SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2007

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. Penjumlahan semua angkanya maksimal = 36. Tetapi 36, 35, 34, 33 dan 32 bukan bilangan prima. Maka penjumlahan maksimal semua angkanya = 31.
   Dua angka pertama harus sebesar mungkin, yaitu 99. Jika angka k-3 juga 9 maka angka ke-4 harus 4 sehingga 9994 bukanlah bilangan ganjil. Maka angka ketiga haruslah 8 dengan angka keempat adalah 5 yang merupakan bilangan ganjil.
   ∴ Bilangan ganjil 4-angka yang memenuhi adalah **9985.**

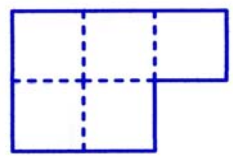
2. Misalkan nilai uang pecahan 100-an = x
   Maka nilai uang pecahan 500-an = 3x dan nilai uang pecahan 200-an = 6x
   Karena (x) + (3x) + (6x) = 100.000 maka x = 10.000
   Banyaknya koin 100-an = 10000 : 100 = 100
   Banyaknya koin 200-an = (6 · 10000) : 200 = 300
   Banyaknya koin 500-an = (3 · 10000) : 500 = 60
   ∴ Banyaknya koin = 100 + 300 + 60 = **460.**

3. Misalkan panjang sisi miring segitiga tersebut = r, sisi terpendek = x dan sisi lainnya = y
   Diketahui bahwa r = 2x dan y = x + 1
   $x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow x^2 + (x+1)^2 = (2x)^2$
   $2x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(2)(-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$
   Ambil nilai x yang positif maka $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \rightarrow y = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$
   Luas segitiga = $\frac{1}{2} \cdot x \cdot y$
   ∴ Luas segitiga = $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$

4. $2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59$; $2007 = 3^2 \cdot 223$; $2008 = 2^3 \cdot 251$
   Banyaknya fakor prima dari 2006 = 3
   Banyaknya fakor prima dari 2007= 2
   Banyaknya fakor prima dari 2008= 2
   ∴ Maka bilangan yang memiliki faktor prima berbeda terbanyak adalah **2006.**

5. Misalkan ia menjual mobil masing-masing seharga y. Misalkan juga modal mobil pertama adalah x. Maka agar impas modal mobil kedua haruslah 2y − x.
   $\frac{x-y}{x} = \frac{1}{10} \rightarrow 10y = 9x$
   Keuntungan mobil kedua = $\frac{y-(2y-x)}{2y-x} = \frac{x-y}{2y-x} = \frac{10x-9x}{18x-10x} = \frac{1}{8}$
   ∴ Persentase keuntungan pedagang untuk mobil kedua = **12,5 %**

6. Karena tidak ada yang tumpang tindih maka luas persegi = 245 : 5 = 49 cm^2.
Panjang sisi persegi = 7.
Agar kelilingnya kecil maka harus semakin banyak sisi-sisi persegi yang menempel dengan sisi-sisi yang lain.



∴ Keliling persegi = 10 x panjang sisi persegi = **70 cm**

7. Apabila pertandingan dua tim berakhir seri maka total nilai yang didapat kedua tim adalah 2 sedangkan apabila pertandingan dua buah tim berakhir dengan kemenangan salah satu tim maka total nilai kedua tim sama dengan 3.
Total pertandingan = ${}_4C_2$ = 6.
Nilai 4 hanya didapat jika tim tersebut menang satu kali, seri satu kali dan kalah satu kali.
Agar jumlah nilai ketiga tim lainnya paling sedikit maka haruslah tiga pertandingan lainnya berakhir seri.
Maka dari 6 pertandingan terdapat 4 pertandingan yang berakhir seri.
Nilai total keempat tim = 2 · 4 + 3 · 2 = 14
Maka total nilai ketiga tim lainnya = 14 − 4 = 10.
∴ Maka total nilai ketiga tim lainnya paling sedikit = 14 − 4 = **10**.

