CHAPITRE II : STATIQUE DES FLUIDES

Pré-requis :

Généralités sur les fluides.

Le principe fondamental de la statique

Le principe fondamental de la dynamique

Objectifs spécifiques :

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable :

- d'appliquer l'équation générale de l'hydrostatique
- de déterminer la force de pression exercée sur une paroi plane
- de déterminer la force de pression exercée sur une paroi gauche
- de déterminer la poussée d'Archimède appliquée sur les solides immergés dans un fluide.

CHAPITRE II :

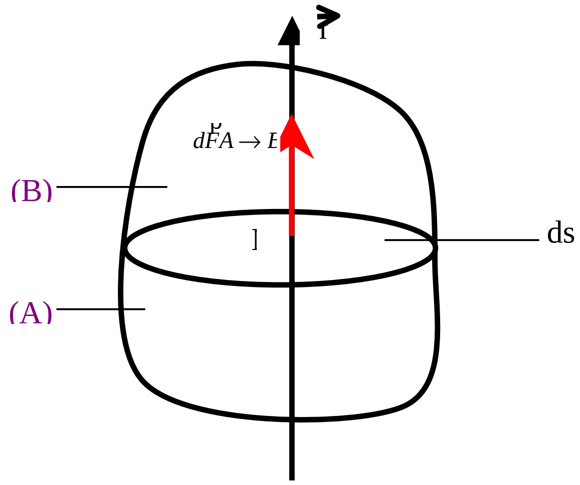
STATIQUE DES FLUIDES (HYDROSTATIQUE)

I- Introduction :

L'hydrostatique est la science qui étudie l'équilibre des liquides. Elle étudie en particulier la transmission des pressions.
En hydrostatique, le fluide étant au repos, les lois établies pour un fluide parfait s'appliqueront à un fluide réel.
Un fluide réel diffère du fluide idéal par sa viscosité .Or celle-ci ne manifeste ses effets que s'il y a un déplacement.

II-Notion sur les pressions :

1) Définition : Dans un milieu quelconque, entre autre le milieu fluide, la force que le volume élémentaire (A) exerce sur le volume élémentaire (B) à travers un élément de surface (ds) est $d\vec{F}A \rightarrow B$ et soit n la normale à $(\vec{ds})$ passant par un point M.



En fait, la force qu'exerce (A) sur (B) est composée d'une composante tangentielle et une composante normale.

- La composante tangentielle est nulle (fluide au repos)
- La composante normale est la force de pression

Par définition on appelle pression la contrainte normale

$$P = \frac{dF}{ds} \quad \text{et par intégration} \quad \boxed{P = \frac{F}{S}}$$

P est la pression au point M qui ne dépend pas de l'orientation de la surface ds et qui est exprimée dans le S.I en Pascal (Pa) avec 1 Pa = 1 N/m²

On trouve comme autre unité :

1 bar = 10^5 Pa

1 atm =1,013 10^5 Pa = 10 m de colonne d'eau.

2) Pression atmosphérique, pression absolue et pression effective :

- **La pression atmosphérique :** est la pression de l'air en un lieu donné.

  Au niveau de la mer : Patm = 1 atm ≈1,013 bar = 760 mmHg

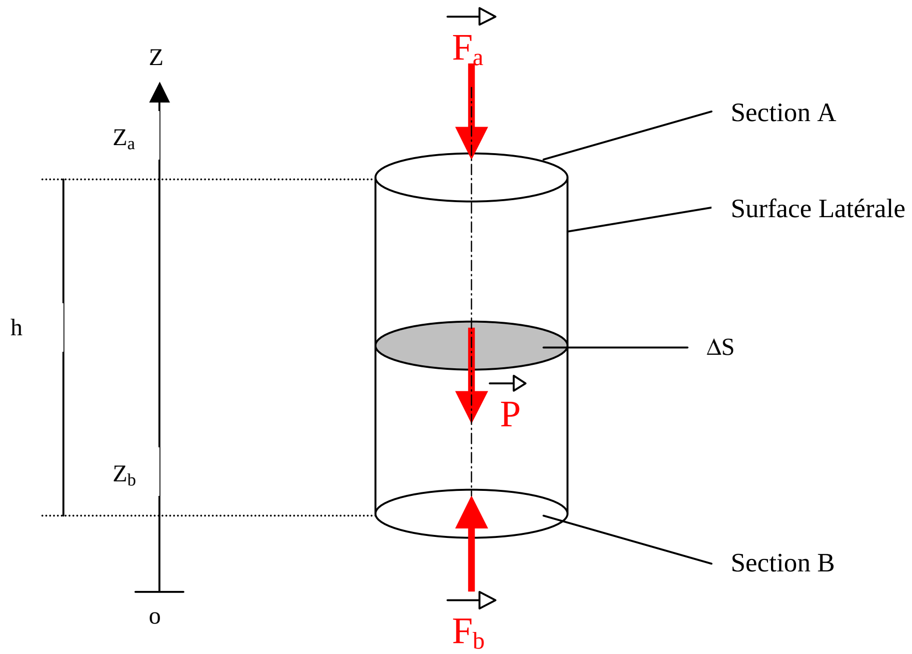
La pression d'un fluide peut être donnée en absolue ou en effective. La référence pour la pression absolue est le zéro et pour l'effective c'est la pression atmosphérique.

