STRATEGI PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

Oleh

Herry Pribawanto Suryawan[1]

I. Pemecahan Masalah Matematika

Dalam kehidupan sehari-hari kita dihadapkan pada beraneka ragam masalah. Setiap masalah ini tentu saja memerlukan cara penyelesaian yang berbeda-beda. Salah satu di antaranya adalah melalui pemecahan masalah matematika (*Mathematical Problem Solving*). Matematika memang suatu ilmu yang dalam mempelajarinya memerlukan ketekunan yang tinggi. Berbagai macam soal dalam matematika mempunyai kekhasan dan memerlukan strategi yang khas pula untuk menyelesaikannya. Strategi semacam ini secara utuh akan dapat dipahami dan dikuasai apabila seseorang terbiasa melatih diri dengan berbagai macam tipe dan tingkat kesulitan soal-soal matematika. (*Learning by Doing* ; *Doing Mathematics* !).

Di dalam matematika dikenal seorang tokoh pemecahan masalah terkemuka yang bernama George Polya. Hasil karya Polya yang paling monumental adalah identifikasi langkah umum yang harus dilakukan oleh setiap orang untuk memecahkan masalah. Langkah-langkah umum tersebut adalah

1. Memahami masalah (*understand the problem*)
2. Mengembangkan suatu rencana pemecahan masalah (*devise a plan*)
3. Mengoperasionalkan rencana (*implement the plan*)
4. Mengkaji ulang jawaban dan prosesnya (*look back*)

[1] Dosen Jurusan Matematika Universitas Sanata Dharma Yogyakarta
email : herrypribs@staff.usd.ac.id

Hampir setiap ilmuwan mengetahui dan menggunakan identifikasi langkah-langkah pemecahan masalah ini.

Karakteristik yang baik bagi orang untuk mampu melakukan pemecahan masalah

Di Amerika Serikat, penyelidikan tentang pemecahan masalah telah dilakukan beberapa puluh tahun yang lalu. Di antaranya dilakukan oleh Dodson dan Hollander (1974). Menurut mereka kemampuan pemecahan masalah yang harus ditumbuhkan adalah

1. Kemampuan mengerti konsep dan istilah matematika
2. Kemampuan untuk mencatat kesamaan, perbedaan, dan analogi
3. Kemampuan untuk mengidentifikasi elemen terpenting dan memilih prosedur yang benar
4. Kemampuan untuk mengetahui hal yang tidak berkaitan
5. Kemampuan untuk menaksir dan menganalisa
6. Kemampuan untuk memvisualisasi dan menginterpretasi kualitas dan ruang
7. Kemampuan untuk memperumum berdasarkan beberapa contoh
8. Kemampuan untuk berganti metode yang telah diketahui
9. Mempunyai kepercayaan diri yang cukup dan merasa senang terhadap materinya

Selain kemampuan di atas, siswa mempunyai keadaan yang tentu untuk masa yang akan datang sehingga dengan percaya diri dapat mengembangkan kemampuan tersebut.

Saran untuk pengajar

Menurut Dodson dan Hollander, untuk mengembangkan kemampuan di atas, guru memberikan hal berikut:

1. Ajari murid dengan berbagai strategi yang dapat digunakan untuk berbagai soal

2. Berikan waktu yang cukup untuk murid mencoba soal yang ada
3. Ajaklah murid untuk menyelesaikan dengan cara lain
4. Setelah jawaban diperoleh, ajaklah murid untuk kembali, melihat kemungkinan lain, menyatakan dengan bahasa sendiri, kemudian ajaklah untuk mencari penyelesaian dengan cara yang lebih baik
5. Jika kita berhadapan dengan materi sulit, tidak berarti kita harus menghindar. Tetapi gunakan cukup waktu untuk mengulang dan mengerjakan soal yang lebih banyak. Mulailah dengan mengerjakan soal serupa kemudian soal-soal lain yang lebih menantang
6. Fleksibilitas di dalam pemecahan masalah merupakan perilaku belajar yang baik

II. Strategi Pemecahan Masalah Matematika

Strategi atau trik di dalam pemecahan masalah seringkali disebut sebagai heuristik. Berikut akan dibicarakan strategi pemecahan masalah menurut Loren C. Larson. Dalam bukunya "*Problem Solving through Problem*", Loren C. Larson merangkum strategi pemecahan masalah matematika menjadi 12 macam sebagai berikut :