8. 1!1 + 2!2 + 3!3 + ··· + n!n = 1!(2 − 1) + 2!(3 − 1) + 3!(4 − 1) + ··· + n!((n + 1) − 1)
1!1 + 2!2 + 3!3 + ··· + n!n = (2! − 1!) + (3! − 2!) + (4! − 3!) + ··· + (n + 1)! − n!
1!1 + 2!2 + 3!3 + ··· + n!n = (n + 1)! − 1!
∴ 1!1 + 2!2 + 3!3 + ··· + n!n = **(n + 1)! − 1**

9. Misalkan koordinat $Q(x_Q, y_Q)$ dan $P(x_P, y_P)$
Alternatif 1 :
Karena P di kuadran I maka Q pun akan dikuadran I. Karena $y_Q = 2x_Q$ maka $y_Q \ge x_Q$
Jarak Q ke garis y = x adalah PQ = 2.
Jarak $Q(x_Q, y_Q)$ ke garis Ax + By + C = 0 dirumuskan dengan :

$$d = \left|\frac{Ax_Q + By_Q + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

Maka :

$$d = \left|\frac{y_Q - x_Q}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right| = 2 \rightarrow y_Q - x_Q = 2\sqrt{2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

Karena garis y = 2x melalui Q maka $y_Q = 2x_Q$ ······ (2)
Dari persamaan (1) dan (2) didapat $x_Q = 2\sqrt{2}$ dan $y_Q = 4\sqrt{2}$

Alternatif 2 :
Gradien garis y = x adalah m = 1. Maka gradien garis yang melalui PQ adalah $m_{PQ} = -1$

$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = -1$ → $2x_Q - x_P = x_P - x_Q$ → $3x_Q = 2x_P$ .... (3)

$\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = 2$ → $(x_Q^2 - 2x_Qx_P + x_P^2) + (4x_Q^2 - 4x_Qx_P + x_P^2) = 4$

$5x_Q^2 - 6x_Qx_P + 2x_P^2 = 4$ .... (4)

Subtitusikan persamaan $3x_Q = 2x_P$ ke persamaan (4)

$10x_Q^2 - 18x_Q^2 + 9x_Q^2 = 8$

Karena Q di kuadran I maka $x_Q = 2\sqrt{2}$ dan $y_Q = 4\sqrt{2}$

∴ Koordinat Q adalah $\left(2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$.

10. 6n + 30 = k(2n + 1) untuk suatu k dan n bilangan asli
    (k − 3)(2n + 1) = 27 = 3^3
    Nilai 2n + 1 yang memenuhi hanya jika 2n + 1 = 3, 9 atau 27
    Jika 2n + 1 = 3 maka k − 3 = 9 → n = 1 dan k = 12
    Jika 2n + 1 = 9 maka k − 3 = 3 → n = 4 dan k = 6
    Jika 2n + 1 = 27 maka k − 3 = 1 → n = 13 dan k = 4
    ∴ Nilai n asli yang memenuhi 6n + 30 adalah kelipatan 2n + 1 adalah **n = 1, 4, 13.**

11. $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^9 = {}_9C_0(2x^2)^9(-\frac{1}{x})^0 + \cdots + {}_9C_k(2x^2)^k(-\frac{1}{x})^{9-k} + \cdots$
    Untuk mencari suku konstanta maka harus dipenuhi $x^{2k} \cdot x^{k-9} = x^0$ → k = 3
    ${}_9C_3(2x^2)^3(x)^{3-9} = 672$
    ∴ Maka konstanta pada ekspansi $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$ adalah **672.**

12. Misalkan persamaan garis ℓ adalah y = mx + c
    Karena titik potongnya dengan sumbu y bilangan prima maka c adalah bilangan prima.
    Titik potong dengan sumbu x → y = 0 → mx + c = 0 → $x = -\frac{c}{m}$ adalah bilangan prima.
    Karena c prima maka $-\frac{c}{m}$ akan prima hanya jika m = −1 → y = −x + c
    Karena garis melalui titik (3, 4) maka 4 = −3 + c → c = 7 → y = −x + 7
    ∴ Persamaan garis ℓ adalah **y = −x + 7.**

13. Karena dalam setiap dua kantong berselisih paling bayak 1, maka banyaknya permen hanya akan ada 2 jenis, yaitu m dan m + 1.
    Karena 17 ≡ 1 (mod 2) maka untuk dua kantong akan terdapat dua kemungkinan yaitu satu kantong berisi 8 permen sedangkan kantong lainnya 9 permen dan sebaliknya.

