339 \end{cases}$

  que da el intervalo $(999{,}3339, 1000'6661)$.

  Como $\bar{x} = 1000'6$ queda dentro del intervalo, se acepta la hipótesis nula de que $\mu = 1000$ gr.

14.2. Junio 2008

- CUESTIÓN 1.A.

Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple que el número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.

a) Plantear un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

b) Resolver el problema.

selcs Jun 2008 Solución:

Sea:

x el número de hombres

y el número de mujeres

z el número de niños

las condiciones se pueden expresar:

$$\begin{cases} x+y+z=20 \\ x+y=3z \\ y+1=x \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=20 \\ x+y-3z=0 \\ -x+y=1 \end{cases}$$

Tiene como matriz asociada:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

Que triangulando por Gauss resulta:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 40 \end{array}$$

que sustituyendo hacia arriba da como soluciones: $z=5, \quad y=7, \quad x=8$.

Hay por tanto 8 hombres, 7 mujeres y 5 niños.

- CUESTIÓN 1.B.

Un taller de bisutería produce sortijas sencillas a 4,5 euros y sortijas adornadas a 6 euros. Las máquinas condicionan la producción de modo que no pueden salir al día más de 400 sortijas sencillas, ni más de 300 adornadas, ni más de 500 en total.

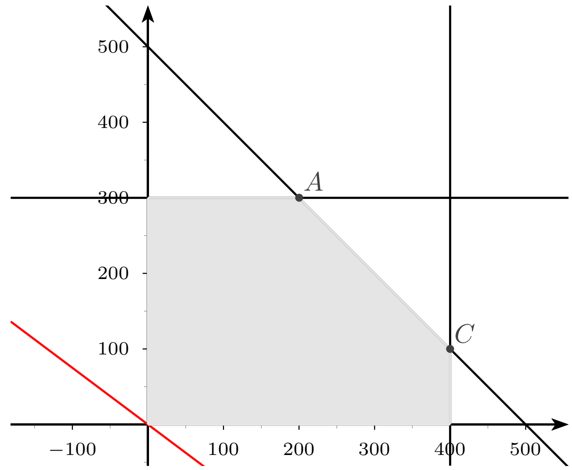
a) ¿Cuántas unidades de cada modelo se pueden vender? Plantear el problema y representar gráficamente su conjunto de soluciones.

b) Suponiendo que se vende toda la producción ¿cuántas unidades de cada clase interesará fabricar para obtener los máximos ingresos?

selcs Jun 2008 Solución:

Sean:
$x =$ número de sortijas sencillas
$y =$ número de sortijas adornadas
Ganancia: $f(x, y) = 4'5x + 6y$ euros

$$\begin{cases} x \leq 400 \\ y \leq 300 \\ x + y \geq 500 \end{cases}$$



Representamos: $x + y \geq 500$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 500 \\ \hline y & 500 & 0 \end{array}$

Ahora la función igualada a 0:

$f(xy) = 4'5x + 6y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -60 \\ \hline y & 0 & 45 \end{array}$

Para maximizar los ingresos tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ que pasa por el punto A o C que sería la más alejada: comprobemos los valores correspondientes a esos puntos:

$A(300, 200)$; $f(300, 200) = 4'5 \cdot 300 + 6 \cdot 200 = 2550$

$C(400, 100)$; $f(400, 100) = 4'5 \cdot 400 + 6 \cdot 100 = 2400$

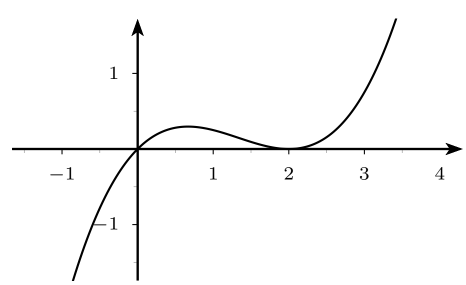
Por tanto el máximo beneficio resulta de vender 300 sortijas sencillas y 200 sortijas adornadas.

- CUESTIÓN 2.A.

En una región, un río tiene la forma de la curva $y = \dfrac{1}{4}x^3 - x^2 + x$ y es cortada por un camino según el eje OX.

Hacer un esquema de la posición del río y del camino, calculando para la curva el corte con los ejes coordenados, extremos relativos e intervalos de crecimiento.

selcs Junio 2008 Solución:
Se trata de una función polinómica por tanto para representarla veremos los puntos de corte y el crecimiento:



a) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY : x = 0$, resulta $y = 0$

con $OX : y = 0$, resulta $\dfrac{1}{4}x^3 - x^2 + x = 0$; $x(\dfrac{1}{4}x^2 - x + 1) = 0$; $x^2 - 4x + 4 = 0$; que da como solución $x = 2$ doble.

b) Crecimiento: Viene dado por el signo de la derivada, para ello anulamos la derivada:

$f'(x) = \dfrac{3}{4}x^2 + 2x + 1 = 0$

Asíntotas verticales, anulamos el denominador $2(x + 1) = 0$, $x = -1$ pues $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{2(x+1)} = \pm\infty$

Asíntota horizontal $y = n$: $n = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2(x+1)} == 0$; $y = 0$

- CUESTIÓN 2.B.

  Dada la curva $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$

  a) Los puntos de corte con los ejes coordenados.

  b) Las asíntotas.

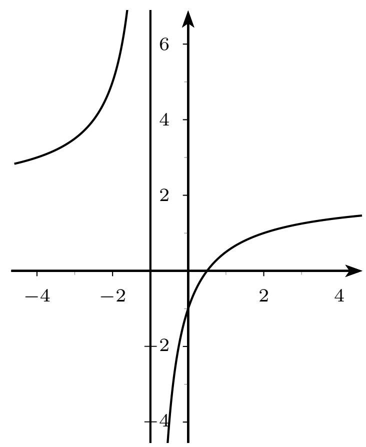
  c) Hacer una representación gráfica de la misma.

selcs Junio 2008 Solución:
Se trata de una hipérbola por tanto para representarla veremos los puntos de corte y las asíntotas:

a) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY : x = 0$, resulta $y = \dfrac{-1}{1} = 1$

con $OX : y = 0$, resulta $2x - 1 = 0, \quad x = \dfrac{1}{2}$



b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales, anulamos el denominador $x + 1 = 0, \quad x = -1$ pues $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x-1}{x+1} = \pm\infty$

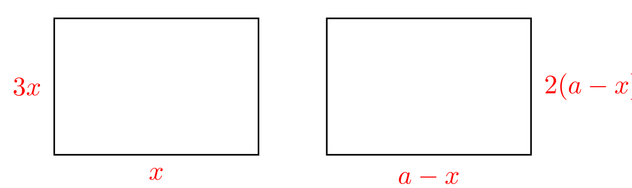
Asíntota horizontal $y = n : \quad n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2; \quad y = 2$

- CUESTIÓN 3.A.

  Supongamos que tenemos un alambre de longitud a y lo queremos dividir en dos partes que van a servir de base a sendos rectángulos. En uno de los rectángulos su altura es el doble de su base y en el otro su altura es el triple de su base. Determinar el punto por el cuál debemos cortar el alambre para que la suma de las áreas de los dos rectángulos sea mínima.

selcs Junio 2008 Solución:

Suma de áreas: $f(x) = x \cdot 3x + (a-x)(2(a-x) = 3x^2 + 2a^2 + 2x^2 - 4ax = 5x^2 - 4ax + 2a^2$ mínima
Derivamos $f'(x) = 10x - 4a$. Anulamos la derivada $10x - 4a = 0$
Resulta $x = \dfrac{4a}{10} = \dfrac{2a}{5}$



x	$\frac{a}{5}$	$\dfrac{2a}{5}$	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$

MÍNIMO

- CUESTIÓN 3.B.

  Calcular el área limitada por la curva $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = 0, x = 3$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

  selcs Junio 2008 Solución:

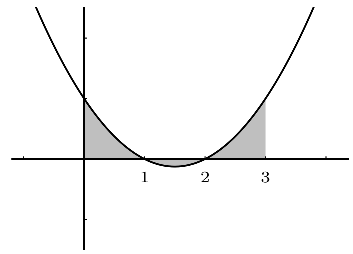
  $S = S_1 + S_2 + S_3$

  $S_1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{4} + x\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{3}{4} + 1 - 0 = \frac{5}{12}$

  $S_2 : \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{4} + x\right]_1^2 = \frac{8}{6} - \frac{12}{4} + 2 - (\frac{1}{6} - \frac{3}{4} + 1) = \frac{-1}{12} \quad S_1 = \frac{1}{12}$

  $S_3 = \int_2^3 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{4} + x\right]_2^3 = \frac{27}{6} - \frac{27}{4} + 3 - (\frac{8}{6} - \frac{12}{4} + 2) = \frac{5}{12}$

  $S = \frac{11}{12}\ u^2$

- CUESTIÓN 4.A.

  Tres hombres A, B y C disparan a un objetivo. Las probabilidades de que cada uno de ellos alcance el objetivo son $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ respectivamente. Calcular:

  a) La probabilidad de que todos alcancen el objetivo.

  b) La probabilidad de que ninguno alcance el objetivo.

  c) La probabilidad de que al menos uno de ellos alcance el objetivo.

  selcs Junio 2008 Solución:

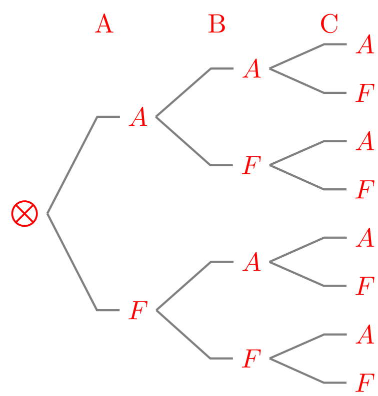
  Representamos por A acertar, F fallar.

  a) $p($ "todos aciertan" $) = p(A_A A_B A_C) = \frac{1}{6}.\frac{1}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{72}$

  b) $p($"todos fallan"$) = p(F_A F_B F_C) = \frac{5}{6}.\frac{3}{4}.\frac{2}{3} = \frac{5}{12}$

  c) " al menos uno acierta" es el complementarios de "todos fallan" por tanto:

  $p($ " al menos uno acierta" $) = 1 - p($"todos fallan"$) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

- CUESTIÓN 4.B.

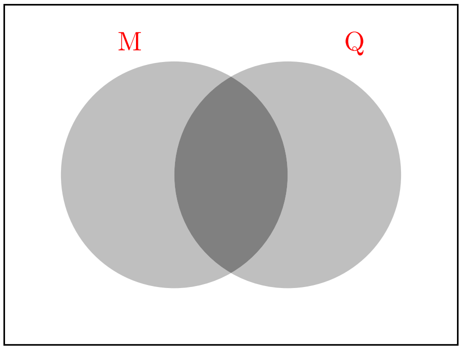
  En una cierta facultad se sabe que el 25 % de los estudiantes suspenden matemáticas, el 15 % suspenden química y el 10 % suspenden matemáticas y química. Se selecciona un estudiante al azar.

  a) Calcular la probabilidad de que el estudiante no suspenda química ni matemáticas.

b) Si sabemos que el estudiante ha suspendido química, ¿cuál es la probabilidad de que suspenda también matemáticas?

selcs Junio 2008 Solución:

Llamamos M al suceso "suspender M"; $p(M) = 0'25$
Llamamos Q al suceso "suspender Q"; $p(Q) = 0'15$
Suspender $p(M \cap Q) = 0'10$



a) " No suspenda química ni matemáticas" equivale a "aprobar las dos" que es el complementario de "suspender alguna" : $p(M^c \cap Q^c) = 1 - p(M \cup Q) =$
Calcula primero la probabilidad de la unión: $p(M \cup Q) = p(M) + p(Q) - p(M \cap Q) = 0'25 + 0'15 - 0'10 = 0'30$
Por tanto: $p($ " No suspenda química ni matemáticas" $) = 1 - 0'30 = 0'70$

b) Piden calcular la probabilidad de suspender matemáticas supuesto que ha suspendido química:
$p(M/Q) = \dfrac{p(M \cap Q)}{p(Q)} = \dfrac{0'10}{0'15} = 0'666$

- CUESTIÓN 5.A.

El peso medio de los paquetes de café puestos a la venta por cierta casa comercial es supuestamente de 1 kg. Para comprobar esta suposición, elegimos una muestra aleatoria simple de 100 paquetes y encontramos que su peso medio es de 0,978 kg. Suponiendo que la distribución del peso de los paquetes de café es normal y la desviación típica de la población es de 0,10 kg. ¿Es compatible este resultado con la hipótesis nula $H_0 : \mu = 1$ con un nivel de significación de 0,05 ? ¿Y con un nivel de significación de 0,01?

selcs Junio 2008 Solución:

Contrastamos $H_0 : \mu = 1000$ gr frente a $H_1 : \mu \neq 1000$ gr, consideramos test bilateral.

Los datos son: $\bar{x} = 978, \sigma = 100, n = 100$.

- El nivel de significación $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1000 \pm 1'96 \dfrac{100}{\sqrt{100}} = 1000 \pm 19'6 = \begin{cases} 1019'6 \\ 980'4 \end{cases}$
  que da el intervalo $(980'4, 1019'6)$.
  Como $\bar{x} = 978$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 1000$ gr.

- El nivel de significación $\alpha = 0'01$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 2'58 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1000 \pm 2'58 \dfrac{100}{\sqrt{100}} = 1000 \pm 25'8 = \begin{cases} 1025'8 \\ 974'2 \end{cases}$
  que da el intervalo $(974'2, 1025'8)$.
  Como $\bar{x} = 978$ queda dentro del intervalo, se acepta la hipótesis nula de que $\mu = 1000$ gr.

- CUESTIÓN 5.B.

La puntuación media obtenida por una muestra aleatoria simple de 81 alumnos de secundaria en el examen de cierta asignatura ha sido 25 puntos. Suponiendo que la distribución de las puntuaciones de la población es normal con desviación típica igual a 20,25 puntos, calcular el intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de significación de 0,01.

selcs Junio 2008 Solución:

Los datos son: $\bar{x} = 25, \sigma = 20'25, n = 81$.

Para el nivel de confianza de 99 %,corresponde $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 25 \pm 2'58 \cdot \dfrac{20'25}{\sqrt{81}} = 25 \pm 5'805 \begin{cases} 30'805 \\ 19'195 \end{cases}$

El intervalo de confianza para la media de la nueva producción de lámparas es $(19'195, 30'805)$

Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 15

Año 2007

15.1. Septiembre 2007

- CUESTIÓN 1.A. [3 PUNTOS]

  Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcular dos números reales x e y tales que se verifique $A + xA + yI = 0$, siendo I la matriz unidad de orden 2 y 0 la matriz nula de orden 2.

  selcs Sep 2007 Solución:

  $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  $$x\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

  $$\begin{pmatrix} 2x & x \\ 2x & 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

  $\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = -2 \\ x = -1 \\ 2x = -2 \\ 3x + y = -3 \end{array} \right.$ sistema de soluciones $x = -1, y = 0$, como se comprueba sustituyendo en todas las ecuaciones.

- CUESTIÓN 1.B. [3 PUNTOS]

  En un taller de chapa se pueden fabricar dos tipos de carrocerías A y B. Cada carrocería de tipo A necesita 4 horas de pintura y cada carrocería de tipo B necesita 6 horas de pintura, disponiéndose de un máximo de 500 horas mensuales para la pintura de las carrocerías. Si los beneficios de cada carrocería son de 2000 euros y 3500 euros para los tipos A y B respectivamente:

a) Calcular el número de carrocerías de cada tipo que deben producirse para obtener el máximo beneficio si tienen que fabricar un mínimo de 80 y un máximo de 100 carrocerías de tipo A.

b) ¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?

selcs Sept 2007 Solución:

Las variables serían:

x número de carrocerías de tipo A

y número de carrocerías de tipo B

La función a maximizar es $f(x, y) = 2000x + 3500y$

Queda el sistema de inecuaciones con x, y positivas:

$$\begin{cases} 4x + 6y \leq 500 \\ x > 80 \\ x < 100 \end{cases}$$

Representamos:

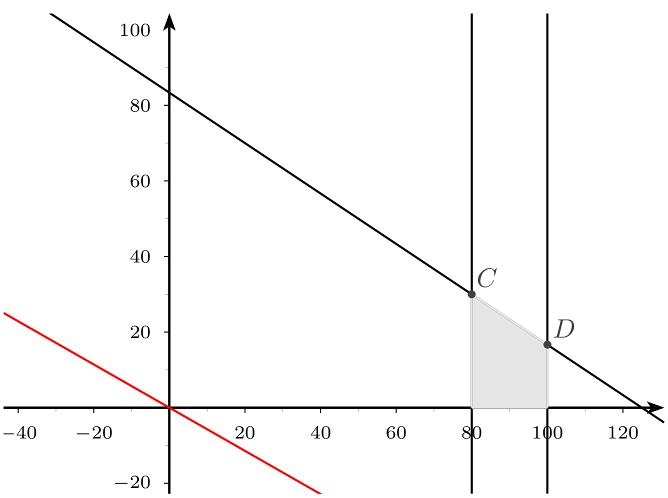
$4x + 6y \leq 500$

x	0	125
y	$80'33$	0

Ahora la función igualada a 0:

$f(x, y) = 2000x + 3500y = 0$

x	0	-35
y	0	20



Como no se ve claro probamos los dos puntos $C(80, 30)$ y $D(100, 16'66)$

$C: \quad f((80, 30) = 2000 \cdot 80 + 3500 \cdot 30 = 265000$

$D: \quad f((100, 16'66) = 2000 \cdot 100 + 3500 \cdot 16'66 = 258100$

El máximo se produce para el punto C, hay que fabricar 80 de tipo A y 30 de tipo B, así se tendrá la máxima ganancia de 265.000 € .

