Solusi Persamaan Non-Linier

Pada dasarnya, solusi suatu persamaan non-linear dengan satu variabel x (simbolkan saja $f(x)$) adalah akar (akar) dari persamaan non-linear tersebut. Secara matematis dituliskan :

$$f(x) = 0$$

Interpretasi geometris dari solusi persamaan non-linier tersebut sebenarnya adalah titik potong antara kurva fungsi y = f(x) dan sumbu x. Berikut adalah contoh-contoh persamaan non-linier:

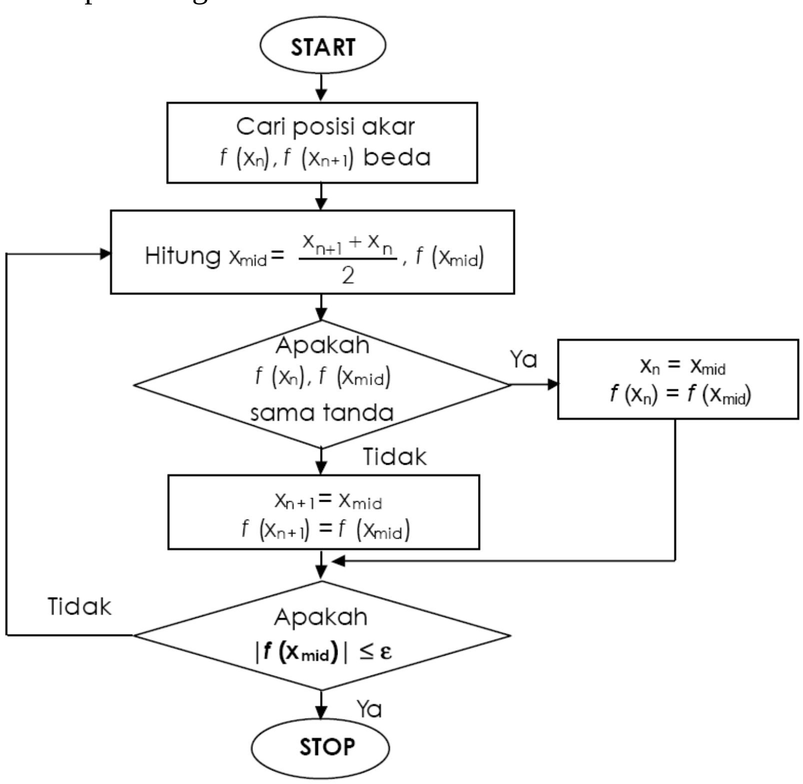
1. $f(x) = 12 - 5x + 3x^2 + 2x^4 - x^5 = 0$
2. $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 13}{2x + 9} - 10 = 0$
3. $f(x) = x - 2e^x = 0$

Metode numerik yang dapat digunakan untuk memperoleh solusi dari persamaan non-linear antara lain:

1. Metode Biseksi (*Bisection*)
2. Metode Regula Falsi (*False Position*)
3. Metode Newton-Raphson
4. Metode Secant
5. Metode Iterasi Tetap (*Fixed Point Iteration*)

Metode Biseksi

Secara ringkas, algoritma pencarian solusi persamaan non-linier dengan menggunakan metode biseksi dapat dijelaskan pada diagram alir dari berikut:



Hal yang mendasari penamaan metode ini adalah bahwa proses pencarian akar dilakukan dengan membagi dua interval yang dicurigai mengandung akar pada tiap iterasinya. Hal-hal yang perlu diperhatikan dalam metode biseksi adalah:

- fungsi harus kontinu pada interval x_n dan x_{n+1}.
- menentukan x_n dan x_{n+1} dapat diperoleh dengan membuat grafik fungsinya terlebih dahulu maupun dengan try-and-error sedemikian sehingga $f(x_n).\ f(x_{n+1}) < 0$ (bernilai negatif).
- nilai toleransi (error, dilambangkan ε) dapat ditentukan oleh pengguna ataupun didasarkan pada bidang ilmu dan kebutuhan dari permasalahan yang dihadapi.