Karena 17 ≡ 2 (mod 3) maka untuk tiga kantong, kemungkinan mengemas permen akan terdiri dari dua kantong berisi 6 permen dan satu kantong lagi berisi 5 permen. Banyaknya cara mengemas permen pada kasus ini adalah $\frac{3!}{2!\cdot 1!}$ = 3 cara.

Karena 17 ≡ 1 (mod 4) maka untuk empat kantong, kemungkinan mengemas permen akan terdiri dari satu kantong berisi 5 permen dan tiga kantong lagi berisi 4 permen. Banyaknya cara mengemas permen pada kasus ini adalah $\frac{4!}{1!\cdot 3!}$ = 4 cara. Demikian seterusnya.

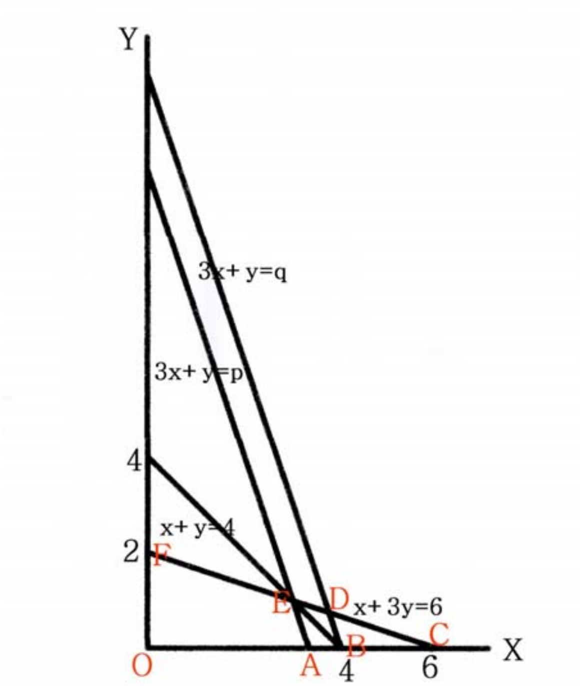
Misalkan Banyaknya cara = N maka :

$$N = \frac{2!}{1!\cdot 1!}+\frac{3!}{2!\cdot 1!}+\frac{4!}{1!\cdot 3!}+\frac{5!}{2!\cdot 3!}+\frac{6!}{5!\cdot 1!}+\frac{7!}{3!\cdot 4!}+\frac{8!}{1!\cdot 7!}+\frac{9!}{8!\cdot 1!}+\frac{10!}{7!\cdot 3!}+\frac{11!}{6!\cdot 5!}+\frac{12!}{5!\cdot 7!}+\frac{13!}{4!\cdot 9!}+\frac{14!}{3!\cdot 11!}+\frac{15!}{2!\cdot 13!}+\frac{16!}{1!\cdot 15!}+\frac{17!}{0!\cdot 17!}$$

Banyaknya cara = 2 + 3 + 4 + 10 + 6 + 35 + 8 + 9 + 120 + 462 + 792 + 715 + 364 + 105 + 16 + 1

∴ Banyaknya cara mengemas permen = 2652

14. Digambar daerah x ≥ 0, y ≥ 0 dan x + 3y ≤ 6.



Daerah yang memenuhi x ≥ 0, y ≥ 0 dan x + 3y ≤ 6 adalah OCF.

Dibuat garis x + y = 4

Perpotongan garis x + 3y = 6 dengan x + y = 4 adalah di E(3, 1).

Perpotongan garis y = 0 dengan x + y = 4 adalah di B(4, 0).

Dibuat garis 3x + y = p yang melalui E(3, 1) dan 3x + y = q yang melalui B(4, 0).

Maka akan didapat nilai p = 10 dan q = 12.