- CUESTIÓN 2.A.

Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$, se pide:

a) Calcular su dominio.

b) Calcular sus asíntotas.

c) Determinar los máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Hacer su representación gráfica aproximada.

selcs Sept 2007 Solución:

a) Dominio: La función existe siempre salvo en $x = 2$ que anula al denominador.

Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY: x = 0$, resulta $y = \dfrac{1}{2}$

con $OX: y = 0$, resulta $x = -1$

b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

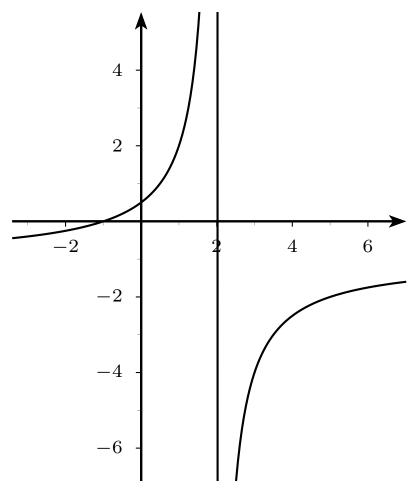
verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales $2 - x = 0, \quad x = 2$ pues $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+1}{2-x} = \pm\infty$

Asíntota horizontal $y = n: \quad n = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{2-x} = -1; \quad y = -1$

c) Crecimiento: se estudia el signo de la derivada:

$f'(x) = \dfrac{3}{(2-x)^2}$ que al ser siempre positiva nos dice que la función es siempre creciente.



- CUESTIÓN 2.B.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x+3 & \text{si} \quad x > 2 \\ 3 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

a) Representarla gráficamente.

b) Estudiar su continuidad y en caso de que exista algún tipo de discontinuidad, decir de qué tipo de discontinuidad se trata.

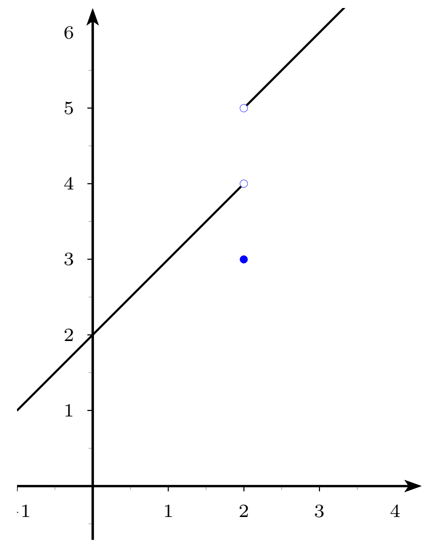
selcs Sept 2007 Solución:

a)

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad x<2 \\ x+3 & si \quad x>2 \\ 3 & si \quad x=2 \end{cases}$$

x	0	2
y	2	4

x	2	3
y	5	6



b)

Es continua siempre excepto en $x=2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x+2) = 4$
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x+3) = 5$
$f(2)=3$

En $x=2$ hay discontinuidad de salto finito.

- CUESTIÓN 3.A.

Encontrar un número tal que al restarle su cuadrado la diferencia sea máxima.

selcs Sept 2007 Solución:

número $= x$

$f(x) = x - x^2$ máximo

$f'(x) = 1 - 2x$

anulando la derivada:

$1 - 2x = 0; \quad x = \dfrac{1}{2}$

Con el estudio del crecimiento comprobamos que es máximo:

x		$\frac{1}{2}$	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$

- CUESTIÓN 3.B.

Hallar el área limitada por las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = -x + 2$.

selcs Sept 2007 Solución:

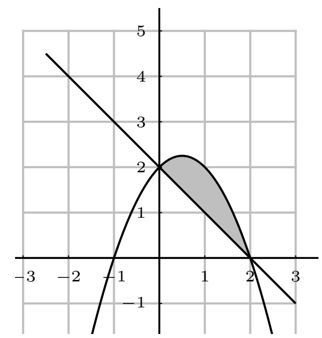
Buscamos los puntos de corte de las dos funciones:

$\begin{cases} y = -x^2 + x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$

$-x^2 + x + 2 = -x + 2; \quad -x^2 + 2x = 0; \quad x(-x+2) = 0; \quad x = 0, x = 2$

Área$= \displaystyle\int_0^2$ parábola $-$ recta $=$

$dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x) \quad dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}u^2$



- CUESTIÓN 4.A.

Se propone a Juan y a Pedro la resolución de un problema. Se estima, en función de sus evaluaciones, que la probabilidad de que resuelvan el problema de forma independiente es de 1/3 para Juan y de 1/4 para Pedro.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el problema sea resuelto por alguno de los dos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea resuelto por ninguno?

selcs Sept 2007 Solución:

Llamamos J al suceso "Juan resuleve el problema"; $p(J) = \dfrac{1}{3}$

Llamamos P al suceso "Pedro resuleve el problema"; $p(P) = \dfrac{1}{4}$

Consideramos que los dos son independientes, por tanto $p(J \cap P) = p(J) \cdot p(P) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$

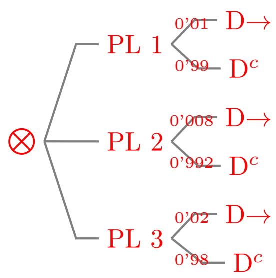
a) Que lo resuelva alguno es la unión: $p(J \cup P) = p(J) + p(P) - p(J \cap P) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{2}$

b) Que no lo resuelva ninguno es contrario de que lo resuelva alguno: $p(J \cup P)^c = 1 - p(J \cup P) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

- CUESTIÓN 4.B.

El volumen diario de producción en tres plantas diferentes de una fábrica es de 500 unidades en la primera, 1000 unidades en la segunda y 2000 unidades en la tercera. Sabiendo que el porcentaje de unidades defectuosas producidas en cada planta es del 1 %, 0'8 % y 2 % respectivamente. Calcular la probabilidad de que al seleccionar una unidad al azar sea defectuosa.

selcs Sept 2007 Solución:



La probabilidad de que venga de cada planta es :

$$p(PL1) = \frac{500}{3500} = \frac{1}{7}$$
$$p(PL2) = \frac{1000}{3500} = \frac{2}{7}$$
$$p(PL3) = \frac{2000}{3500} = \frac{4}{7}$$

Sea D el suceso seleccionar unidad defectuosa

Sumando las ramas que terminan seleccionando defectuosa: $p(D) = \frac{1}{7}{,}0'01 + \frac{2}{7}{,}0'008 + \frac{4}{7}{,}0'02 = 1'514$

Hemos hecho el problema sirviéndonos de un árbol con las probabilidades respectivas. Vamos a hacer el problema utilizando el Teorema de la probabilidad total.

Los sucesos: $\{PL1, PL2, PL3\}$ constituyen un sistema completo de sucesos.

$$p(PL1) = \frac{500}{3500} = \frac{1}{7}; \quad p(D/PL1) = 0'01$$
$$p(PL2) = \frac{1000}{3500} = \frac{2}{7}; \quad p(D/PL2) = 0'008$$
$$p(PL3) = \frac{2000}{3500} = \frac{4}{7}; \quad p(D/PL3) = 0'02$$

Entonces por el Teorema de la probabilidad total:

$$p(D) = p(PL1).p(D/PL1) + p(PL2).p(D/PL2) + p(PL3).p(D/PL3) = \frac{1}{7}{,}0'01 + \frac{2}{7}{,}0'008 + \frac{4}{7}{,}0'02 = 1'514$$

- CUESTIÓN 5.A.

Un directivo de cierta empresa de material eléctrico afirma que la vida media de cierto tipo de bombillas es de 1500 horas. Otro directivo de la misma empresa afirma que la vida media de dichas bombillas es igual o menor de 1500 horas. Elegida una muestra aleatoria simple de 81 bombillas de dicho tipo, vemos que su vida media ha sido de 1450 horas. Suponiendo que la vida de las bombillas sigue una distribución normal con desviación típica igual a 180 horas:

a) ¿Es compatible la hipótesis $H_0 : \mu = 1500$, frente a la hipótesis $H_1 : \mu \neq 1500$ con una confianza del 99 %, con el resultado experimental $\bar{x} = 1450$

b) ¿Es compatible la hipótesis $H_0 : \mu = 1500$, frente a la hipótesis $H_1 : \mu < 1500$ con una confianza del 99 %, con el resultado experimental $\bar{x} = 1450$.

selcs Sept 2007 Solución:

Los datos son: $\bar{x} = 1450, \sigma = 180, n = 81$.

a) Contrastamos $H_0 : \mu = 1500$ años frente a $H_1 : \mu \neq 1500$ años, test bilateral.

El nivel de confianza del 99 %, $\alpha = 0'01$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 2'58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1500 \pm 2'58 \frac{180}{\sqrt{81}} = 1500 \pm 51'6$ que da el intervalo $(1448'4, 1551'6)$.

Como $\bar{x} = 1450$ queda dentro del intervalo, se acepta la hipótesis nula de que $\mu = 1500$ años.

b) Contrastamos $H_0 : \mu = 1500$ años frente a $H_1 : \mu < 1500$ años, unilateral.

El nivel de confianza del 99 %, $\alpha = 0'01$, corresponde con $z_\alpha = 2'33$.

El intervalo de aceptación tiene de extremo inferior $\mu - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - 2'33 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1500 - 2'33 \dfrac{180}{\sqrt{81}} = 1500 - 46'6 = 1453'4$.

Como $\bar{x} = 1450$ es menor queda fuera de la zona de aceptación, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 1500$ años.

- CUESTIÓN 5.B.

  Supongamos una población $N(\mu, \sigma = 8)$. Se extrae de ella una muestra aleatoria simple. Si se sabe que la probabilidad de cometer un error de 3.92 o más al estimar la media μ mediante la media muestral es de 0.05, ¿qué tamaño ha de tener la muestra?

  selcs Sept 2007 Solución:

  Los datos son: $\sigma = 8$, error $= 3'92$, nivel de significación $= 0'05$.

  Para el nivel de significación $= 0'05$ corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

  Entonces el error viene dado por:

  error $= z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96 \cdot \dfrac{8}{\sqrt{n}} \leq 3'92$

  $1'96 \cdot \dfrac{8}{3'92} \leq \sqrt{n}; \quad n \geq 16$

15.2. Junio 2007

- CUESTIÓN 1.A. [3 PUNTOS]

  Calcular la matriz inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

selcs Jun 2007 Solución:

Adjuntamos a la derecha la matriz unidad y para evitar el cero en la esquina le sumamos a la primera fila la segunda:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2^a + 1^a(-2) \\ 3^a + 1^a(-3) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} 3^a - 2^a$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) 1^a \cdot 6 + 3^a \begin{pmatrix} 6 & 18 & 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} 1^a \cdot 7 + 12^a \cdot 18$$

$$\begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 & -1 & 11 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dividiendo cada fila por su elemento de la diagonal principal:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1/42 & 11/42 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/6 \end{array}\right)$$ las últimas tres columnas es la matriz inversa.

- CUESTIÓN 1.B. [3 PUNTOS]

  Una fábrica de bombones tiene almacenados 500 kg. de chocolate, 100kg. de almendras y 85kg. de frutas. Produce dos tipos de cajas de bombones: tipo A y tipo B. Cada caja de tipo A contiene 3kg. de chocolate, 1kg. de almendras y 1kg. de frutas, mientras que cada caja de tipo B contiene 2kg. de chocolate, 1.5kg. de almendras y 1kg. de frutas. Los precios de las cajas de tipo A y B son 130 euros y 135 euros respectivamente.

  a) ¿Cuántas cajas debe fabricar de cada tipo para maximizar su ganancia?

  b) ¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?

selcs Jun 2007 Solución:

Disponemos los datos en una tabla:

	chocolate	almendras	frutas	precio
A	3	1	1	130
B	2	1'5	1	135
	≤ 500	≤ 100	≤ 85	

Las variables serían:

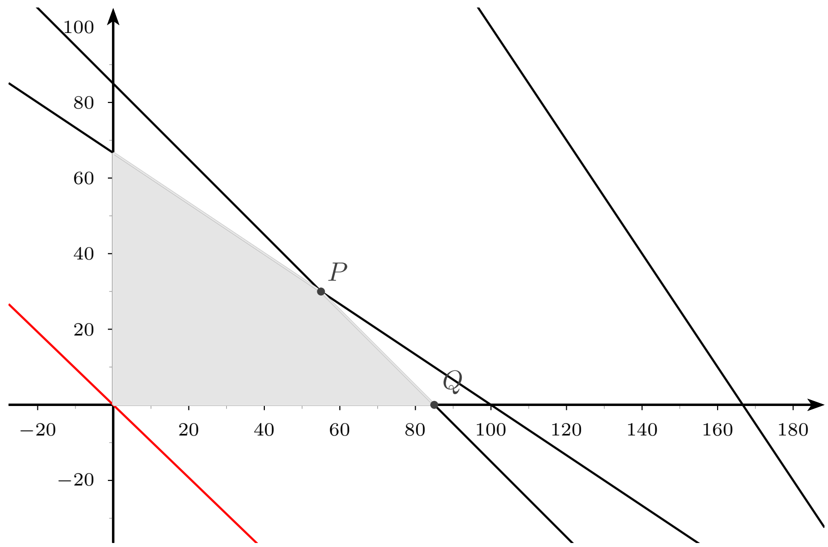
x número de cajas de tipo A

y número de cajas de tipo B

La función a maximizar es $f(x,y) = 130x + 135y$

Queda el sistema de inecuaciones con x, y positivas:

$$\left\{\begin{array}{r} 3x + 2y \leq 500 \\ x + 1'5y \leq 100 \\ x + y \leq 85 \end{array}\right.$$



Representamos:

$$\left\{\begin{array}{lc} 3x + 2y \leq 500 & \begin{array}{c|cc} x & 100 & 166'6 \\ \hline y & 100 & 0 \end{array} \\ x + 1'5y \leq 100 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 166'6 \\ \hline y & 66'6 & 0 \end{array} \\ x + y \leq 85 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 85 \\ \hline y & 85 & 0 \end{array} \end{array}\right.$$

Ahora la función igualada a 0:

$f(xy) = 130x + 135y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -13'5 \\ \hline y & 0 & 13 \end{array}$

Hallemos el punto de corte P resolviendo el sistema $\left\{\begin{array}{r} x + 1'5y = 100 \\ x + y = 85 \end{array}\right.$, $P(55, 30)$

El otro punto posible es $Q(85, 0)$ queda: $f(85, 0) = 130 \cdot 85 + 0 = 11050$

El máximo se produce para $P(55, 30)$ y $f(55, 30) = 130 \cdot 55 + 135 \cdot 30 = 11200$, es el beneficio máximo.

- CUESTIÓN 2.A.

Dada la función $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$, se pide:

a) Calcular su dominio.

b) Calcular sus asíntotas.

c) Determinar los máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Hacer su representación gráfica aproximada.

selcs Jun 2007 Solución:

a) Dominio: La función existe siempre salvo en $x = -1$ que anula al denominador.

Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY : x = 0$, resulta $y = 2$

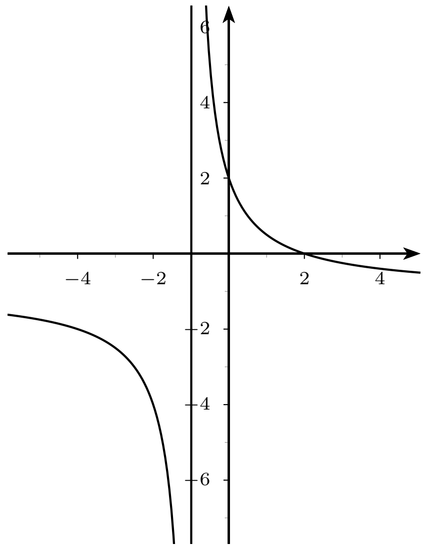
con $OX : y = 0$, resulta $x = 2$

b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales $x + 1 = 0, \quad x = -1$ pues $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{2-x}{x+1} = \pm\infty$

Asíntota horizontal $y = n : \quad n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2-x}{x+1} = -1; \quad y = -1$



c) Crecimiento: se estudia el signo de la derivada:

$f'(x) = \frac{-3}{(x+1)^2}$ que al ser siempre negativa nos dice que la función es siempre decreciente.

- CUESTIÓN 2.B.

Cierto artículo se vende a un precio u otro según la cantidad comprada, de acuerdo con los siguientes datos:

A 10 euros el kilo, si $0 \le x < 5$

A 9 euros el kilo, si $5 \le x < 10$

A 7 euros el kilo, si $10 \le x < 20$

A 5 euros el kilo, si $20 \le x$,

donde x es el peso en kg. de la cantidad comprada.

a) Escribir la función que representa el precio del artículo.

b) Hacer su representación gráfica.

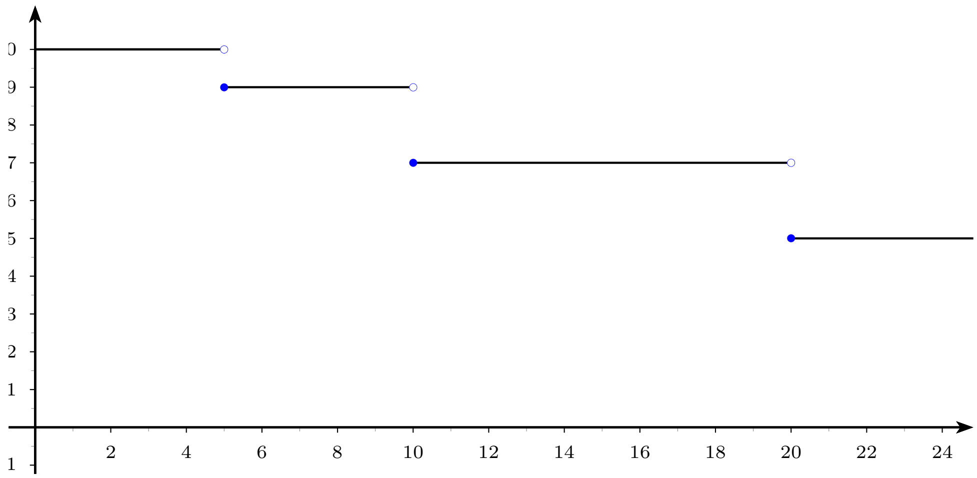
c) Estudiar su continuidad.

Solución:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 10 & si \quad 0 \le x < 5 \\ 9 & si \quad 5 \le x < 10 \\ 7 & si \quad 10 \le x < 20 \\ 5 & si \quad 20 \le x \end{cases}$$

b)



c) La gráfica presenta discontinuidades de salto finito en $x = 5, \quad x = 10, \quad x = 20$

Veamos los límites laterales por ejemplo para $x = 5$, $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} 10 = 10 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} 9 = 9 \end{cases}$ $\qquad f(5) = 9$

- CUESTIÓN 3.A.

Hallar dos números cuya suma sea 20 sabiendo que su producto es máximo.

selcs Jun 2007 Solución:

Sean x, y los números.

$x + y = 20; \qquad y = 20 - x$

$P = x.y$ máximo

$P(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$

Derivando: $P'(x) = 20 - 2x$, en el máximo se anula la derivada $20 - 2x = 0; \quad x = 10$

Con el estudio del crecimiento comprobamos que es máximo:

x		10	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$

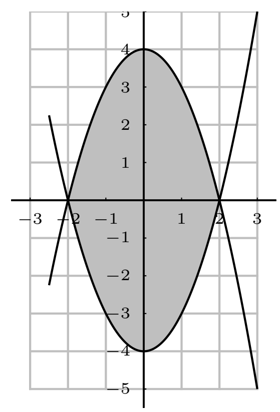
- CUESTIÓN 3.B.

Hallar el área limitada por las curvas $y = x^2 - 4$ e $y = 4 - x^2$.

selcs Jun 2007 Solución:

Buscamos los puntos de corte de las dos funciones:

$\begin{cases} f(x) = x^2 - 4 \\ g(x) = 4 - x^2 \end{cases}$ $, x^2 - 4 = 4 - x^2; \quad 2x^2 - 8 = 0; x^2 = 4; \quad x = \pm 2$



Como la región es simétrica respecto al eje de ordenadas, el área sera el doble de la integral entre 0 y . La función g es mayor en el intervalo de integración, luego $g(x) - f(x) = 4 - x^2 - (x^2 - 4) = 8 - 2x^2$

$S = 2 \int_0^2 (g - f)$

$$\int_0^2 (8 - 2x^2) \quad dx = \left[8x - \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

Luego el área es $\frac{64}{3} u^2$.

- CUESTIÓN 4.A.

Un ordenador personal está contaminado por un virus y tiene cargado dos programas antivirus que actúan independientemente el uno del otro. El programa P_1 detecta la presencia del virus con una probabilidad de 0.9 y el programa P_2 detecta el virus con una probabilidad de 0.8.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el virus no sea detectado por ninguno de los dos programas antivirus?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un virus que ha sido detectado por el programa P_1 sea detectado también por el programa P_2?

selcs Jun 2007 Solución:

Sea A "el programa P_1 detecta la presencia de virus "

Sea B "el programa P_2 detecta la presencia de virus"

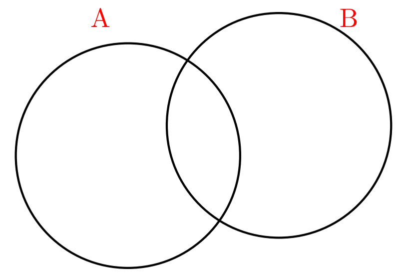
Sabemos: $p(A) = 0'9, p(B) = 0'8$

a) ”ninguno detecta virus” es el complementario de ”alguno detecta virus”, o sea de la unión:

Hallemos primero la probabilidad de la intersección, consideramos que los dos antivirus actúan con independencia: $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B) = 0'9\cdot 0'8 = 0'72$

Por tanto la probabilidad de la unión es: $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = 0'9 + 0'8 - 0'72 = 0'98$

Entonces: $p(\text{ ninguno detecta }) = p(\text{ alguno detecta})^c = 1 - p(A\cup B) = 1 - 0'98 = 0'02$



b) ”detecta el virus P_2 habiéndolo detectado P_1 ”, es B condicionado a A: $p(B/A) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)} = \dfrac{0'72}{0'9} = 0'8$, resultado esperado por ser independientes A y B, podríamos haber puesto directamente $p(B/A) = p(B)$.

- CUESTIÓN 4.B.

Los gerentes de unos grandes almacenes han comprobado que el 40 % de los clientes paga sus compras con tarjeta de crédito y el 60 % restante lo hace en efectivo. Ahora bien, si el importe de la compra es superior a 100 euros, la probabilidad de pagar con tarjeta pasa a ser 0.6. Si además sabemos que en el 30 % de las compras el importe es superior a 100 euros, calcular:

a) Probabilidad de que un importe sea superior a 100 euros y sea abonado con tarjeta.

b) Probabilidad de que un importe sea superior a 100 euros, sabiendo que fue abonado en efectivo.

selcs Jun 2007 Solución:

Consideramos los sucesos:

- S, compra superior a 100 €
- I, compra inferior o igual a 100 €
- T, paga con tarjeta de crédito
- T, paga en efectivo

Nos dan las probabilidades: $p(T) = 0'4, \quad p(E) = 0'6, \quad p(T/S) = 0'6, \quad p(S) = 0'3$

a) Es la probabilidad de la intersección: $p(T\cap S) = p(S)\cdot p(T/S) = 0'3\cdot 0'6 = 0'18$

b) $\{S, I\}$ forman sistema completo de sucesos. Por el teorema de Bayes:

$$p(S/E) = \frac{p(E/S)\cdot p(S)}{p(E/S)\cdot p(S) + p(E/I)\cdot p(I)} = \frac{0'3\cdot 0'4}{0'3\cdot 0'4 + 0'6\cdot 0'7} = 0'22$$

tablas de contingencia: datos iniciales

	S	I	
$T/$	0’6		0’4
$E/$			0’6
	0’3		

datos deducidos:

	S	I	
$T/$	0’6		0’4
$E/$	0’4		0’6
	0’3	0’7	

- CUESTIÓN 5.A.

  El nivel medio de protombina en una población normal es de 20 mg./100 ml. de plasma con una desviación típica de 4 mg./100 ml. Se toma una muestra de 40 individuos en los que la media es de 18.5 mg./100 ml. ¿Es la muestra comparable con la población, con un nivel de significación de 0.05?

  selcs Jun 2007 Solución:

  Contrastamos $H_0 : \mu = 20$ mg./100 ml. frente a $H_1 : \mu \neq 20$ mg./100 ml., consideramos test bilateral.

  Los datos son: $\bar{x} = 18'5, \sigma = 4, n = 40$.

  El nivel de significación del 5 %, $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 20 \pm 1'96 \dfrac{4}{\sqrt{400}} = 20 \pm 1'23$ que da el intervalo $(18'77, 21'23)$.

  Como $\bar{x} = 18'5$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 20$ mg./100 ml., la muestra puede venir de otra población.

- CUESTIÓN 5.B.

  El peso de los niños varones a las 10 semanas de vida se distribuye según una normal con desviación típica de 87 gr. ¿Cuántos datos son suficientes para estimar, con una confianza del 95 %, el peso medio de esa población con un error no superior a 15 gr.?

  selcs Jun 2007 Solución:

  Los datos son: $\sigma = 87$;

  El error $= z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ha de ser ≤ 15

  El nivel de confianza del 95 % equivalente a nivel de significación del $\alpha = 0'05$ se corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  Sustituyendo: $1'96 \cdot \dfrac{87}{\sqrt{n}} \leq 15$; $\quad 1'96 \cdot \dfrac{87}{15} \leq \sqrt{n}$; $\quad (11'36)^2 \leq n$; $\quad 129'23 \leq n$

  La muestra debe tener un tamaño igual o mayor que 130 para que al nivel de confianza sea del 95 % el error sea menor que 15 gr.

Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 16

Año 2006

16.1. Septiembre 2006

- CUESTIÓN 1.A.

  Estudiar para los diferentes valores del parámetro a, la existencia de soluciones del sistema:

  $$\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

  y resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

  selcs Sep 2006 Solución: Aplicando el método de Gauss empezamos a triangular la matriz ampliada, como hay un parámetro habrá que considerar los valores de éste que anulen un denominador:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2^a+1^a.(-2) \\ 3^a-1^a \end{array} \right\} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & 2-a \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$$

  Podemos detener aquí Gauss pues la y ha quedado aislada: Pasamos a sistema:

  $$\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ -y+(a-2)z=2-a \\ (a-1)y=2-a \end{cases} \qquad \text{queda } y=\frac{2-a}{a-1} \text{ para } a\neq 1$$

  Sustituyendo en la 2^a ecuación para despejar z:

  $$-\frac{2-a}{a-1}+(a-2)z=2-a; \quad (a-2)z=2-a+\frac{2-a}{a-1}; \quad z=\frac{2-a+\frac{2-a}{a-1}}{a-2} \text{ para } a\neq 2$$

  Tenemos entonces:

  - Si $a\neq 1$ y $a\neq 2$, el sistema es compatible determinado.
  - Si $a=1$ queda el sistema:

    $$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y-z=1 \\ 0y=1 \end{cases}$$

    Cuya tercera ecuación nos dice que es incompatible.

- Si $a = 2$ queda el sistema:
  $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ -y=0 \\ y=0 \end{array}\right.$ equivalente a: $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y=0 \end{array}\right.$ el sistema es compatible indeterminado.

  Lo resolvemos pasando una incógnita al 2^0 miembro para que quede como parámetro, por ejemplo la z: $\left\{\begin{array}{r} y=0 \\ x=1-z \end{array}\right. \quad z \in R$

- CUESTIÓN 1.B.

  Para la elaboración de dos tipos de refrescos R1 y R2 se utilizan (además de agua) dos tipos de productos A y B. Cada refresco del tipo R1 contiene 3 gramos del producto A y 3 gramos del producto B y cada refresco del tipo R2 contiene 3 gramos del producto A y 6 gramos del producto B. Se dispone en total de 120 gramos de producto A y 180 gramos de producto B. ¿Cuántos refrescos de cada clase se han de elaborar para obtener un beneficio máximo sabiendo que con los refrescos R1 la ganancia es de 3 euros y con los refrescos R2 la ganancia es de 4 euros?

  selcs Sep 2006 Solución:

  Disponemos los datos en una tabla:

	R1	R2	
A	3	3	≤ 120
B	3	6	≤ 180

  Las variables serían:

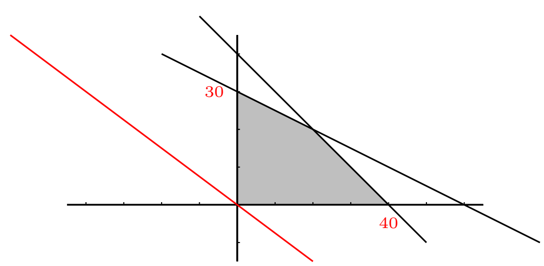
  x número de refrescos de tipo A

  y número de refrescos de tipo B

  La función a maximizar es $f(x, y) = 3x + 4y$

  Queda el sistema de inecuaciones con x, y positivas:

  $\left\{\begin{array}{l} 3x+3y \leq 120 \\ 3x+6y \leq 180 \end{array}\right.$

  Representamos:

  $$\left\{\begin{array}{ll} 3x+3y \leq 120 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 40 \\ \hline y & 40 & 0 \end{array} \\ 3x+6y \leq 180 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 60 \\ \hline y & 30 & 0 \end{array} \end{array}\right.$$

  Ahora la función igualada a 0:

  $f(xy) = 3x + 4y = 0 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -40 \\ \hline y & 0 & 30 \end{array}$

  El máximo se produce para: $f(20, 20) = 3{,}20 + 4{,}20 = 140$

- CUESTIÓN 2.A. [1.5 PUNTOS]

  Descomponer el número 45 en dos sumandos tales que la suma del doble del cuadrado del primero más siete veces el cuadrado del segundo, sea mínima.

selcs Sep 2006 Solución:

primer sumando: x

segundo sumando: $45 - x$

Escribimos la función cuyo mínimo buscamos:

$f(x) = 2x^2 + 7(45 - x)^2 = 9x^2 - 630x + 14175$

Derivando: $f'(x) = 18x - 630$. Anulamos la derivada: $18x - 630 = 0$, resulta: $x = 35$

Con el estudio del crecimiento comprobamos que es mínimo:

x		35	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$

- CUESTIÓN 2.B. [1.5 PUNTOS]

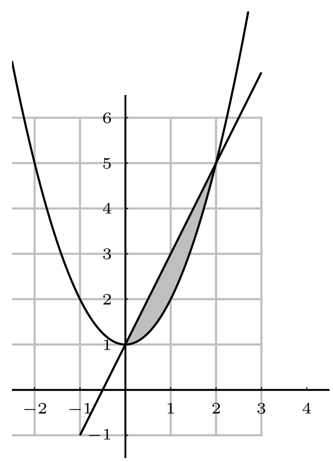
  Calcular el área limitada por la gráfica de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2x + 1$.

  selcs Sep 2006 Solución:

  Buscamos los puntos de corte de las dos funciones:
  $\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 \\ g(x) = 2x + 1 \end{cases}$ $x^2 + 1 = 2x + 1$; $x^2 - 2x = 0$; $x(x-2) = 0$; $x = 0, x = 2$

  Área$= \displaystyle\int_0^2$ recta $-$ parábola $=$

  $dx = \int_0^2 (2x - x^2) \quad dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}u^2$



- CUESTIÓN 3.A. [2 PUNTOS]

  Dada la función $f(x) = \dfrac{6x^2 - x^4}{8}$, se pide:

  (a) Calcular su dominio

  (b) Determinar las asíntotas y los cortes con los ejes

  (c) Determinar máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento

  (d) Hacer su representación gráfica aproximada

  selcs Sep 2006 Solución:

  Como es una función polinómica basta para representarla estudiar los puntos de corte y el crecimiento. Después contestaremos a los restantes apartados.