- **La pression absolue** est toujours positive. Elle est nulle dans le cas du vide (pas de matière)
- **La pression effective (manométrique)** peut être positive, négative ou nulle. La pression effective minimale correspond au cas du vide (p_{atm}= 0)

$$\boxed{P_{eff} = P_{ab} - P_{atm}}$$

III- Equation générale de l'hydrostatique :

Etudiant l'équilibre d'une partie de fluide en forme de cylindre vertical de section droite très petite ΔS et d'une hauteur h.

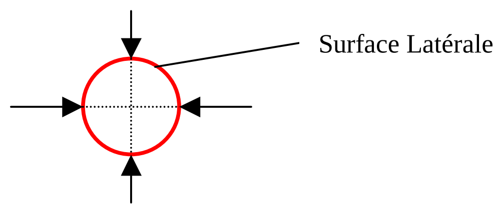


Le cylindre est soumis à l'action de son poids et à l'action des forces de pression du milieu liquide extérieur.

- Poids: $P = m.g$ or $m = \rho.V$ donc $P = \rho.V.g$ (avec $V = h \,.\, \Delta S$)

- Forces de pression:

  -section A : $F_a = P_a \,.\, \Delta S$
  -section B : $F_b = P_b \,.\, \Delta S$
  -surface latérale : $F_L = 0$ (les forces de pression $\perp$ à l'axe du cylindre s'opposent et s'annulent)



A l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{F}_a + \vec{F}_b = \vec{0}$$

On projète l'équation sur l'axe OZ :

$$-P - F_a + F_b = 0$$

$$-\rho.V.g - P_a . \Delta S + P_b . \Delta S = 0$$

$$-\rho.h.\Delta S.g - P_a . \Delta S + P_b . \Delta S = 0$$

$$-\rho.h.g - P_a + P_b = 0$$

or $h = Z_a - Z_b$

$$\Longrightarrow \quad P_a + \rho.g.\ Z_a = P_b + \rho.g.\ Z_b$$

Conclusion :

Pour tout point i quelconque, dans un liquide au repos, définie par son altitude Zi par à rapport à un plan de référence, on a :

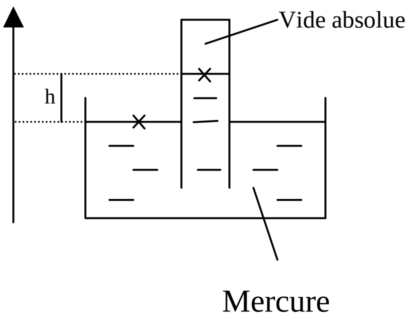
$$\boxed{P_i + \rho.g.\ Z_i = cte}$$

C'est l'équation générale de l'hydrostatique (Principe de la statique).

NB : L'équation générale de l'hydrostatique peut s'écrire en pression absolue ou en pression effective si p_A est effective alors p_B est effective ,si p_A est absolue alors p_B est absolue.

APPLICATIONS :

- ✓ BAROMETRE DE TORICELLI :



Déterminons la pression atmosphérique ?
h = 76 cm

Principe de la statique entre A et B :

$$P_A + \rho_m\ g\ z_A = P_B + \rho_m\ g\ z_B$$

$$P_{atm} = P_{vide} + \rho_m\ g\ (z_A - z_B)$$

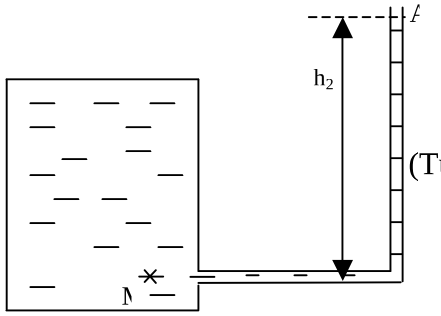
$$= P_{vide} + \rho_m\ g\ h$$

$$= 0 + 13600 * 9.8 * 0.76$$

= 101292 Pa

✓ MANOMETRE A UN LIQUIDE :

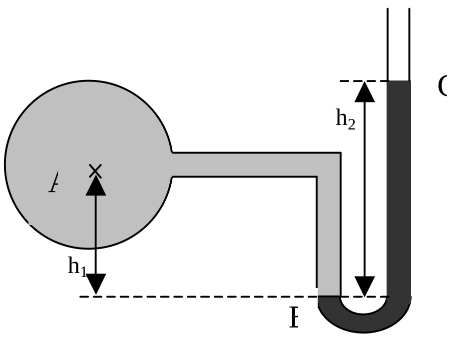
Soit M un point d'un liquide en équilibre dont on veut mesurer la pression. Faisons déboucher en M un tube dans lequel la surface libre du liquide se fixe à une hauteur verticale h au dessus de M.



La pression en M est donnée par : $P_M = P_A + \rho\, g\, h$

✓ MANOMETRE EN U :

Soit un réservoir contenant un liquide 1 de masse volumique ρ_1, un tube en U est relié à celui ci contenant un liquide 2 (appelé liquide manométrique) de masse volumique ρ_2 .Déterminer la pression effective en A ?