1. Mencari pola
2. Buatlah gambar
3. Bentuklah masalah yang setara
4. Lakukan modifikasi pada soal
5. Pilih notasi yang tepat
6. Pergunakan simetri
7. Kerjakan dalam kasus-kasus
8. Bekerja mundur
9. Berargumentasi dengan kontradiksi
10. Pertimbangkan paritas

11. Perhatikan kasus-kasus ekstrim
12. Lakukan perumuman

Masing-masing strategi di atas tidak dimaksudkan untuk memecahkan semua jenis masalah. Terkadang dengan satu strategi saja suatu masalah telah dapat diselesaikan, tetapi kadang-kadang suatu masalah menuntut penggunaan gabungan dari beberapa strategi. Tidak ada strategi yang lebih baik dari strategi yang lain. Strategi-strategi tersebut bersifat relatif satu sama lain. Oleh karena itu ada baiknya semua strategi di atas dipelajari seluruhnya. Kalau pun nantinya hanya akan memilih satu strategi tertentu untuk memecahkan masalah, semua tergantung pada masalahnya.

Untuk lebih jelasnya 12 strategi pemecahan masalah dari Larson tersebut akan kita bahas satu per satu secara singkat disertai dengan contoh sederhana.

1. **Mencari Pola** (*Search for a pattern*)

Berapakah suku ke-20 di dalam barisan bilangan

$$1, 2, 4, 6, 10, 12, 16, 18, 22, \ldots$$

Pada umumnya, penyelesaian yang mungkin dilakukan adalah dengan mencari pola yang ada pada barisan bilangan tersebut. Mungkin akan dicoba melihat apakah barisan tersebut merupakan barisan aritmetika atau barisan geometri. Tetapi kita tidak akan pernah sampai pada kesimpulan itu karena barisan di atas memang tidak berpola demikian. Ingatlah barisan bilangan prima dan segera anda mendapatkan jawabannya.

2. **Buatlah Gambar** (*Draw a figure*)

Strategi ini kiranya cukup jelas. Kebanyakan persoalan geometri dapat terselesaikan (dengan cepat) melalui pertolongan gambar atau diagram. Hal kecil yang patut diperhatikan adalah buatlah gambar/diagram dalam ukuran yang proporsional. Tetapi perlu diingat bahwa gambar bukanlah alat pembuktian yang utama.

3. **Bentuklah Masalah yang Setara** (*Formulate an equivalent problem*)

Berapakah faktor persekutuan terbesar (FPB) dari 95226768 dan 1008 ? Kalau kita menggunakan faktorisasi prima, maka langkah yang diperlukan untuk menyelesaikannya cukup panjang. Oleh karena itu mungkin kita perlu bekerja pada soal yang lebih sederhana untuk sampai pada kesimpulan tertentu dan hasil ini yang nantinya kita terapkan pada soal semula. Misalnya FPB dari 2166 dan 14 adalah sama dengan FPB dari 14 dan 10 sebab $2166 = 154 \times 14 + 10$, yang berarti 10 kongruen dengan 2166 modulo 14.

4. **Lakukan Modifikasi pada Soal** (*Modify the problem*)

Tentukan semua pasangan bilangan bulat (a,b) sehingga bilangan $a^2 + 4b$ dan $b^2 + 4a$ keduanya merupakan bilangan kuadrat.

Untuk menyelesaikan soal ini dapat diasumsikan bahwa $|b| \le |a|$. Modifikasi ini tidaklah mengubah jawaban dan memberikan jalan penyelesaian yang lebih cepat. Coba anda pikirkan mengapa demikian.

5. **Pilih Notasi yang Tepat** (*Choose effective notation*)

Langkah awal menyelesaikan masalah matematika adalah menuliskannya ke dalam simbol-simbol matematika (variabel, konstanta, parameter). Semua konsep kunci dalam soal haruslah teridentifikasi dan sebisa mungkin dinotasikan. Selanjutnya dicari hubungan antar notasi yang telah ditetapkan. Sebagai contoh, jika n adalah bilangan asli sehingga $2n + 1$ merupakan bilangan kuadrat, kita akan buktikan bahwa $n + 1$ adalah penjumlahan dua bilangan kuadrat yang berurutan. Kita gunakan notasi yang tepat, masalah ini menjadi masalah aljabar yang sederhana. Misalkan $2n + 1 = s^2$, $s \in \mathbb{N}$.