  Puntos de corte

  Puntos de corte con OX,

  $y = 0: \quad \dfrac{6x^2 - x^4}{8} = 0, \quad 6x^2 - x^4 = 0, \quad x^2(6 - x^2) = 0, \quad x = 0$ doble$, x = \pm\sqrt{6}$

  Puntos de corte con OY, $x = 0: \quad y = \frac{0}{8} = 0$, ya considerado.

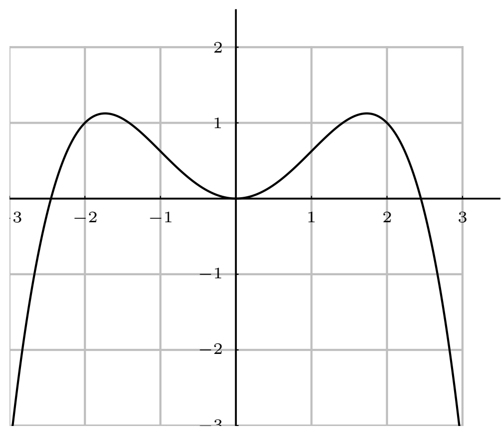
Crecimiento: se estudia el signo de la derivada:

$$f'(x) = \frac{12x - 4x^3}{8} = \frac{3x - x^3)}{2} = \frac{x(3 - x^2)}{2}$$

los factores se anulan para $x = 0, x = \pm\sqrt{3}$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
y'	$+$		$-$		$+$		$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Encajando la forma dada por el crecimiento con los puntos de corte podemos representar:



Ahora responderemos a los puntos del enunciado:

a) Dominio:

El dominio es todo R pues es una función polinómica.

b) Asíntotas y cortes con los ejes:

Asíntotas: no tiene por ser una función polinómica.

Por ejemplo para la horizontal $y = n$:

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2 - x^4}{8} = \infty$$

Cortes con los ejes ya hallados.

c) Crecimiento y máximos y mínimos

Como se ve en el estudio del crecimiento, como la función es continua y derivable siempre por ser polinómica, hay MÁXIMOS en $x = \pm\sqrt{3}$ y MÍNIMO en $x = 0$

- CUESTIÓN 3.B. [2 PUNTOS]

Determinar a y b para que la función $f(x) = x^2 + 2ax + b$ tenga un mínimo en el punto $(-1, 2)$.

selcs Sep 2006 Solución:

Que tenga un mínimo en $(-1, 2)$, supone dos cosas: a) que pasa por ese punto: $f(-1) = 2$, b) que su derivada se anula en $x = -1$

$f(-1) = 2 : \qquad (-1)^2 + 2a(-1) + b = 2, \qquad 1 - 2a + b = 2, \qquad -2a + b = 1$

$f'(-1) = 0:$ $\quad f'(x) = 2x + 2a,$ $\quad 2(-1) + 2a = 0,$ $\quad -2 + 2a = 0$, luego $a = 1$

Sustituyendo en la ecuación anterior: $-2 \cdot 1 + b = 1,$ $\quad b = 3$

Resulta: $f(x) = x^2 + 2x + 3$

- CUESTIÓN 4.A. [2 PUNTOS]

  En una ciudad se publican dos periódicos, el periódico A y el periódico B. La probabilidad de que una persona lea el periódico A es 0.1, la probabilidad de que una persona lea el periódico B es 0.1 y la probabilidad de que lea ambos es 0.02.

  (a) Calcular la probabilidad de que una persona no lea ningún periódico

  (b) Calcular la probabilidad de que una persona lea sólo un periódico

  selcs Sep 2006 Solución:

  Sabemos: $p(A) = 0'1, p(B) = 0'1, p(A \cap B) = 0'02$

  Hallemos primero la probabilidad de la unión que usaremos en los dos apartados:

  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'1 + 0'1 - 0'02 = 0'18$

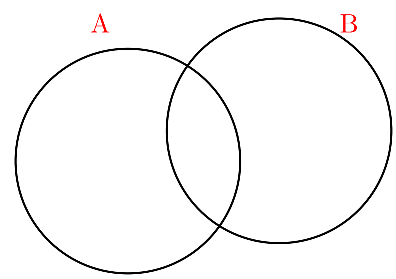
  a) "ningún periódico" es el complementario de "algún periódico", o sea de la unión:

  $p(\text{no lea ninguno}) = p(\text{ lea alguno})^c = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0'18 = 0'82$

  b)"solo uno" es decir "alguno pero no los dos":

  $A \cup B = (\text{solo lea uno}) \underbrace{\cup}_{disjunta} (A \cap B)$, por tanto

  $p(a \cup B) = p(\text{solo lea uno}) + p(A \cap B);$ $\quad 0'18 = p(\text{solo lea uno}) + 0'02$, despejando $p(\text{solo lea uno}) = 0'18 - 0'02 = 0'16$



- CUESTIÓN 4.B. [2 PUNTOS]

  Tres máquinas A_1, A_2 y A_3 producen, respectivamente el 50 %, 30 % y 20 % de los artículos de una fábrica. A_1 produce el 3 % de artículos defectuosos, A_2 el 4 % y A_3 el 5 %. Elegido un artículo al azar resulta defectuoso, ¿qué probabilidad hay de que proceda de cada máquina?

  selcs Sep 2006 Solución:

  A_1 produce el 50 % y son defectuosos el 3 %
  A_2 produce el 30 % y son defectuosos el 4 %
  A_1 produce el 20 % y son defectuosos el 5 %

  $\{A_1, A_2, A_3\}$ forman sistema completo de sucesos; por el teorema de Bayes:

  $$p(A_1/D) = \frac{p(D/A_1) \cdot p(A_1)}{\sum_1^3 p(A_i).p(B/A_i)} = \frac{0'03 \cdot 0'5}{0'03 \cdot 0'5 + 0'04 \cdot 0'3 + 0'05 \cdot 0'2} = 0'4$$

  De la misma forma:

  $p(A_2/D) = 0'32;$ $\quad p(A_3/D) = 0'27$

- CUESTIÓN 5.A. [1.5 PUNTOS]

  Tras múltiples observaciones se ha comprobado que el número de pulsaciones de los varones de 20 a 25 años se distribuye normalmente con una media de 72 pulsaciones y una desviación típica igual a 4. Si una muestra de 100 deportistas varones de esa edad da una media de 64 pulsaciones.

  (a) ¿Queda el valor de 72 pulsaciones dentro del intervalo de confianza para la media muestral al 95 % de confianza?

  (b) ¿Debemos aceptar la hipótesis de que hay diferencia significativa entre el número de pulsaciones de los deportistas y el número de pulsaciones de los varones en general, con un nivel de significación de 0.05?

  selcs Sep 2006 Solución:

  (a) Los datos son: $\bar{x} = 64, \sigma = 4, n = 100$.

  Para el nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

  Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 64 \pm 1'96 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{100}} = 64 \pm 0'784$

  Luego el valor de 72 pulsaciones queda fuera del intervalo de confianza

  (b) Contrastamos $H_0 : \mu = 72$ pulsaciones frente a $H_1 : \mu \neq 72$ pulsaciones, consideramos test bilateral.

  Los datos son: $\sigma = 4; \quad n = 100$

  nivel significación $\alpha = 0'05$ corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 72 \pm 1'96 \dfrac{4}{\sqrt{100}} = 72 \pm 0'784$ que da el intervalo $(71'216, 72'784)$.

  Como $\bar{x} = 64$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 72$ pulsaciones, concluimos que sí hay diferencia significativa para la muestra recogida entre los deportistas

- CUESTIÓN 5.B. [1.5 PUNTOS]

  Un fabricante de bombillas sabe que la desviación típica de la duración de esas bombillas es 100 horas. Calcula el tamaño de la muestra que se ha de someter a prueba para tener una confianza del 95 % de que el error de la duración media que se calcula sea menor que 10 horas.

  selcs Sep 2006 Solución:

  Los datos son: $\sigma = 100$ h;

  El error $= z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ha de ser ≤ 10 h

  El nivel de confianza del 95 % equivalente a nivel de significación del $\alpha = 0'05$ se corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  Sustituyendo: $1'96 \cdot \dfrac{100}{\sqrt{n}} \leq 10; \qquad 1'96 \cdot \dfrac{100}{10} \leq \sqrt{n}; \qquad (1'96)^2 \leq n; \qquad 384'16 \leq n$

  La muestra debe tener un tamaño igual o mayor que 385 para que el nivel de confianza sea del 95 %

16.2. Junio 2006

- CUESTIÓN 1.A.

  La suma de las tres cifras de un número es 6 y si se intercambian la primera y la segunda, el número aumenta en 90 unidades. Finalmente si se intercambian la segunda y la tercera, el número aumenta en 9 unidades. Calcular dicho número.

  selcs Jun 2006 Solución:

  Sea el número de tres cifras "xyz", las condiciones se pueden expresar:

  $x+y+z=6$
  y x z = x y z + 90
  x z y = x y z + 9

  expresando los números en su descomposición polinómica: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 100y+10x+z=100x+10y+z+90 \\ 100x+10z+x=100x+10y+z+9 \end{cases}$

  $\begin{cases} x+y+z=6 \\ -90x+90y=90 \\ 9z-9y=9 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+z=6 \\ -x+y=1 \\ -y+z=1 \end{cases}$ que resuelto por Gauss da $z=3, y=2, x=1$. El número es el 123.

- CUESTIÓN 1.B. Una persona tiene 500000 euros para invertir en dos tipos de acciones A y B. Las acciones de tipo A tienen bastante riesgo con un interés anual del 10 % y las acciones del tipo B son bastante seguras con un interés anual del 7 %. Decide invertir como máximo 300000 euros en las de tipo A y como mínimo 100000 euros en las de tipo B e invertir en las de tipo A por lo menos tanto como en las de tipo B. ¿Cómo debería invertir sus 500000 euros para maximizar sus intereses anuales?

  selcs Jun 2006 Solución:
  $x =$ número de euros invertido en acciones tipo A
  $y =$ número de euros invertido en acciones tipo B

  $\begin{cases} x+y \leq 500000 \\ x \leq 300000 \\ y \geq 100000 \\ x \leq y \end{cases}$

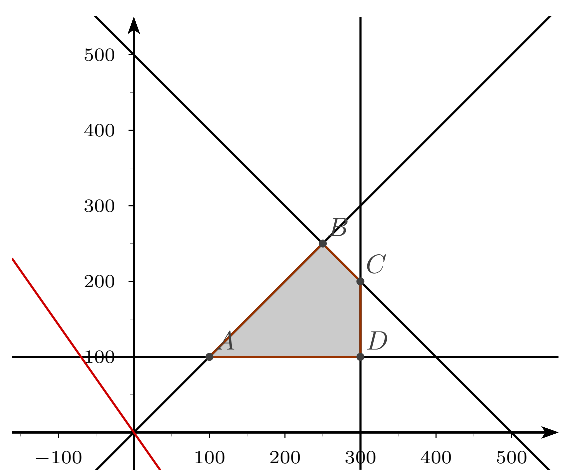
  Ganancia: $f(x,y) = 0'1x + 0'07y$
  Representamos (trabajaremos en miles):

  $x+y \leq 500$

x	0	500
y	500	0

  $x \leq y$

x	0	200
y	0	200

  Ahora la función igualada a 0:

  $f(xy) = 0'1x + 0'07y = 0$

x	0	−70
y	0	100

  Para maximizar hallamos y probamos los puntos B y C

  $\begin{cases} x+y=500 \\ x=y \end{cases}$ $B=(250,250,)$ $f(250,250) = 0'1 \cdot 250 + 0'07 \cdot 250 = 42'5$

  $\begin{cases} x+y=500 \\ x=300 \end{cases}$ $C=(300,200,)$ $f(300,200) = 0'1 \cdot 300 + 0'07 \cdot 200 = 44$

  Por tanto para maximizar los beneficios ha de invertir 300.000 € en las acciones de tipo A y 200.000 € en las acciones de tipo B que le producirían 44000 € .

- CUESTIÓN 2.A. [1.5 PUNTOS]

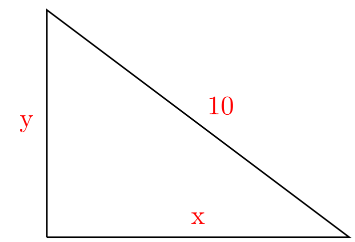
  Hallar las dimensiones de los lados de un triángulo rectángulo, de 10 metros de hipotenusa, para que su área sea máxima. ¿Cuál será dicha área?

  selcs Jun 2006 Solución:

  $S = \dfrac{x \cdot y}{2}$ máxima

  Por Pitágoras: $x^2 + y^2 = 10^2$; $\quad y = \sqrt{100 - x^2}$ sustituyendo:

  $S(x) = \dfrac{1}{2} x \sqrt{100 - x^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{100x^2 - x^4}$

  Derivando y anulando la derivada:

  $s'(x) = \dfrac{1}{2} \dfrac{200x - 4x^3}{2\sqrt{100x^2 - x^4}} = 0$

  Basta anular el numerador:

  $200x - 4x^3 = 0; \quad x(200 - x^2) = 0; \quad 200 - 4x^2 = 0; \quad x2 = 50; \quad x = \pm\sqrt{50}$

  Con el estudio del crecimiento comprobamos que es máximo:

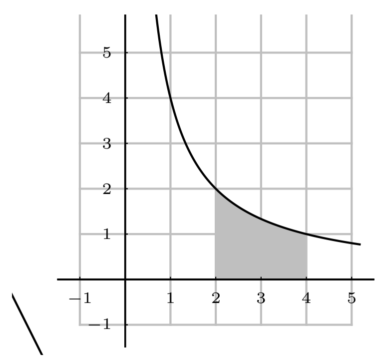
x		$\sqrt{50}$	
y'	$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$

  Hallamos el otro cateto $y = \sqrt{100 - \sqrt{50}^2} = \sqrt{50}$ y el área máxima: $S = \dfrac{\sqrt{50} \cdot \sqrt{50}}{2} = 25$

- CUESTIÓN 2.B. [1.5 PUNTOS]

  Hallar el área encerrada por la curva $x.y = 4$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

  selcs Jun 2006 Solución:

  Buscamos los puntos de corte de las dos funciones:

  Área$= \displaystyle\int_2^4 \frac{4}{x} dx = 4 \int_2^4 \frac{1}{x} dx = 4\left[\ln|x|\right]_2^4 =$
  $4(\ln 4 - \ln 2) = 4\ln 2 = 2'7722u^2$

- CUESTIÓN 3.A. [2 PUNTOS]

  Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$, se pide:

  (a) Calcular su dominio

  (b) Calcular sus asíntotas

  (c) Estudiar la monotonía y los extremos

  (d) Hacer su representación gráfica aproximada.

  selcn Junio 2006 Solución: Primero representaremos y después responderemos a los apartados que falten:

  1) Dominio y regionamiento Estudiamos el signo de la función.