Principe de la statique entre A et B : $P_A + \rho_1\, g\, z_A = P_B + \rho_1\, g\, z_B$

$P_A = P_B - \rho_1\, g\, h_1$

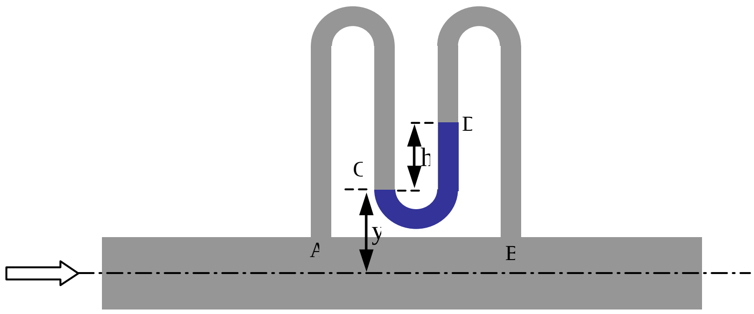
Principe de la statique entre B et C : $P_B + \rho_m\, g\, z_B = P_C + \rho_m\, g\, z_C$

$P_B = P_C + \rho_m\, g\, h_2$

Et $P_C = P_{atm} \longrightarrow P_A = P_{atm} + \rho_m\, g\, h_2 - \rho_1\, g\, h_1$

✓ MANOMETRE DIFFERENTIEL :(utilisé en hydrodynamique)

Un manomètre différentiel est fixé entre deux sections A et B d'un tuyau horizontal où s'écoule de l'eau. La dénivellation du mercure dans le manomètre est h, le niveau le plus proche de A étant le plus bas. Déterminer la différence de pression entre les section A et B ?



Principe de la statique entre A et C : $P_A + \rho\, g\, z_A = P_C + \rho\, g\, z_C$

$P_A = P_C + \rho\, g\, y$

Principe de la statique entre C et D : $P_C + \rho_m\, g\, z_C = P_D + \rho_m\, g\, z_D$

$P_C = P_D + \rho_m\, g\, h$

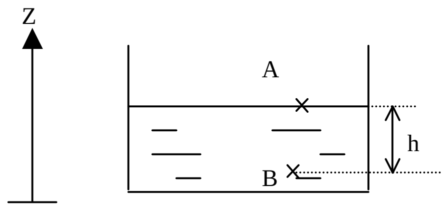
Principe de la statique entre D et B : $P_D + \rho\, g\, z_D = P_B + \rho\, g\, z_B$

$P_D = P_B - \rho\, g\, (h+y)$

$\longrightarrow \boxed{P_A - P_B = g\ h\,(\rho_m - \rho)}$

IV- Principe de Pascal :

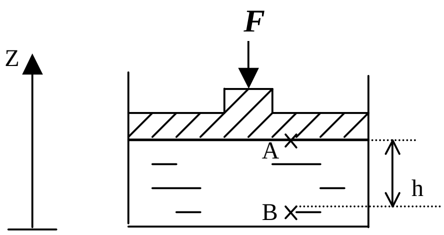
Soit un liquide incompressible de masse volumique (ρ) :



Principe de la statique entre A et B :

$P_B = P_A + \rho.g.\,h$

Si on exerce une force sur la surface, on provoque une surpression ΔP :



$P_A' = P_A + \Delta P$

Principe de la statique :

$P_B' = P_A' + \rho.g.\,h$

$P_B' = P_A + \Delta P + \rho.g.\,h$

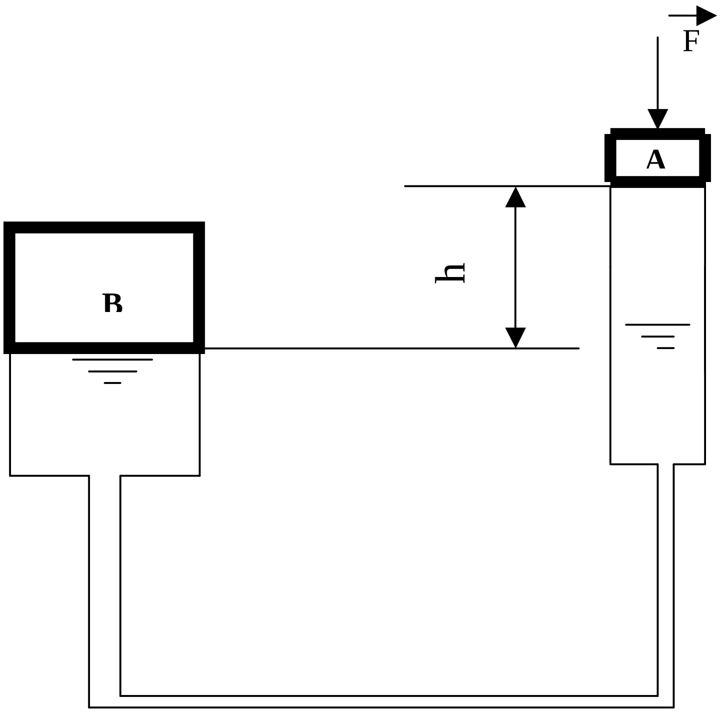
$$\longrightarrow \boxed{P_B' = P_B + \Delta P}$$

Conclusion :

Pour tout fluide incompressible en équilibre, la variation de la pression en un point se transmet intégralement en tout point du fluide.