Garis 3x + y = 12 memotong garis x + 3y = 6 di D$\left(\frac{15}{4},\frac{3}{4}\right)$ yang membuat x + y > 4.

Garis 3x + y = 10 memotong garis y = 0 di A$\left(\frac{10}{3},0\right)$ yang membuat x + y < 4.

Karena nilai x + y yang diminta dalam soal adalah nilai maksimum maka persamaan $3x + y \le a$ yang memenuhi adalah $3x + y \le 10$.

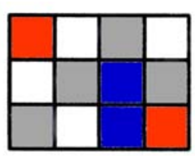
$\therefore$ Maka nilai a yang memenuhi adalah **a = 10.**

15. Banyaknya sisi dapat dinyatakan dalam luasan.
Luasan yang dicat = 6 x 5 x 5 = 150.
Luasan keseluruhan = 125 buah x 6 x 1 x 1 = 750
Luasan yang tidak dicat = 750 − 150 = 600

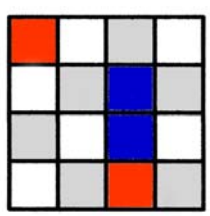
$\therefore$ Rasio sisi yang dicat terhadap yang tidak dicat = 150 : 600 = **1 : 4.**

16. Jika satu kartu ditaruh pada papan maka kartu tersebut akan menutupi satu petak warna hitam dan satu petak warna putih. Maka jelas bahwa dua petak yang dibuang agar dipenuhi bahwa sisa petak dapat ditutupi oleh 7 buah kartu harus memenuhi bahwa kedua petak tersebut berbeda warna.
Akan dibuktikan bahwa bagaimana pun cara memilih petak asalkan berbeda warna maka sisanya akan dapat ditutupi oleh 7 buah kartu.
Dalam satu baris 4 x 1 petak maupun dalam satu kolom 1 x 4 petak, jelas dapat ditutupi oleh dua buah kartu.

- Jika dua petak yang dibuang berada pada satu baris
Jika 2 petak tersebut berada pada kolom ke-1 dan 2 atau kolom 3 dan 4 maka sisanya dapat ditutupi oleh 1 buah kartu. Tiga baris sisa akan dapat ditutupi oleh 6 buah kartu. Jika 2 petak tersebut berada pada kolom ke-2 dan 3 maka jelas baris tersebut dan baris didekatnya dapat ditutupi oleh 3 buah kartu. Sedangkan 2 baris sisanya dapat ditutupi oleh 4 buah kartu lagi.
- Jika dua petak yang dibuang, salah satunya di baris ke-n sedangkan satu lagi di baris ke-(n+1)
Jelas juga bahwa dua baris tersebut dapat ditutupi oleh tiga buah kartu. Dua baris lainnya sesuai dengan keterangan sebelumnya dapat ditutupi oleh 4 buah kartu.
- Jika dua petak yang dibuang, salah satunya di baris ke-n sedangkan satu lagi di baris ke-(n+2)
Taruh sebuah kartu dalam arah vertikal sedemikian sehingga terdapat satu baris berisi satu petak yang dibuang dan satu petak lagi merupakan salah satu petak dari kartu yang ditaruh dengan warna kedua petak tersebut berbeda. Maka akan terbentuk 2 bagian. Satu bagian terdiri dari 2 baris dengan 2 petak "dibuang" dan satu baris sisanya terdiri 2 petak yang 'dibuang'. Sesuai dengan keterangan sebelumnya maka sisa petak akan dapat ditutupi oleh 6 buah kartu.



- Jika dua petak yang dibuang, salah satunya di baris ke-1 sedangkan satu lagi di baris ke-4
Taruh sebuah kartu vertikal dengan kedua petaknya terletak pada baris ke-2 dan ke-3 sedemikian sehingga dua petak pada baris ke-1 dan ke-2 yang tidak dapat ditaruh kartu lagi akan berbeda warna. Maka sesuai dengan keterangan sebelumnya pada baris ke-1 dan ke-2 dapat ditutupi oleh tiga buah kartu lagi. Demikian juga dengan baris ke-3 dan ke-4.



