## SUPERFICIE Y ÁREA

### Introducción

La medida de magnitudes es una tarea muy importante desde el punto de vista social y científico. Desde el inicio de las matemáticas hasta nuestros días se viene haciendo referencia a medidas de diversa índole. Cabe pensar que una de las justificaciones del interés de las matemáticas deriva de que satisfacen necesidades que los hombres sienten, relacionadas con las medidas. De hecho, desde la antigüedad, los gobiernos se han preocupado de regular y controlar las unidades de medida y sus usos, haciendo de ello en ocasiones un instrumento político (Kula, 1980). No es de extrañar por tanto que la medida de magnitudes haya estado presente en los distintos planes de estudios y en las propuestas curriculares oficiales que se han sucedido en el tiempo. En el Decretos de Educación Secundaria Obligatoria de matemáticas aparece un bloque relativo a la enseñanza de las medidas: Medida, estimación y cálculo de magnitudes (MEC, 1991), con lo que se le ha reconocido una autonomía propia al tema de las magnitudes y su medida.

De igual forma en los Estándares para la Educación Matemática del NCTM (Ferrini-Mundy y otros, 2000, NCTM 1991), también se contempla la medición como un tema separado de la aritmética y de la geometría. Para los grados 6-8 este documento considera que en la medición se debe prestar atención a la comprensión de los atributos, unidades y sistemas de medidas, así como la aplicación de una variedad de técnicas y herramientas para resolver problemas relativos a la medida de longitudes y áreas, entre las cuales aparecen las fórmulas de cálculo del área. Como se observa se propone prestar más atención a estrategias diversas, con vistas a captar los conceptos ligados a las magnitudes y sus medidas, entre estas estrategias aparece el empleo de fórmulas del área.

Sin embargo, es habitual en nuestros centros enfatizar el empleo de las fórmulas del área, su memorización y aplicación ocupan una gran parte del trabajo matemático dedicado a la medida y la geometría. Para combatir esta tendencia tratemos de profundizar en las razones de estas recomendación de los currículos oficiales y de los Estándares de que además de "memorizar y manipular fórmulas" se atienda mayoritariamente a otras destrezas y conceptos. Las directrices actuales en la enseñanza de las matemáticas, especialmente las surgidas de la consideración de la matemática como actividad cultural (Bishop, 1999), pretenden formar matemáticamente a los alumnos de la educación obligatoria en aquellos aspectos que van a necesitar para su vida como ciudadanos. Parece que la intención es que prevalezcan los problemas ligados a la realidad sobre los problemas matemáticos de inspiración en la escuela. Podríamos decir que es más próximo a la realidad el problema de determinar el número de losetas que tiene que comprar un cliente que quiere enlosar un suelo, que aquel que lo convierte en un problema de manejo de la fórmula del área (medir las longitudes del suelo, aplicar la fórmula para determinar el área de la habitación y posteriormente dividir por el área de cada loseta). Observemos que en el primer caso está recubriendo mentalmente el suelo con una unidad de referencia, mientras que en el segundo está determinando un número a partir de las longitudes de los lados y las operaciones con esos números. En el primer caso está midiendo de manera directa mientras que en el segundo está llevando a cabo un proceso complejo, basado en determinar la medida de superficie a partir de la medida de longitud (con lo que ello conlleva de dominio de las formas geométricas, de la magnitud longitud y superficie, de las unidades de medida de longitud-generalmente del sistema métrico decimal, único referente para cualquier problema de medida-, de las fórmulas de determinación del área –sencillas si las figuras son rectangulares, pero muy complicadas si tienen formas complejas-, y de la comparación de áreas por medio de la división de números).

La recomendación de los Estándares y del Decreto de Secundaria quieren llamar la atención sobre la complejidad del sistema de medida y trata de evitar la algebrización temprana de la misma que supone identificar el área con su cálculo aritmético. Proponen ambos documentos que se dedique tiempo y trabajo escolar a caracterizar la superficie que tienen los objetos, y sus formas de comparación. De esta forma se estará en condiciones de dedicarse a medir superficies (llamaremos área a esta medida) con todo lo que esto conlleva (fijar una unidad de referencia, comparar la cantidad medida y la unidad, expresarla por medio de un número y atender al significado de este número). De nuevo, como en toda la referencia algebraica, el Decreto de Matemáticas de Secundaria (MEC, 1991) propone que la algebrización llegue cuando se hayan sentado las bases precisas para poder hacer abstracción de los razonamientos y esté el alumno en condiciones de trabajar con el lenguaje numérico y literal sin aludir a su significado. Se supone que de esta forma el alumno estaría en condiciones de abordar las fórmulas cuando se hayan realizado prácticas sobre la superficie (identificación de la cualidad, comparación para establecer la equivalencia y el orden, estrategias de descomposición, estudio de figuras más cómodas para comparar, etc.) para una comprensión mayor de los conceptos y relaciones implicados en la superficie y su medida.