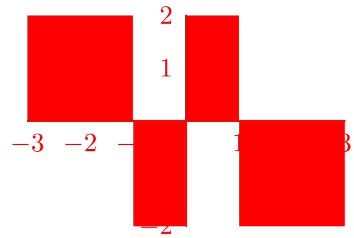
  Para ello escribimos la función en la forma:

$f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)(x-1)}$

Hallando las raíces de numerador y denominador resulta que delimitan región de cambio de signo de $y: \quad x = 0, x = 1, x = -1$

x		-1		0		1	
y	$-$		$+$		$-$		$+$

El dominio es $R - \{-1, 1\}$



2) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY: x = 0$, resulta $y = 0$

con $OX: y = 0$, resulta $x = 0$

3) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales $x = -1, \quad x = 1$

Asíntota horizontal $n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \infty$ no hay

Asíntota oblicua $y = mx + n$ $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^3-x} = 1$

$n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} (\dfrac{x^3}{x^2-1} - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0$

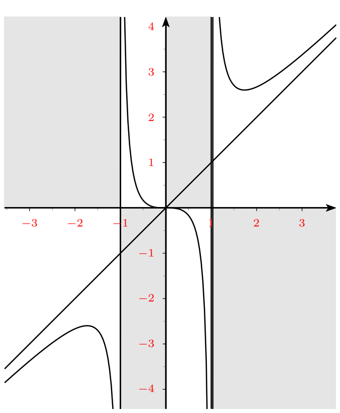
Asíntota oblicua $y = x$

4) Extremos y crecimiento Estudiamos el signo de la derivada

$f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0$

$x^4 - 3x^2 = 0 \quad x = 0, x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
y'	$+$		$-$		$-$		$+$
y	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	INFLEXION	$\searrow$	MIN	$\nearrow$



- CUESTIÓN 3.B. [2 PUNTOS]

Hallar los valores de a, b, c y d en la función $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que su tangente en el punto $(1, 1)$ es la recta $y = -x + 2$ y que tiene un extremo en el punto $(0, 2)$.

selcs Jun 2006 Solución:

$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

De que la tangente en el punto $(1, 1)$ sea la recta $y = -x + 2$, resulta:

Pasa por $(1, 1)$ luego $f(1) = 1$ sustituyendo "x" e "y" queda: $a + b + c + d = 1$

La pendiente en $x = 1$ es -1 es decir $f'(1) = -1$, sustituyendo "x" e "y'" en la derivada queda: $3a + 2b + c = -1$

De que tiene un extremo en el punto $(0, 2)$, resulta:

Pasa por $(0, 2)$ luego $f(0) = 2$ sustituyendo "x" e "y" queda: $d = 0$

Tiene extremo en $x = 0$ luego la derivada se anula en $x = 0$, queda: $f'(0) = c = 0$

Por tanto el sistema con cuatro incógnitas iniciales queda reducido a:

$$\left\{\begin{array}{l} a + b + 2 = 1 \\ 3a + 2b = -1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} -2 - 2b = 2 \\ 3a + 2b = -1 \\ \hline a = 1 \end{array} \qquad b = -2$$

El polinomio buscado es $y = x^3 - 2x^2 + 2$

- CUESTIÓN 4.A. [2 PUNTOS]

De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace dos dianas de cada tres disparos y el otro consigue tres dianas de cada cuatro disparos. Si los dos disparan simultáneamente, calcular:

(a) La probabilidad de que los dos acierten.

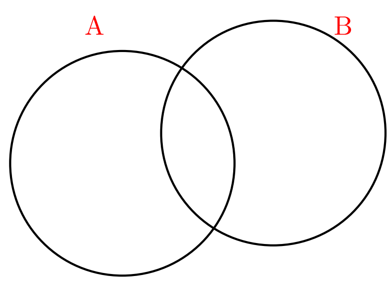
(b) La probabilidad de que uno acierte y el otro no.

(c) La probabilidad de que ninguno de los dos acierte.

(d) La probabilidad de que alguno acierte.

selcs Jun 2006 Solución:

Consideramos los sucesos: $A =$ acierta el primer tirador, $p(A) = \dfrac{2}{3}$; $B =$ acierta el segundo tirador; $p(B) = \dfrac{3}{4}$. Los sucesos son independientes.



a) $p(\text{ los dos acierten }) = p(A \cap B) = p(A).p(B) = \dfrac{2}{3}.\dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}$

b) $p(\text{ acierte uno solo }) = p((A \cap B^c) \underbrace{\cup}_{disjunta} (A^c \cap B)) = p((A \cap B^c)) + p(A^c \cap B)) = p(A).p(B^c) + p(A^c).p(B) = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{12}$

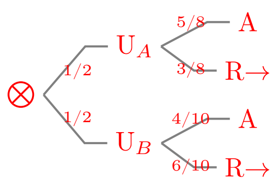
c) $p(\text{ ninguno acierte }) = p(A^c \cap B^c) = p(A^c).p(B^c) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$

d) $p(\text{ alguno acierte }) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{12}$

- CUESTIÓN 4.B. [2 PUNTOS]

  Tenemos una urna A con 3 bolas rojas y 5 azules y una urna B con 6 bolas rojas y 4 azules. Si sacamos de ellas una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja?

  selcs Jun 2006 Solución:

  Hay 8 bolas en la urna U$_A$ y 10 bolas en la U$_B$. Como se elige una de las dos urnas al azar la probabilidad de cada una es $\dfrac{1}{2}$.

  Sumando las dos ramas que terminan extrayendo bola roja: $p(R) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2}.\dfrac{6}{10} = 0'48$

- CUESTIÓN 5.A. [1.5 PUNTOS]

  Un estudio realizado en el ámbito de la Unión Europea concluye que la edad de los propietarios de un automóvil "Mercedes" en el momento de su adquisición tiene un comportamiento Normal con media 38 años y varianza 16. Un concesionario de dicha marca, instalado recientemente en España, ha vendido sólo 150 vehículos y ha comprobado que la edad media de sus clientes es de 38.3 años. Aceptando para los clientes españoles la varianza obtenida para los clientes europeos, ¿se puede aceptar que la edad media al adquirir un vehículo de esa marca es la misma en España que en Europa, para un nivel de significación del 5 %?

  selcs Jun 2006 Solución:

  Contrastamos $H_0 : \mu = 38$ años frente a $H_1 : \mu \neq 38$ años, consideramos test bilateral.

  Los datos son: $\bar{x} = 38'3, \sigma^2 = 16 \rightarrow \sigma = 4, n = 150$.

  El nivel de significación del 5 %, $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 38 \pm 1'96 \dfrac{4}{\sqrt{500}} = 38 \pm 0'65$ que da el intervalo $(37'35, 38'65)$.

  Como $\bar{x} = 38'3$ queda dentro del intervalo, se acepta la hipótesis nula de que $\mu = 38$ años.

  Se acepta que la edad media al adquirir un vehículo de esa marca es la misma en España que en Europa, para un nivel de significación del 5 %.

- CUESTIÓN 5.B. [1.5 PUNTOS]

  La media de las medidas de los diámetros de una muestra aleatoria de 200 bolas de rodamiento fabricadas por cierta máquina fue de 0.824 cm. Y la desviación típica fue de 0.042 cm. Hallar los límites de confianza al 95 % para el diámetro medio de las bolas fabricadas por esa máquina.

  selcs Jun 2006 Solución:

  Los datos son: $\bar{x} = 0'824, \sigma = 0'042, n = 200$.

  Para el nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

  Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0'824 \pm 1'96 \cdot \dfrac{0'042}{\sqrt{200}} = 0'824 \pm 0'038 \begin{cases} 0'8182 \\ 0'8297 \end{cases}$

Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 17

Año 2005

17.1. Septiembre 2005

- CUESTIÓN 1.A. [3 PUNTOS]

  Tres jugadores convienen que el que pierda una partida doblará el dinero que en ese momento tengan los otros dos. Después de haber perdido todos ellos una partida, cada jugador se retira con veinte euros. ¿Cuánto dinero tenían al principio del juego?

  selcs Sept 2005 Solución:

  Sea:

  x dinero inicial de J_1

  y dinero inicial de J_2

  z dinero inicial de J_3

  Primera partida (pierde J_1): $\left\{\begin{array}{ll} J_1: & x-y-z \\ J_2: & 2y \\ J_3: & 2z \end{array}\right.$

  Segunda partida (pierde J_2): $\left\{\begin{array}{ll} J_1: & 2(x-y-z)=2x-2y-2z \\ J_2: & 2y-(x-y-z)-2z=3y-x-z \\ J_3: & 4z \end{array}\right.$

  Tercera partida (pierde J_3): $\left\{\begin{array}{ll} J_1: & 2(2x-2y-2z)=4x-4y-4z \\ J_2: & 2(3y-x-z)=6y-2x-2z \\ J_3: & 4z-(2x-2y-2z)-(3y-x-z)=7z-x-y \end{array}\right.$

  Al final los tres jugadores tienen 20 €

  $\left\{\begin{array}{l} 4x-4y-4z=20 \\ 6y-2x-2z=20 \\ 7z-x-y=20 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x-y-z=5, \\ -x+3y-z=10, \\ -x-y+7z=20 \end{array}\right.$

  Tiene como matriz asociada:

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 10 \\ -1 & -1 & 7 & 20 \end{array}$$

Que triangulando por Gauss resulta:

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 8 & 80 \end{array}$$

que sustituyendo hacia arriba da como soluciones: $z = 10, \quad y = \dfrac{35}{2}, \quad x = \dfrac{65}{2}$.

- CUESTIÓN 1.B. [3 PUNTOS]

  Una fábrica de tableros de madera pintados produce dos tipos de tableros: tableros normales (una mano de imprimación más otra mano de pintura) y tableros extras (una mano de imprimación y tres manos de pintura). Disponen de imprimación para 10000 m^2 , pintura para 20000 m^2 y tableros sin pintar en cantidad ilimitada. Sus ganancias netas son: 3 euros por el m^2 m de tablero normal y 5 euros por el m^2 de tablero extra.

  (a) ¿Qué cantidad de tablero de cada tipo les conviene fabricar para que las ganancias sean máximas?

  (b) ¿Y si ganara 1 euro por el m^2 de tablero normal y 4 euros por el m^2 de tablero extra?

  selcs Sept 2005 Solución:

$x =$ número de miles de m^2 de tableros normales
$y =$ número de miles de m^2 de tableros extras
Precio total: $f(x, y) = 3000x + 8000y$ € buscamos el máximo

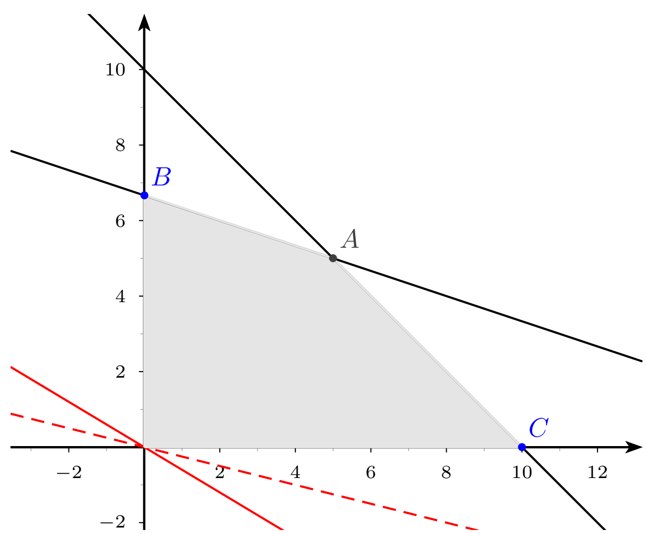
$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x + 3y \leq 20 \end{cases}$$

Representamos:

$$\begin{cases} x + y \leq 10 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 10 \\ \hline y & 10 & 0 \end{array} \\ x + 3y \leq 20 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 20 \\ \hline y & 6'66 & 0 \end{array} \end{cases}$$

Ahora la función igualada a 0:

$$f(x, y) = 3000x + 5000y = 0 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -5 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$$



a) Para maximizar la ganancia tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ que pasa por el punto A.

Hallemos sus coordenadas:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + 3y = 20 \end{cases} \qquad A = (5, 5)$$

$C(5, 5)$, o sea 5000 normales y 5000 extra. El beneficio sería: $f(5, 5) = 3000 \cdot 5 + 5000 \cdot 5 = 40000$ € .

b) Ahora la nueva función de beneficio sería: $f^*(x, y) = x + 4000y = 0 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -8 \\ \hline y & 0 & 2 \end{array}$

Y el máximo se alcanza en el punto $B(0, 6'6667)$

$f^*(0, 6'6667) = 0 + 4000 \cdot 6'6667 = 26667$ € .

- CUESTIÓN 2.A. [2 PUNTOS]

  Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, se pide:

  (a) Hallar el dominio y las asíntotas

  (b) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento

  (c) Hacer una representación gráfica aproximada.

  selcs Sept 2005 Solución:

  a) Dominio y regionamiento: Hallamos las raíces de numerador y denominador:

  Anulamos el denominador:

  $x^2 - 1 = 0 \quad \begin{array}{l} x_1 = +1 \\ x_2 = -1 \end{array}$

  A partir de las raíces de numerador y denominador hallamos los cambios de signo de la función.

  Luego delimitan región de cambio de signo de y : $x = 0, x = \pm 1$

x		-1		0		1	
y	-	|	+	|	-	|	+

  $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

  Además: Dominio $= R - \{-1, 1\}$

  b) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

  con OY : $x = 0$, resulta $y = 0$

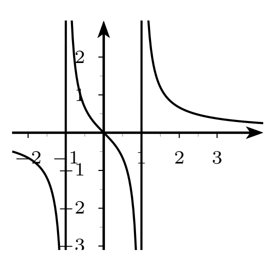
  con OX : $y = 0$, resulta el mismo, el origen

  c) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

  verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

  Asíntotas verticales, valores de x que anulan al denominador: $x = -1, x = 1$

  Asíntota horizontal $y = n$: $n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0; \quad y = 0$



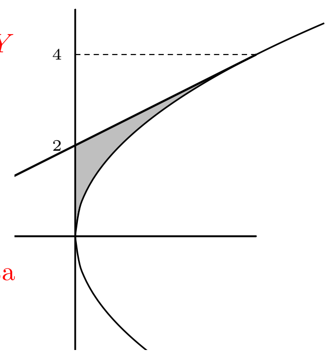
  d) Extremos y crecimiento: $f'(x) = \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$ Anulamos: $-x^2-1 = 0$ no tiene solución, luego la derivada es siempre positiva y por tanto la función es siempre decreciente

- CUESTIÓN 2.B. [2 PUNTOS]

Hallar el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y^2 = 4x$, el eje de ordenadas y la recta $x - 2y + 4 = 0$.

selcs Sept 2005 Solución:

En este caso nos interesa integrar con respecto al eje de ordenadas, intercambian sus papeles x e y:
la recta es: $x = 2y - 4$
los puntos de corte con la parábola son:
$\begin{cases} x = \frac{y^2}{4} \\ x = 2y - 4 \end{cases}$ $y^2 = 4(2y - 4)$, $y^2 - 8y + 16 = 0$, $y = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = 4$ doble, luego la recta es tangente a la parábola en el punto $(4, 4)$

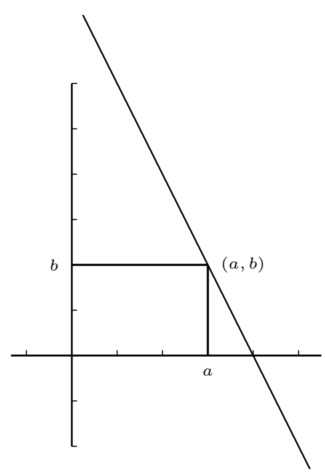


Por tanto el área viene dada por el área de la parábola con el eje OY entre 0 y 4 menos el área del triángulo:
$S = \displaystyle\int_0^4 \frac{y^2}{4} dy = \left[\frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$
Área del triángulo : $\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$
Área buscada: $\dfrac{16}{3} - 4 = \dfrac{4}{3}\ u^2$
Otra forma de hacerlo integrando con respecto al eje OX es (recta $y = \dfrac{x}{2} + 2$, parábola $y = \pm\sqrt{4x}$)
Área $= \displaystyle\int_0^4$ recta - parábola $= \displaystyle\int_0^4 (\frac{x}{2} + 2 - \sqrt{4x})dx =$
$\left[\dfrac{x^2}{4} + 2x - 2\dfrac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 = \left[\dfrac{x^2}{4} + 2x - 2\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^4 = 4 + 8 - \dfrac{32}{3} = \dfrac{4}{3}\ u^2$

- CUESTIÓN 3.A. [1.5 PUNTOS]

Dentro del triángulo limitado por los ejes OX, OY y la recta $2x + y = 8$, se inscribe un rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b) y $(0, b)$. Determinar el punto (a, b) al que corresponde un área máxima.

selcs Sept 2005 Solución:



Área del rectángulo $S = a \cdot b$ máximo.
Como el punto (a, b) está en la recta cumple la ecuación:
$2a + b = 8$, despejando $b = 8 - 2a$
Sustituyendo $S(a) = a \cdot (8 - 2a) = 8a - 2a^2$ ha de ser máximo.
Derivando y anulando la derivada:

$S'(a) = 8 - 4a = 0, \quad a = 2$

a		2	
S'	$+$		$-$
S	$\nearrow$		$\searrow$
		MÁXIMO	

Resulta $b = 8 - 2 \cdot 2 = 4$. El punto es $(2, 4)$

- CUESTIÓN 3.B. [1.5 PUNTOS]

  Dibuja la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

  (a) ¿En qué punto de la gráfica la tangente es paralela al eje de abscisas?

