SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2003

TINGKAT PROVINSI TAHUN 2002

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. $A + B + C = \frac{1}{(-1)^1} + (-1)^1 + \frac{1}{(1)^1} = -1 - 1 + 1$

   $\therefore \quad A + B + C = -1$

2. $y = \frac{x-1}{2x+3}$

   2yx + 3y = x − 1

   x − 2yx = 3y + 1

   x (1 − 2y) = 3y + 1

   $\therefore \ x = \frac{3y+1}{1-2y}$

3. $(a + b)^4 = a^0b^4 + 4a^1b^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b^1 + a^4b^0$

   $S = 2^0 \cdot (x-2)^4 + 4 \cdot 2^1 \cdot (x-2)^3 + 6 \cdot 2^2 \cdot (x-2)^2 + 4 \cdot 2^3 \cdot (x-2)^1 + 2^4 \cdot (x-2)^0$

   Mengingat teori di atas, maka : $S = (2 + (x-2))^4$

   $\therefore \quad S = \mathbf{x^4}$

4. Misal X = 2,525252··· maka 100X = 252,525252···

   100X − X = 252,525252··· − 2,525252···

   99X = 250

   $X = \frac{250}{99}$

   Karena 250 dan 99 relatif prima, maka m = 250 dan n = 99

   ∴ m + n = 250 + 99 = **349**

5. Misal bilangan itu adalah : abcd

   Agar abcd sebesar-besarnya maka a harus sebesar-besarnya → a = 9.

   Karena a = 9, agar a + b + c + d = 9, maka b = 0 ; c = 0; d = 0. → M = 9000

   Agar abcd sekecil-kecilnya maka a harus sekecil-kecilnya dan karena a ≠ 0, maka a = 1.

   b juga harus sekecil-kecilnya, maka b = 0.

   c juga harus sekecil-kecilnya, maka c = 0.

   Karena a + b + c + d = 9, maka d = 8 → m = 1008

   M − m = 9000 − 1008 = 7992 = 8 · 999 = 8 · 27 · 37

   $M - m = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 37$

   ∴ Maka faktor prima tebesar dari M − m adalah **37**

6. Agar akar-akar persamaan tersebut real maka Disk = $b^2 - 4\cdot(1)\cdot c \ge 0$ → $4c \le b^2$
   Karena $1 \le c \le 6$, maka $4 \le 4c \le 24$
   Untuk b = 1 maka $4c \le 1$ → tidak ada nilai c yang memenuhi
   Untuk b = 2 maka $4c \le 4$ → $c \le 1$ → nilai c yang memenuhi ada satu, yaitu c = 1
   Untuk b = 3 maka $4c \le 9$ → $c < 3$ → nilai c yang memenuhi ada dua, yaitu c = 1 ; 2
   Untuk b = 4 maka $4c \le 16$ → $c \le 4$ → nilai c yang memenuhi ada empat, yaitu c = 1 ; 2; 3; 4
   Untuk b = 5 maka $4c \le 25$ → $c < 7$ → nilai c yang memenuhi ada enam, yaitu c = 1 ; 2; 3; 4; 5; 6
   Untuk b = 6 maka $4c \le 36$ → $c < 7$ → nilai c yang memenuhi ada enam, yaitu c = 1 ; 2; 3; 4; 5; 6
   ∴ Maka banyaknya pasangan yang memenuhi ada : 0 + 1 + 2 + 4 + 6 + 6 = **19**

7. $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p \equiv \sim p \vee q$
   $\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$
   $p : k \ge m$ $\quad\quad q : k > n$
   Karena $q : k > n$, maka ingkaran dari q adalah $\sim q \equiv k \le n$
   ∴ Pernyataan yang benar adalah : **$k \ge m$ dan $k \le n$**

8. Kapasitas pipa tergantung dari luas penampangnya.
   $L_{pakai} \ge L_{seharusnya}$
   $n \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi\, (3)^2 \ge \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (10)^2$
   $9n \ge 100$ → $n \ge 11{,}111\cdots$
   ∴ n_{min} = **12**