Kelebihan metode Biseksi adalah selalu berhasil menemukan akar (solusi) yang dicari, atau dengan kata lain selalu konvergen. Sementara kekurangan dari metode Biseksi diantaranya:

1) Metode biseksi hanya dapat dilakukan apabila ada akar persamaan pada interval yang diberikan.
2) Jika ada beberapa akar pada interval yang diberikan maka hanya satu akar saja yang dapat ditemukan.
3) Memiliki proses iterasi yang banyak sehingga memperlama proses penyelesaian. Tidak memandang bahwa sebenarnya akar atau solusi yang dicari dekat sekali dengan batas interval yang digunakan.

Contoh: Tentukan solusi dari persamaan non-linier berikut:

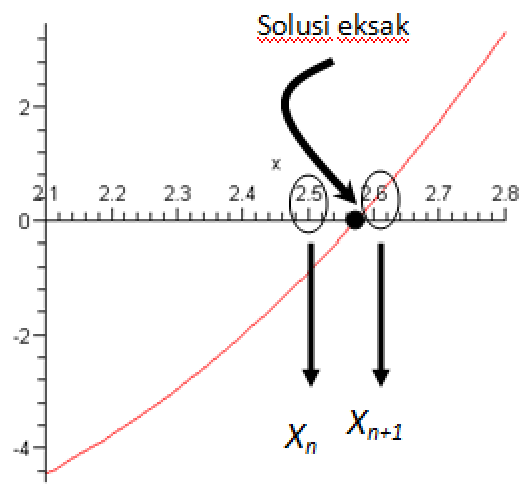
$$x^3 - 7x + 1 = 0$$

dengan error 0.005 dan menggunakan metode Biseksi.

Penyelesaian:

Langkah 1 : Membuat grafik dari $y = x^3 - 7x + 1$ untuk memperoleh batas interval x_n dan x_{n+1}. Dengan program *Maple* diperoleh grafik $y = x^3 - 7x + 1$ sebagai berikut:

Terlihat dari grafik di atas bahwa solusi dari $y = x^3 - 7x + 1$ ada pada interval 2.5 dan 2.6, maka digunakan $x_n = 2.5$ dan $x_{n+1} = 2.6$.



Langkah 2 : Hitung nilai $f\,(x_n)$, $f\,(x_{n+1})$, $x_{mid} = \frac{x_{n+1}+x_n}{2}$ dan $f\,(x_{\text{mid}})$.

Karena $f(x) = x^3 - 7x + 1$

Maka:

$$f(x_n) = f(2.5) = (2.5)^3 - 7(2.5) + 1 = -0.875$$

$$f(x_{n+1}) = f(2.6) = (2.6)^3 - 7(2.6) + 1 = 0.376$$

$$x_{mid} = \frac{2.6 + 2.5}{2} = 2.55$$

$$f(x_{mid}) = f(2.55) = (2.55)^3 - 7(2.55) + 1 = -0.269$$

Tabel 1

No	x_n	x_{n+1}	$f\,(x_n)$	$f\,(x_{n+1})$	x_{mid}	$f\,(x_{\text{mid}})$
1.	2.5	2.6	-0.875	0.376	2.55	-0.269

Langkah 3 : Apakah $f\,(x_n)$ dan $f\,(x_{\text{mid}})$ sama tanda? Jika sama tanda maka x_{mid} menggantikan x_n, sedangkan jika berbeda tanda maka x_{mid} menggantikan x_{n+1}. Terlihat dari Tabel 1, $f\,(x_n) = -0.875$ dan $f\,(x_{\text{mid}}) = -0.269$ sama tanda, maka $x_{\text{mid}} = 2.55$ menggantikan $x_n = 2.5$.