APPLICATION : Levier hydraulique

Dans la figure suivante, les surfaces des cylindres A et B sont respectivement de 40 et 4000 cm² et B a une masse de 4000 kg. Le récipient et les conduits sont remplis de liquide de densité 0,75. Quelle force F assurera l'équilibre, en négligeant le poids de A.(h = 0.3 m)



V- Force de pression :

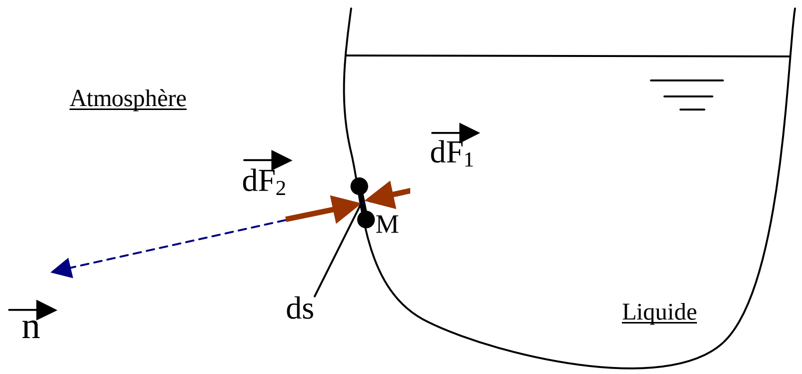
Soit un point M d'un fluide à la pression statique P et entouré d'une surface élémentaire ds de normale extérieure $\vec{n}$.

Le fluide exerce sur la surface ds une force élémentaire $\vec{dF_1}$ telle que :

$$\vec{dF_1} = P\,.ds.\,\vec{n}$$

Du coté de l'atmosphère, il s'exerce une force $\vec{dF_2}$ telle que :

$$\vec{dF_2} = P_{atm}\,.ds.(-\,\vec{n}\,)$$



La force élémentaire de pression sur la surface ds sera donc:

$$\vec{dF} = \vec{dF_1} + \vec{dF_2}$$

$$\vec{dF} = (P-P_{at})\,.ds.\,\vec{n}$$

Par définition : $dF = P_{eff}\,.ds$

- Si la surface est plane, le vecteur normal $\vec{n}$ a une direction constante et nous pourrons sommer directement

$$F = \int P_{eff}\,.ds$$

- Si la surface est gauche ou courbe, le vecteur normal n'est plus constant et il faudra calculer les composantes de F sur chacun des axes de coordonnées.

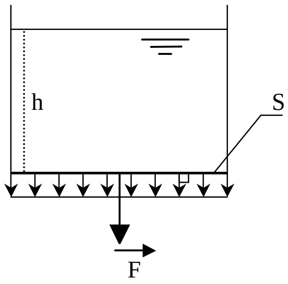
$$\begin{cases} Fx = dFx \\ Fy = dFy \end{cases}$$

$$F_z = \int dF_z$$

IRq: la pression étant ⊥ à la paroi, alors la résultante des forces de pression F est ⊥ à la paroi.

1) Force de pression sur une surface horizontale:

On considère un réservoir ouvert à l'air libre de surface de base S contenant une hauteur h de liquide de masse volumique ρ.



Surface horizontale → pression uniforme sur toute la surface

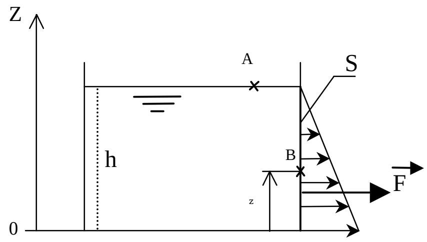
$P_{eff} = \rho.g.\,h$ et $F = \int P_{eff}\,.ds$

$F = \int \rho.g.\,h\,.ds$

$F = \rho.g.\,h\,.\int ds$

$$\Rightarrow \boxed{F = \rho\,.g\,.\,h.\,S}$$

2) Force de pression sur une surface verticale:



La pression en un point (B)quelconque de la surface est :

$P_{B\ eff} = P_{A\ eff} + \rho.g.(h-z) = P_{atm\ eff} + \rho.g.(h-z)$

D'où $P_{B\ eff} = \rho.g.\,(h-z)$

$F = \int P_{B\ eff}\,.ds = \int \rho.g.\,(h-z).ds$

$= \int \int \rho.g.\,(h-z).dy.dz$

$= \int_0^L dy\,.\int_0^h \rho.g.\,(h-z).dz$

$F = \rho.g.L.\,h^2/2$ et $S = h.L$

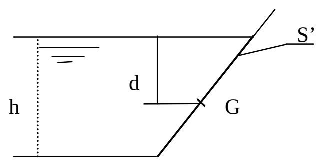
$$\Rightarrow \boxed{F = \rho\,.g\,.S\,.\,h\,/2}$$

3) Cas général :

$$\boxed{F = \rho .g .S .d} \qquad (N)$$

Avec : S : surface mouillée considérée en (m) .
d : distance verticale entre le centre de gravité et la surface libre en (m).

