SISTEMI AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Predavanje 3

Modelovanje SAU-a u *s* domenu

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- Definišu polove, nule i pojačanje sistema i razumiju njihovu ulogu u dinamici sistema.
- Primjenom algebre funkcije prenosa svedu strukturni blok dijagram SAU-a na osnovnu strukturu
- Izvrše transformaciju SBD-a u dijagram toka signala, a zatim primjenom Mason-ovog pravila odrede funkciju prenosa sistema
- Za zadati ulazni signal, izračunaju vrijednost signala u bilo kom čvoru dijagrama SAU-a

Funkcija prenosa

LTI sistemi se u opštem slučaju opisuju linearnim diferencijalnim jednačinama višeg reda sa konstantnim koeficijentima:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots\ldots + b_1\frac{du}{dt} + b_0 u$$

Funkcija prenosa sistema, koja se definiše kao odnos između izlaznog i ulaznog signala u kompleksnom domenu, može se dobiti primjenom osobina Laplasove transformacije na prethodnu jednačinu:

$$\boxed{G(\mathrm{s}) = \frac{Y(\mathrm{s})}{X(\mathrm{s})} = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots\ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 s + a_0}, m \le n}$$

za kauzalne sisteme

$$\boxed{A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 s + a_0}$$

karakteristični polinom

Imenilac funkcije prenosa se zove karakteristični polinom.

Korijeni karakterističnog polinoma se zovu polovi sistema.

Korijeni brojioca funkcije prenosa se zovu nule sistema.

Funkcija prenosa

Nule i polovi sistema mogu biti čisto realni ili kompleksni. Realni sistemi ne mogu imati jedan kompleksni pol ili nulu, već se oni uvijek pojavljuju u vidu konjugovano kompleksnih parova.

Pored polova i nula, vezano za funkciju prenosa, treba definisati i pojam pojačanja sistema. Pojačanje sistema predstavlja odnos slobodnih članova brojioca i imenioca funkcije prenosa:

$$\boxed{K = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots\ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 s + a_0} = \frac{b_0}{a_0}}$$

Kad se pobudi dinamički sistem uvijek se javlja prelazni proces, prije nego što sistem uđe u stacionarno stanje. Priroda prelaznog procesa zavisi od polova i nula sistema. Kad iščeznu tranzijentni procesi, odziv sistema će biti proporcionalan ulaznom signalu sa konstatnom proporcionalnosti K (pojačan ili oslabljen).

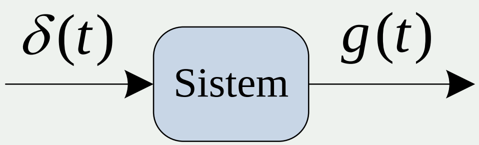
Funkcija prenosa

Funkcija prenosa LTI sistema se može definisati i kao Laplace-ova transformacija impulsnog (normalnog) odziva $g(t)$.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Impulsni odziv $g(t)$ je odziv sistema na Dirakovu funkciju $\delta(t)$.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$$



Odziv sistema na pobudu

Odziv sistema na zadatu pobudu se može odrediti na sljedeće načine:

- Rješavanjem diferencijalne jednačine sistema
- Rješavanjem modela sistema u prostoru stanja (na sljedećim predavanjima)
- Primjenom konvolucije u vremenskom domenu (važi samo za LTI sisteme)
- Primjenom teoreme o konvoluciji u *s*-domenu (važi samo za LTI, najjednostavniji metod za rješavanje "na papiru")

Odziv sistema na pobudu

Fudamentalna osobina LTI sistema je ta da se na njih može primijeniti operator konvolucije za računanje odziva sistema na proizvoljnu pobudu.

$$\boxed{y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} u(\tau)g(t-\tau)d\tau}$$

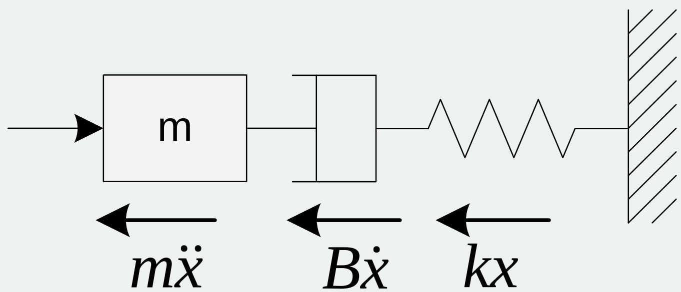
Odziv sistema se jednostavnije može izračunati u Laplasovom domenu:

$$\boxed{\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \end{aligned}}$$

Za dokaze pogledati referencu [Linear Systems, MIT]

Odziv sistema na pobudu

Za k=2 N/m, B=3 Ns/m, m=1 kg, odrediti funkciju prenosa, impulsni odziv, kao i odziv sistema na silu F=1N. Za izlaznu promjenljivu usvojiti pređeni put $x(t)$.



$$m\ddot{x} + B\dot{x} + kx = F$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + Bs + k} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

Odziv sistema na pobudu

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t}$$

```
>> syms s
>> G=1/(s^2+3*s+2)
>> g=ilaplace(G)
>> y=ilaplace(1/s*G) % ulaz je jedinična funkcija
```

Odziv sistema na pobudu

```
>> roots([1 3 2]) % polovi sistema
ans =
     -2
     -1
```

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = e^{-t} - e^{-2t}$$

Posmatrani sistem nema nula. Nule određuju koeficijente uz e^{-t} i e^{-2t}, tj. kombinaciju ovih komponenti na izlazu.

Polovi i nule imaju ključnu ulogu u dinamici sistema!!!

Odziv sistema na pobudu

```
>> K=limit(G)
K =
1/2
```

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t}$$

$$y(t=\infty) = \frac{1}{2}$$

Sistem slabi ulazni signal 2 puta!!!

Ako na sistem djelujemo konstatnom silom od 1N, tijelo će se pomjeriti za ukupno 0.5m u pravcu djelovanja sile.

Odziv sistema na pobudu

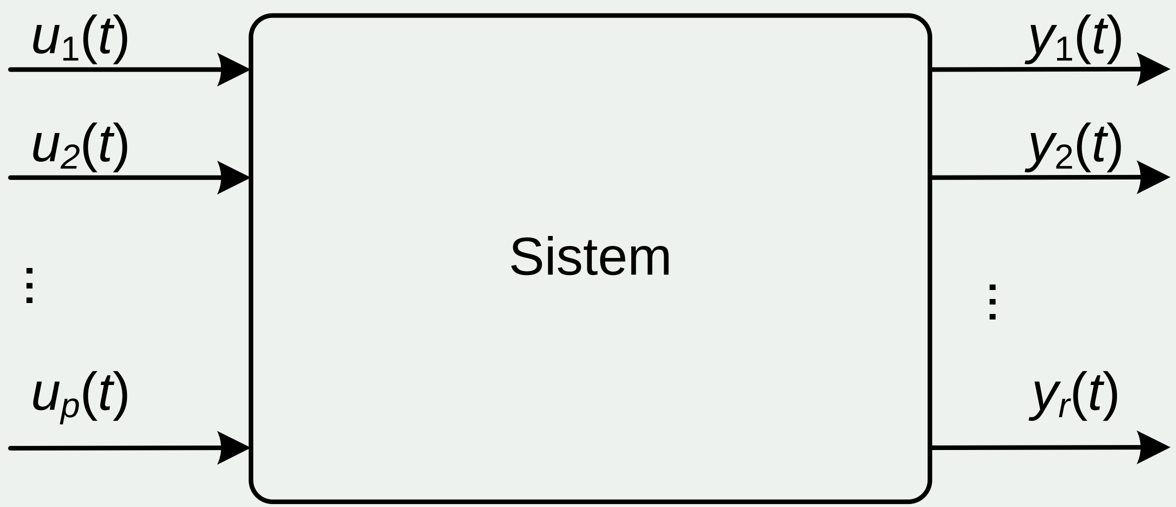
Kako naći odziv sistema na početne uslove (akumulirana energija sistema)?