Tabel 2

No	x_n	x_{n+1}	$f\,(x_n)$	$f\,(x_{n+1})$	x_{mid}	$f\,(x_{\text{mid}})$
1.	~~2.5~~	2.6	-0.875	0.376	2.55	-0.269
						sama tanda
2.	2.55	2.6	-0.269	0.376		

Langkah 4 : Apakah $|\,\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}_{\textbf{mid}})| \leq 0.005$? Jika ya, maka $x_{\text{mid}} = 2.55$ merupakan solusi dari persamaan non linier tersebut, jika tidak, ulangi *langkah 2* dengan $x_n = 2.55$ dan $x_{n+1} = 2.6$. Dikarenakan $|\,\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}_{\textbf{mid}})| = 0.269 > 0.005$ maka ulangi langkah 2 sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 3

No	x_n	x_{n+1}	$f\,(x_n)$	$f\,(x_{n+1})$	x_{mid}	$f\,(x_{\text{mid}})$
1.	2.5	2.6	-0.875	0.376	2.55	-0.269
						sama tanda
2.	2.55	2.6	-0.269	0.376	2.575	0.049
						beda tanda
3.	2.55	2.575	-0.269	0.049	2.562	-0.117
						sama tanda
4.	2.562	2.575	-0.117	0.049	2.568	-0.041

$|\,f\,(x_{\text{mid}})| = 0.269 > 0.005$

$|\,f\,(x_{\text{mid}})| = 0.049 > 0.005$

$|\,f\,(x_{\text{mid}})| = 0.117 > 0.005$

$|\,f\,(x_{\text{mid}})| = 0.041 > 0.005$

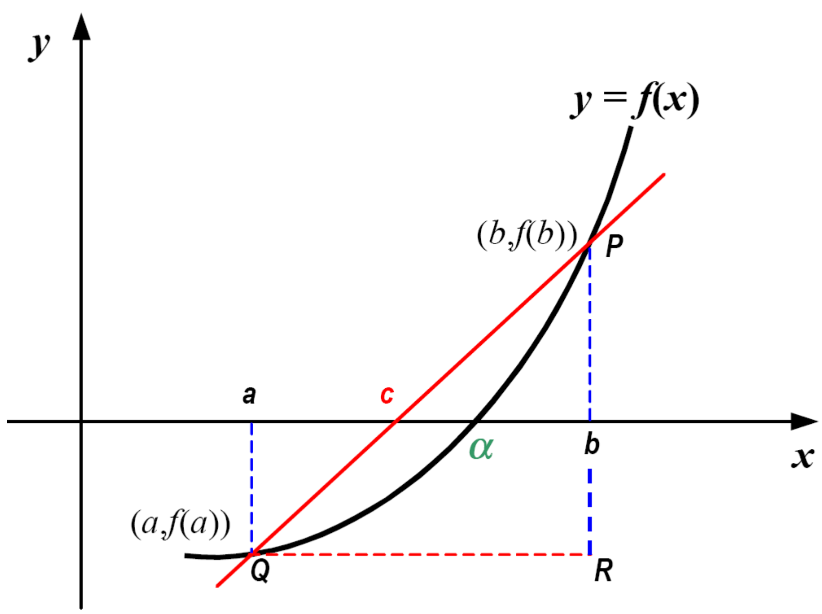
						sama tanda
5.	2.568	2.575	-0.041	0.049	2.572	0.010
						beda tanda
6.	2.568	2.572	-0.041	0.010	2.570	-0.015
						Sama tanda
7.	2.570	2.572	-0.041	0.010	**<u>2.571</u>**	-0.003
$\lvert f(x_{mid}) \rvert = 0.003 \le 0.005$ maka iterasi dihentikan dan diperoleh solusi persamaan non linier yang diinginkan yaitu x = 2.571.						