- ✓ Pour une paroi horizontale : d = h
- ✓ Pour une paroi verticale : d = h/2
- ✓ Pour une paroi *Inclinée* :

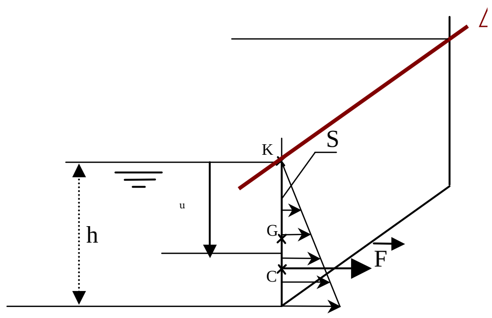


d = h/2

⇨ **F = ρ.g.S'.h/2**

4) Point d'application de F (centre de poussée) :

Soit Δ la droite d'intersection entre la surface libre et la surface S considérée



D'une façon générale :

$d\mathcal{M}_{/\Delta} = dF . u = P_{eff} .u. ds = \rho.g. u2.ds$

$$\mathcal{M}_{/\Delta} = \int d\mathcal{M}_{/\Delta} = \int \rho.g. u2.ds = \rho.g. \int u2.ds$$

D'autre part: $\mathcal{M}_{/\Delta} = F . KC = \rho .g .S . KG. KC$

$$KC = \frac{\int u2.ds}{S. \ KG}$$

$I_\Delta = \int u2.ds$: moment quadratique de la surface S par rapport à Δ

D'où $KC = I_\Delta / S.KG$

On utilise le théorème de Huygens : $I_\Delta = I_{\Delta_G} + S.\ KG^2$

Avec Δ_G= droite parallèle à Δ et passant par G

On aura finalement : $$\boxed{KC = \frac{I_{\Delta G}}{S.\ KG} + KG}$$

On a : $S = L.h$ et $KG= h/2$ et $I_{\Delta_G} = L\ h^3 / 12$

D'où : $KC = 2/3\ h$

Remarque : Δ : c'est l'intersection de la surface libre et la surface mouillée ou son prolongement.

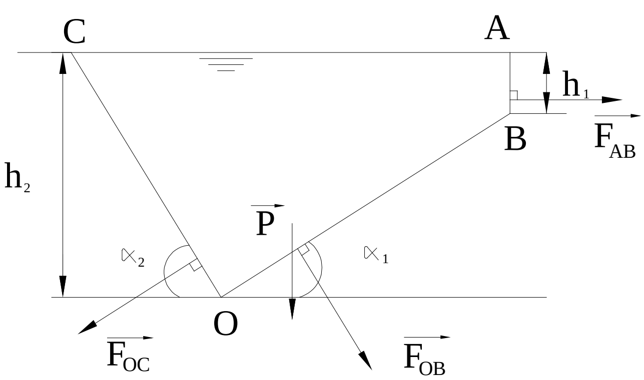
APPLICATION :

Un réservoir de longueur L = 5m et dont la section en coupe est représentée ci-dessous, est rempli d'eau. On donne : $\rho = 10^3$ Kg/m^3 ,h_1 = 366 mm, h_2 = 366 mm, $\alpha 1 = 30°$ et $\alpha_2 = 60°$

On posera OB = OC = l et $h_3 = h_2 - h_1$

1/ Calculer les résultantes des forces de pression exercées sur les surfaces AB, OB et OC

2/ Vérifier que la somme vectorielle de ces résultantes est égale au vecteur poids du liquide contenu dans le réservoir.



Réponse :

1/ $F_{AB} = ½ \rho g L h_1^2$ et $F_{OB} = \rho g L I (h_1 + 1/2h_3)$

$F_{OC} = ½ \rho g L I h_2$

$F_{AB} = 3349$ N $F_{OB} = 30800$ N $F_{OC} = 21650$ N

2/ $\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{OB} + \vec{F}_{OC} = \vec{P}$

Projection sur un axe horizontal: $F_{AB} + F_{OB} \sin \alpha_1 - F_{OC} \sin\alpha_2 = 0$

Projection sur un axe vertical : $F_{OB} \cos \alpha_1 + F_{OC} \cos \alpha_2 = P$

$P = \rho$ vol. $g = \rho$ SL $g = 37500$ N

N.B: *On montre dans le cas générale que la somme vectorielle des résultantes des forces de pression sur les différentes parois d'un réservoir est égale au vecteur poids du liquide contenu dans celui-ci.*

$$\sum \vec{F}_i = \vec{P}$$

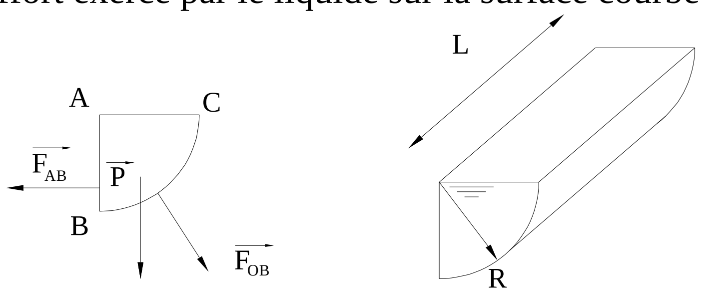
5) Force de pression sur une surface courbe:

Pour calculer la résultante des forces de pression exercées par un liquide sur une surface courbe, on utilise l'une des méthodes suivantes :

- **Méthode direct :** utilisée en particulier pour les formes géométrique simple par intégration de la surfa ce élémentaire sur toute la surface courbe.
- **Méthode indirect :** le principe consiste à relier les extrémités de la surface courbe par une ou plusieurs surfaces planes, calculer les forces sur ces surfaces planes et le poids du liquide renfermé par les surfaces planes et la surface courbe puis appliquer la relation $\sum \vec{F}_i = \vec{P}$.

APPLICATION :

On considère un réservoir qui a la forme d'un quart de cylindre de rayon R et de longueur L (voir figure). Le réservoir est rempli de liquide de masse volumique ρ. Déterminer l'effort exercé par le liquide sur la surface courbe.