Ukoliko je poznata diferencijalna jednačina kojom je opisan sistem, odziv na početne uslove se može odrediti primjenom Laplasove transformacije na posmatranu jednačinu, pri čemu početne uslove ne treba zanemariti. Kao rezultat, dobiće se zavisnost izlaznog signala od ulaznog signala (funkcija prenosa) i početnih uslova. Primjenom inverzne Laplasove transformacije na dobija se odziv na odgovarajuću pobudu i početne uslove.

Ako poznato da je sistem 3*s* prije početka trenutka posmatranja (t=0s) bio na poziciji 1m i imao brzinu 1 m/s, kako se to odražava na prethodni proračun? Pretpostaviti da je na sistem djelovano impulsom koji ga je poremetio iz ravnoteže.

Funkcija prenosa MIMO sistema

MIMO – sistemi sa više ulaza i izlaza



$$Y_i(s) = G_{i1}(s)U_1(s) + G_{i2}(s)U_2(s) + \ldots + G_{ip}(s)U_p(s)$$

$$G_{ij}(\mathrm{s}) = \left.\frac{Y_i(\mathrm{s})}{U_j(\mathrm{s})}\right|_{U_k=,\forall k\neq j}$$

Funkcija prenosa MIMO sistema

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ . \\ . \\ . \\ Y_r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1p}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2p}(s) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ G_{r1}(s) & G_{r2}(s) & \dots & G_{rp}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ . \\ . \\ . \\ U_p(s) \end{bmatrix}$$

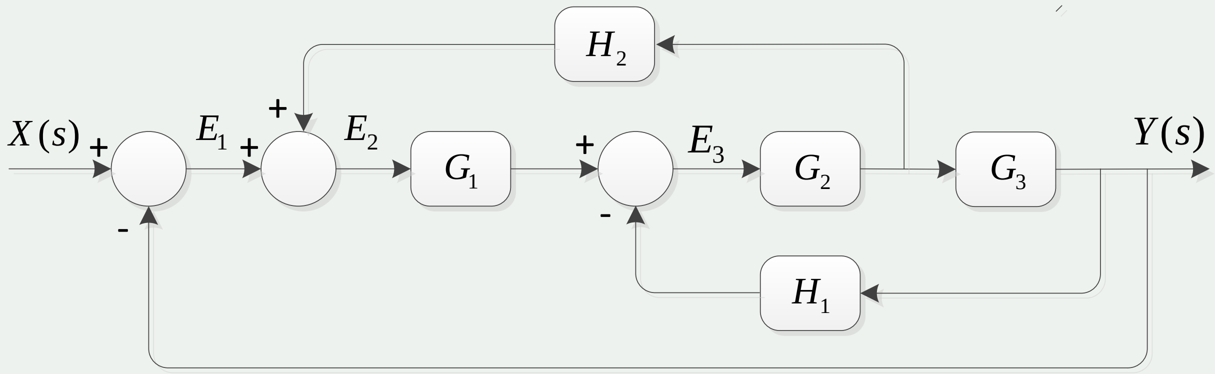
$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Karakteristični polinom?

Strukturni blok dijagrami (SBD)

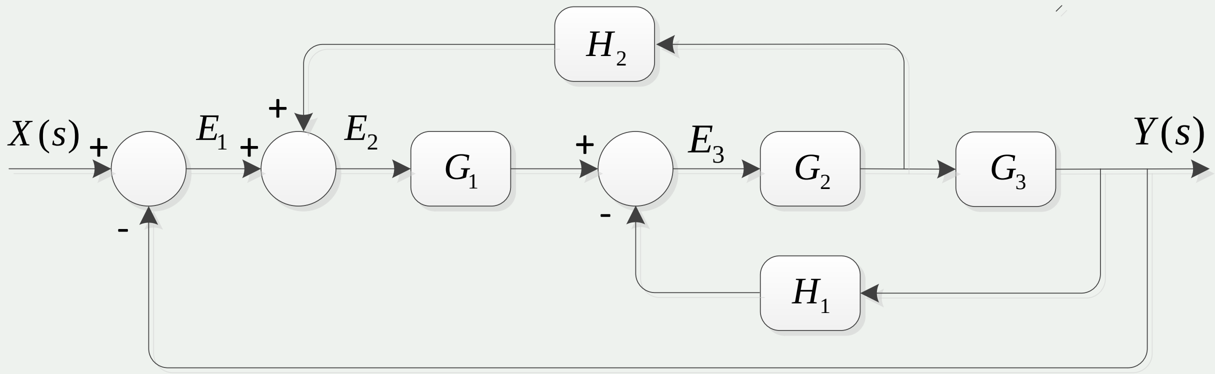
Strukturni blok dijagram (SBD) predstavlja još jedan način matematičkog modelovanja sistema. S obzirom da funckija prenosa predstavlja vezu između ulaznog i izlaznog signala, na osnovu nje se ne može sagledati šta se dešava unutar samog sistema.

Na SBD-u su prikazane glavne promjenjive sistema, veze između tih promjenljivih i funkcije prenosa komponenti sistema. Svaki elemenat ili grupa elemenata se predstavljaju jednim blokom čija je funkcija prenosa poznata. Primjer SBD-a je dat sa slici ispod.



Strukturni blok dijagrami (SBD)

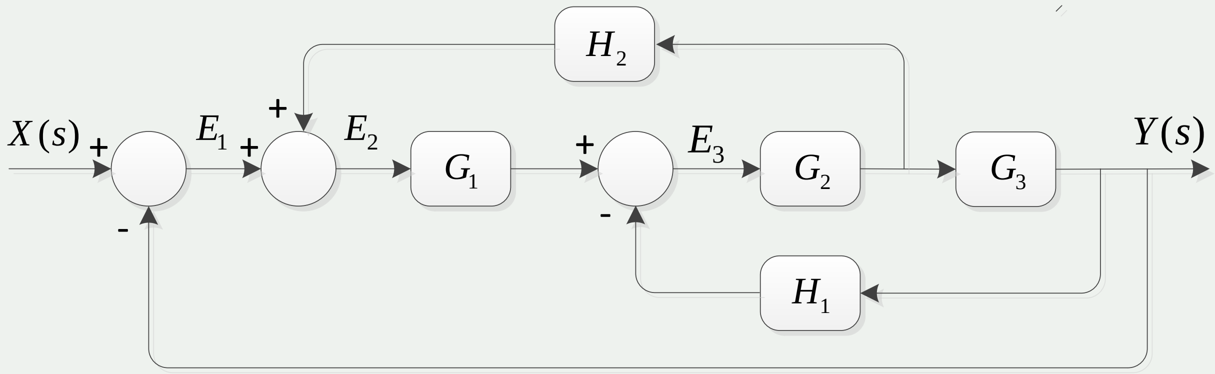
- Linijama između blokova se prikazuju njihove međusobne interakcije
- Strelice na linijama označavaju smjerove tokova signala (informacija) od jednog elementa do drugog.
- Krugovi predstavljaju sabirače (diskriminatore) - elemente koji formiraju razliku ili zbir dvije ili više promjenljivih.
- Ovako predstavljen sistem može da formira relativno složenu strukturu koja sadrži više lokalnih povratnih sprega. Ma kako bila složena početna struktura, ona se može svesti na jednu ekvivalentnu funkciju prenosa čitavog sistema.