$\lvert f(x_{mid}) \rvert = 0.010 > 0.005$

$\lvert f(x_{mid}) \rvert = 0.015 > 0.005$

Metode Regula Falsi

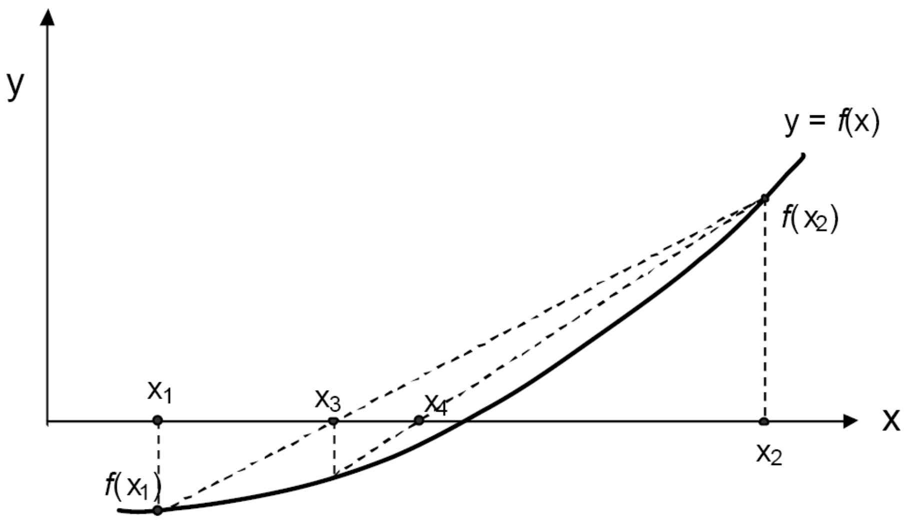
Pada prinsipnya algoritma metode Regula Falsi sangat mirip dengan algoritma metode Biseksi, yang membedakan hanyalah mengganti rumus pencarian $x_{mid} = \frac{x_{n+1}+x_n}{2}$ pada algoritma Biseksi menjadi $x^* = x_n - f(x_n)\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{f(x_{n+1})-f(x_n)}\right)$ untuk mereduksi interval yang dicurigai mengandung akar. Berikut adalah representasi grafis dari metode Regula Falsi:



Rumus memperoleh x^* (atau dalam grafik disajikan dengan huruf c) diperoleh dengan memanfaatkan prinsip kesebangunan pada segitiga Pcb dan segituga PQR. Sehingga diperoleh:

$$\frac{Pb}{bc} = \frac{PR}{RQ} \leftrightarrow \frac{f(b)-0}{b-c} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leftrightarrow c = b - f(b)\left(\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\right)$$

Grafik berikut mengilustrasikan proses iteratif dalam pencarian akar persamaan non-linier dengan menggunakan metode Regula Falsi:



Contoh: Tentukan solusi dari persamaan non-linier berikut:

$$y = x^3 - 7x + 1$$

dengan error 0.005 dan menggunakan metode Regula Falsi.

Penyelesaian:

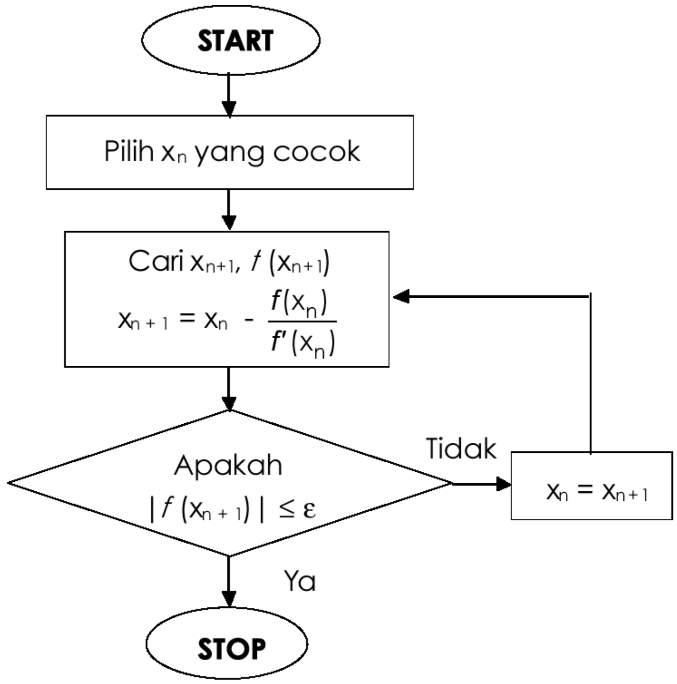
Berdasarkan grafik pada contoh sebelumnya, maka digunakan $x_n = 2.5$ dan $x_{n+1} = 2.6$. Langkah-langkah dalam algoritma Regula Falsi mirip dengan langkah-langkah dalam algoritma Biseksi, dan hasilnya dirangkum pada tabel perhitungan berikut:

No	x_n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$	x^*	$f(x^*)$
1.	2.5	2.6	-0.875	0.376	2.57	-0.015
2.	2.57	2.6	-0.015	0.376	2.571	0.003
$\lvert f(x_{mid}) \rvert = 0.003 \leq 0.005$ maka iterasi dihentikan dan diperoleh solusi persamaan non linier yang diinginkan yaitu x = 2.571.						