Karena s^2 ganjil maka s juga ganjil. Misal $s = 2t+1$, $t \in \mathbb{N}$ maka $2n+1 = (2t+1)^2$ dan $n = \frac{(2t+1)^2 - 1}{2} = \frac{4t^2+4t}{2} = 2t^2 + 2t.$

Selanjutnya $n+1 = 2t^2 + 2t + 1 = t^2 + (t+1)^2$. Jadi kita telah menuliskan $n+1$ sebagai penjumlahan dua bilangan kuadrat yang berurutan.

6. **Pergunakan Simetri** (*Exploit Symmetri*)

Tentukan penyelesaian persamaan

$$\tan x = \tan(x+10°)\tan(x+20°)\tan(x+30°).$$

Kita gunakan kekuatan simetri dengan membentuk variabel baru $y = x + 15°$. Dari sini diperoleh persamaan

$$\tan(y-15°) = \tan(y-5°)\tan(y+5°)\tan(y+15°).$$

Persamaan terakhir ini dengan mudah dapat disederhanakan menjadi $\sin 4y = \cos 10°$.

7. **Kerjakan dalam Kasus-kasus** (*Divide into cases*)

Jika a, b, dan c adalah sebarang bilangan bulat, apakah 2 senantiasa membagi habis $(a-b)(b-c)(c-a)$?

Soal ini mudah dikerjakan dengan membagi penyelesaian ke dalam kasus-kasus:

i. Semua bilangan tersebut genap
ii. Satu saja bilangan yang genap
iii. Tepat dua bilangan genap
iv. Tidak ada satu pun yang genap

8. **Bekerja Mundur** (*Work backward*)

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif x dan y berlaku

$$\min\{x,y\} \le \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \le \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \le \max\{x,y\}.$$

Kita coba tunjukkan ketaksamaan $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \le \sqrt{xy}$ saja, anda dapat mencoba membuktikan ketaksamaan lainnya.

Kita bekerja mundur dari apa yang akan dibuktikan sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} &\Leftrightarrow \frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \leq x+y \\
&\Leftrightarrow 4xy \leq x^2+2xy+y^2 \\
&\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Tentu saja hasil terakhir yang kita peroleh adalah hal yang pasti benar. Oleh karena itu dengan cara membalik langkah pengerjaan di atas dari hasil terakhir, kita akan memperoleh pernyataan yang diminta.

9. **Berargumentasi dengan Kontradiksi** (*Argue with contradiction*)

Untuk menunjukkan kebenaran pernyataan $\frac{1}{0}$ tidak terdefinisi, sulit ditemukan bukti langsung. Oleh karena itu bukti kontradiksi/reductio ad absurdum menjadi senjata yang cukup ampuh. Tentu saja dalam hal ini diandaikan bahwa $\frac{1}{0}$ terdefinisi dan akan diperoleh suatu kemustahilan.

10. **Pertimbangkan Paritas** (*Pursue parity*)

Diberikan sembilan titik latis (lattice point) di ruang $\mathbb{R}^3$, tunjukkan bahwa terdapat suatu titik latis lain yang terletak di antara garis hubung dua dari sembilan titik latis yang diberikan.

Catatan: titik latis adalah titik pada ruang yang komponen-komponen koordinatnya adalah bilangan bulat.

Ketika dibaca pertama kali soal ini mungkin terlihat sulit, tetapi dengan memperhatikan pola paritas dari sembilan titik latis tersebut maka hanya akan diperoleh delapan pola saja yang mungkin dan hal ini menjadi kunci penyelesaian soal di atas.

11. **Perhatikan Kasus-kasus Ekstrim** (*Consider extreme cases*)

Buktikan bahwa hasilkali n bilangan bulat yang berurutan selalu habis dibagi $n!$. Pertama, perhatikan bahwa soal cukup dikerjakan untuk n bilangan bulat positif yang berurutan. Soal secara trivial terjawab apabila salah satu dari bilangan tersebut adalah 0. Apabila semua bilangan bulat tersebut adalah negatif, maka cukup ditunjukkan bahwa $n!$ membagi habis hasilkali nilai mutlaknya. Jadi diandaikan terdapat n bilangan bulat positif berurutan yang hasilkalinya tidak habis dibagi $n!$. Sebut bilangan terkecilnya adalah m. Dengan sedikit perhitungan aljabar akan diperoleh suatu kontradiksi, dan terbuktilah pernyataan yang diminta.