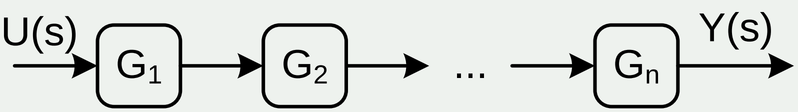
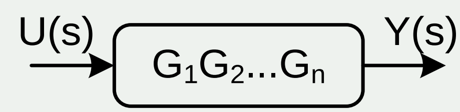
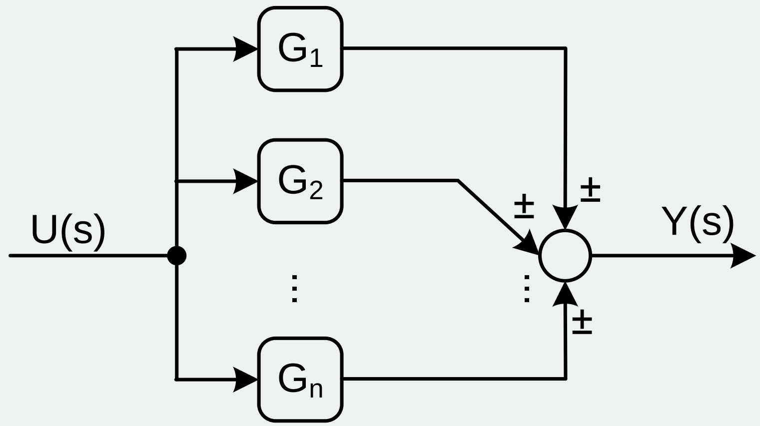
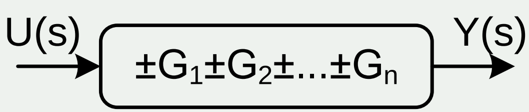
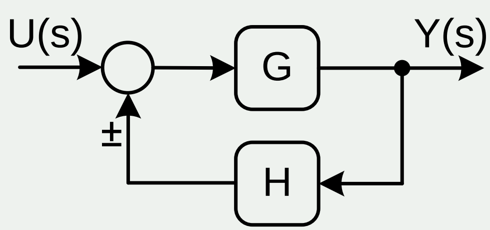
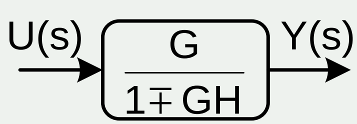
Strukturni blok dijagrami (SBD)

- Ovako predstavljen sistem može da formira relativno složenu strukturu koja sadrži više lokalnih povratnih sprega. Ma kako bila složena početna struktura, ona se može svesti na osnovnu strukuru, odnosno na jednu ekvivalentnu funkciju prenosa čitavog sistema.
- Jedan od načina svođenja SBD-a na osnovnu strukturu je primjenom jednostostavnih pravila *algebre funkcije prenosa*.

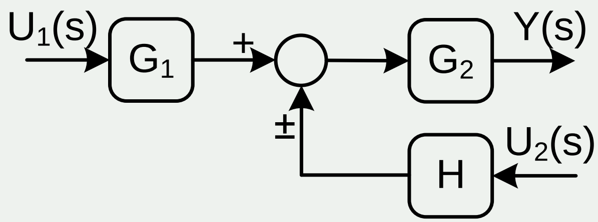
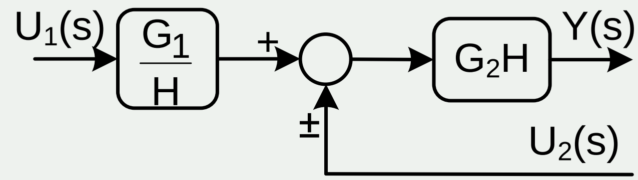
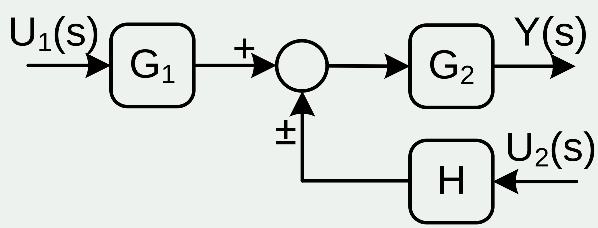
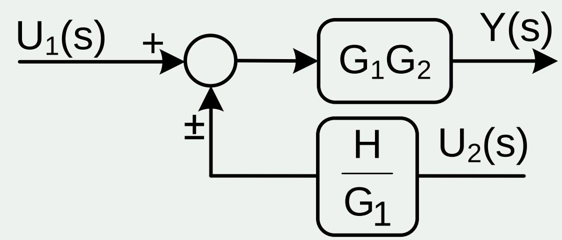
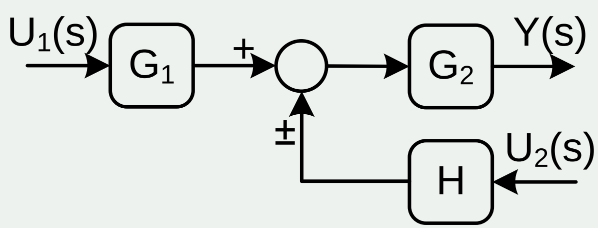
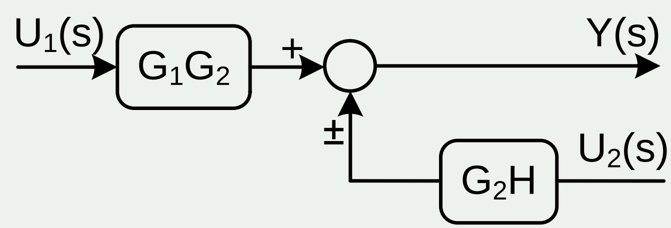
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = ?$$



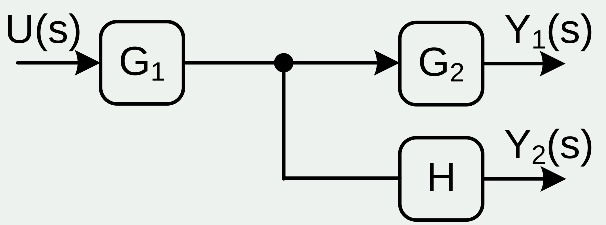
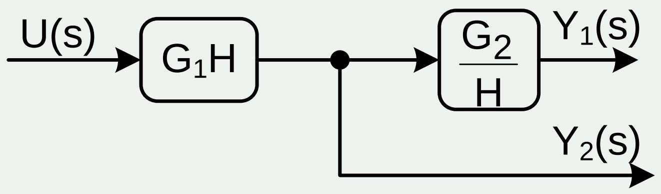
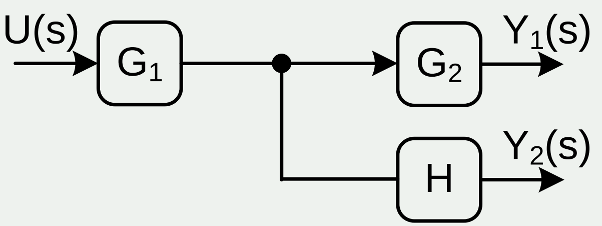
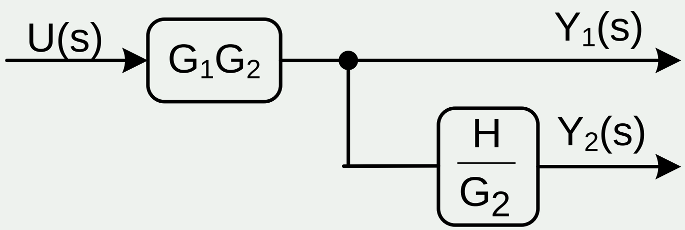
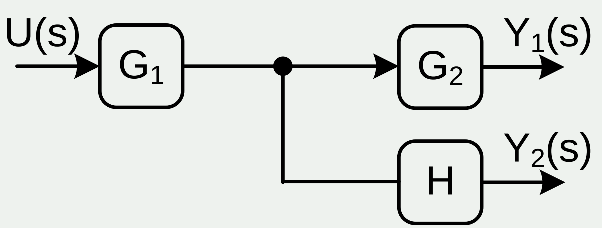
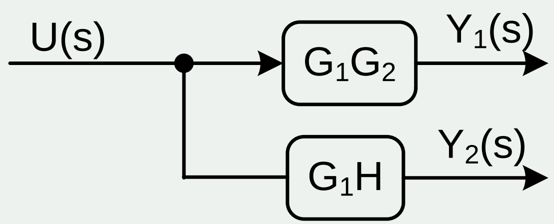
Algebra funkcije prenosa