9. Misal masing-masing keliling bangun = K
   Untuk segitiga → 3s = K → s = K/3 → Luas = $\frac{1}{2}\, s^2 \sin 60^\circ = \frac{1}{36}\sqrt{3}K^2$
   Untuk lingkaran → $2\pi R = K$ → $R = \frac{K}{2\pi}$ → Luas = $\pi\, R^2 = \frac{K^2}{4\pi}$
   Untuk persegi → 4s = K → $s = \frac{K}{4}$ → Luas = $s^2 = \frac{K^2}{16}$
   Karena $\pi = 3{,}142\cdots < 4$ dan $\sqrt{3} < 2$, maka
   $\frac{1}{4\pi} > \frac{1}{16} > \frac{1}{18} = \frac{2}{36} > \frac{\sqrt{3}}{36}$
   ∴ Karena $\frac{1}{4\pi} > \frac{1}{16} > \frac{\sqrt{3}}{36}$, maka bangun yang memiliki luas terbesar adalah : **lingkaran**

10. Luas segitiga semula = $\frac{1}{2}$ ab sin C
    Luas segitiga akhir = $\frac{1}{2}$ (3a)(3b)sin C = $9 \cdot \frac{1}{2}$ ab sin C
    Luas segitiga akhir = 9 · Luas segitiga semula
    ∴ Perbandingan luas segitiga akhir dengan luas segitiga semula adalah = **9**

11. (a) setiap anggota tergabung ke dalam tepat dua komisi
(b) setiap dua komisi memiliki tepat satu anggota bersama
Karena ada 4 komisi maka banyaknya pasangan komisi yang bisa dibuat adalah ${}_4C_2 = 6$.
Karena banyaknya pasangan komisi ada 6 banyaknya banyaknya anggota minimal adalah 6 sebab jika kurang dari 6 maka akan ada seorang anggota yang tergabung dalam lebih dari 2 komisi.
Jika terdapat lebih dari 6 anggota maka akan ada seorang anggota yang masuk dalam sebuah komisi tetapi tidak masuk ke dalam tiga komisi lain. Hal ini bertentangan dengan (a) bahwa seorang anggota tergabung ke dalam tepat dua komisi.
Contoh pembagian keenam anggota ke dalam empat komisi yang memenuhi (a) dan (b) adalah :
Misalkan komisi tersebut adalah A, B, C dan D dengan a_i menyatakan anggota ke-i dengan $1 \le i \le 6$.

Komisi A	Komisi B	Komisi C	Komisi D
a_1	a_1	a_2	a_3
a_2	a_4	a_4	a_5
a_3	a_5	a_6	a_6

∴ Banyaknya pengurus agar memenuhi syarat tersebut adalah **6**

12. $a * (-a) = a + (-a) + a \cdot (-a) = -a^2$
$S = \{ a \text{ bilangan real} \mid -a^2 > a \} = \{ a \text{ bilangan real} \mid a(a + 1) < 0 \}$
∴ **$S = \{ a \text{ bilangan real} \mid -1 < a < 0 \}$**

13.

AB adalah diameter dan D terletak pada lingkaran → $\angle ADB = 90^\circ$
Karena AD = CD dan $BD \perp AC$ maka ΔABC adalah segitiga sama kaki dengan AB = BC. Karena BC = AB = diameter lingkaran yang berarti bernilai tetap dan B adalah titik yang tetap maka lengkung yang terjadi adalah berupa setengah lingkaran dengan pusat titik B.
∴ Lengkung yang terjadi adalah berupa **setengah lingkaran**

14. $1^5 - 1 = 0$; $2^5 - 2 = 30$. Untuk $n > 2$ maka $n^5 - n > 30$.
Semua bilangan membagi 0. Karena salah satu bilangan tersebut adalah 30 maka nilai maksimum bilangan yang membagi $1^5 - 1$, $2^5 - 2$, ⋯ , $n^5 - n$ adalah 30. Akan dibuktikan bahwa 30 membagi $n^5 - n$ untuk setiap n bilangan asli.
Alternatif 1 :
Misal : $N = n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)\,n\,(n + 1)(n^2 + 1)$
Karena $(n - 1)$, n dan $(n + 1)$ adalah tiga bilangan berurutan maka N pasti habis dibagi 3! = 6.