12. **Lakukan Perumuman** (*Generalize*)

Untuk menghitung jumlahan deret $\sum_{k=1}^{2007} \frac{k^2}{2^k}$, lebih menguntungkan bagi kita untuk menghitung secara umum jumlahan deret $S(x;n)=\sum_{k=1}^{n} k^2 x^k$ dan selanjutnya menghitung $S(\frac{1}{2};2007)$ sebagai jawaban soal semula.

III. Beberapa Contoh Soal dan Penyelesaiannya

Pada bagian ini kita akan melihat penerapan dari berbagai strategi yang telah kita bicarakan pada bagian sebelumnya dalam beberapa contoh soal.

1. Apabila 1000 ditulis sebagai penjumlahan dari beberapa bilangan bulat positif dan kemudian bilangan-bilangan itu dikalikan, apa syarat yang harus dipenuhi agar hasil perkalian itu terbesar? Berapa hasilkali terbesar itu?

Penyelesaian:

Misalkan $1000 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, akan dicari syarat pada $a_i,\ i = 1,2,\ldots,n$ sehingga $a_1.a_2.\ldots.a_n$ terbesar. Kita dapat mencoba menyelidiki untuk bilangan-bilangan yang lebih kecil, kemudian kita perlihatkan berlaku secara umum yang kemudian tentu saja akan berlaku untuk 1000.

Syarat yang harus dipenuhi adalah :

(1). $a_i \neq 1$ untuk setiap i.

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $a_1 = 1$ maka

$1000 = 1 + a_2 + \ldots + a_n$ dan hasilkalinya adalah $1.a_2.\ldots.a_n$.

Tetapi dapat dipandang juga $1000 = (1 + a_2) + \ldots + a_n$ dengan

hasilkalinya $(1 + a_2).\ldots.a_n$ yang lebih besar dari yang pertama.

Jadi haruslah $a_i \neq 1$ untuk setiap i.

(2). $a_i \leq 4$ untuk setiap i.

Misalkan $a_1 > 4$ maka $a_1 = 5 = d,\ d \geq 0$. Jadi $a_1 = 2 + (3 + d)$.

Karena $2.(3 + d) = 6 + 2d > 5 + d$ maka berlaku

$2.(3 + d).a_2.\ldots.a_n > (5 + d).a_2.\ldots.a_n$.

Jadi haruslah $a_i \leq 4$ untuk setiap i.

(3). $a_i \neq 4$ untuk setiap i.

Bila $a_1 = 4$ maka a_1 dapat diganti dengan dua buah bilangan 2 dan hasilkalinya tetap sama.

(4). Di dalam himpunan $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ hanya ada paling banyak dua buah bilangan 2. Apabila ada tiga buah bilangan 2 maka dapat diganti dengan dua buah bilangan 3 dimana hasilkalinya lebih besar.

Dengan demikian agar diperoleh hasilkali yang terbesar

$$1000 = \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{332} + 2 + 2$$

dan hasilkali terbesarnya adalah $2^2.3^{332}$.

2. *Prinsip Induksi Matematika dan Prinsip Teleskoping*

Induksi Matematika merupakan salah satu senjata yang ampuh untuk membuktikan/memeriksa kebenaran suatu pernyataan matematika khususnya yang terkait dengan bilangan bulat tak negatif.

Contoh :

Buktikan untuk setiap n > 1 berlaku $3^{2n-2}+2^{2n}$ habis dibagi 5.

Penyelesaian:

1. Karena akan dibuktikan untuk setiap n > 1 (n ≥ 2) maka pada basis induksi dapat diambil n = 2.

   Untuk n = 2 : $3^{2.2-2}+2^{2.2}=3^2+2^4=9+16=25$ habis dibagi 5.
2. Diasumsikan pernyataan benar untuk n = k : $3^{2k-2}+2^{2k}$ habis dibagi 5.
3. Ditunjukkan pernyataan benar untuk n = k + 1.

$$\begin{aligned}3^{2(k+1)-2}+2^{2(k+1)} &= 3^{2k}+2^{2k+2}=3^{2k-2+2}+2^{2k+2}\\ &= 3^2.3^{2k-2}+2^2.2^{2k}\\ &= 9.3^{2k-2}+4.2^{2k}\\ &= 5.3^{2k-2}+4.3^{2k-2}+4.2^{2k}\\ &= \underbrace{5.3^{2k-2}}_{\text{habis dibagi 5 sebab salah satu faktornya adalah 5}}+\underbrace{4.(3^{2k-2}+2^{2k})}_{\text{habis dibagi 5 menurut hipotesis Induksi}}\end{aligned}$$

   Terbukti pernyataan benar untuk n = k + 1.