<table>
<tr>
<td>Kaskadna veza blokova</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Paralelna veza blokova</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Svođenje povratne sprege na jedan blok</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Algebra funkcije prenosa

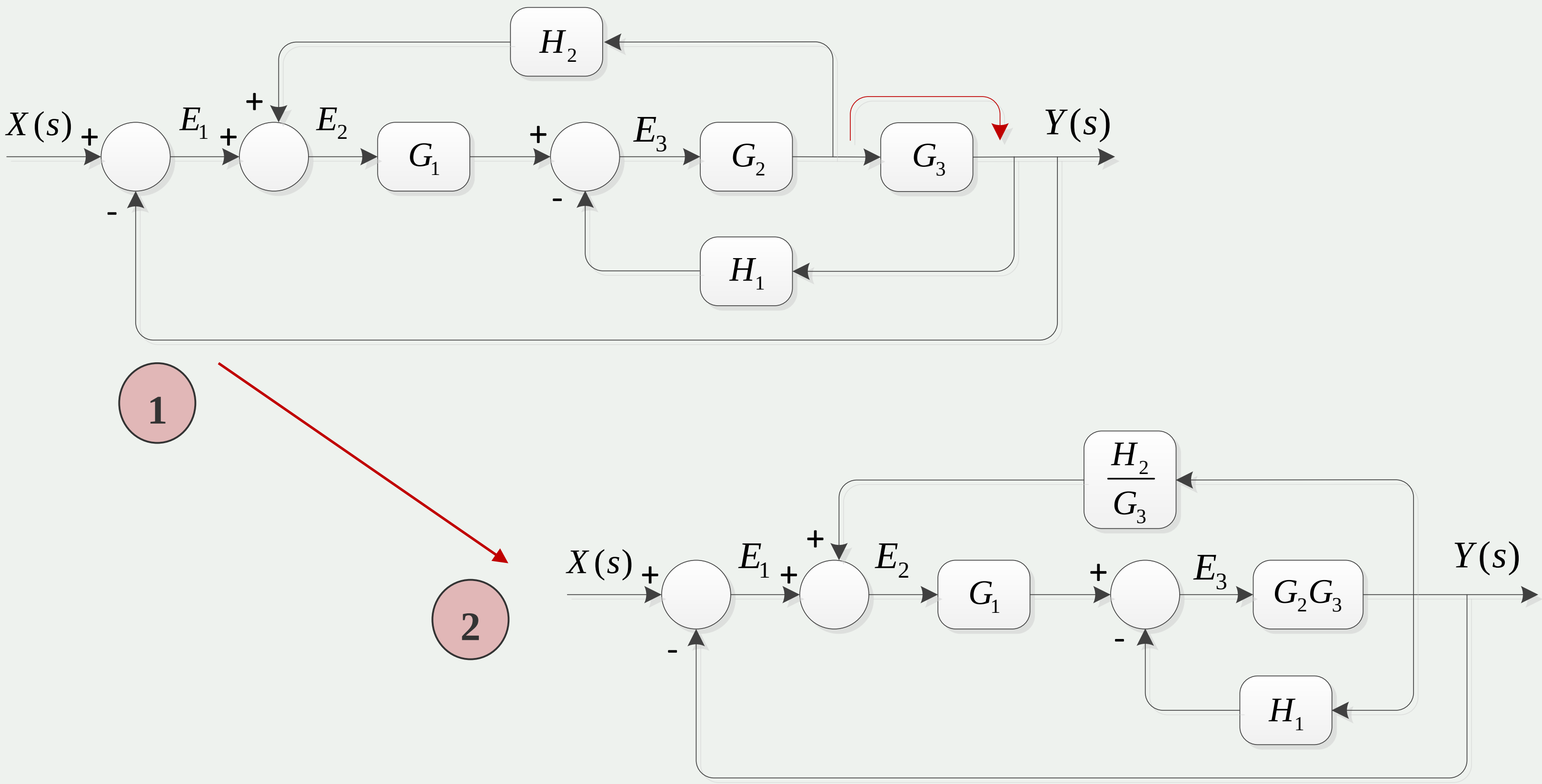
<table>
<tr><td>Premještanje bloka H ispred sabirača</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Premještanje sabirača ispred bloka G_1</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Premještanje sabirača iza bloka G_2</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Algebra funkcije prenosa

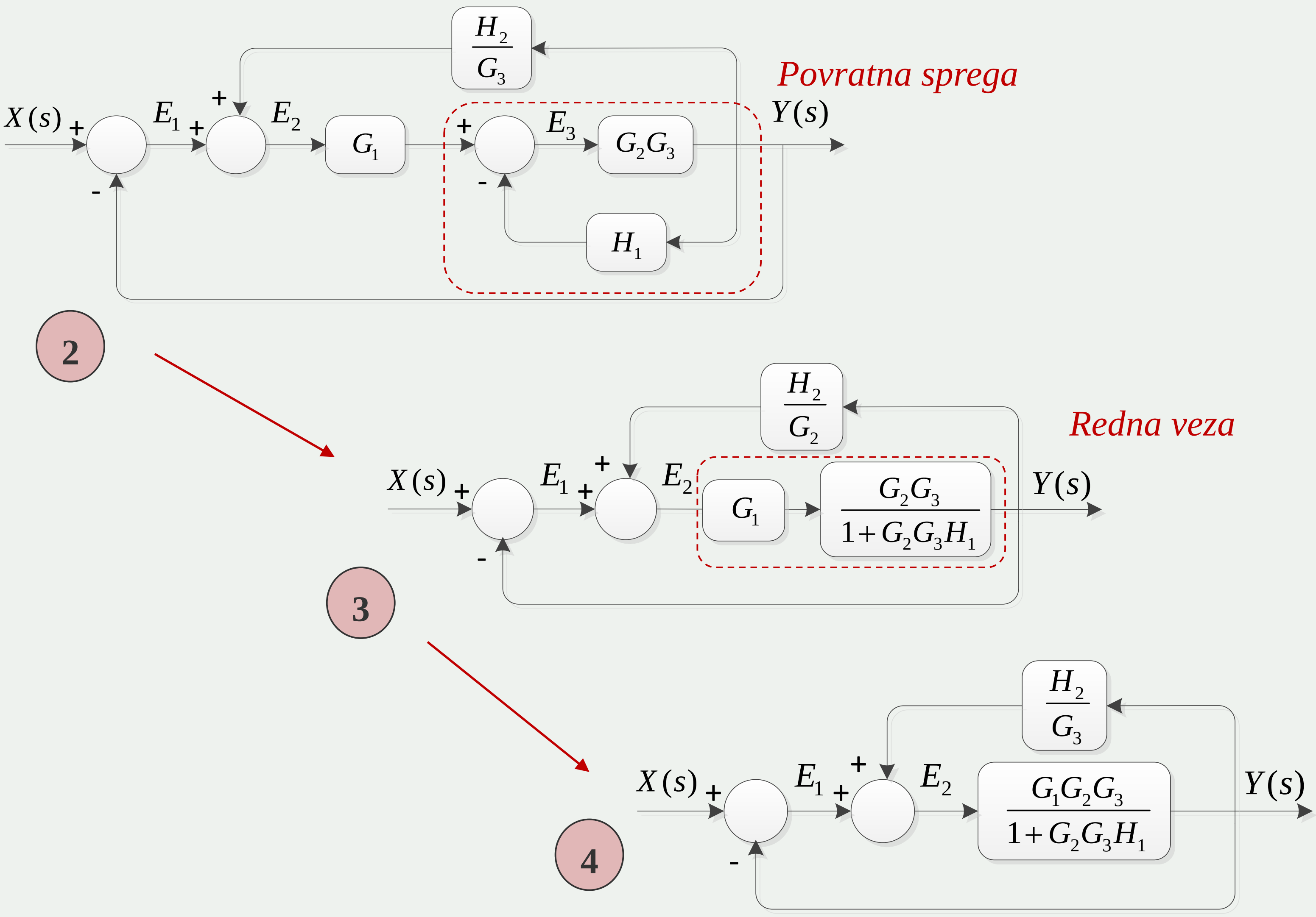
<table>
<tr>
<td>Premještanje bloka H iz direktne grane</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Premještanje čvora iza bloka G_2</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Premještanje čvora ispred bloka G_1</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Primjer – prvi način