Terbukti bahwa bagaimana pun cara memilih petak asalkan berbeda warna maka sisanya akan dapat ditutupi oleh 7 buah kartu..
Banyaknya petak hitam dan putih masing-masing ada 8. Maka banyaknya cara memilih dua petak agar dapat dipenuhi adalah 8 x 8 = 64.
∴ Banyaknya cara memilih dua petak = 64.
(Catatan : Persoalan persegi panjang dengan ukuran yang lebih umum pernah dibahas di www.olimpiade.org. Pembuktian dapat dilakukan dengan induksi matematika)

17. Misalkan bilangan yang dihapus adalah k.

$\frac{1+2+\cdots+n-k}{n-1} = \frac{602}{17}$ → $\frac{n}{2} + \frac{n-k}{n-1} = 35\frac{7}{17}$

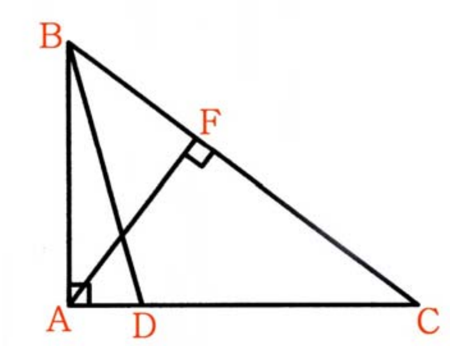
Karena k ≥ 1 maka n − k ≤ n − 1 → $0 \le \frac{n-k}{n-1} \le 1$ → $34\frac{7}{17} \le \frac{n}{2} \le 35\frac{7}{17}$ → 68 < n ≤ 70

Jika n = 70 maka $k = (1+2+3+\cdots+70) - \frac{602}{17}\cdot 69$. Karena 17 tidak membagi 69 maka tidak ada nilai k asli yang memenuhi.

Jika n = 69 maka $k = (1+2+3+\cdots+69) - \frac{602}{17}\cdot 68 = 7$

∴ Maka **n = 69**

18. Misalkan panjang AC = x maka AD = x − 1



Pada ΔAFC berlaku AC cos C = FC → cos C = $\frac{1}{x}$

Karena DC = DB maka ΔCDB sama kaki → ∠DBC = C → ∠BDA = 2C

Pada ΔBDA berlaku :
BD cos ∠BDA = AD → 1 · cos 2C = x − 1 → 2cos ^{2}C − 1 = x − 1

$\frac{2}{x^2} = x$

$x = \sqrt[3]{2}$

∴ Maka AC = $\sqrt[3]{2}$

19. $\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} = 54 \rightarrow \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = 108$

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6\sqrt{3}$

Karena x dan y keduanya bilangan asli maka x dan y keduanya harus berbentuk $3k^2$.

Agar didapat solusi x terbesar maka y haruslah minimal. Nilai terkecil y adalah y = 3.

Maka didapat $\sqrt{x} = 5\sqrt{3} \rightarrow x = 75$.

∴ Maka solusi dengan x terbesar adalah (x, y) = (75, 3).

20. Misal koordinat $V_1(x_1, y_1)$ dan $V_2(x_2, y_2)$.

Misalkan juga titik tengah V_1 dan V_2 adalah X_{12}. Maka koordinat X_{12} adalah $(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_2 + y_2))$.

Jika X_{12} memiliki koordinat bilangan bulat maka haruslah $x_1 + x_2$ dan $y_1 + y_2$ genap.

Syarat itu terjadi haruslah x_1 dan x_2 memiliki paritas yang sama dan y_1 dan y_2 juga memiliki paritas yang sama.

Kemungkinan jenis koordinat (dalam bahasa lain disebut paritas) suatu titik letis pada bidang hanya ada 4 kemungkinan yaitu (genap, genap), (genap,ganjil), (ganjil, ganjil) dan (ganjil, genap).

Agar dapat dipastikan bahwa ada anggota X yang memiliki koordinat bilangan bulat maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka haruslah terdapat sekurang-kurangnya 5 buah titik letis.