Réponse :

$FAB = \frac{1}{2} \rho g L R^2$

$P = \frac{1}{4} \rho g L \pi R^2$

$\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BC} = \vec{P}$

Projection sur un axe horizontal $-F_{AB} + X = 0$

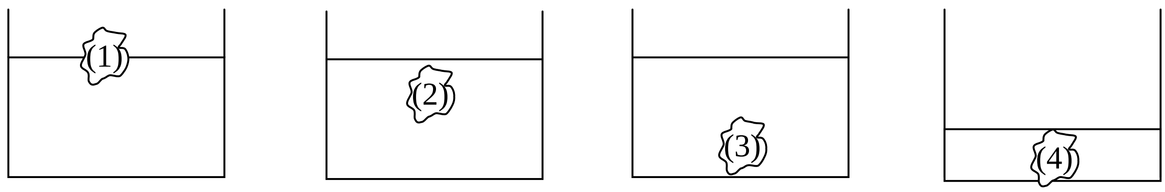
Projection sur un axe vertical $Y = P$

$F_{BC} = \sqrt{X^2 + Y^2}$

$F_{BC} = \frac{1}{2} \rho g L R^2 \sqrt{1 + \pi^2/4}$

VI- Poussée d'Archimède :

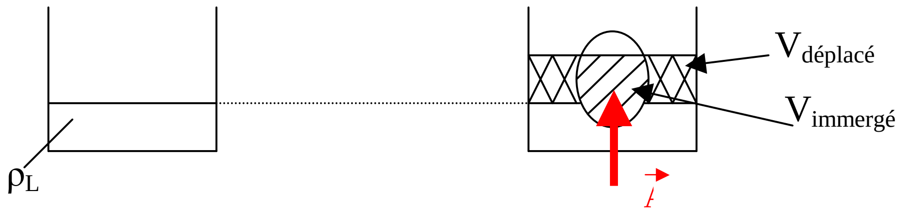
Un solide placé dans un liquide au repos peut prendre l'une des positions suivantes :



1) Une partie seulement du solide est immergé (à l'intérieur du liquide) On dit que « le solide flotte »
2) Le solide est complètement immergé et reste entre 2 couches liquides
3) Le solide est complètement immergé mais touche le fond (il coule)
4) Il y a peu de liquide pour conclure.

1) Poussée d'Archimède

Dans les différents cas, le solide subit de la part du liquide qui l'entoure une poussée (poussée d'Archimède) verticale, dirigée de bas en haut et égale au poids du volume du liquide déplacé. Cette force est appliquée au centre de gravité du liquide déplacé.



La poussée d'Archimède est : $A = \rho_L\, V_{dép}.g$

Le liquide étant incompressible $V_{dép} = V_{im}$

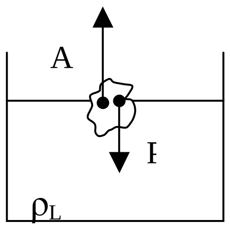
D'où : $\boxed{A = \rho_L\ g.\ V_{im}}$ A en (N), ρ_L (Kg/m^3)

g (m/s^2) et Vim (m^3)

2) Condition de flottaison et d'immersion :

a- Condition de flottaison :

À l'équilibre statique → $\Sigma\ \vec{F} = \vec{0}$



ρ_s : masse volumique du solide.
Vs : volume de solide

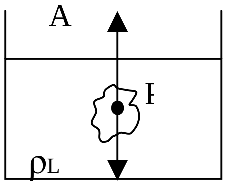
P = A, or on a P= ρ_s .Vs .g $\left.\begin{matrix} \rho_s V_s = \rho_L V_{im} \\ V_{im}\ \pi\ V_s \end{matrix}\right\} \Rightarrow \rho_s\ \pi\ \rho_L$

Et $\boldsymbol{A= \rho_L.\ g.\ V_{im}}$

Conclusion : Pour que le solide Flotte, il faut que $\rho_s<\rho_L$

b- condition d'immersion :

À l'équilibre statique → $\Sigma\ \vec{F} = \vec{0}$



$$\left.\begin{array}{l} P = A \\ \rho_S V_S = \rho_L V_{im} \\ V_S = V_{im} \end{array}\right\} \Rightarrow \rho_s = \rho_L$$

<u>*Conclusion :*</u> pour que le solide soit immergé et reste entre deux couches liquides, il faut que : $\rho_s = \rho_L$

c- Solide complètement immergé et touche le fond :

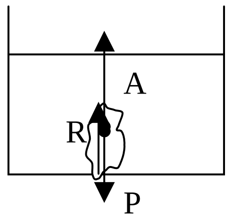
À l'équilibre statique $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$

P=A+R

$$\rho_s V_s g = \rho_L V_{im} g + R$$

$$V_{im} = V_S$$

$$\rho_S g V_s = \rho_l V_s g + R$$

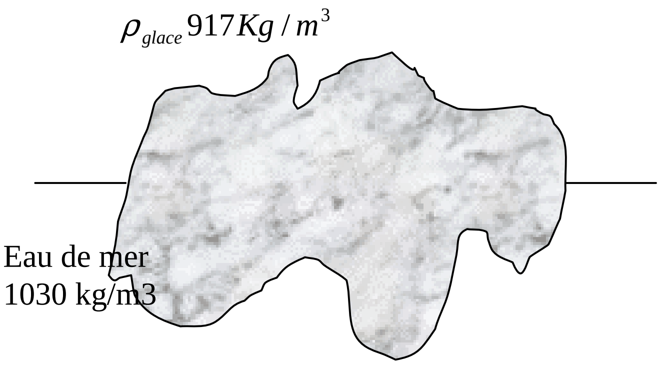


D'où : $\rho_s \phi \rho_L$

Conclusion : pour que le solide soit complètement immergé et touche le fond, il faut que : $\rho_s > \rho_L$

<u>APPLICATION :</u>

Le volume apparent d'un iceberg est 1000 m^3
Déterminer le volume immergé et la masse totale
De l'iceberg.