- Untuk n = 5k
  Karena n adalah faktor dari N dan n habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5
- Untuk n = 5k + 1
  n − 1 = 5k
  Karena (n − 1) adalah faktor dari N dan (n − 1) habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5

- Untuk n = 5k + 2
  $n^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5(5k^2 + 4k + 1)$
  Karena $(n^2 + 1)$ adalah faktor dari N dan $(n^2 + 1)$ habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5
- Untuk n = 5k + 3
  $n^2 + 1 = (5k + 3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 = 5(5k^2 + 6k + 2)$
  Karena $(n^2 + 1)$ adalah faktor dari N dan $(n^2 + 1)$ habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5
- Untuk n = 5k + 4
  $n + 1 = 5k + 5 = 5(k + 1)$
  Karena (n + 1) adalah faktor dari N dan (n + 1) habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5

Karena untuk n = 5k ; n = 5k + 1 ; n = 5k + 2 ; n = 5k + 3 dan n = 5k + 4 semuanya menghasilkan N habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5 untuk n bilangan bulat positif.
Karena N habis dibagi 6 dan 5 serta 6 dan 5 relatif prima maka N pasti habis dibagi 6⋅5 = 30

Alternatif 2 :
$n^5 - n = (n - 1)\, n\, (n + 1)(n^2 + 1) = (n - 1)\, n\, (n + 1)(n^2 - 4 + 5)$
$n^5 - n = (n - 1)\, n\, (n + 1)(n^2 - 4) + 5(n - 1)\, n\, (n + 1)$
$n^5 - n = (n - 2)(n - 1)\, n\, (n + 1)(n + 2) + 5(n - 1)\, n\, (n + 1)$
Karena (n – 2), (n – 1) , n, (n + 1) dan (n + 2) adalah lima bilangan bulat berurutan maka perkalian (n – 2) (n – 1) n (n + 1) (n + 2) habis dibagi 5! = 120 atau juga habis dibagi 30 sebab 30 membagi 120.
Karena (n – 1) , n dan (n + 1) adalah 3 bilangan berurutan maka (n – 1) n (n + 1) pasti habis dibagi 3! = 6. Karena 5 dan 6 relatif prima maka 5 (n – 1) n (n + 1) habis dibagi 5 ⋅ 6 = 30.
∴ Bilangan nilai maksimum bilangan yang membagi $1^5 - 1, 2^5 - 2, \cdots, n^5 - n$ adalah 30.

15. Misal $T = a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \cdots + a_n \cdot n!$
Karena 7! = 5040 maka $n_{maksimum} = 6$
Jika n = 5 maka $T_{maks} = 1 + 2\cdot2! + 3\cdot3! + 4\cdot4! + 5\cdot5! = 1 + 4 + 18 + 96 + 600 = 719 < 2002$
T = 2002 hanya jika n = 6
Karena untuk n = 5 maka $T_{maks} = 719$ maka $2002 - 719 = 1283 \le a_6 \cdot 6! \le 2002$ → hanya jika $a_6 = 2$

Maka $a_1 + a_2\cdot2! + a_3\cdot3! + a_4\cdot4! + a_5\cdot5! = 2002 - 2\cdot6! = 562$
Jika n = 4 maka $T_{maks} = 1 + 2\cdot2! + 3\cdot3! + 4\cdot4! = 119$
$562 - 119 = 443 \le a_5\cdot5! \le 562$ → hanya jika $a_5 = 4$

Maka $a_1 + a_2\cdot2! + a_3\cdot3! + a_4\cdot4! = 562 - 4\cdot5! = 562 - 480 = 82$
Jika n = 3 maka $T_{maks} = 1 + 2\cdot2! + 3\cdot3! = 23$
$82 - 23 = 59 \le a_4\cdot4! \le 82$ → hanya jika $a_4 = 3$