La dificultad de llevar al aula esta recomendación surge cuando el profesor intenta pensar otras tareas sobre el cálculo de áreas que no sean aplicar y manipular fórmulas. ¿Qué "otras cosas" se pueden hacer además de aprenderse las fórmulas de memoria y aplicarlas en distintos casos? La respuesta a esta pregunta puede venir sugerida desde ámbitos distintos. Uno de ellos es la investigación sobre los errores que cometen los niños en el cálculo de áreas y las concepciones equivocadas que manifiestan. Uno de los errores de los estudiantes que más han puesto de manifiesto los investigadores es la confusión entre perímetro y área (Dickson, 1991; Olmo y otros, 1989).

Otras sugerencias pueden venir dadas de las investigaciones sobre la naturaleza de las magnitudes y su medida, y sobre las destrezas que tiene que realizarse en el aprendizaje y enseñanza de la medida. En este artículo nos situaremos en esta perspectiva y vamos a presentar algunas tareas que ayuden al profesor de matemáticas de secundaria a trabajar los conceptos de superficie y área trabajando con elementos necesarios para aposentar las fórmulas y desarrollarlas. Comenzaremos por ver de manera resumida el concepto de de magnitud y su medida.

Consideramos la magnitud como una cualidad de ciertos objetos, y la medida como una comparación entre un objeto y el tomado como unidad. La medida de superficies consistiría pues en la comparación entre una unidad de medida fijada como unitaria y la cantidad que se quiere medir. Para ello hay que situar la unidad tantas veces como haga falta hasta rellenar la cantidad que queremos medir. En teoría este proceso se puede aplicar a todas las magnitudes geométricas, pero en la práctica puede ser infructuoso en el caso de la superficie (aun en figuras planas), mientras que siempre debería ser posible en la longitud (especialmente en figuras rectilíneas). Estas dificultades generan que se recurra al empleo de fórmulas para la determinación del área de un polígono en lugar de tratar de recubrirlo con la unidad y contar el número de veces que la hemos puesto. El cálculo indirecto de la medida de la superficie obedece pues a razones prácticas, pero cuando en la enseñanza se limita su uso al empleo de fórmulas estamos privando al alumno de la percepción del sentido de las fórmulas, además de no darle la oportunidad de manipular la magnitud antes de medirla (Segovia y otros, 1996). La reducción de la superficie al área, y la práctica de medida mediante fórmulas oscurece el trabajo con la magnitud superficie (como cualidad, no como número), dificulta la percepción de la reiteración como forma de comparación (equivalencia y orden), distancia de la familiarización con la cantidad de superficie de la unidad de medida y del aspecto general de la medida como reiteración de unidades (aspecto lineal de la medida). Vamos a destacar, en este artículo algunas actividades para la enseñanza de la magnitud superficie, que permitan la familiarización del alumno con la propiedad, promuevan actividades de comparación de superficies y con ello sienten las bases para poder acceder a las fórmulas. Posteriormente nos detendremos en las fórmulas y el tratamiento algebraico - geométrico de las mismas, lo que supone trabajar con varios sistemas de representación: los números y letras (fórmulas), y las figuras, utilizando unos y otros de manera relacionada, con lo que no se pierde de vista el significado de lo que se hace al calcular medidas de superficie.