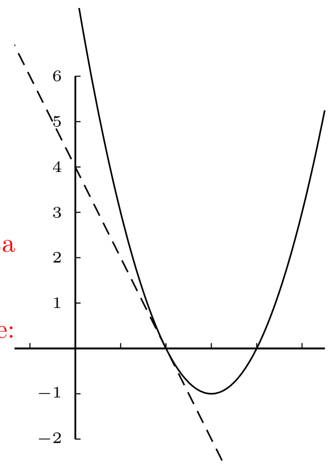
  (b) Hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $P(2, 0)$.

  selcs Sept 2005 Solución:

  Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:
  con OY : $x = 0$, resulta $y = 8$

  con OX : $y = 0$, resulta $x^2 - 6x + 8 = 0$ $\begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$

  El mínimo lo hallamos derivando y anulando la derivada:
  $f'(x) = 2x - 6 \quad x = 3 \quad y = f(3) = -1$. El punto es $(3, -1)$

  a) Precisamente en el mínimo que al ser cero la derivada dice que la recta tangente es horizontal

  b) La recta tangente en el punto x_0 es $y - y_0 = m(x - x_0)$ donde:
  $\begin{matrix} y_0 = f(x_0) = f(2) = 0 \\ m = f'(x_0) = f'(2) = 2 \cdot 2 - 6 = -2 \end{matrix}$ Queda $y - 0 = -2(x - 2)$
  Por tanto la recta tangente en el punto $x = 2$ es $y = -2x + 4$

- CUESTIÓN 4.A. [1.5 PUNTOS]

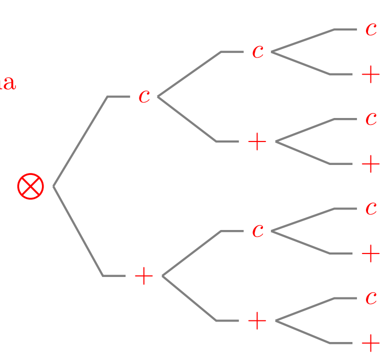
  Un juego consiste en lanzar tres monedas al aire, de manera que si las tres monedas aparecen de igual modo (tres caras o tres cruces) el jugador gana y en caso contrario se vuelve a tirar.

  (a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar en la primera tirada?

  (b) ¿Cuál es la probabilidad de perder las dos primeras tiradas y ganar la tercera?

  selcs Sept 2005 Solución:

  a) Ganar en la primera tirada triple se corresponde con la primera rama , tres caras, o la última, tres cruces, sumando sus probabilidades:
  $p(\text{ ganar }) = 0'5^3 + 0'5^3 = 0'25$
  b) Perder la primera tirada tiene como probabilidad por lo tanto
  $p(\text{ perder }) = 0'75$
  Esta probabilidad es independiente de la triple tirada, luego:
  $p(\text{ perder } 1^a \cap \text{ perder } 2^a \cap \text{ ganar } 3^a) = 0'75 \cdot 0'75 \cdot 0'25 = 0'14$

- CUESTIÓN 4.B. [1.5 PUNTOS]

  En un sistema de alarma, la probabilidad de que se produzca un peligro es 0.1. Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma funcione es 0'95. La probabilidad de que la alarma funcione sin haber peligro es 0'03. Hallar:

(a) Probabilidad de que habiendo funcionado la alarma no haya habido peligro.

(b) Probabilidad de que haya un peligro y la alarma no funcione.

selcs Sept 2005 Solución:

Llamamos A al suceso ”funcionar la alarma”.

Llamamos P al suceso ”producirse peligro ”; $p(P) = 0'1$; ; además nos dicen que $p(A/P) = 0'95$

Llamamos N al suceso ”no producirse peligro ”; resulta $p(N) = 0'9$; además nos dicen que $p(A/N) = 0'03$

$\{P, N\}$ forman sistema completo de sucesos. Por el teorema de Bayes:

a) Nos piden $p(N/A) = \dfrac{p(A/N) \cdot p(N)}{p(A/N) \cdot p(N) + p(A/P) \cdot p(P)} = \dfrac{0'03 \cdot 0'9}{0'03 \cdot 0'9 + 0'95 \cdot 0'1} = \dfrac{0'027}{0'027 + 0'095} = 0{,}2213$

b) Entiendo que piden la intersección $p(P \cap A^c = p(P).p(A^c/P) = 0'1 \cdot 0'05 = 0'005$

- CUESTIÓN 5.A. [2 PUNTOS]

  Se desea estudiar el gasto anual de fotocopias (en euros) de los estudiantes de bachillerato en Murcia. Para ello, se ha elegido una muestra aleatoria de 9 estudiantes, resultando los valores siguientes:

  100, 150, 90, 70, 75, 105, 200, 120, 80

  Se supone que la variable aleatoria objeto de estudio sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 12.

  Determinar un intervalo de confianza del 95 % para la media del gasto anual en fotocopias por estudiante.

  selcs Sept 2005 Solución:

  Antes que nada calculamos la media de la muestra: $\bar{x} = \dfrac{100 + 150 + 90 + 70 + 75 + 105 + 200 + 120 + 80}{9} = 110$

  Los datos son: $\bar{x} = 110, \sigma = 12, n = 9.$

  Para el nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

  Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 110 \pm 1'96 \cdot \dfrac{12}{\sqrt{9}} = 110 \pm 7'89 \begin{cases} 117'89 \\ 102'11 \end{cases}$

  El intervalo de confianza para la media de la nueva producción de lámparas es $(102'11, 117'89)$

- CUESTIÓN 5.B. [2 PUNTOS]

  El peso de los niños varones a las diez semanas de vida se distribuye según una normal con desviación típica de 87 gramos. ¿Cuántos datos son suficientes para estimar, con una confianza del 95 %, el peso medio de esa población con un error no superior a 15 gramos?

  selcs Sept 2005 Solución:

  Los datos son: $\sigma = 87$ gr ;

El error $= z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ha de ser ≤ 15 gr

El nivel de confianza del 95 % equivalente a nivel de significación del $\alpha = 0'05$ se corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

Sustituyendo: $1'96 \cdot \dfrac{87}{\sqrt{n}} \leq 15$; $1'96 \cdot \dfrac{87}{15} \leq \sqrt{n}$; $(11'368)^2 \leq n$; $129'23 \leq n$

La muestra debe tener un tamaño igual o mayor que 130 para que el nivel de confianza sea del 95 %

17.2. Junio 2005

- CUESTIÓN 1.A. [3 PUNTOS]

Estudiar para qué valores de k es compatible el sistema siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-y=4 \\ -x+\frac{1}{2}y=-2 \\ x+ky=2 \end{array}\right.$$

Resolverlo para los valores de k que lo hacen compatible indeterminado.

selcs Jun 2005 Solución:

Triangulamos la matriz asociada al sistema:

$$\left(\begin{array}{rrr} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2^a \cdot 2+1^a \\ 3^a. \cdot 2-1^a \end{array} \quad \left(\begin{array}{lrr} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k+2 & 0 \end{array}\right)$$

Volviendo a sistema queda:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-y=4 \\ (2k+2)y=0 \end{array}\right. \qquad 2k+2=0, \quad k=-\frac{1}{2}$$

queda por tanto:

Si $k \neq -\dfrac{1}{2}$ queda $\left\{\begin{array}{l} 2x-y=4 \\ y=0 \end{array}\right.$ sistema compatible determinado: $y=0, x=2$.

Si $k=-\dfrac{1}{2}$ queda $\left\{\begin{array}{l} 2x-y=4 \\ 0y=0 \end{array}\right.$ el sistema se reduce a la ecuación $2x-y=4$, sistema compatible indeterminado, la solución se puede expresar $y=2x-4, \quad x \in R$

- CUESTIÓN 1.B. [3 PUNTOS]

Un grupo de alumnos formado por veinte chicas y diez chicos organizan un viaje. Para que el viaje les salga más económico deciden pedir trabajo por las tardes en una compañía que se dedica a realizar encuestas y que contrata a equipos de jóvenes de dos tipos:

Tipo A: Parejas (una chica y un chico).

Tipo B: Equipos de cuatro (tres chicas y un chico). La compañía paga 30 euros por la tarde de la pareja y 50 euros por la tarde del equipo de cuatro.

(a) ¿Cómo les conviene distribuirse para sacar la mayor cantidad posible de dinero?

(b) ¿Y si les pagara 30 euros por la tarde de la pareja y 30 euros por la tarde del equipo de cuatro?

selcs Jun 2005 Solución:

x = número de parejas y = número de equipos de cuatro

Precio total: $f(x,y) = 30x + 50y$ € buscamos el máximo

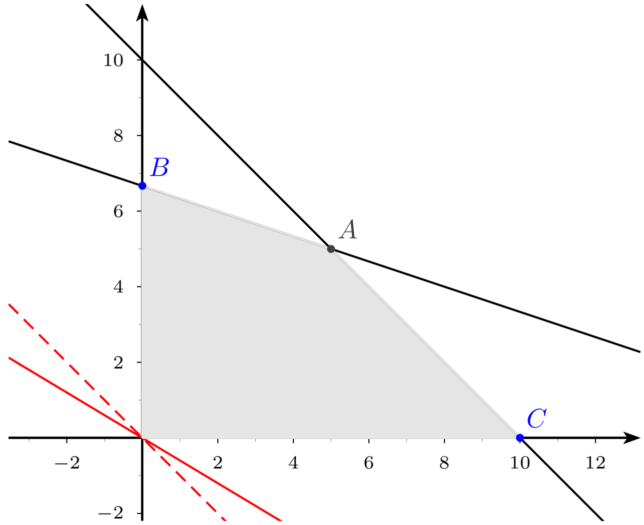
$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x + 3y \leq 20 \end{cases}$$

Representamos:

$$\begin{cases} x + y \leq 10 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 10 \\ \hline y & 10 & 0 \end{array} \\ x + 3y \leq 20 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 20 \\ \hline y & 6'66 & 0 \end{array} \end{cases}$$

Ahora la función igualada a 0:

$$f(x,y) = 30x + 50y = 0 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -5 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$$



a) Para maximizar la ganancia tomaríamos la paralela a $f(x,y) = 0$ que pasa por el punto A.

Hallemos sus coordenadas:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + 3y = 20 \end{cases} \qquad A = (5,5)$$

$C(5,5)$, o sea 5 parejas y 5 de cuatro. El beneficio sería: $f(5,5) = 30 \cdot 5 + 50 \cdot 5 = 400$ € .

b) Ahora la nueva función de beneficio sería: $f^*(x,y) = 30x + 30y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -2 \\ \hline y & 0 & 2 \end{array}$

Ahora el máximo se da en cualquier punto de la recta AC pues:

$f^*(5,5) = 30 \cdot 5 + 30 \cdot 5 = 300$ € .

$f^*(10,0) = 30 \cdot 10 = 300$ € .

Los puntos de esa recta que tengan coordenadas enteras son: $(5,5)(6,4),(7,3),(8,2),(9,1),(10,0)$

- CUESTIÓN 2.A. [2 PUNTOS]

  Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, se pide:

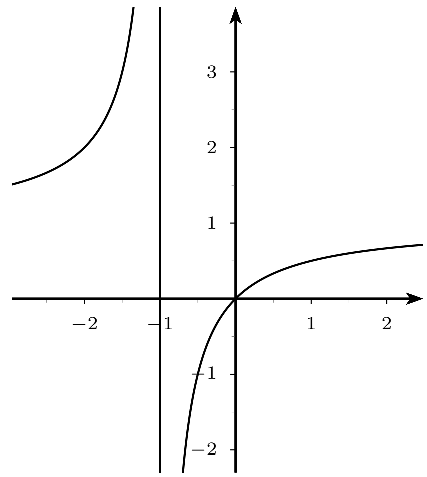
  (a) Calcular su dominio y asíntotas.

  (b) Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

  (c) Hacer su representación gráfica aproximada.

  selcs Jun 2005 Solución:

Se trata de una hipérbola por tanto para representarla veremos los puntos de corte y las asíntotas:



a) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY : x = 0$, resulta $y = \dfrac{0}{1} = 0$

con $OX : y = 0$, resulta el mismo

b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales, anulamos el denominador $x + 1 = 0, \quad x = -1$ pues $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x}{x+1} = \pm\infty$

Asíntota horizontal $y = n$: $\quad n = \displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1; \quad y = 2$

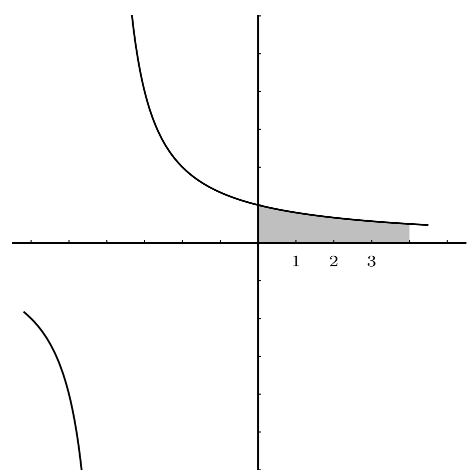
Como piden el crecimiento hacemos la derivada:

$f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, como es siempre positiva f es siempre creciente.

- CUESTIÓN 2.B. [2 PUNTOS]

La curva $y = \dfrac{4}{x+4}$, el eje OX, el eje OY y la recta $x = 4$ limitan una superficie S. Calcular el área de S.

selcs Jun 2005 Solución:



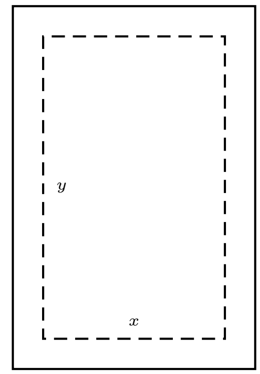
La curva es una hipérbola.

$$S = \int_0^4 \frac{4}{x+4}dx = [4\ln|x+4|]_0^4 = 4(\ln 8 - \ln 4) = 2'77\ u^2$$

- CUESTIÓN 3.A. [1.5 PUNTOS]

Una hoja de papel debe tener 18 cm2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtener razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie de papel.

selcs Jun 2005 Solución:



Área texto: $x \cdot y = 18\ cm^2$
Área folio: $S = (x+2)(y+4)$ mínima.
Sustituyendo:
$S(x) = (x+2)(\frac{18}{x}+4) = \frac{36}{x} + 4x + 26$ mínimo
Derivamos y anulamos la derivada:
$S'(x) = -\frac{36}{x^2} + 4 = \frac{-36+4x^2}{x^2}$; $\quad -36+4x^2 = 0, \quad x = \pm 3$

x		3	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$

MÍNIMO

En consecuencia $y = \frac{18}{3} = 6$

Por tanto el folio tiene 5 de ancho por 10 de alto.

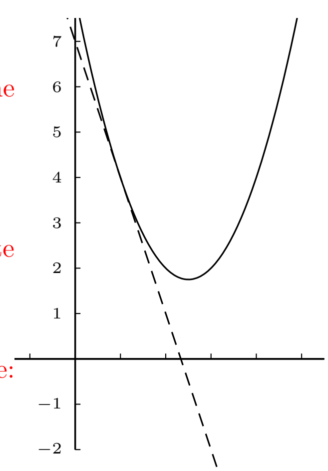
- CUESTIÓN 3.B. [1.5 PUNTOS]

Dibuja la parábola $f(x) = x^2 - 5x + 8$.

(a) ¿En qué punto de la gráfica la tangente es paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes?

(b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto $P(1,2)$. (nota: El punto es exterior a la parábola se puede resolver haciendo que la recta $y-2 = m(x-1)$ toque en un solo punto a la parábola; preferimos cambiar enunciado: tangente por $P(1,4)$)

selcs Jun 2005 Solución:



Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:
con OY : $x = 0$, resulta $y = 8$

con OX : $y = 0$, resulta $x^2 - 5x + 8 = 0$, $\quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25-40}}{2}$ no tiene solución, la parábola no corta al eje OX
El mínimo lo hallamos derivando y anulando la derivada:
$f'(x) = 2x - 5 = 0, \quad x = 2'5; f(2'5) = 1'75$ Mínimo en $(2'5, 1'75)$

a) La bisectriz del del primer y tercer cuadrantes tiene de pendiente $m = 1$ luego nos piden encontrar en qué punto la derivada es 1.
$f'(x) = 2x - 5 = 1 \quad x = 3; f(3) = 9 - 15 + 8 = 2$ El punto es $(3,2)$

b) La recta tangente en el punto x_0 es $y - y_0 = m(x - x_0)$ donde:
$y_0 = f(x_0) = f(1) = 4$
$m = f'(x_0) = f'(1) = 2 - 5 = -3$
Queda $y - 4 = -3(x-1)$
Por tanto la recta tangente en el punto $x = 2$ es $y = -3x + 7$

- CUESTIÓN 4.A. [1.5 PUNTOS]

  Tres amigos juegan con un dado de la siguiente forma. Cada uno lanzará el dado a lo sumo una vez. Si el primero en lanzar saca un seis, gana y se acaba la partida; si no saca un seis, lanza el segundo, que gana si obtiene un cuatro o un cinco, acabando la partida. Si tampoco gana éste, lanza el dado el tercero, que gana si obtiene tres, dos o uno. Aunque no gane el tercero, la partida se termina.