Maka $a_1 + a_2\cdot2! + a_3\cdot3! = 82 - 3\cdot4! = 82 - 72 = 10$
Jika n = 2 maka $T_{maks} = 1 + 2\cdot2! = 9$
$10 - 9 = 1 \le a_3\cdot3! \le 10$ → hanya jika $a_3 = 1$

Maka $a_1 + a_2\cdot2! = 10 - 1\cdot3! = 10 - 6 = 4$
Jika n = 1 maka $T_{maks} = 1 = 1$
$4 - 1 = 3 \le a_2\cdot2! \le 4$ → hanya jika $a_2 = 2$

Maka $a_1 = 4 - 2\cdot2! = 4 - 4 = 0$
∴ Pasangan terurut (n,a_n) adalah { (1,0) ; (2,2) ; (3,1) ; (4,3) ; (5,4) ; (6,2) }

16. Alternatif 1 :
Dua digit terakhir dari 43^1 adalah 43
Dua digit terakhir dari 43^2 adalah 49
Dua digit terakhir dari 43^3 adalah 07
Dua digit terakhir dari 43^4 adalah 01
Dua digit terakhir dari 43^5 adalah 43 ⋯⋯ dst.
Karena $43 = 4 \cdot 10 + 3$ maka 2 digit terakhir dari 43^{43} sama dengan dua digit terakhir dari 43^3 yaitu 07. Sehingga 43^{43} = ⋯⋯07 = 100t + 7 = 4k + 7 dengan t dan k adalah bilangan bulat.

$$43^{43^{43}} = 43^{4k+7} = 43^{4k} \cdot 43^7 = \left(43^4\right)^k \cdot 43^7$$

Karena dua digit terakhir dari 43^4 adalah 01 maka dua digit terakhir dari $(43^4)^k$ adalah juga 01.
Dua digit terakhir dari 43^7 sama dengan dua digit terakhir dari 43^3 yaitu 07.

Maka dua digit terakhir dari $43^{43^{43}}$ sama dengan dua digit terakhir dari perkalian dua digit terakhir $(43^4)^k$ dengan dua digit terakhir dari 43^7.

Karena 01 x 07 = 07. Maka 2 digit terakhir dari $43^{43^{43}}$ adalah 07.

Alternatif 2 :
$43^{43} = (4 \cdot 11 - 1)^{43}$ → $43^{43} \equiv (-1)^{43} \pmod 4$ → $43^{43} \equiv -1 \pmod 4$ atau $43^{43} \equiv 3 \pmod 4$
Berarti $43^{43} = 4k + 3$ dengan k adalah bilangan asli.

$$43^{43^{43}} = 43^{4k+3} = (1849)^{2k} \cdot 43^3$$

$$43^{43^{43}} \equiv (49)^{2k} \cdot 43^{43} \pmod{100}$$

$$43^{43^{43}} \equiv (2401)^k \cdot 7 \pmod{100} \text{ sebab } 43^{43} \equiv 7 \pmod{100}$$

$$43^{43^{43}} \equiv 1^k \cdot 7 \pmod{100}$$

$$43^{43^{43}} \equiv 7 \pmod{100}$$

Karena $43^{43^{43}} \equiv 7 \pmod{100}$ berarti $43^{43^{43}} = 100p + 7$ dengan p adalah bilangan asli.

∴ $43^{43^{43}}$ jika dibagi 100 akan bersisa 7

17. Misal S = suami dan I = isteri
Kemungkinan susunannya adalah :
a. SIISSIIS
Karena yang berdekatan adalah harus pasangan suami isteri maka kasus ini seolah-olah menempatkan 4 obyek (Pasangan suami isteri) dalam 4 tempat. Banyaknya cara = ${}_4P_4$ = 24 cara.
b. ISSIISSI
Kasus ini sama dengan (a). Banyaknya cara adalah 24.
c. SSSSIIII
Bagian yang ditengah harus pasangan suami isteri. Dalam kasus ini kita tetapkan pasangan suami isteri yang ditengah. Banyaknya kemungkinan ada 4 pasangan. Maka kita menempatkan 3 orang suami di sebelah kiri dalam 3 tempat. Banyaknya cara ada ${}_3P_3$. Kita juga menempatkan 3 orang isteri di sebelah kanan dalam 3 tempat. Banyaknya cara ada ${}_3P_3$. Banyaknya cara dalam kasus ini adalah ${}_3P_3 \cdot 4 \cdot {}_3P_3 = 6 \cdot 4 \cdot 6 = 144$ cara.
d. IIIISSSS
Kasus ini sama dengan (c). Banyaknya cara ada 144 cara.