## 2. Concepto de superficie y área

Figura 1: IDEAL, 1999.
Soria (soria@teleline.es)


En esta viñeta observamos uno de los abusos de lenguaje que se cometen con mucha frecuencia, la identificación de la medida de la "extensión" de un terreno con el contenido del mismo. Lo que ha ardido es el contenido del terreno (los pinos y matorrales), pero también ha ardido el contenido fungible de algunas de las capas de la tierra que ocupa el monte quemado. Si en la noticia se recurre a las hectáreas es para realzar la gran cantidad de superficie de monte quemado. Si se quiere dar una idea de la catástrofe que supone el incendio, habría que indicar la cantidad de pinos quemados, la medida de la superficie del terreno que se ha visto afectada e incluso la profundidad a la que ha llegado a afectar. Si bien es cierto que en la comunicación cotidiana se dan muchos de estos aspectos por supuestos (sólo los conocen los expertos, a los demás nos basta con saber la superficie del terreno quemado para compararlo con otros incendios, y sobre todo para concienciarnos del peligro de incendio que existe en una época determinada), en un proceso educativo hay que acostumbrar a que los niños diferencien elementos, y al menos en este caso habría que diferenciar el terreno, sus cualidades, entre ellas su superficie, la vegetación que hay en él, su forma y sus medidas de superficie y longitud.

Comencemos por diferenciar dos aspectos matemáticos que hemos mencionado, superficie y de medida de superficie (área), y trataremos de mostrar las relaciones y diferencias entre ambos (Chamorro y Belmonte 1988, Olmo, Moreno y Gil, 1988). ¿Son sinónimos superficie y área o hay diferencias entre ellos?

En los diccionarios se define la *superficie* como una *cualidad* (extensión) y el *área* como *medida*, como un *número*. La superficie es una cualidad que puede compararse y sumarse. Por ejemplo, podemos comparar la superficie de un rectángulo y un paralelogramo, o la de otras figuras con un rectángulo.

Más claramente podemos ver esta diferencia estudiando la estructura algebraica de ambos conceptos. La *superficie* es una magnitud, lo que se caracteriza matemáticamente como un *semimódulo ordenado*, construido sobre los polígonos (la superficie es una cualidad de los polígonos), estableciendo una relación de equivalencia y definiendo en ellos una operación interna, la suma, y otra externa, el producto por un escalar, y una relación que es de orden.

Es decir, sea T el conjunto de los polígonos del plano. En este conjunto definimos una relación R de la siguiente forma: Sean p y p’ elementos de T: pRp’ sí, y sólo si existen dos descomposiciones $T_1, T_2, .., T_n$ de p y $T_1', .., T_n'$ de p y p’, respectivamente, tal que un movimiento del plano que transforma $T_i$ en $T_i'$. Esta relación es de equivalencia, y define el conjunto cociente T/R = M, y a cada clase la llamamos *cantidad de superficie*. Así un polígono delimita una cantidad de superficie, que será la misma, independientemente de la unidad de medida de superficie que adoptemos, y que es la misma que la de cualquier polígono obtenido por descomposición y recomposición de este polígono. En este conjunto M podemos definir una suma de cantidades de superficie, juntando los polígonos representantes de las cantidades sumandos.

Se puede definir una relación de orden, compatible con la suma, basada en la descomposición (**p** tendrá más superficie que **p'** sí, y sólo si hay una descomposición de **p** en polígonos que permite obtener **p'** y quedan algunos polígonos de la descomposición sin utilizar). También podemos definir una operación externa (●, producto de un número por una cantidad de superficie) sobre Q (o R), de manera que *m/n*●**p** es una cantidad de superficie representada por un polígono que resulta de dividir un representante de **p** en *n* partes de igual cantidad de superficie, y tomar *m* de ellas. Con ello M adquiere estructura de ***semimódulo ordenado***.

Esta caracterización matemática de la superficie nos permite buscar tareas escolares que den cuenta de algunas de los elementos que definen formalmente a las magnitudes. En concreto podemos abordar tareas para destacar los siguientes aspectos: la cualidad superficie, la comparación de cantidades de superficie (por descomposición y recomposición), la suma, la multiplicación externa. Para afrontar y familiarizar al alumno con ellos tenemos que hacerlo trabajar con los elementos que aparecen recogidos en sus definiciones, es decir, los polígonos, la descomposición de polígonos, la búsqueda de descomposiciones y recomposiciones adecuadas para poder comparar su superficie, y la obtención de sumas y multiplicaciones de cantidades de superficie por números racionales.

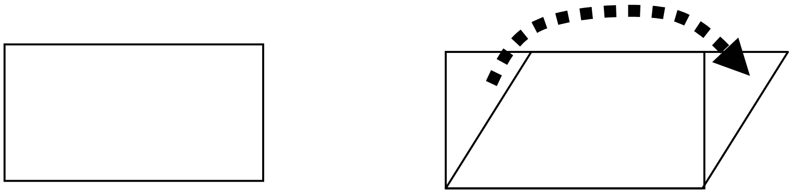
Una tarea para facilitar que los alumnos se ejerciten en la percepción de la cualidad superficie y en la comparación de cantidades de superficie puede consistir en realizar descomposiciones y recomposiciones de figuras hasta obtener la relación que tiene su superficie con la de un rectángulo (figura 2), que hay que describir.