  Hallar la probabilidad que tiene cada uno de ganar y la probabilidad de que la partida termine sin ganador.

  selcs Jun 2005 Solución:

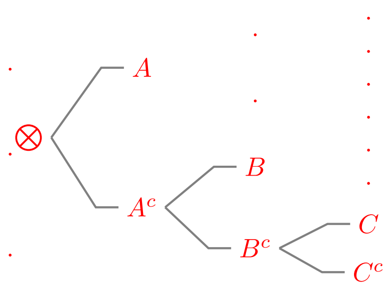
  Llamamos A ganar el primero, C ganar el segundo,C ganar el tercero.

  a) Ganar el primero: $p(A) = \dfrac{1}{6}$

  b) Ganar el segundo: $p($ ganar el segundo $) = p($ no gana el primero $) \cdot p($ gana el segundo $) = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{2}{6} = \dfrac{5}{18}$

  c) Ganar el tercero: $p($ ganar el tercero $) = p($ no gana el primero $) \cdot p($ no gana el segundo $) \cdot p($ gana el tercero $) = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{3}{6} = \dfrac{5}{18}$

  No gana nadie: $p($ no gana nadie $) = p($ no gana el primero $) \cdot p($ no gana el segundo $) \cdot p($ no gana el tercero $) = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{3}{6} = \dfrac{5}{18}$

- CUESTIÓN 4.B. [1.5 PUNTOS]

  Una fábrica dispone de tres máquinas A_1, A_2 y A_13 que fabrican tornillos. Se sabe que la máquina A_1 produce un $1\,\%$ de tornillos defectuosos, la máquina A_2 un $3\,\%$ y la máquina A_3 un $2\,\%$. La máquina A_1 produce el $25\,\%$ del total de unidades, la A_2 el $40\,\%$ y la A_3 el $35\,\%$. Al cabo de un día, se toma un tornillo al azar de la producción total y se pide:

  (a) Calcular la probabilidad de que ese tornillo sea defectuoso.

  (b) Si ha resultado defectuoso, calcular la probabilidad de que pertenezca a la máquina A_2 .

  selcs Jun 2005 Solución:

  a) Teorema de la probabilidad total

  $$p(D) = p(D/A_1) \cdot p(A_1) + p(D/A_2) \cdot p(A_2) + (D/A_3) \cdot p(A_3) = \frac{1}{100} \cdot \frac{25}{100} + \frac{3}{100} \cdot \frac{40}{100} + \frac{2}{100} \cdot \frac{35}{100} = 0'0215$$

  b) Teorema de Bayes

  $$p(A_2/D) = \frac{p(D/A_2) \cdot p(A_2)}{p(D/A_1) \cdot p(A_1) + p(D/A_2) \cdot p(A_2) + +(D/A_3) \cdot p(A_3)} = \frac{0'03 \cdot 0'4}{0'0215} = 0'5581$$

- CUESTIÓN 5.A. [2 PUNTOS]

  Una muestra aleatoria simple de 25 estudiantes responde a un test de inteligencia, obteniendo una media de 100 puntos. Se sabe por experiencia que la variable "inteligencia de todos los estudiantes" es normal con una desviación típica igual a 10, pero se desconoce la media. ¿Entre qué limites se hallará la verdadera inteligencia media de todos los estudiantes, con un nivel de confianza de 0.99?

selcs Jun 2005 Solución:

Los datos son: $\bar{x} = 100, \sigma = 10, n = 25$.

Para el nivel de confianza del 99 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100 \pm 2'58 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{25}} = 100 \pm 5'16 \begin{cases} 105'16 \\ 94'84 \end{cases}$

El intervalo de confianza para la media de la inteligencia de todos los estudiantes es $(94'84, 105'16)$

- CUESTIÓN 5.B. [2 PUNTOS]

Se supone que la distribución de la temperatura del cuerpo humano en la población tiene de media 37^0C y de desviación típica 0.85^0C. Se elige una muestra de 105 personas y se pide: (a) Calcular la probabilidad de que la temperatura media sea menor de 36.9^0C (b) Calcular la probabilidad de que la temperatura media esté comprendida entre 36.5^0C y 37.5^0C

selcs Jun 2005 Solución:

Distribución muestral

Los parámetros de la población son: $\mu = 37^0$C, $\sigma = 0'85^0$C

La muestra es de $n = 105$ personas.

La distribución muestral es por tanto $N(37, \dfrac{0'85}{\sqrt{105}}) = N(37, 0'082)$

a)

$p(\bar{X} \leq 36'9) = \left\{ \text{tipificando } z = \dfrac{36'9 - 37}{0'082} = -1'2 \right\} = p(Z \leq -1'2) = 1 - p(Z \leq -1'2) = 1 - 0'8869 = 0'1131$

b)

$p(36'5 \leq \bar{X} \geq 37'5) = \left\{ \text{tipificando } \begin{array}{l} z_1 = \frac{36'5-37}{0'082} = -6'09 \\ z_2 = \frac{37'5-37}{0'082} = 6'09 \end{array} \right\} = p(Z \leq 6'9) - p(Z \leq -6'9) \approx 1 - 0 = 1$

Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 18

Año 2004

18.1. Septiembre 2004

- CUESTIÓN 1.A. [3 PUNTOS]

  En una compañía envasan los bombones en cajas de 250 gr, 500 gr y 1 kg. Cierto día se envasaron 60 cajas en total, habiendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 gr) que de tamaño mediano (500 gr). Sabiendo que el precio del kilo de bombones es de 40 euros y que el importe total de los bombones envasados asciende a 1250 euros, ¿cuántas cajas se han envasado de cada tipo?

  selcs Sep 2004 Solución:

  x: número de cajas de 250 gr

  y: número de cajas de 500 gr

  z: número de cajas de 1 kg

  $$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ x=y+5 \\ \frac{40}{4}x+\frac{40}{2}y+40z=1250 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ x-y=5 \\ 10x+20y+40z=1250 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ x-y=5 \\ x+2y+4z=125 \end{array}\right.$$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 125 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a-1^a \\ 3^a-1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -2 & -1 & -55 \\ 0 & 1 & 3 & 65 \end{pmatrix} 3^a\cdot 2+2^a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -2 & -1 & -55 \\ 0 & 0 & 5 & 75 \end{pmatrix}$$

  queda $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ 2y+z=55 \\ 5z=75 \end{array}\right.$ sustituyendo hacia arriba resulta: $z=15, y=20, x=25$

- CUESTIÓN 1.B. [3 PUNTOS]

  Un estudiante dedica parte de su tiempo al reparto de propaganda publicitaria. La empresa A le paga 5 céntimos por cada impreso repartido y la empresa B, con folletos más grandes, le paga 7 céntimos por impreso. El estudiante lleva dos bolsas, una para los impresos A, en la que caben 120, y otra para los impresos B, en la que caben 100. Ha calculado que cada día es capaz de repartir 150 impresos como máximo. ¿Cuántos impresos tendrá que repartir de cada clase para que su beneficio diario sea máximo?

selcs Sep 2004 Solución:

Sean:
$x =$ número de impresos de empresa A
$y =$ número de impresos de empresa B
Ganancia: $f(x,y) = 5x + 7y$ céntimos

$$\left.\begin{array}{l} x \leq 120 \\ y \leq 100 \\ x + y \leq 150 \end{array}\right\}$$

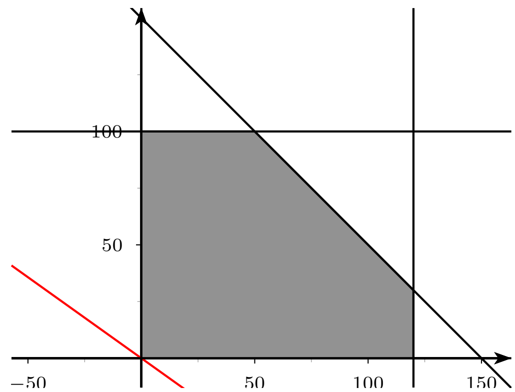
Representamos: $x + y \leq 150$

x	0	150
y	150	0

Ahora la función igualada a 0:

$f(xy) = 5x + 7y = 0$

x	0	-70
y	0	50



Para maximizar los ingresos tomaríamos la paralela a $f(x,y) = 0$ más alejada, la que pasa por el punto $(50, 100)$, hallamos sus coordenadas:

$P(50, 100); \quad f(50, 100) = 5 \cdot 50 + 7 \cdot 100 = 950 = 9'5$ €

- CUESTIÓN 2.A. [1.5 PUNTOS]

Hallar los valores de a y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + x + 1$ tenga un máximo en el punto $x = 1$ y un mínimo en el punto $x = 2$.

selcs Sep 2004 Solución:

En ambos puntos la derivada ha de ser nula:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$

$$\left.\begin{array}{ll} f'(1) = 0 & 3a + 2b + 1 = 0 \\ f'(2) = 0 & 3a4 + 2b2 + 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} 3a + 2b = -1 \\ 12a + 4b = -1 \end{array}\right.$$

sistema que tiene como soluciones $a = \dfrac{1}{6}; \quad b = -\dfrac{3}{4}$

El polinomio es $f(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 + x + 1$

- CUESTIÓN 2.A. [1.5 PUNTOS]

Hallar el área comprendida entre las dos parábolas $y = x^2$ e $y = -2x^2 + 3$.

selcs Sep 2004 Solución:

Hallamos los puntos de corte entre las dos parábolas:

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -2x^2 + 3 \end{array}\right. \quad x^2 = -2^2 + 3; \quad 3x^2 = 3; \quad x = \pm 1$$

Por tanto él área viene dada por el valor absoluto de la integral de la resta de la funciones:

$$\int_{-1}^{1} x^2 - (-2x^2+3)dx = \int_{-1}^{1} (-3x^2-3)dx$$

Como la figura es simétrica respecto el eje de ordenadas basta hacer la integral de la mitad positiva:

$$\int_{0}^{1} (-3x^2-3)dx = \left[-x^3-3x\right]_0^1 = -1-3-0 = -2$$

Por tanto el área comprendida entre las dos parábolas es $S=4$

- CUESTIÓN 3.A. [2 PUNTOS]

  Dada la curva $y = \dfrac{1}{x-1}$ se pide:

  (a) Dominio y asíntotas.

  (b) Simetrías y cortes con los ejes.

  (c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

  (d) Máximos y mínimos, si los hay.

  (e) Una representación aproximada de la curva.

  selcs Sep 2004 Solución:

  (a) El denominador se anula para $x=1$, luego el dominio es $R-\{1\}$

  Asíntotas verticales, la función se irá a infinito en el punto en que se anule el denominador: $x=1$

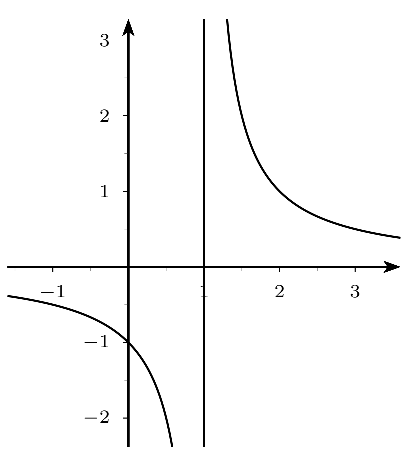
  $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

  $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$

  Asíntota horizontal $y=n$: $\quad n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0; \quad y=0$

  (b) Simetrías cortes con los ejes.

  Para ver simetrías hacemos $f(-x) = \dfrac{1}{-x-1} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$
  por tanto no hay simetrías respecto a los ejes.
  Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:
  con $OY: x=0$, resulta $y = \dfrac{1}{2}$
  con $OX: y=0$, resulta $\frac{1}{x-1} = 0, sinsolucin$
  (c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento: estudiamos el signo de la derivada: $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$
  que, como es siempre negativa, nos dice que la función es siempre decreciente.
  (d) Como conclusión de lo anterior no hay máximos ni mínimos relativos. (tampoco absolutos)
  (e) Una representación aproximada de la curva.



- CUESTIÓN 3.B. [2 PUNTOS]

Cierto artículo se vende a un precio u otro según la cantidad comprada, de acuerdo con los siguientes datos:

A 100 euros el kilo, si $0 \leq x < 5$

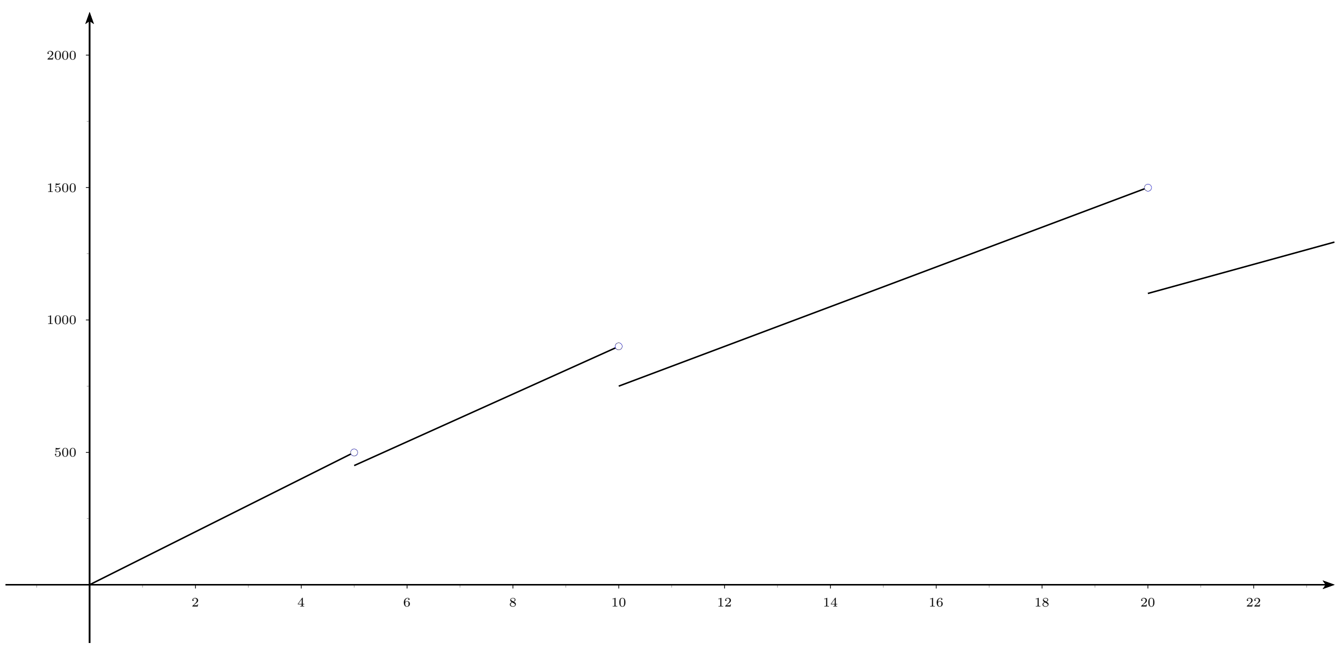
A 90 euros el kilo, si $5 \leq x < 10$

A 75 euros el kilo, si $10 \leq x < 20$

A 55 euros el kilo, si $20 \leq x$,

donde x representa el peso en kilos. Escribir la función que representa la ganancia obtenida por el vendedor, representarla gráficamente y estudiar su continuidad

selcs Sep 2004 Solución: $f(x) = \begin{cases} 100x & si \quad 0 \leq x < 5 \\ 90x & si \quad 5 \leq x < 10 \\ 75x & si \quad 10 \leq x < 20 \\ 55x & si \quad 20 \leq x \end{cases}$

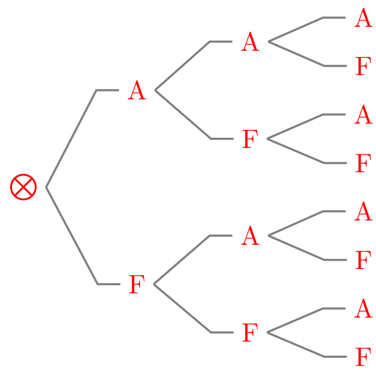


Observamos que la función no es continua en $x = 5, \quad x = 10, \quad x = 20$, donde hay saltos finitos.