Maka banyaknya cara = 24 + 24 + 144 + 144 = 336 cara
∴ Banyaknya cara menempatkan keempat pasang suami isteri ke-8 kursi adalah 336

18\. a. Untuk a = 1

- Untuk a = 1 dan b = 1.
  Untuk c = 1 maka nilai d ada 9 kemungkinan. Untuk c = 2 ada 8 kemungkinan. ···· dst.
  Maka untuk a = 1 dan b = 1 ada 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45 kemungkinan.
- Untuk a = 1 dan b = 2
  Sama dengan untuk a = 1 dan b = 1 dikurangi dengan untuk c = 1.
  Maka untuk a = a dan b = 2 ada 45 − 9 = 36 kemungkinan.
- Untuk a = 1 dan b = 3
  Ada 36 − 8 = 28 kemungkinan
  ⋮
  dst

Untuk a = 1 ada 45 + 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1

b. Untuk a = 2
Sama dengan untuk a = 1 dikurangi untuk b = 1
Untuk a = 2 ada 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1
⋮

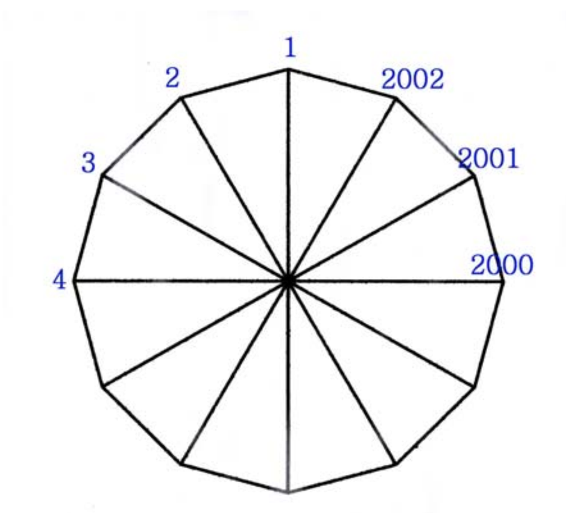
dst

Misalkan banyaknya bilangan = N.

N = 1 · 45 + 2 · 36 + 3 · 28 + 4 · 21 + 5 · 15 + 6 · 10 + 7 · 6 + 8 · 3 + 9 · 1 = 495

∴ Banyaknya bilangan yang memenuhi $a \le b \le c \le d$ adalah 495

19\.



Misal :

A = Banyaknya segitiga seluruhnya yang dapat dibentuk termasuk yang sisinya merupakan sisi R.
B = Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dengan hanya 1 sisinya yang merupakan sisi R.
C = Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dengan 2 sisinya merupakan sisi R.

- Banyaknya segitiga seluruhnya yang dapat dibentuk termasuk yang sisinya merupakan sisi R
  Segitiga dibentuk dari 3 titik yang tidak segaris, maka banyaknya segitiga yang dapat dibentuk adalah ${}_{2002}C_3 = \dfrac{2002 \cdot 2001 \cdot 2000}{6}$ = 2002 · 667· 1000

- Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dengan hanya 1 sisinya yang merupakan sisi R.
  Untuk membentuk segitiga ini maka 2 dari 3 titiknya harus berurutan, namun ketiga titiknya tidak berurutan. Misal kedua titik tersebut adalah n dan n+1, maka titik ketiga tidak boleh n−1 atau n+2. Banyaknya 2 titik yang berurutan ada 2002 kemungkinan, yaitu 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, ···, 2001-2002, 2002-1. Misalkan titik yang kita pilih adalah 2-3, maka titik ketiga tidak boleh titik 1 atau 4, maka banyaknya kemungkinan 1 titik ketiga adalah 1998 cara.
  Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk adalah 1998 x 2002
- Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dengan 2 sisinya merupakan sisi R
  Untuk membentuk segitiga ini maka ke-3 titiknya harus berurutan. Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk adalah 2002, yaitu 1-2-3, 2-3-4, 3-4-5, ···, 2001-2002-1, 2002-1-2.