Jadi dengan induksi matematika terbukti pernyataan benar untuk setiap n > 1.

Prinsip teleskoping merupakan suatu cara melihat dari jauh suatu masalah lalu bentuk soal dapat diubah menjadi sederhana dan mudah diselesaikan.

Contoh :

Hitunglah nilai

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{2007.2009}$$

Penyelesaian:

Kita dapat memperlihatkan bahwa $\frac{1}{n.(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right),\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Dengan demikian secara teleskopis kita dapat menghitung

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{2007.2009}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2007}-\frac{1}{2009}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2007}-\frac{1}{2009}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2009}\right)$$
$$=\frac{1}{2}.\frac{2008}{2009}$$
$$=\frac{1004}{2009}.$$

3. *Banyak jalan menuju Roma* !

Buktikan bahwa untuk segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c dan luas A berlaku $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}A$. (IMO 1961).

***Penyelesaian*:**

Ada berbagai cara penyelesaian untuk soal ini.

(1). **Cara langsung**

Dengan menggunakan rumus Heron untuk luas segitiga dan ketaksamaan AM-GM diperoleh

$$16A^2=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$
$$\Leftrightarrow 16A^2\leq(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$
$$\Leftrightarrow 4A\leq\frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}}=\sqrt{3}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\leq\sqrt{3}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

atau terbukti $a^2+b^2+c^2\geq 4A\sqrt{3}.$ Kesamaan berlaku jika dan hanya jika $a=b=c$ yaitu untuk segitiga samasisi.

(2). **Bukti kontradiksi**

Andaikan $4A\sqrt{3}>a^2+b^2+c^2$, maka $2bc\sin\alpha>\frac{1}{\sqrt{3}}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

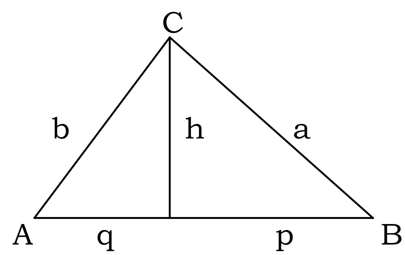
Aturan Kosinus memberikan $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$. Kuadratkan dan jumlahkan kedua hubungan ini maka diperoleh

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 > a^4 + b^4 + c^4 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 < 0.$$

Kontradiksi.

(3). **Lakukan modifikasi pada soal**

Segitiga samasisi dengan panjang sisi c mempunyai garis tinggi dengan panjang $\frac{c}{2}\sqrt{3}$.



Sebarang segitiga dengan panjang sisi c akan mempunyai garis tinggi dengan panjang $\frac{c}{2}\sqrt{3} + y$. Garis tinggi ini membagi sisi c menjadi $\frac{c}{2} - x$ dan $\frac{c}{2} + x$. Di sini x dan y adalah deviasi panjang sisi dari segitiga samasisi. Maka kita peroleh

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}A &= \left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{c}{2} + x\right)^2 + 2\left(y + \frac{c}{2}\sqrt{3}\right)^2 + c^2 - 2\sqrt{3}c\left(y + \frac{c}{2}\sqrt{3}\right) \\ &= 2x^2 + 2y^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Kesamaan berlaku jika dan hanya jika $x = y$ yaitu untuk segitiga samasisi.