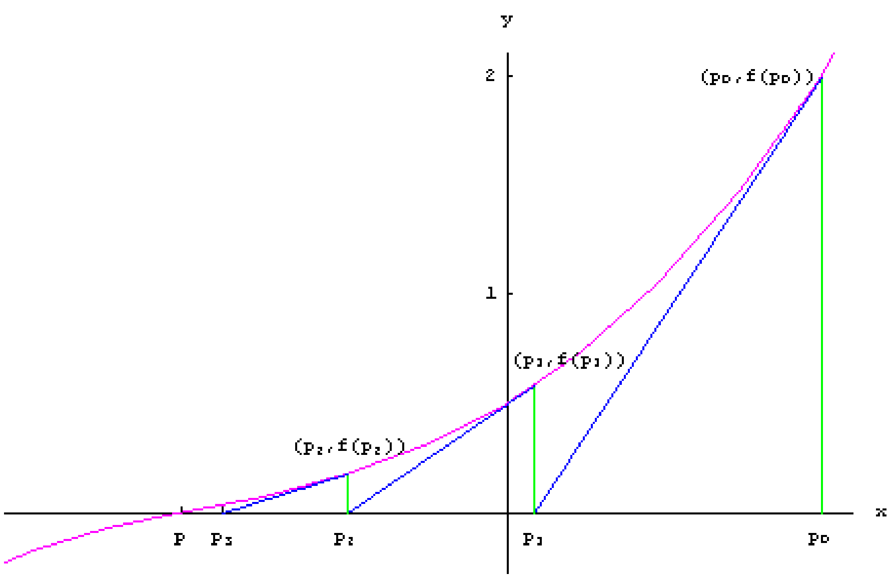
Perlu diperhatikan bahwa, metode Biseksi dan Regula Falsi adalah metode pencarian akar yang memerlukan interval yang mencapit akar sebagai masukan/input. Sementara, tiga metode lainnya (Newton-Raphson, Sekan, dan Iterasi Titik Tetap) tidak memerlukan interval yang mencapit akar. Lebih jauh, metode Newton-Raphson dan Iterasi Titik Tetap bahkan tidak memerlukan interval sebagai masukan/inputnya, melainkan hanya sebuah titik. Berikut adalah rangkuman yang membandingkan ketiga metode yang dimaksud.

Metode Newton-Raphson

Algoritma Newton-Raphson disajikan pada diagram alir berikut:



Grafis berikut menggambarkan proses pencarian akar dengan menggunakan metode Newton-Raphson:



Metode Sekan

Metode Sekan disebut juga metode Interpolasi Linear. Dalam proses pencarian akar, tidak harus dilakukan penjepitan akar oleh interval awal yang menjadi masukan/input dari metode ini. Dengan demikiam, nilai dari $f(x_0)$ dan $f(x_1)$ mungkin saja bertanda sama. Secara umum, algortima pencarian dengan menggunakan metode Sekan dapat dirangkum sebagai berikut:

- Tentukan nilai x_0 dan x_1 sebagai masukan, sehingga diperoleh interval $[x_0, x_1]$;
- Hitung nilai x_2 , yang dicari dengan rumus:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}$$

- Untuk menjalankan iterasi berikutnya, maka lakukan perubahan nilai dengan prinsip pergeseran berikut:

  $$x_0 \leftarrow x_1\ ,\ \ x_1 \leftarrow x_2$$

  sehingga akan diperoleh interval [x_0, x_1] yang baru;
- Iterasi berlangsung sampai batas maksimum atau sampai dipenuhinya batas toleransi (ε).

Catatan: Jika interval masukan awal [x_0, x_1] mencapit akar, maka metode ini akan menyerupai metode Regula Falsi. Hanya saja, pada metode Sekan tidak pernah dilakukan pemeriksaan kesamaan tanda antara dua nilai seperti pada metode Regula Falsi. Pada metode Sekan, penggantian interval adalah mutlak sesuai prinsip pergeseran pada algoritma yang diberikan di atas.