P = A , or on a P= ρ_s .Vs .g et A= ρ_L. g. V_{im}

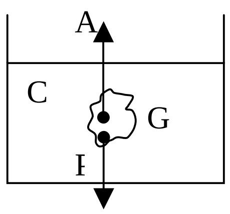
ρ_s .Vs= ρ_L. V_{im} et Vs = V_{im} + V_{ap}

$V_{im} = \rho_s . V_{ap} / (\rho_L - \rho_s) = 8115.04 \text{ m}^3$

Et $M = \rho_s Vs = 8358491.7$ Kg

3) Condition de stabilité :

a- Corps immergé :



P : appliquée en G centre de gravité du solide.
A : appliquée en C centre de poussée

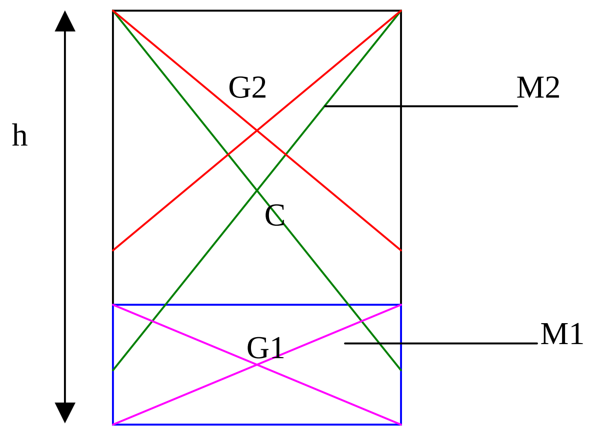
C est le centre géométrique du solide immergé, il peut être différent de G

C dépend de la forme et non de la constitution du solide.

Exemple :

$$OG = \frac{M_1 OG_1 + M_2 OG_2}{M_1 + M_2}$$

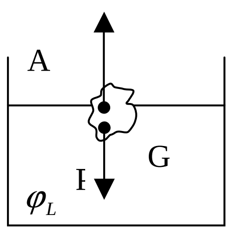
$$OC = \frac{h}{2}$$



Du fait que le solide est soumis à A et P alors, G et C doivent être sur la même verticale.

* si G et C sont confondus (solide homogène), la stabilité est indifférente.
* G en dessous de C équilibre stable
* G en dessus de C équilibre instable.

b- Corps flottant :



G et C doivent être sur la même verticale.

* G en dessous de C équilibre parfaitement stable.

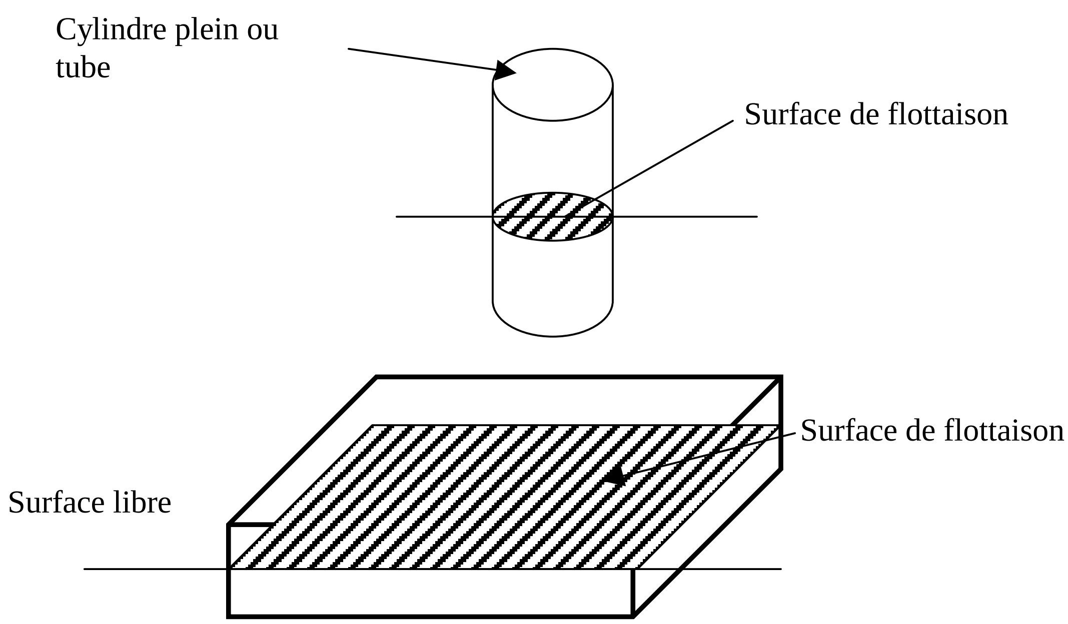
* G en dessus de C équilibre peut être stable ou instable.