∴ Maka anggota V paling sedikit harus 5.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2007

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

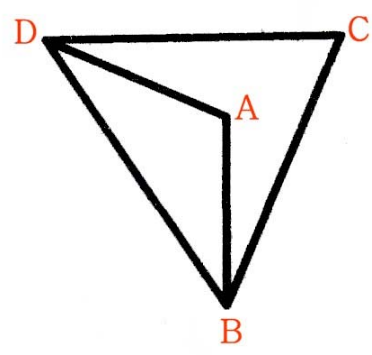
Bidang Matematika

Bagian Kedua

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

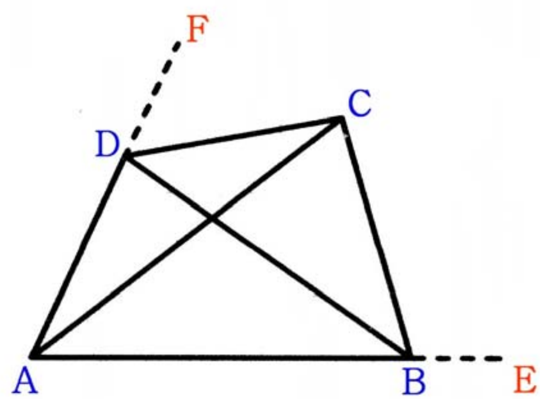
1. (a) Andaikan A berada di dalam segitiga BCD.



Karena panjang sisi-sisi ΔBAD dan ΔBDC sama maka ΔBAD dan ΔBCD kongruen dan karena sisi BD berhimpit serta AB = AD = BC = CD maka titik A haruslah berhimpit dengan C. Kontradiksi dengan kenyataan bahwa ABCD adalah segiempat.

∴ Terbukti bahwa A haruslah berada di luar segitiga BDC.

(b) Misalkan $\angle BAD = \alpha$ dan $\angle ABC = \beta$



Pada ΔBAD dan ΔBDC berlaku :

$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cos \angle BAD$

$BD^2 = CD^2 + CB^2 - 2 \cdot CD \cdot CB \cos \angle BCD$

Karena AD = AB = CD = CB maka $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$

Pada ΔABC dan ΔADC berlaku :

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \cdot BA \cdot BC \cos \angle ABC$

$AC^2 = DA^2 + DC^2 - 2 \cdot DA \cdot DC \cos \angle ADC$

Karena BA = BC = DA = DC maka $\angle ABC = \angle ADC = \beta$

Akibatnya $\alpha + \beta = 180^o$

Karena $\alpha + \beta = 180^o$ dan $\angle ABC = \beta$ maka $\angle CBE = \alpha$

Karena $\angle DAE = \angle CBE = \alpha$ maka haruslah AD sejajar BC

Karena $\alpha + \beta = 180^o$ dan $\angle ADC = \beta$ maka $\angle CDF = \alpha$

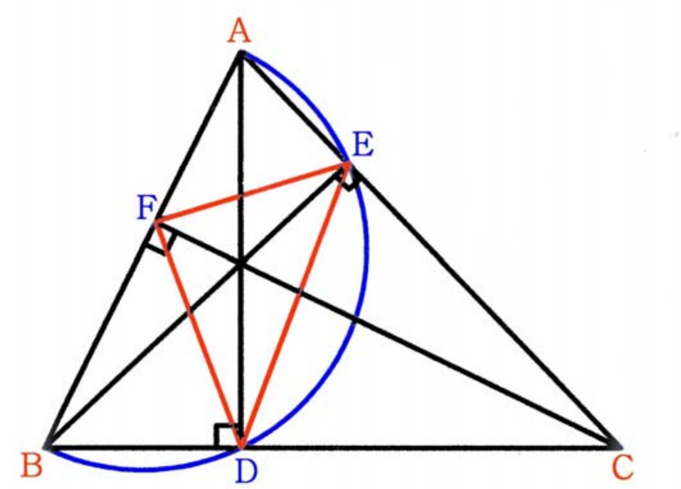
Karena $\angle BAF = \angle CDF = \alpha$ maka haruslah AB sejajar DC

∴ Terbukti bahwa setiap pasangan sisi berhadapan pada ABCD selalu sejajar.