Contoh: Tentukan solusi dari persamaan non-linier:

$$y = x^3 - 7x + 1$$

dengan error 0.03 dan menggunakan metode Newton-Raphson dan Sekan.

Penyelesaian :

- ✓ Menggunakan metode Newton-Raphson, dengan memilih nilai awal x_n = 2.5, diperoleh hasil perhitungan pada tabel berikut:

No	x_n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$
1.	2.5	2.574	-0.875	0.04
2.	2.574	**2.573**	0.04	0.02
Karena | $f(x_{n+1})$| = **0.02 < 0.03** maka iterasi dihentikan dan diperoleh solusi persamaan non linier yang diinginkan yaitu x = 2.573.				

- ✓ Menggunakan metode Sekan, dengan memilih x_1 = 2,5 dan x_0 =2.3, maka diperoleh hasil perhitungan sebagai berikut:

No	x_0	x_1	$f(x_0)$	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$
1.	2.3	2.5	-2.933	-0.875	2.585	0.18
2.	2.5	2.585	-0.875	0.18	2.57	-0.015
Karena | $f(x_2)$| = 0.015 ≤ 0.03 maka iterasi dihentikan dan diperoleh solusi persamaan non linier yang diinginkan yaitu x = 2.57.						

Dapat dilihat bahwa jumlah iterasi dari kedua metode di atas untuk memperoleh estimasi solusi adalah sama, yaitu satu kali iterasi. Solusi numerik yang diperoleh juga hampir sama, dengan tingkat error dari metode Newton-Raphson lebih kecil dibanding metode Sekan. Secara umum, kecepatan konvergensi dari metode Newton-Raphson adalah lebih cepat dibanding metode lainnya yang telah dibahas, asalkan turunan dari fungsi non-linier yang bersesuaian mudah dicari dan dihitung.

Metode Iterasi Titik Tetap

Metode iterasi titik tetap adalah metode yang memisahkan x dari fungsi non-linier dalam persamaan non-linier yang ingin dicari akarnya, sedemikian sehingga diperoleh persamaan baru: $x = g(x)$ atau dalam bentuk persamaan iterasi dituliskan sebagai:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Contoh: Berikut adalah contoh cara "pemisahan x" yang dimaksud pada penjelasan di atas:

$x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow x = (x^2 + 3)/2$

$\sin(x) = 0 \rightarrow x = \sin(x) + x$

Catatan: cara "pemisahan x" yang dilakukan sedemikian sehingga memperoleh persamaan $x = g(x)$ tidaklah unik. Jadi untuk suatu persamaan non-linier $f(x) = 0$, mungkin saja diperoleh banyak bentuk persamaan $x = g(x)$.

Adapun bentuk persamaan $x = g(x)$ yang dipilih untuk proses iterasi dari metode Iterasi Titik Tetap adalah yang cukup sederhana dan memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

- ✓ $f(x) = 0$ dapat diubah menjadi bentuk: $x = g(x)$ (yang tidak unik);
- ✓ $g'(x) \in [a, b]$ dan $g'(x) \leq k$ dengan $k < 1$, maka untuk setiap $x \in [a, b]$, maka titik tetap tersebut tunggal dan iterasinya akan konvergen menuju akar

Berikut adalah beberapa prinsip yang berkaitan dengan algoritma iterasi titik tetap:

- ✓ Cari akar dgn pertidaksamaan rekurens: $x_{n+1} = g(x_n)$; untuk $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ dan dengan x_o adalah asumsi awalnya, sehingga diperoleh barisan $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ yang diharapkan konvergen ke akarnya.
- ✓ Dari bentuk $x = g(x)$, berarti akar dari f(x) tak lain adalah perpotongan antara garis lurus $y = x$ dan kurva $y = g(x)$.

Contoh: Tentukan solusi dari persamaan: $f(x) = x + e^x = 0$!