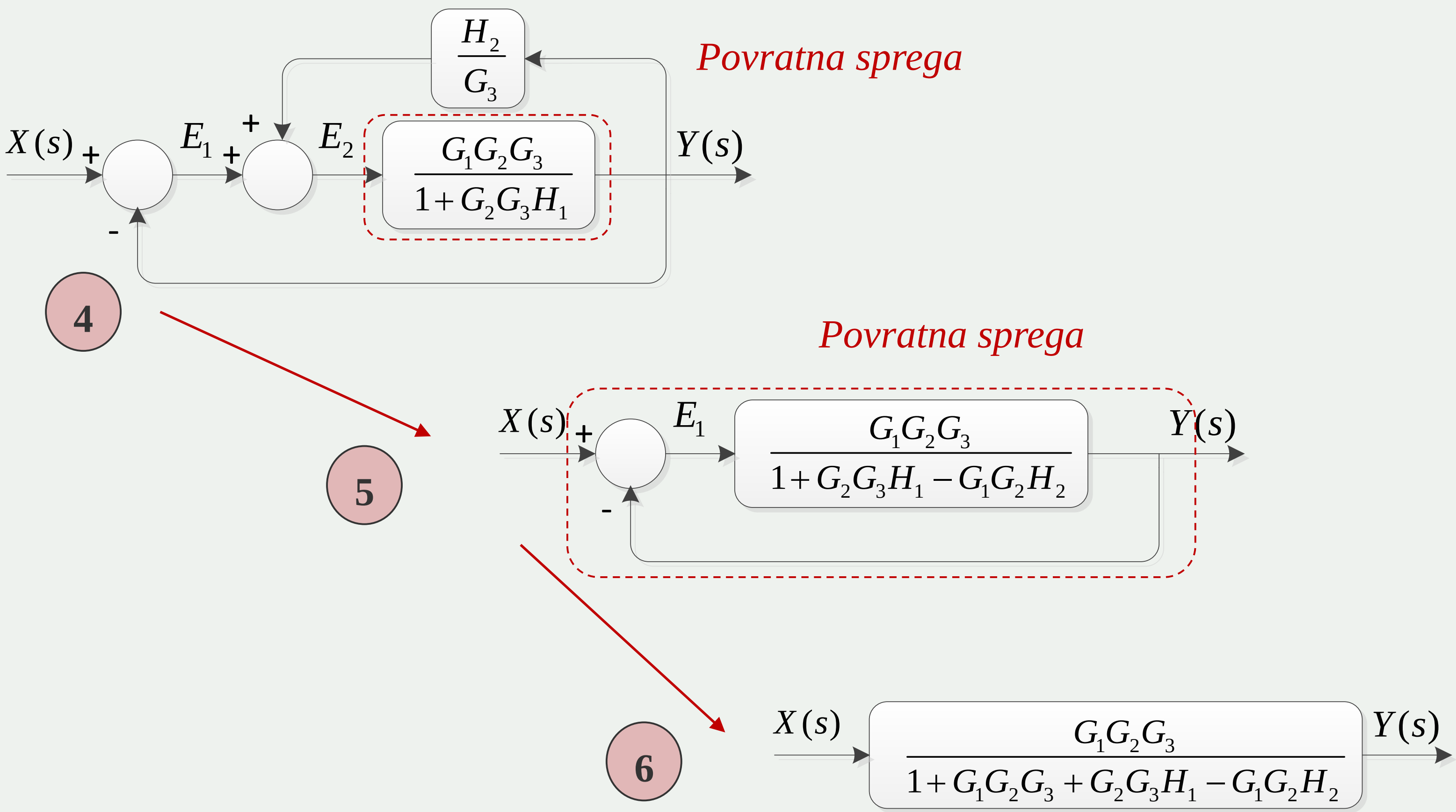
Primjenom algebre funkcije prenosa odrediti funkciju prenosa SAU-a prikazanog na slici.



Primjer – prvi način

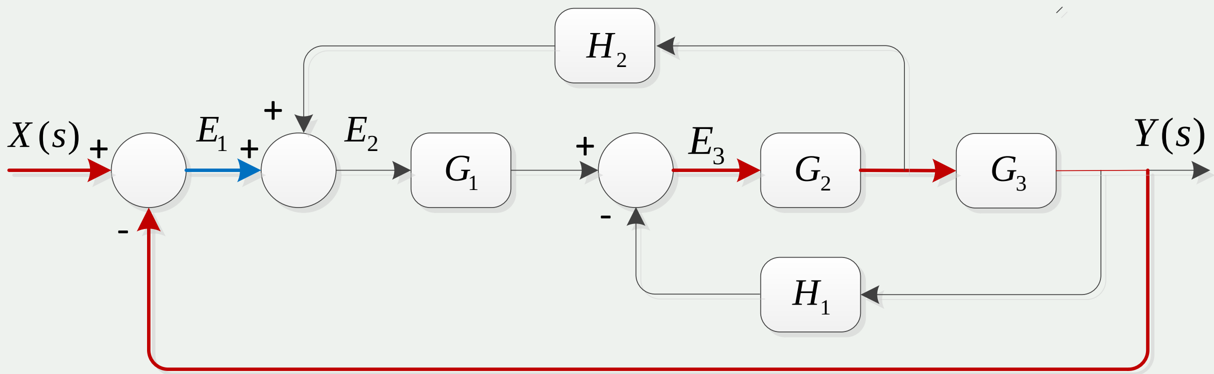


Primjer – prvi način



Primjer – drugi način

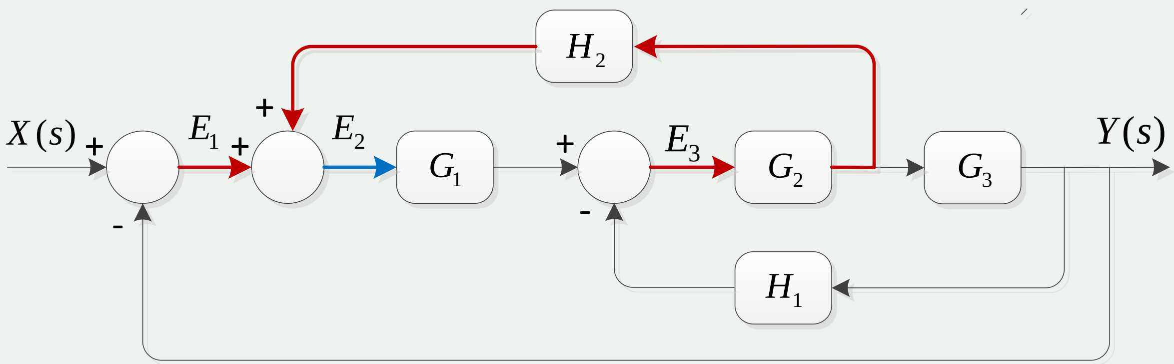
Zadatak se može riješiti na drugi način, tako što se napišu algebarske jednačine za svaki sabirač i izlaz i riješi sistem jednačina.