2. Misalkan FPB(a, b) = d = 10p + q maka KPK(a, b) = 10q + p
   a = dx dan b = dy untuk suatu bilangan asli d, x, y serta FPB(x, y) = 1 dan x, y ≠ 1
   Karena a dan b simetri dan diinginkan b maksimum maka b > a → y > x
   Jelas bahwa KPK(a, b) = dxy
   (10p + q)xy = (10q + p)
   Karena 10p + q dan 10q + p keduanya bilangan asli dua angka maka xy < 10
   Karena x, y ≠ 1 dan FPB(x, y) = 1 maka pasangan (x, y) yang memenuhi hanya jika x = 2 dan y = 3.
   6(10p + q) = 10q + p → 59p = 4q
   Karena 59 adalah bilangan prima maka q haruslah kelipatan 59. Tetapi q bilangan asli satu angka. Maka tidak ada nilai q yang memenuhi.
   ∴ **Tidak ada nilai b yang memenuhi.**

3. $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$
   $(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) - x^2 = 0$
   $((x - 1)^2)^2 - x^2 = 0$
   Mengingat $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ maka :
   $(x^2 - 2x + 1 - x)(x^2 - 2x + 1 + x) = 0$
   $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$
   Karena $(-1)^2 - 4(1)(1) < 0$ maka tidak ada x real yang memenuhi $x^2 - x + 1 = 0$.
   Untuk $x^2 - 3x + 1 = 0$ dipenuhi oleh $X_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(1)}}{2 \cdot 1} \rightarrow \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$
   ∴ Maka nilai x real yang memenuhi adalah $X = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ atau $X = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

4. Misalkan ∠BAC = α, ∠ABC = β dan ∠ACB = γ



   Karena ΔAEB siku-siku di E dan ΔADB siku-siku di D maka dengan AB sebagai diameter, dapat dibuat sebuah lingkaran yang melalui A, E, D dan B. Maka AEDB adalah segiempat talibusur.
   Karena AEDB adalah segiempat talibusur maka ∠ABD + ∠AED = 180°
   (β) + (90° + ∠BED) = 180° → ∠BED = 90° − β. Maka ∠DEC = β

Dengan cara yang sama ACDF adalah segiempat talibusur.
Karena ACDF segiempat talibusur maka $\angle ACD + \angle DFA = 180^o$
$(\gamma) + (90^o + \angle CFD) = 180^o \rightarrow \angle CFD = 90^o - \gamma \rightarrow \angle BFD = \gamma$
Karena ΔBFC siku-siku di F maka $\angle BCF = 90^o - \beta$
Karena ΔBEC siku-siku di E maka $\angle EBC = 90^o - \gamma$

Pada ΔBDF berlaku $\frac{DF}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin\gamma}$ .... (1)

Pada ΔCDF berlaku $\frac{DF}{\sin(90^\circ-\beta)} = \frac{DC}{\sin(90^\circ-\gamma)} \rightarrow \frac{DF}{\cos\beta} = \frac{DC}{\cos\gamma}$ .... (2)

Pada ΔCDE berlaku $\frac{DE}{\sin\gamma} = \frac{DC}{\sin\beta}$ .... (3)

Pada ΔBDE berlaku $\frac{DE}{\sin(90^\circ-\gamma)} = \frac{BD}{\sin(90^\circ-\beta)} \rightarrow \frac{DE}{\cos\gamma} = \frac{BD}{\cos\beta}$ .... (4)

Dari persamaan (1) dan (4) didapat :

$$DE + DF = BD\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\right)$$

Mengingat sin 2x = 2 sin x cos x maka :
$2 \sin\gamma \cos\beta\,(DE + DF) = BD\,(\sin 2\beta + \sin 2\gamma)$ .... (5)
Dari persamaan (2) dan (3) didapat :