Penyelesaian: Pertama-tama, bentuk persamaan $x = g(x)$, yang dalam hal ini karena $x + e^x = 0$ sehingga didapat beberapa persamaan $x = g(x)$, antara lain:

a. $x = -e^x$

b. $x = -e^x \rightarrow \ln x = -x. \ln e \rightarrow x = -\ln x$

c. $x = -e^x \rightarrow 3x = 2x - e^x \rightarrow x = 1/3(2x - e^x)$

Sebagai masukan/input awal, ambil $x_0 = 1.5$. Kemudian periksa kekonvergensi iterasi. Misal diambil persamaan (c), maka:

$g'(x) = 1/3(2 - e^x) \rightarrow g'(x_0) = 1/3(2 + e^{1.5}) = \ldots.$? Apakah < k, untuk suatu k < 1 ?

Misal selanjutnya, karena bentuknya yang sederhana, diambil persamaan (a) dan nilai $x_0 = -1$, maka diperoleh:

Iterasi 1 : $x = -e^{-1} = -0.3679$ dan $f(x) = 0,3243$

Iterasi 2 : $x = -e^{-0.3679} = -0,6922$ dan $f(x) = -0,19173$

Iterasi 3 : $x = -e^{-0.6922} = -0,50047$ dan $f(x) = 0,10577$

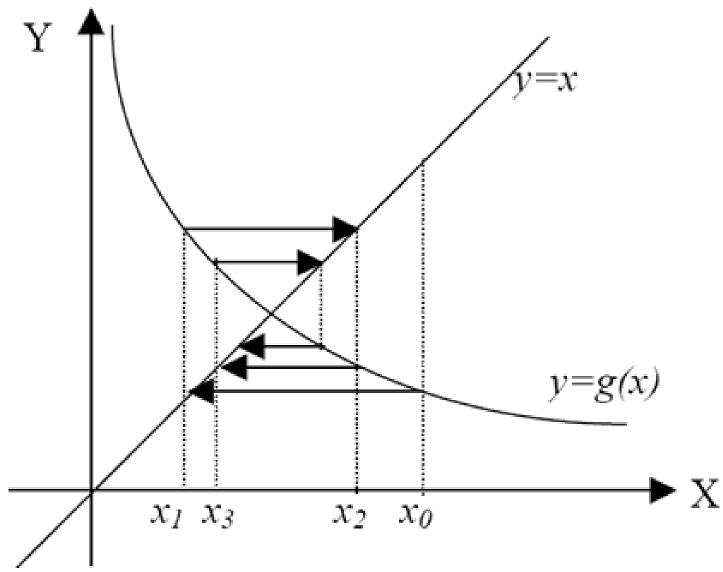
Iterasi 4 : $x = -e^{-0.50047} = -0,60624$ dan $f(x) = -0,06085$

Iterasi 5 : $x = -e^{-0.60624} = -0,5454$ dan $f(x) = 0,034217$

dst …

Pada iterasi ke 10 diperoleh $\boldsymbol{x = -0,56843}$ dan $f(x) = 0,034217$.

Berikut adalah ilustrasi grafis pencarian akar dari persamaan di atas dengan menggunakan metode iterasi titik tetap:



Soal Latihan

Tentukan solusi dari persamaan non-linier berikut sampai iterasi ke-3 dengan menggunakan metode biseksi, regula falsi, newton-raphson, sekan, maupun iterasi titik tetap.

1. $x^3 + 5x - 1$, dengan $x_n = 0$ dan $x_{n+1} = 0.5$.
2. $-\frac{1}{3}x^3 - x - 9$, dengan $x_n = -3$ dan $x_{n+1} = -2.5$
3. $-x^3 - 7x + 3$, dengan $x_n = 0$ dan $x_{n+1} = 0.5$.
4. $-3x^3 - 7x + 3$, dengan $x_n = 0$ dan $x_{n+1} = 0.5$.
5. $\frac{1}{2}x^3 - x - 9$, dengan $x_n = 2.5$ dan $x_{n+1} = 3$.
6. $4x^3 + 7x + 3$, dengan $x_n = -0.5$ dan $x_{n+1} = 0$.
7. $-3x^3 - 5x - 9$, dengan $x_n = -1.5$ dan $x_{n+1} = -1$.