- CUESTIÓN 4.A. [1.5 PUNTOS]

¿Cuál es la probabilidad de torpedear un barco, sabiendo que sólo pueden lanzarse tres torpedos y que la probabilidad de hacer blanco con un torpedo es 0.20?

selcs Sep 2004 Solución: A representa acertar, F fallar, la tercera extracción no tiene alternativas:



La probabilidad de la última trayectoria, que fallen las tres, es: $0'80 \cdot 0'80 \cdot 0'80 = 0'512$

Por tanto la probabilidad de acertar al menos una vez es $p = 1 - 0'512 = 0'488$

- CUESTIÓN 4.B. [1.5 PUNTOS]

  Una determinada pieza puede ser fabricada por dos máquinas M_1 y M_2 que funcionan independientemente. La máquina M_1 fabrica el 70 % de las piezas y la máquina M_2 el 30 %. El 15 % de las piezas fabricadas por M_1 y el 2 % de las fabricadas por M_2 salen defectuosas. Calcular la probabilidad de que una pieza sea defectuosa.

  selcs Sep 2004 Solución:

  D representa pieza defectuosa. Por el Teorema de la Probabilidad Total:

  $p(D) = p(M_1) \cdot p(D/M_1) + p(M_2) \cdot p(D/M_2) = 0'70 \cdot 0'15 + 030 \cdot 0'02 = 0'111$

- CUESTIÓN 5.A. [2 PUNTOS]

  En una determinada población juvenil el peso, en kilos, sigue una distribución normal con una desviación típica 10 kg. Se extrae una muestra aleatoria de 25 jóvenes cuya media muestral es de 48 kg. Para un nivel de significación del 5 %, ¿podemos aceptar la hipótesis de que la media poblacional es de 50 kg?

  selcs Sep 2004 Solución: Contrastamos $H_0 : \mu = 50$ frente a $H_1 : \mu \neq 50$,

  La desviación típica es $\sigma = 10$

  El nivel de significación del 5 %, $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 50 \pm 1'96 \dfrac{10}{\sqrt{25}} = 50 \pm 3'92 = \begin{cases} 46'08 \\ 53'92 \end{cases}$

  que da el intervalo $(46'08, 53'92)$.

  Como $\bar{x} = 48$ € queda dentro del intervalo, se acepta la hipótesis nula de que $\mu = 50$ años.

- CUESTIÓN 5.B. [2 PUNTOS]

Una agencia de alquiler de automóviles necesita estimar el número medio de kilómetros diarios que realiza su flota de automóviles; para tal fin, en varios días de la semana toma los recorridos de 100 vehículos de su flota y obtiene que la media muestral es de 165 km/día y la desviación típica muestral 6 km/día. Bajo la hipótesis de normalidad de la característica en estudio (número de kilómetros por día), construir un intervalo de confianza para la media de dicha distribución con un nivel de confianza del 95 %.

selcs Sep 2004 Solución: Los datos son: $\bar{x} = 165, \sigma = 6, n = 100$.

Para el nivel de confianza del 5 %, $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 165 \pm 1'96 \cdot \dfrac{6}{\sqrt{10}} = 165 \pm 1'176 \begin{cases} 166'176 \\ 163'824 \end{cases}$

El intervalo de confianza para el número medio de kilómetros diarios es $(163'824, 166'176)$

18.2. Junio 2004

- CUESTIÓN 1.A. [3 PUNTOS]

  Encontrar tres números A, B y C, tales que su suma sea 210, la mitad de la suma del primero y del último más la cuarta parte del otro sea 95 y la media de los dos últimos sea 80.

  selcs Jun 2004 Solución:

  Sea: x= número A; y= número B; z= número C

  $$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=210 \\ \frac{x+z}{2}+\frac{y}{4}=95 \\ \frac{y+z}{2}=80 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x+y+z=210 \\ 2x+y+2z=480 \\ y+z=160 \end{array}\right.$$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 2 & 1 & 2 & 380 \\ 0 & 1 & 1 & 160 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a\cdot+1^a\cdot(-2) \\ 3^a\cdot-1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 0 & -1 & 0 & -40 \\ 0 & 1 & 1 & 160 \end{pmatrix} 3^a\cdot+2^a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 0 & -1 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & 120 \end{pmatrix}$$

  Pasando a sistema: $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=210 \\ -y=-40 \\ z=120 \end{array}\right.$ los números son A=50, B=40, C=120

- CUESTIÓN 1.B. [3 PUNTOS]

  Un autobús Madrid-París ofrece plazas para fumadores al precio de 100 euros y para no fumadores al precio de 60 euros. Al no fumador se le deja llevar 50 kg de peso y al fumador 20 kg. Si el autobús tiene 90 plazas y admite un equipaje de hasta 3000 kg, ¿cuál debe ser la oferta de plazas de la compañía para optimizar el beneficio?

  selcs Jun 2004 Solución:

  Sean:

  $x=$ número plazas de fumador

  $y=$ número plazas de no fumador

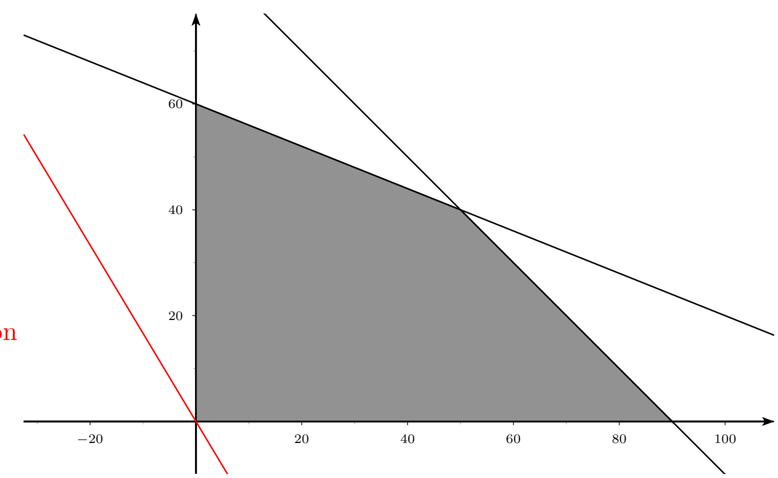
  Ganancia: $f(x,y)=100x+60y$ céntimos

  $$\left.\begin{array}{l} x+y\le 90 \\ 20x+50y\le 3000 \end{array}\right\}$$

  Representamos: $x+y\le 90$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 90 \\ \hline y & 90 & 0 \end{array}$

  $20x+50y\le 3000$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 150 \\ \hline y & 60 & 0 \end{array}$ Ahora la función igualada a 0:

  $f(xy)=100x+60y=0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -60 \\ \hline y & 0 & 100 \end{array}$

  Para maximizar los ingresos tomaríamos la paralela a $f(x,y)=0$ más alejada, la que pasa por el punto $(90,0)$, y el beneficio máximo sería:

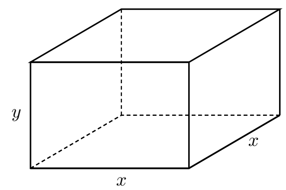
  $f(90,0)=100\cdot 90+0=9000$ €

- CUESTIÓN 2.A. [2 PUNTOS]

Determinar las condiciones más económicas de una piscina abierta al aire, de volumen 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y del suelo necesite la cantidad mínima de material.

selcs Jun 2004 Solución:

Sean:
x = lado de la base
y = altura
Volumen $V = x^2 \cdot y = 32$
Superficie de paredes y suelo $S = x^2 + 4xy = x^2 + 4x\dfrac{32}{x^2} = x^2 + \dfrac{128}{x}$ mínimo



$$S'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = \frac{2x^3 - 128}{x^2} = 0; \quad 2x^3 - 128 = 0, \quad x^3 = 64; \quad x = \sqrt[3]{64} = 4$$

x		4	
S'	$-$		$+$
S	$\searrow$		$\nearrow$
		MÍNIMO	

Las dimensiones son: lado de la base 4, altura 2

- CUESTIÓN 2.B. [2 PUNTOS]

Hallar el área de la región limitada por las gráficas $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = x^2$.

selcs Jun 2004 Solución:

Hallamos los puntos de corte entre las dos gráficas:

$$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = x^2 \end{cases} \quad x^3 - x = x^2; \quad x^3 - x^2 - x = 0; \quad x(x^2 - x - 1) = 0, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como se cortan en tres puntos él área viene dada por la suma del valor absoluto de la integral de la resta de la funciones en cada intervalo:

$$\int (x^3 - x - x^2)dx = \int (x^3 - x^2 - x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (x^3 - x^2 - x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = -\frac{13 + \sqrt{125}}{24}$$

$$\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^0 (x^3 - x^2 - x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^0 = \frac{13 - \sqrt{125}}{24}$$

El área total es: $S = \dfrac{13 + \sqrt{125}}{24} + \dfrac{13 - \sqrt{125}}{24} = \dfrac{13}{12} = 1'09$ u^2

- CUESTIÓN 3.A. [1.5 PUNTOS]

Dada la curva: $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ se pide:

(a) Dominio y asíntotas.

(b) Simetrías y cortes con los ejes.

(c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(d) Máximos y mínimos, si los hay.

(e) Una representación aproximada de la misma.

selcs Jun 2004 Solución:

(a) El denominador se anula para $x = \pm 1$, luego el dominio es $R - \{-1, 1\}$

Asíntotas verticales, la función se irá a infinito en el punto en que se anule el denominador:

$x = -1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = \infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = -\infty$

$x = 1$

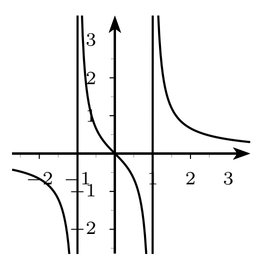
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$

Asíntota horizontal $y = n$: $\quad n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0; \quad y = 0$

(b) Simetrías cortes con los ejes.

Para ver simetrías hacemos $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-1} = -\frac{x}{x^2-1} = -f(x)$ por tanto hay simetrías respecto al origen.



Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:
con OY : $x = 0$, resulta $y = 0$

con OX : $y = 0$, resulta el mismo, el origen

(c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento: estudiamos el signo de la derivada: $f'(x) = y' = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$ que, como es siempre negativa, nos dice que la función es siempre decreciente.

(d) Como conclusión de lo anterior no hay máximos ni mínimos relativos. (tampoco absolutos)

(e) Una representación aproximada de la curva.

- CUESTIÓN 3.B. [1.5 PUNTOS]

Calcular a, b, c y d para que sea continua la función $f(x)$ y representarla gráficamente.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si} \quad x < 2 \\ 3x - a & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ b & \text{si} \quad 3 \le x < 5 \\ -x + c & \text{si} \quad 7 \le x < 7 \\ d & \text{si} \quad 7 \le x \end{cases}$$

selcs Jun 2004 Solución:

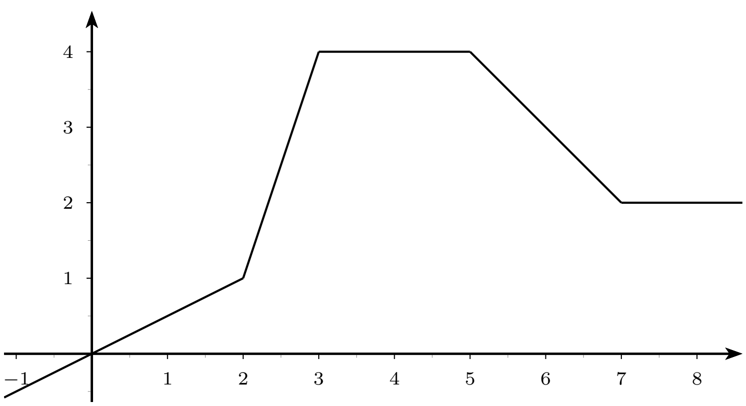
Para que sea continua han de coincidir los límites laterales:

En $x = 2$ $\quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{2}x = 1$, $\quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3x - a) = 6 - a$ $\qquad$ Para que sea continua $6 - a = 1; \quad a = 5$

En $x = 3$ $\quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (3x - 5) = 4$, $\quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} b = b$ $\qquad$ Para que sea continua $b = 4$

En $x = 5$ $\quad \lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} 4 = 4$, $\quad \lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} (-x + c) = -5 + c$ $\qquad$ Para que sea continua $-5 + c = 4; \quad c = 9$

En $x = 7$ $\quad \lim_{x \to 7^-} f(x) = \lim_{x \to 7^-} (-x + 9) = 2$, $\quad \lim_{x \to 7^+} f(x) = \lim_{x \to 7^+} d = d$ $\qquad$ Para que sea continua $d = 2$

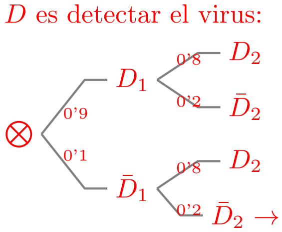


- CUESTIÓN 4.A. [1.5 PUNTOS]

Un ordenador personal está contaminado por un virus y tiene cargados dos programas antivirus que actúan independientemente uno del otro. El programa p_1 detecta la presencia del virus con una probabilidad de 0.9 y el programa p_2 detecta el virus con una probabilidad de 0.8. ¿Cuál es la probabilidad de que el virus no sea detectado?

selcs Jun 2004 Solución:

D es detectar el virus:



La probabilidad de que no lo detecte ningún antivirus es $0'1 \cdot 0'2 = 0'02$

- CUESTIÓN 4.B [1.5 PUNTOS]

En un colegio el 4 % de los chicos y el 1 % de las chicas miden más de 175 cm de estatura. Además el 60 % de los estudiantes son chicas. Si se selecciona al azar un estudiante y es más alto de 175 cm, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante sea chica?

selcs Jun 2004 Solución:

Llamamos B al suceso "medir más 175 cm".

Llamamos O al suceso "ser chico "; $p(O) = 0'40; \quad p(B/O) = 0'04$

Llamamos A al suceso "ser chica "; $p(A) = 0'60; \quad p(B/D) = 0'01$

$\{O, A\}$ forman sistema completo de sucesos. Por el teorema de Bayes:

$$p(A/B) = \frac{p(B/A) \cdot p(A)}{p(B/O) \cdot p(O) + p(B/A) \cdot p(A)} = \frac{0'01 \cdot 0'60}{0'04 \cdot 0'40 + 0'01 \cdot 0'60} = 0'273$$

- CUESTIÓN 5.A. [2 PUNTOS]

  Se quiere conocer la permanencia media de pacientes en un hospital, con el fin de estudiar una posible ampliación del mismo. Se tienen datos referidos a la estancia, expresada en días, de 800 pacientes, obteniéndose los siguientes resultados: $\bar{x} = 8{,}1$ días; s =9 días. Se pide obtener un intervalo de confianza del 95 % para la estancia media.

  selcs Jun 2004 Solución:

  Los datos son: $\bar{x} = 8'1$, desviación típica de la muestra =9, $n = 800$.

  Para el nivel de confianza del 5 %, $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

  Estimamos $\sigma = 9$

  Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 8'1 \pm 1'96 \cdot \dfrac{9}{\sqrt{800}} = 8'1 \pm 0'6236 \begin{cases} 8'72366 \\ 7'47633 \end{cases}$

  El intervalo de confianza para el número medio de días es $(7'47633, 8'72366)$

- CUESTIÓN 5.B. [2 PUNTOS]

  Se quiere comprobar, con un nivel de significación de 0.05, si una muestra de tamaño $n = 20$ con media $\bar{x} = 10$ procede de una población que se distribuye según una normal de media igual a 14 y desviación típica igual a 3.

  selcs Sep 2004 Solución:

  Contrastamos $H_0 : \mu = 14$ frente a $H_1 : \mu \neq 14$,

  La desviación típica es $\sigma = 3$

  El nivel de significación del 5 %, $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 14 \pm 1'96 \dfrac{3}{\sqrt{20}} = 14 \pm 1'3148 = \begin{cases} 15'3148 \\ 12'6852 \end{cases}$

  que da el intervalo $(12'6852, 15'3148)$.

  Como $\bar{x} = 10$ € queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 14$, la muestra no procede de esa población con ese nivel de significación.