Banyaknya segitiga dimaksud adalah = $A - B - C$

$$= 2002 \cdot 667 \cdot 1000 - 1998 \cdot 2002 - 2002$$
$$= 2002\ (667 \cdot 1000 - 1999)$$
$$= 1331332002$$

∴ Banyaknya segitiga yang semua titik sudutnya adalah titik sudut R, tetapi tidak ada sisinya yang merupakan sisi R adalah **1.331.332.002**

20. Nilai total = 7 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 22
Nilai maksimum yang dapat diperoleh SMU Pipit adalah 7 + 5 + 4 + 3 + 2 = 21
Misal nilai minimum SMU Pipit adalah x maka nilai sisa adalah 22 − x.
Nilai minimum yang dapat diperoleh adalah jika nilai sisa yang ada terdistribusi merata kepada ketiga
SMU yang lain. Misal nilai masing-masing ketiga SMU yang lain adalah k, maka :
$x + 3k = 22$ dan $x > k$
$3x > 22 - x \rightarrow x > 22/4$ maka $x = 6$.
Jika x = 6 maka nilai sisa = 22 − 6 = 16 → 2 SMU mendapat nilai 5 dan satu SMU mendapat nilai 6. Hal yang tidak boleh karena berarti tidak ada pemenang.
Maka x = 7. Nilai sisa = 22 − 7 = 15. Yang berarti ketiga SMU yang lain masing-masing mendapat nilai 5.
Nilai 5 dapat diperoleh dari 5 ; 3 + 2; 4 + 1 yang berarti memenuhi syarat.
Maka nilai maksimum SMU Pipit = 21 sedangkan nilai minimunmnya = 7. Semua nilai dari 7 sampai 21 semua dapat diperoleh dari kombinasi : 7, 5, 4, 3, 2, 1. Nilai dari 7 sampai dengan 21 ada 15.
∴ Banyaknya kemungkinan nilai SMU pemenang adalah **15**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2003
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2002

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

1.

- Jika m adalah bilangan yang terbesar
  Berdasarkan (c) dan (a), maka p membagi m sedangkan k membagi p sehingga m > p > k
  Berdasarkan (d) → ┌ ≥ n + p, maka ┌┌> n dan ┌ > p sehingga m > ┌ > p > k
  Berdasarkan (e) :
  - Jika k membagi n maka n membagi p sehingga p > n > k. Urutan yang mungkin adalah m > ┌ > p > n > k
  - Jika p membagi n maka n membagi k sehingga k > n > p. Karena p > k maka hal ini merupakan sebuah kontradiksi.
- Jika m adalah bilangan terkecil
  Berdasarkan (c) dan (a), maka m membagi p dan p membagi k sehingga k > p > m
  Berdasarkan (e) :
  - Jika k membagi n maka n membagi p sehingga p > n > k. Karena k > p maka hal ini merupakan sebuah kontradiksi.
  - Jika p membagi n maka n membagi k sehingga k > n > p. Akibatnya k > n > p > m.

  Berdasarkan (d) :
  - Jika n = ┌ − p → ┌ = n + p. Karena p < n maka n < ┌ < 2n. Karena n harus membagi ┌ maka hal tersebut tidak mungkin.
  - Jika n < ┌ − p → ┌ > p + n. Sehingga tidak dapat ditentukan yang lebih besar antara ┌ dan k, maka urutan yang mungkin adalah : k > ┌ > n > p > m atau ┌ > k > n > p > m.