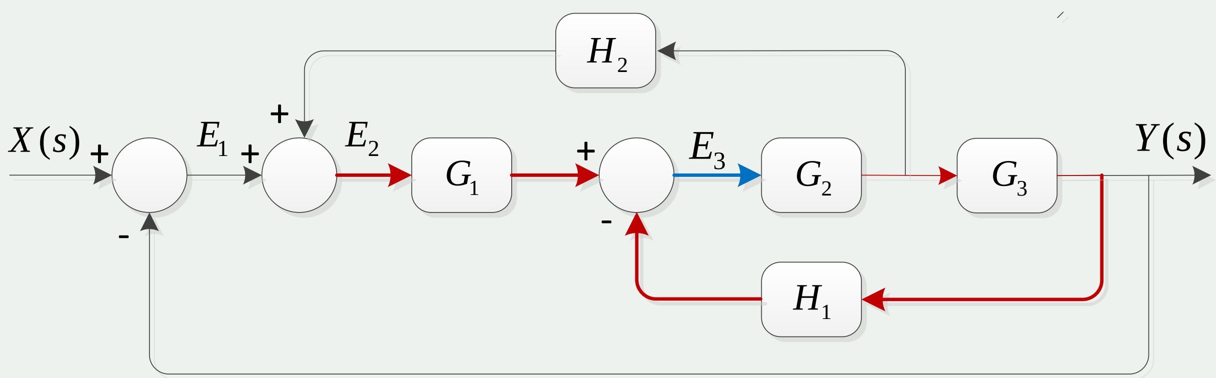


$$E_1 = X - Y = X - G_2 G_3 E_3$$

Izlaz iz svakog sabirača se po konvenciji zove signal greške. Svaki signal na izlazu iz sabirača treba zapisati u funkciji od ulaznog signala i samih signala greške.

Primjer – drugi način



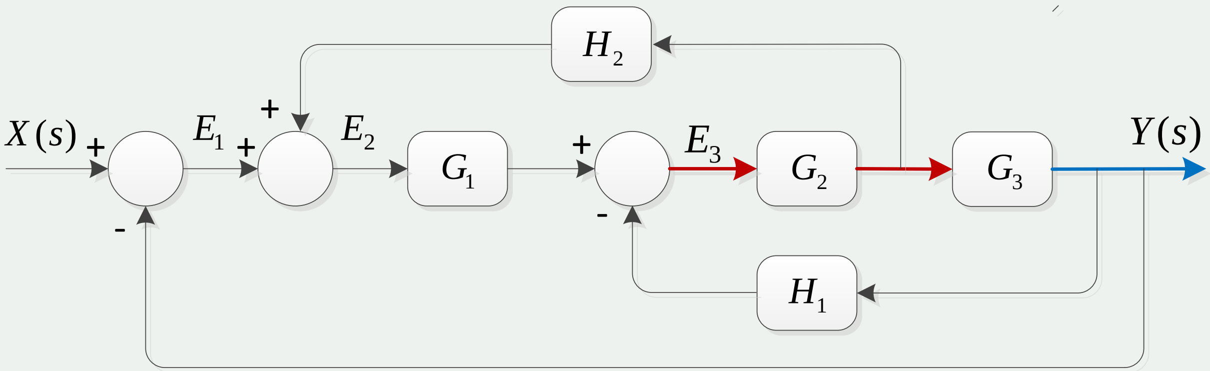


$$E_1 = X - Y = X - G_2 G_3 E_3$$

$$E_2 = E_1 + G_2 H_2 E_3$$

$$E_3 = G_1 E_2 - G_2 G_3 H_1 E_3$$

Primjer – drugi način



$$E_1 = X - Y = X - G_2G_3E_3$$
$$E_2 = E_1 + G_2H_2E_3$$
$$E_3 = G_1E_2 - G_2G_3H_1E_3$$
$$Y = G_2G_3E_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & G_2G_3 \\ -1 & 1 & -G_2H_2 \\ 0 & -G_1 & 1+G_2G_3H_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} X$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_2G_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AE} = \mathbf{B}X$$

$$Y = \mathbf{CE} = \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}X = \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}X$$

Primjer – drugi način

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & G_2G_3 \\ -1 & 1 & -G_2H_2 \\ 0 & -G_1 & 1+G_2G_3H_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & G_2G_3 \end{bmatrix}$$

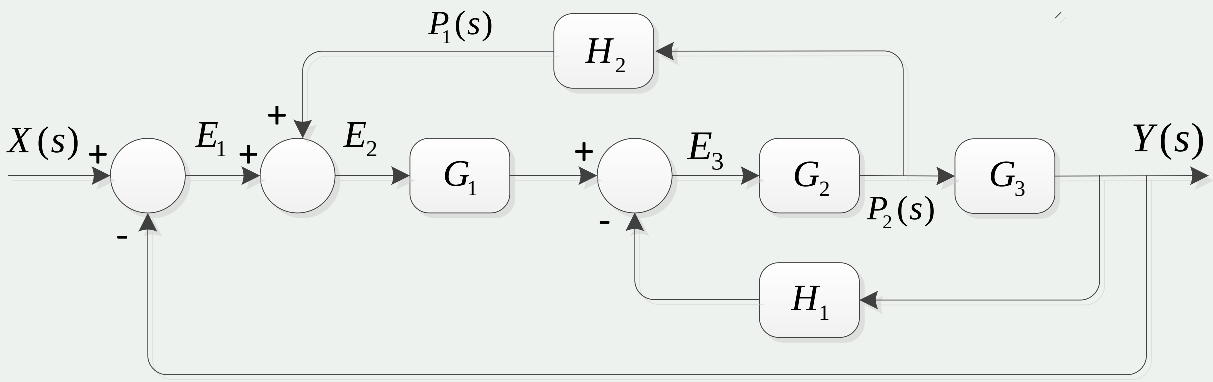
$$\boxed{G=\frac{Y}{X}=\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}}$$

Razlikovati gornje matrice od modela u prostoru stanja!

```
>> syms G1 G2 G3 H1 H2
>> A=[1 0 G2*G3;-1 1 -G2*H2;0 -G1 1+G2*G3*H1]
>> B=[1;0;0]
>> C=[0 0 G2*G3]
>> G=simplify(C*A^-1*B)
G =
(G1*G2*G3)/(G1*G2*G3 - G1*G2*H2 + G2*G3*H1 + 1)
```

$$\boxed{G=\frac{G_1G_2G_3}{1+G_1G_2G_2+G_2G_3H_1-G_1G_2H_2}}$$

Primjer – drugi način



Nekad treba odrediti funkciju prenosa između ulaza i nekog drugog signala u sistemu. To je nalakše odraditi tako što će se signali od interesa zapisati u funkciji od signala greške i ulaznog signala i formirati nove matrice.

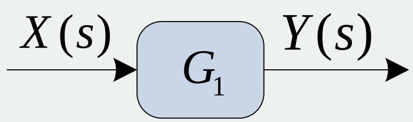
Na primjer, signali $P_1(s)$ i $P_2(s)$ su jednaki: $P_1 = G_2 H_2 E_3$ i $P_1 = G_2 E_3$. Slijedi, da su odgovarajuće izlazne matrice i funkcije prenosa jednake:

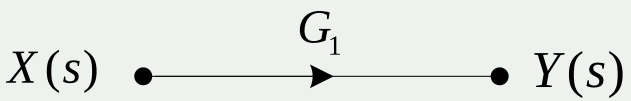
$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_2 H_2 \end{bmatrix} \quad G_1 = P_1 / X = \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_2 H_2 \end{bmatrix} \quad G_2 = P_2 / X = \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$$

Dijagram toka signala

Dijagram toka signala predstavlja još jedan način za predstavljanje matematičkog modela linearnog dinamičkog sistema. Promjenljive (signali) se označavaju čvorovima, a funkcije prenosa orijentisanim granama.