(4). **Bekerja mundur**

Kita bekerja mundur dari apa yang ingin dibuktikan :

$$a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}A$$
$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \ge 3\left(a+b+c\right)\left(a-b+c\right)\left(-a+b+c\right)\left(a+b-c\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \ge 3\left(2a^2b^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4\right)$$
$$\Leftrightarrow 4a^4+4b^4+4c^4-4a^2b^2-4b^2c^2-4a^2c^2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \left(a^2-b^2\right)^2+\left(b^2-c^2\right)^2+\left(c^2-a^2\right)^2 \ge 0.$$

(5). **Lakukan perumuman**

Cara ini memberikan hasil yang lebih umum dan pernyataan pada soal merupakan kasus khusus.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos\alpha \\ &= \left(b-c\right)^2+2bc\left(1-\cos\alpha\right) \\ &= \left(b-c\right)^2+4A\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ &= \left(b-c\right)^2+4A\tan\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Jadi pada akhirnya akan diperoleh

$$a^2+b^2+c^2=\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2+4A\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\right).$$

Karena $\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2}<\frac{\pi}{2}$ dan tangen adalah fungsi konveks maka berlaku

$$\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2} \ge 3\tan\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}=3\tan\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}. \qquad .....(*)$$

Dengan demikian

$$a^2+b^2+c^2=\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2+4A\sqrt{3} \ge 4A\sqrt{3}. \qquad .....(**)$$

Kesamaan berlaku jika dan hanya jika

- $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$, yaitu dari hubungan (*), atau
- $a=b=c$, yaitu dari hubungan (**).

Keduanya mengatakan bahwa kesamaan berlaku untuk segitiga samasisi.

4. *Prinsip Sarang Merpati*

Tunjukkan bahwa di antara sembarang 12 bilangan bulat berbeda yang terdiri dari dua digit, terdapat sekurang-kurangnya dua bilangan yang selisihnya berbentuk bilangan dua digit identik.

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan soal ini diperlukan suatu prinsip dalam matematika yang terkenal sebagai Prinsip Sarang Merpati.

Prinsip Sarang Merpati (*Pigeon-Hole Principle*).

Jika $(n+1)$ *merpati terbang ke dalam* n *buah sarang, maka ada satu sarang yang berisi paling sedikit dua merpati.*

Sekarang kita selesaikan soal di atas. Perhatikan bahwa suatu bilangan bulat terdiri dari dua digit identik jika dan hanya jika bilangan itu habis dibagi oleh 11. Selanjutnya diingat bahwa hanya terdapat 11 sisa yang berlainan yang mungkin pada pembagian oleh 11 yaitu 0, 1, 2, ... , 10. Oleh karena menurut Prinsip Sarang Merpati, di antara 12 bilangan yang berlainan terdapat sekurang-kurangnya dua bilangan yang memberikan sisa yang sama jika dibagi 11, katakan $a = 11k + m$ dan $b = 11l + m$. Perhatikan bahwa selisih mereka $a - b = 11(k - l)$ habis dibagi 11. Jadi $a - b$ berbentuk bilangan dua digit identik.

5. *Persamaan Fungsional*

Salah satu soal favorit dalam olimpiade adalah mengenai persamaan fungsional, yaitu mencari fungsi atau nilai fungsi dengan berbekal sedikit sifat fungsi yang diberikan. Misalnya soal berikut.

Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)\big(f(x) + f(y)\big)$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

Penyelesaian:

Apabila $x = y$ diperoleh $f(0) = 0$, sementara dengan mengambil $x = -1$ dan $y = 0$ diperoleh $f(1) = -f(-1)$.

Untuk $y = 1$ berlaku $f(x^2 - 1) = (x-1)\left(f(x) + f(1)\right)$, dan untuk $y = -1$ berlaku $f(x^2 - 1) = (x+1)\left(f(x) - f(1)\right)$. Dari sini didapatkan

$(x-1)\left(f(x) + f(1)\right) = (x+1)\left(f(x) - f(1)\right)$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Dengan demikian untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku

$$
\begin{aligned}
& xf(x) - f(x) + xf(1) - f(1) = xf(x) + f(x) - xf(1) - f(1) \\
\Leftrightarrow\ & -f(x) + xf(1) = f(x) - xf(1) \\
\Leftrightarrow\ & 2f(x) = 2xf(1) \\
\Leftrightarrow\ & f(x) = f(1).x
\end{aligned}
$$

Dengan menyebut $f(1) = k$ maka diperoleh fungsi yang dimaksud adalah $f(x) = kx$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Sebaliknya setiap fungsi berbentuk $f(x) = kx$ akan memenuhi persamaan fungsional yang diberikan (silakan diperiksa).