∴ Semua urutan yang mungkin bagi k, ┌, m, n dan p adalah :
1. m > ┌ > p > n > k atau
2. k > ┌ > n > p > m atau
3. ┌ > k > n > p > m

2. Alternatif 1 :

Misal $m = \dfrac{3p + 25}{2p - 5} = \dfrac{2p - 5 + p + 30}{2p - 5} = 1 + \dfrac{p + 30}{2p - 5}$ .... (1)

Ambil p + 30 = 2p − 5 → p = 35.

- Untuk p > 35, maka p + 30 < 2p − 5 sehingga $\dfrac{p + 30}{2p - 5} < 1$ sehingga tidak mungkin m bilangan bulat.
- Untuk 0 < p < 35
  Semakin besar nilai p, maka perbandingan p + 30 dan 2p − 5 akan semakin kecil sehingga nilai m semakin kecil mendekati satu.

Karena m > 0 maka 2p − 5 > 0 → p ≥ 3

Bentuk di atas dapat juga diubah menjadi :

2pm − 5m = 3p + 25

p(2m−3) = 5m + 25

$p = \dfrac{5m + 25}{2m - 3}$ .... (2)

dengan 2m − 3 > 0 atau m > 1.

Berdasarkan persamaan (1)

Jika p = 3 → m = 1 + 33/1 = 34 (bilangan bulat)
Jika p = 4 → m = 37/3 (bukan bilangan bulat)
Jika p = 5 → m = 40/5 = 8 (bilangan bulat)
Jika p = 6 → m = 43/7 (bukan bilangan bulat)
Jika p = 7 → m = 36/9 (bukan bilangan bulat)
Jika p = 8 → m = 49/11 (bukan bilangan bulat)
Jika p = 9 → m = 52/13 = 4 (bilangan bulat)

Karena semakin besar nilai p maka nilai m semakin kecil, maka sesuai persamaan (1) dicoba :

Jika m = 3 → p = 40/3 (bukan bilangan bulat)
Jika m = 2 → p = 35 (bilangan bulat)

Alternatif 2 :

$m = \frac{3p+25}{2p-5}$ → 2mp − 5m = 3p + 25 → 4mp − 10m = 6p + 50

(2m − 3)(2p − 5) = 50 + 15 = 65

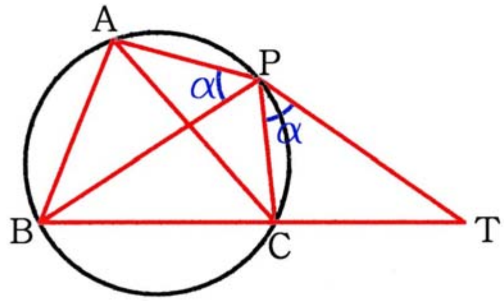
2m − 3 dan 2p − 5 masing-masing adalah faktor dari 65. Faktor dari 65 adalah ±1, ±5, ±13, ±65.

Jika 2p − 5 = −1 maka 2m − 3 = −65 → p = 2 dan m = −31 (tidak memenuhi p dan m bulat positif)
Jika 2p − 5 = 1 maka 2m − 3 = 65 → p = 3 dan m = 34 (memenuhi p dan m bulat positif)
Jika 2p − 5 = −5 maka 2m − 3 = −13 → p = 0 dan m = −5 (tidak memenuhi p dan m bulat positif)
Jika 2p − 5 = 5 maka 2m − 3 = 13 → p = 5 dan m = 8 (memenuhi p dan m bulat positif)
Jika 2p − 5 = −13 maka 2m − 3 = −5 → p = −4 dan m = −1 (tidak memenuhi p dan m bulat positif)
Jika 2p − 5 = 13 maka 2m − 3 = 5 → p = 9 dan m = 4 (memenuhi p dan m bulat positif)
Jika 2p − 5 = −65 maka 2m − 3 = −1 → p = −30 dan m = 1 (tidak memenuhi p dan m bulat positif)
Jika 2p − 5 = 65 maka 2m − 3 = 1 → p = 35 dan m = 2 (memenuhi p dan m bulat positif)

∴ Bilangan bulat positif p sehingga $\frac{3p+25}{2p-5}$ juga bulat positif adalah 3 ; 5 ; 9 atau 35