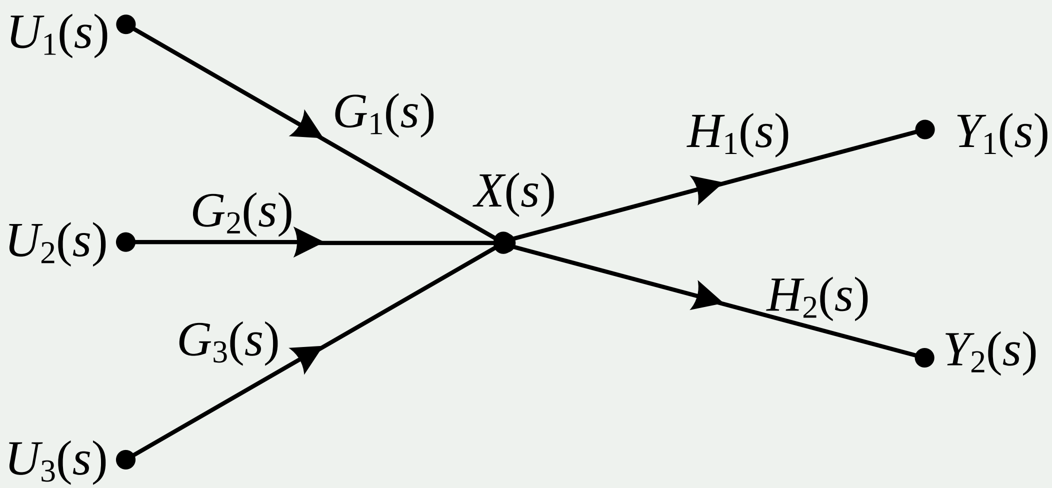




Pri formiranju i analiziranju DTS-a postoje sljedeća pravila:

- U jednom čvoru se može susticati proizvoljan broj grana, isto kao što iz jednog čvora može izlaziti proizvoljan broj grana;
- Zbir signala sa krajnjih tačaka svih grana koje se sustiču u čvoru čini promjenljivu čvora (signal čvora);
- Promenljiva čvora se ravnomerno prosljeđuje kroz sve grane koje iz tog čvora izlaze;
- Signal se kroz granu prostire isključivo u smjeru označenom strelicom.

Dijagram toka signala



Signal koji izlazi iz čvora je jednak sumi signala koji ulaze u čvor:

$$X(s) = G_1(s)U_1(s) + G_2(s)U_2(s) + G_3(s)U_3(s)$$

Signal koji izlazi iz čvora se jednako se ravnomjerno raspoređuje na grane koje izlaze iz čvora:

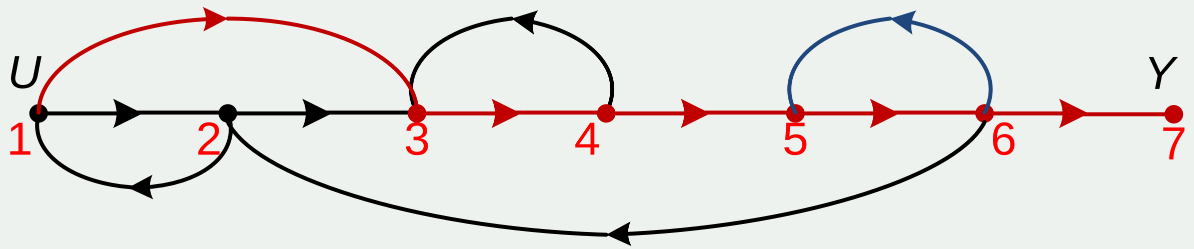
$$Y_1(s) = X(s)H_1(s)$$
$$Y_2(s) = X(s)H_2(s)$$

Dijagram toka signala

Direktna ili otvorena putanja je skup grana koje međusobno spajaju dva čvora i pri tome grane kroz svaku tačku prolaze samo jedanput.

Petlja (zatvorena putanja) je zatvoren put koji polazi i završava se u istom čvoru i pri čemu se kroz svaku tačku prolazi samo jednom.

Dvije putanje (otvorene ili zatvorene) se *ne dodiruju* ako nemaju zajedničkih čvorova ili grana.



Na primjeru sa slike putanja 134567 je direktna. Niz grana 13456567 nije putanja jer dva puta prolazi kroz granu 56. Neke od petlji su: 343, 565, dok, na primjer, putanja 1231 nije petlja (kroz granu 13 se ide u suprotnom smjeru). Putanje 343 i 565 se **ne dodiruju**, dok putanje 123 i 343 imaju zajednilki čvor.

Mason-ovo pravilo

Funkcija prenosa DTS-a se određuje na osnovu sljedećeg obrazca:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}P_i\Delta_i}{\Delta}$$

gdje su:

- P_i - prenos (pojačanje) *i*-te direktne (otvorene) putanje;
- Δ - determinanta grafa;
- Δ_i - Δ primijenjeno na zatvorene putanje koje ne dodiruju *i*-tu direktnu putanju;
- n - broj direktnih putanja u grafu.

Determinanta grafa

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \ldots (-1)^m \sum \ldots$$

$\sum L_i$ *- zbir pojačanja (prenosa, funkcija prenosa) svih zatvorenih putanja (petlji) grafa;*

$\sum L_i L_j$ *- zbir proizvoda pojačanja svih* ***parova*** *zatvorenih putanja koje se međusobno* *<u>ne dodiruju.</u>*

$\sum L_i L_j L_k$ *- zbir proizvoda pojačanja svake* ***tri*** *zatvorenie putanja koje se međusobno* *<u>ne dodiruju.</u>*

Brojilac determinante grafa toka signala je

KARAKTERISTIČNI POLINOM SISTEMA

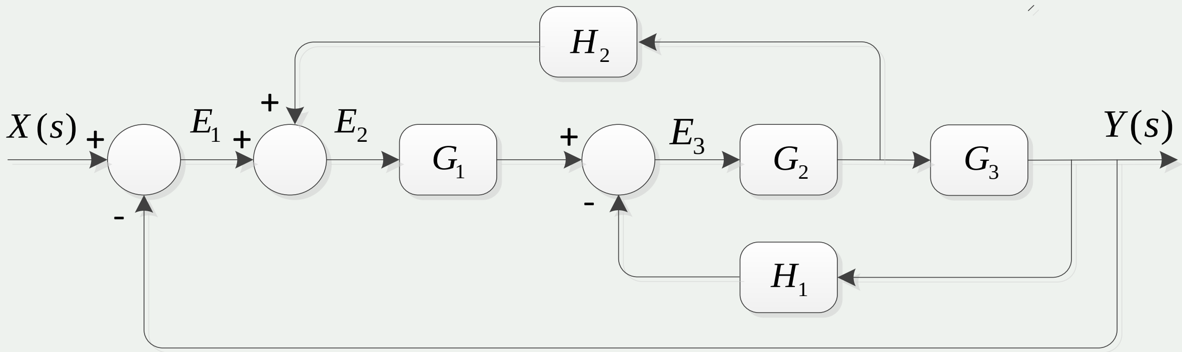
Transformacija SBD u DTS

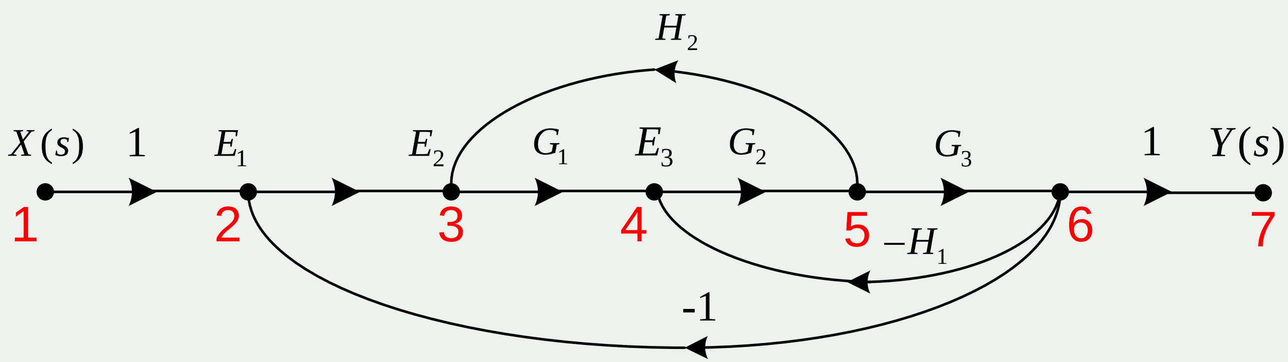
Strukutni blok dijagram se može transformisati u dijagram tokova signala primjenom sljedećih pravila:

- Diskriminatori i čvorovi strukturnog blok dijagrama postaju čvorovi grafa toka signala;
- Blokovi strukturnog blok dijagrama postaju grane grafa toka signala, a funkcije prenosa blokova postaju pojačanja grana;
- Smjer toka signala se pri transformaciji ne mijenja;
- Pošto se signali u čvoru GTS po definiciji sabiraju, predznak grane sa kojim ona ulazi u diskriminator strukturnog blok dijagrama se pridružuje funkciji prenosa, odnosno pojačanju odgovarajuće grane.

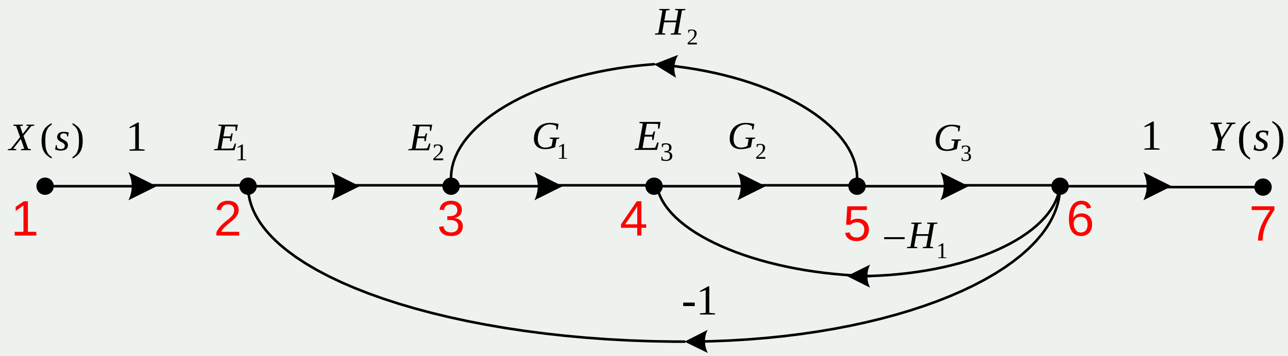
Primjer

Skicirati dijagram toka signala SAU-a prikazanog na slici, a zatim primjenom Mason-ovog pravila odrediti funkciju prenosa.





Primjer



Direktne putanje: P_1 = 12345678.

Zatvorene putanje: L_1=234562, L_2=34563, L_3=4564.

Nema prozivoda od po dvije ili više putanja koje se ne dodiruju.

Determinanta grafa je prema definiciji:

$\boldsymbol{\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3)}$

Primjer

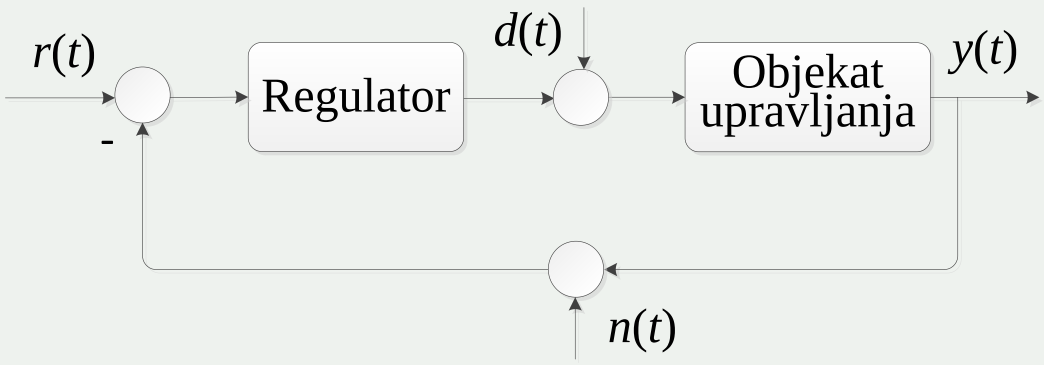
Determinanta grafa je prema definiciji:
$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3)$

Δ_i se dobija na osnovu Δ tako što se iz Δ izbace sve petlje koje dodiruju *i*-tu direktnu putanju (izbacuju se i svi proizvodi gdje te petlje učestvuju kao činioci). Svaka zatvorena putanja dodiruje direktnu putanju, pa je $\mathbf{\Delta_1 = 1}$.

$$\boxed{\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{P_1}{1 - L_1 - L_2 - L_3} \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 - G_1 G_2 H_2 + G_2 G_3 H_1} \end{aligned}}$$

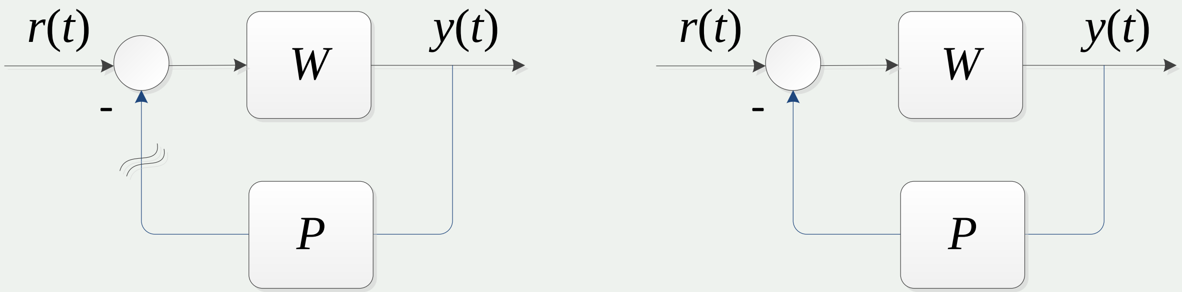
Pojednostavljena struktura upravljanja

Za potrebe analize, a kasnije i sinteze regulatora, u ovom kursu se najčešće posmatra pojednostavljana regulaciona kontura (sistem sa jediničnom povratnom spregom):



Funkcija prenosa objekata upravljanja obuhvata funkcije prenosa procesa, aktuatora i senzora, jer regulator koji se dodaje u direktnoj grani „ne vidi“ proces, aktuator i senzor kao odvojene sisteme. Sa $d(t)$ je označen aditivni poremećaj koji djeluje na ulaz aktuatora i procesa. Šumovi i mjerne nesigurnosti se modeluju na sa $n(t)$. Sa $r(t)$ je označen referentni signal, sa $u(t)$ upravljački signal, a sa $y(t)$ regulisana veličina.

Funkcije povratnog i spregnutog prenosa



Potrebno je definisati još dva pojma koje će se često korisiti u toku kursa: funkciju povratnog prenosa i funkciju spregnutog prenosa.

Funkcija prenosa u otvorenoj (raskinutoj) petlji se zove funkcija povratnog prenosa ($W(s)P(s)$). Funkcija prenosa u zatvorenoj petlji se zove funkcija spregnutog prenosa:

$$G = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{W}{1+WP}$$