6. *Suatu soal persamaan kuadrat*

Misalkan α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + mx - 1 = 0$, dengan m bilangan bulat ganjil. Tulis $\lambda_n = \alpha^n + \beta^n$ untuk setiap $n \geq 0$. Buktikan bahwa :

(a). λ_n adalah bilangan bulat , untuk setiap $n \geq 0$

(b). $\gcd(\lambda_n, \lambda_{n+1}) = 1$, untuk setiap $n \geq 0$

Penyelesaian:

Karena α dan β adalah akar-akar persamaan $x^2 + mx - 1 = 0$, maka $\alpha^2 + m\alpha - 1 = 0$ dan $\beta^2 + m\beta - 1 = 0$. Kalikan berturut-turut dengan α^{n-2} dan β^{n-2} akan diperoleh $\alpha^n + m\alpha^{n-1} - \alpha^{n-2} = 0$ dan $\beta^n + m\beta^{n-1} - \beta^{n-2} = 0$. Dari sini kita memperoleh suatu relasi rekurensi

$$\lambda_n = -\lambda_{n-1} + \lambda_{n-2}\ , \quad n \geq 2. \qquad .....(*)$$

(a). Perhatikan bahwa $\lambda_0 = 1+1 = 2$ dan $\lambda_1 = \alpha + \beta = -m$. Jadi λ_0 dan λ_1 adalah bilangan bulat. Selanjutnya pembaca dapat membuktikan bahwa λ_n adalah bilangan bulat , untuk setiap $n \geq 0$ dari hubungan (*) dan dengan menggunakan induksi matematika.

(b). Kita kembali menggunakan hubungan (*) dan induksi matematika untuk membuktikan $\gcd(\lambda_n, \lambda_{n+1}) = 1$, untuk setiap $n \geq 0$. Hal ini jelas benar untuk $n = 0$ sebab $\gcd(2, -m) = 1$ mengingat m adalah bilangan bulat ganjil. Misalkan $\gcd(\lambda_{n-2}, \lambda_{n-1}) = 1$, $n \geq 2$. Andaikan $\gcd(\lambda_{n-1}, \lambda_n) > 1$, pilih bilangan prima p yang habis membagi λ_{n-1} dan λ_n. Maka dari hubungan (*) diperoleh bahwa p juga habis membagi λ_{n-2}. Jadi p adalah faktor dari $\gcd(\lambda_{n-2}, \lambda_{n-1})$, kontradiksi. Oleh karena itu $\gcd(\lambda_{n-1}, \lambda_n) = 1$. Terbukti $\gcd(\lambda_n, \lambda_{n+1}) = 1$, untuk setiap $n \geq 0$.

IV. Penutup

Axiom of Solvability :

Every problem has a (nice) solution

Axiom of Reasonable Faculty :

I am not stupid

Corollary :

I can solve every problem

If you wish to learn swimming, you have to go into the water (***George Polya***)

In Mathematics there is no ignorabimus (***David Hilbert***)

Soal-soal untuk berlatih

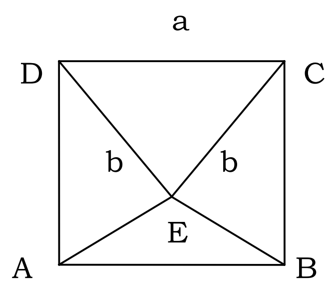
1. Carilah jumlahan deret

$$\sum_{k=1}^{120} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}$$

2. Tentukan semua pasangan bilangan bulat (a,b) yang memenuhi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{7}$$

3. ABCD adalah persegi dengan panjang sisi a. Dibentuk segitiga samakaki seperti pada gambar dengan panjang kakinya adalah b dan berlaku $\angle ABE = 15^\circ$. Buktikan bahwa segitiga CDE samasisi !



4. Tunjukkan bahwa setiap suku dalam barisan

49, 4489, 444889, 44448889, ...

merupakan bilangan kuadrat .

5. Sebuah daerah persegi dibagi menjadi 2007 daerah kecil dengan cara menarik garis-garis lurus yang menghubungkan dua sisi yang berbeda pada persegi. Tentukan banyaknya garis lurus yang harus dibuat paling sedikit?

6. Barisan bilangan x_n didefinisikan sebagai berikut

$x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{3} - 1$, dan $x_{n+2} = \dfrac{1 + x_{n+1}}{x_n}$ untuk $n = 1, 2, \ldots$.

Tentukan x_{2007}.