3. Misal ke-6 angka itu A, B, C, D, E, F dengan A ≥ B ≥ C ≥ D ≥ E ≥ F dengan 0 ≤ A, B, C, D, E, F ≤ 9. Penyusunan bilangan yang benar sehingga didapat selisih tiga bilangan pertama dengan tiga bilangan terakhir seminimal mungkin adalah ACEBDF.
   Misal T = A + C + E − B − D − F
   T = (A − F) + (C − B) + (E − D)
   Jelas bahwa A − F ≤ 9. Tanda kesamaan akan terpenuhi hanya apabila A = 9 dan F = 0.
   Karena C ≤ B dan E ≤ D maka C − B ≤ 0 dan E − D ≤ 0. Tanda kesamaan terjadi hanya jika C = B dan E = D.
   Maka T = (A − F) + (C − B) + (E − D) ≤ 9 + 0 + 0 = 9
   ∴ Terbukti bahwa jumlah tiga angka pertama dan jumlah tiga angka terakhir suatu bilangan enam angka dapat disusun sedemikian rupa sehingga berselisih tidak lebih dari 9

4. Pembuktian *Teorema Ptolemy*



ABCP adalah segiempat talibusur atau dengan kata lain titik P terletak pada lingkaran luar segitiga ABC dengan titik P terletak pada busur AC. Misal ∠APB = α. Dibuat segitiga PCT dengan CT adalah perpanjangan BC dan ∠CPT = α. Karena ABCP adalah segi empat tali busur maka ∠BAP + ∠BCP = 180° sehingga ∠BAP = ∠PCT. Karena ∠APB = ∠CPT dan ∠BAP = ∠PCT maka ΔBAP sebangun dengan ΔPCT.

Akibatnya $\frac{PA}{PC} = \frac{AB}{CT} = \frac{PB}{PT}$ .... (1)

$CT = \frac{AB}{PA} \cdot PC$ .... (2)

Dari persamaan (1) juga didapat : $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{CT}$.

Karena ∠APC = ∠BPT = α + ∠BPC dan $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PT}$ maka ΔAPC sebangun dengan ΔBPT

Akibatnya $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PT} = \frac{AC}{BT}$ .... (3)

$BT = \frac{PB}{PA} \cdot AC$ ....(4)

BT = BC + CT

Subtitusikan pers. (2) dan (4)

$$\frac{PB}{PA} \cdot AC = BC + \frac{AB}{PA} \cdot PC$$

PB · AC = PA · BC + PC · AB (*Teorema Ptolemy*)

Jika ΔABC adalah segitiga sama sisi, maka AC = BC = AB, maka :

PB = PA + PC (Terbukti)

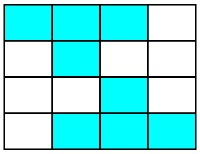
atau

Jika PB = PA + PC dan karena AB = BC = AC, maka

PB · AC = PA · BC + PC · AB

∴ Sesuai dengan *Teorema Ptolemy*, maka ABCP adalah segi empat tali busur atau dengan kata lain titik P terletak pada lingkaran luar segitiga ABC.

5. a.



Karena petak 4 x 4 dapat ditutupi oleh 4 buah *Tetromino-T*, maka tentunya kita dapat menutup petak catur 8 x 8 dengan 16 buah *Tetromino-T*.

b. Sebuah *tetromino-T* akan menutupi 1 buah petak hitam dan 3 buah petak putih atau 1 buah petak putih dan 3 buah petak hitam pada papan catur.

Karena 1 dan 3 bilangan ganjil serta banyaknya *Tetromino-T* ada 25 yang juga merupakan bilangan ganjil maka ke-25 *Tetromino-T* tersebut akan menutupi sejumlah ganjil petak hitam dan sejumlah ganjil petak putih pada papan catur. Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa pada papan catur 10 x 10 terdapat 50 petak hitam dan 50 petak putih.
Terbukti bahwa kita tidak dapat menutup papan 'catur' 10 X 10 petak dengan 25 *tetromino-T*.