$$DE + DF = DC\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)$$

Mengingat sin 2x = 2 sin x cos x maka :
$2 \sin\beta \cos\gamma\,(DE + DF) = DC\,(\sin 2\beta + \sin 2\gamma)$ .... (6)
Mengingat $\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma = \sin(\beta+\gamma)$ dan $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$ maka :
Persamaan (5) + Persamaan (6) :
$2\sin(\beta+\gamma)(DE + DF) = 2\,(BD + DC)\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)$
$DE + DF = BC\cos(\beta-\gamma)$
Mengingat $\cos(\beta-\gamma) \le 1$ maka $DE + DF \le BC$ (terbukti)
Tanda kesamaan terjadi apabila $\beta - \gamma = 0$ atau $\beta = \gamma \rightarrow \angle ABC$ sama kaki dengan AB = AC yang berakibat D adalah pertengahan BC.
$\therefore$ Terbukti bahwa $DE + DF \le BC$

5. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 16 = 136$
Jelas bahwa $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 136$.
Misalkan $m = \min(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4)$ dan $M = \text{maks}(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4)$
Misalkan juga $S = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 2 \cdot 136 = 272$
Alternatif 1 :
Andaikan bahwa $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4)$ dapat disusun menjadi 8 bilangan berurutan, maka haruslah terdapat nilai n bulat sehingga memenuhi :
$(n - 4) + (n - 3) + (n - 2) + (n - 1) + (n) + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 2 \cdot 136 = 272$
$8n - 4 = 272 \rightarrow$ Tidak ada n bulat yang memenuhi.
Maka harus terdapat sedikitnya salah satu d_1 atau d_2 yang memenuhi $m < d_i < M$.

- Jika $m < d_1 < M$ dan $d_2 > M$

  Maka maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2) = d_2$ dan $M = m + 8$ dan $d_2 = m + 9$

  $(m) + (m + 1) + \cdots + (m + 6) + (m + 8) \le S \le (m) + (m + 2) + (m + 3) + \cdots + (m + 8)$

  $8m + 29 \le 272 \le 8m + 35$ $\rightarrow$ $29 < m \le 30$ $\rightarrow$ Nilai m yang mungkin hanya $m = 30$

  $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + d_1 = 30 + 31 + 32 + \cdots + 38 = 306$

  $d_1 = 306 - 272 = 34$ $\rightarrow$ $d_2 = m + 9 = 39$

  Maka maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2) = 39$

  Contoh *antimagic* yang memenuhi nilai maksimumnya = 39

	15	2	12	4	33
	1	14	10	5	30
	8	9	3	16	36
	11	13	6	7	37
34	35	38	31	32	39

- Jika $m < d_1 < d_2 < M$

  Maka maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2) = M$ dan $M = m + 9$

  $(m) + (m + 1) + \cdots + (m + 6) + (m + 9) \le S \le (m) + (m + 3) + (m + 4) + \cdots + (m + 9)$

  $8m + 30 \le 272 \le 8m + 42$ $\rightarrow$ $28 < m \le 30$ $\rightarrow$ Nilai m yang mungkin hanya $m = 29$ atau 30

  Karena ingin dicapai nilai M maksimum maka dipilih $m = 30$ $\rightarrow$ $M = m + 9 = 39$

Alternatif 2 :

Nilai maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2)$ semakin besar apabila m semakin besar.

Jika $m \ge 31$ maka $31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 \le S$ $\rightarrow$ $276 \le 272$ (tidak memenuhi)

Maka tidak mungkin min $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4) \ge 31$ $\rightarrow$ $m \le 30$

Jika $m = 30$ maka $30 + 31 + 32 + \cdots + 37 \le S \le 32 + 33 + 34 + \cdots + 39$ $\rightarrow$ $268 \le 272 \le 284$

Ada kemungkin terdapat *antimagic* yang memenuhi $m = 30$.

Jika ada *antimagic* yang memenuhi untuk $m = 30$ maka maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2) = 39$.

Contoh *antimagic* yang memenuhi untuk $m = 30$.

	15	2	12	4	33
	1	14	10	5	30
	8	9	3	16	36
	11	13	6	7	37
34	35	38	31	32	39

Untuk $m < 30$ tidak perlu dicari sebab nilai maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2)$ akan semakin kecil.

$\therefore$ Nilai maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2) = 39$.