7. Apakah ada fungsi injektif $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $x\in\mathbb{R}$ berlaku $f(x^2)-\left(f(x)\right)^2\geq\frac{1}{4}$

8. Buktikan bahwa $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ merupakan bilangan rasional

9. Lima orang A,B,C,D, dan E masing-masing memakai topi yang berwarna hitam atau putih, tanpa mengetahui warna topi yang dipakainya. Diketahui bahwa orang yang memakai topi hitam selalu bicara benar sementara orang yang memakai topi putih selalu berbohong. Tentukan warna topi yang dipakai oleh masing-masing dari lima orang tersebut apabila mereka membuat pernyataan-pernyataan sebagai berikut:

A : Saya melihat tiga topi hitam dan satu topi putih

B : Saya melihat empat topi putih

C : Saya melihat satu topi hitam dan tiga topi putih

D : Saya melihat empat topi hitam

10. Segitiga ABC mempunyai panjang sisi-sisi 13, 14, dan 15. Segitiga PQR terletak di dalam segitiga ABC sehingga sisi-sisi yang bersesuaian sejajar dan berjarak dua satuan. Tentukan luas segitiga PQR !

11. Jika x dan y dua bilangan real tak nol, buktikan bahwa sekurang-kurangnya satu dari dua ketaksamaan berikut berlaku :

$$\left|\frac{x+\sqrt{x^2+2y^2}}{2y}\right|<1 \quad \text{atau} \quad \left|\frac{x-\sqrt{x^2+2y^2}}{2y}\right|<1.$$

12. Tentukan peluang menemukan di antara tiga orang terdapat paling sedikit dua orang yang lahir dalam bulan yang sama

13. Tentukan semua fungsi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $x,y\in\mathbb{R}$ berlaku

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2).$$

14. Perhatikan

$$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}} = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2.3}\right)$$

$$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}} . \frac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}} = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3.4}\right)$$

$$\vdots$$

Tulis dan buktikan rumus umum untuk pernyataan-pernyataan di atas !

15. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan

$$\left.\begin{aligned} \frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} + \frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}} &= \frac{17}{4} \\ x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4} &= 52 \end{aligned}\right\}$$

16. Buktikan untuk x, y, z bilangan real berlaku

$$x^2+y^2+z^2 \geq 2xy-2xz+2yz$$

17. Diberikan himpunan A yang beranggotakan sepuluh bilangan asli yang diambil dari 99 bilangan asli yang pertama. Buktikan bahwa ada dua himpunan bagian tak kosong dari A yang saling lepas sehingga jumlahan anggota-anggota kedua himpunan bagian tersebut sama !

18. Diketahui trapesium sebarang $ABCD$ dimana AB sejajar dengan CD dan $AB = 2CD$. Titik Q merupakan titik tengah AD dan titik P terletak pada BC sehingga $BP : PC = 2 : 1$. Jika AP memotong BQ di R, tentukan nilai dari $AR : RP$.

ΦΦΦ *Practices Make Perfect* **ΦΦΦ**

Daftar Pustaka

1. Andreescu, T. and Gelca, R. 2000. *Mathematical Olympiad Challenges*. Birkhauser, Boston.
2. Andreescu, T. and Feng, Z. 2003. *Mathematical Olympiads 2000-2001: Problems and Solutions from Around the World*. The Mathematical Association of America.
3. Engel, A. 1998. *Problem Solving Strategies*. Problem Book in Mathematics, Springer, Berlin.
4. Gardiner, A. 2000. *The Mathematical Olympiad Handbook.* Oxford University Press.
5. Greitzer, S.L. 1978. *International Mathematical Olympiads : 1959-1977*. The Mathematical Association of America.
6. Honsberger, R. 1997. *In Polya's Footsteps : Miscellaneous Problems and Essays*. The Mathematical Association of America.
7. Krantz. Steven G. 1997. *Techniques of Problem Solving*. American Mathematical Society.
8. Larson, Loren C. 1983. *Problem Solving through Problems*. Problem Book in Mathematics, Springer-Verlag.
9. Mason, J. 1985. *Thinking Mathematically*. Prentice-Hall.
10. Pranesachar, C.R. et al. 1994. *Problem Primer for the Olympiad*. Interline Publishing, Bangalore.
11. Setya Budhi, W. 2003. *Langkah Awal Menuju Olimpiade Matematika*. Penerbit Ricardo.
12. Solow, D. 2002. *How to Read and Do Proofs : an Introduction to Mathematical thought Processes*, 3rd ed. John Wiley and Sons.