Dans ce cas, on détermine la position d'un point M appelé Métacentre défini par

$$CM = \frac{I}{V_{im}}.$$

I : le plus petit moment quadratique de la surface de flottaison.

→ La surface de la flottaison est la partie de la surface libre limitée par l'extérieur du solide.



Si CM>CG : Equilibre stable

Si CM< CG : Equilibre instable

APPLICATION :

Un solide est constitué d'un cylindre en acier de section **$S=20cm^2$** et de hauteur **$h_1= 2cm$** et d'un cylindre en liège de section **$S=20cm^2$** et de hauteur **$h_2=20$ cm**.

Le solide est placé dans l'eau

On donne :

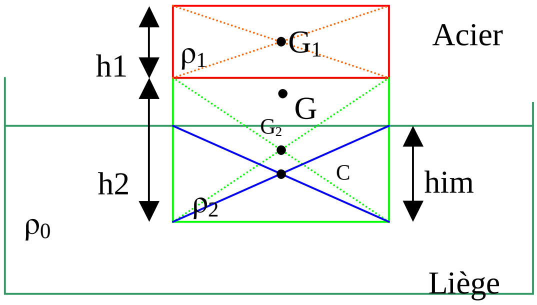
$\rho_{eau} = \rho_0 = 10^3 kg/m^3$

$\rho_{acier} = \rho_1 = 7800 kg/m^3$

$\rho_{Liège} = \rho_2 = 150 kg/m^3$

a) Montrer que le solide flotte dans l'eau.

b) Dans la position verticale (acier en haut). Déterminer si cette position est stable ou instable.



a) Pour que le solide flotte, il faut que :

$\rho_s \pi \rho_L$

$\rho_L = \rho_0 = 10^3 kg/m^3$

$$\rho_s = \frac{M_s}{V_s} = \frac{M_1 + M_2}{V_1 + V_2}$$

M_1 : masse de l'acier ; M_2 : masse de liège

V_1 : volume de l'acier ; v_2 : volume de liège.

$$\rho_s = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$$

$$\rho_S = \frac{\rho_1 h_1 S + \rho_2 h_2 s}{h_1 s + h_2 s} = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{h_1 + h_2}$$

$$\rho_s = \frac{(7800 \times 2) + (150 \times 20)}{2 + 20} \approx 845{,}5 kg/m^3$$

$\rho_s = 845{,}5 kg/m^3 \ \pi \ \rho_L \Rightarrow$ Le solide va flotter.

2) Pour montrer la stabilité ou l'instabilité, il faut déterminer les positions de G et C.

OG = ?

$OG_2 = h_2/2$

$OG_1 = h_2 + h_1/2$

$$OG = \frac{M_1 OG_1 + M_2 OG_2}{M_1 + M_2} = \frac{\rho_1 S.h_1.OG_1 + \rho_2.s.h_2.OG_2}{\rho_1.S.h_1 + \rho_2.S.h_2}$$

$$= \frac{\rho_1.h_1.(h_2 + \frac{h_1}{2}) + \rho_2.h_2.\frac{h}{2}}{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}$$

$$= \frac{7800 \times 2(20+1) + (150 \times 20 \times 10)}{(7800 \times 2) + (20 \times 150)}$$

$$Par\,suite\; OG \approx 19{,}2cm$$

→C centre géométrique de la partie immergée (V_{im}= ?)

$$\left.\begin{array}{l} Equilibre P = A \\ P = \rho_s V_s g \\ A = \rho_c V_{im} g \end{array}\right\} \Leftrightarrow \rho_s V_s = \rho_1 V_{im}$$

$$V_{im} = \frac{\rho_s V_s}{\rho_l}$$

$$V_{im} = \frac{\rho_s (V_1 + V_2)}{\rho_0} = \frac{\rho_s (Sh_1 + Sh_2)}{\rho_0}$$

$$= \frac{845{,}5(20 \times 2 + 20 \times 20)}{10^3} \approx 372cm^3$$

$$V_{im} = Sh_{im}$$

$$h_{im} = \frac{V_{im}}{s} = \frac{372}{20} = 18{,}6\,cm$$

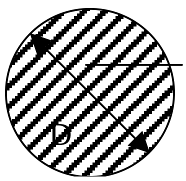
$$dou \quad OC = \frac{him}{2} = 9{,}3\,cm$$

$$Or \quad on \quad a \; OG = 19{,}2\,cm$$

Conclusion : G au dessus de C, l'équilibre peut être stable ou instable.

On détermine la position de M (Métacentre)

$$CM = \frac{I}{V_{im}}$$



$$S = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$\Rightarrow D^2 = \frac{4S}{\pi}$$

→Surface de flottaison est un cercle

$$I = \frac{\pi D4}{64}$$

$$I = \frac{\pi.\frac{16S^2}{\pi^2}}{64} = \frac{S^2}{4\pi}$$

$$CM = \frac{\frac{S^2}{4\pi}}{S.him} = \frac{S}{4\pi him}$$

$$CM = \frac{20}{4\pi \times 18{,}6} \approx 0.0855cm$$

$$CG = OG - OC = 19{,}2 - 9{,}3 = 9{,}9cm$$

Conclusion : CM<CG→ Position instable.