La tarea de la figura 2 puede ayudar al alumno a ejercitarse en la comparación de superficies. Una comparación especialmente llamativa es la que demanda la búsqueda de todas las descomposiciones y recomposiciones posibles para identificar una figura con otros polígonos. Como ejemplo, en el cuadro siguiente presentamos la mayor parte de las descomposiciones del trapecio isósceles (Flores, en prensa) para transformarlo en otras figuras (paso previo para poder obtener, en su momento, la fórmula de cálculo de su área en función de las longitudes de los elementos que lo definen -las bases, la altura, la longitud de los lados iguales, las diagonales, etc.-)

Figura 2: Equivalencia de superficies de polígonos con el rectángulo:

**COMPARACIÓN DE SUPERFICIES**

- **Un PARALELOGRAMO tiene igual cantidad de superficie que un RECTÁNGULO que tenga de base LA MISMA y altura LA MISMA**



**COMPLETAR**

- **Un TRAPECIO ISOSCELES tiene igual cantidad de superficie que un RECTÁNGULO que tenga de base ________________________________________ ___________ y altura ______________________________**

- **Un TRAPECIO RECTÁNGULO tiene igual cantidad de superficie que un RECTÁNGULO que tenga de base ______________________________________ y altura ______________________________________**

- **Un TRAPECIO tiene igual cantidad de superficie que un RECTÁNGULO que tenga de base ______________________________________________________y altura ___________________.**

- **Un TRIÁNGULO tiene igual cantidad de superficie que un RECTÁNGULO que tenga de base ______________________________________________________y altura ___________________**

Este cuadro puede sugerirla variedad de descomposiciones que se pueden hacer de una figura, lo que nos da ideas para proponer tareas en el aula que traten de que los alumnos obtengan descomposiciones similares de polígonos, por medio de descomposiciones, búsqueda de líneas auxiliares, descripción de estas líneas y de los resultados obtenidos, división de segmentos y de figuras, etc.

## 3. Medida de superficies, el área y las fórmulas.

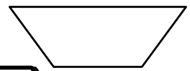
Recordemos que llamamos área a la medida de la cantidad de la superficie, por lo que el área de un polígono es un número, que está relacionado con la unidad de medida buscada. Para reflexionar sobre el área vamos a distinguir dos pasos: qué es medir superficies y cómo se puede medir superficies.

Cuadro 1: Transformación del trapecio isósceles en otros polígonos

## Cuadro 1: Superficie del trapecio

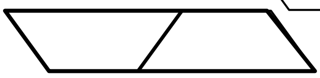
Para determinar la superficie del trapecio podemos compararlo con otras figuras y obtener, por descomposición y recomposición, un polígono equivalente. Esta figura acepta muchos procesos de descomposición y composición, por lo que vamos a clasificarlas según la figura que se obtiene o con la que se compara, y luego estudiaremos las relaciones métricas que aparecen, y el grado en que estas se perciben.

Partamos del siguiente trapecio isósceles:

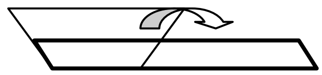


1. Obtención de un **Paralelogramo** equivalente:

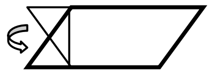
i) Duplicar el trapecio



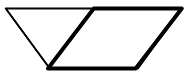
ii) Dividir el trapecio por una paralela media



iii) Descomponer en trapecio rectángulo y triángulo rectángulo y trazar el simétrico del triángulo

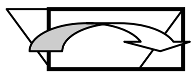


iv) Descomponer en un paralelogramo y un triángulo isósceles.

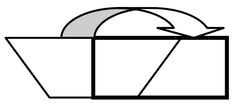


2. **Rectángulo** equivalente:

i) Descomponer en trapecio rectángulo y triángulo rectángulo y cambiar de sitio el triángulo.



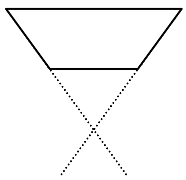
ii) Descomponer el trapecio en dos trapecios rectángulos iguales y cambiar uno de sitio



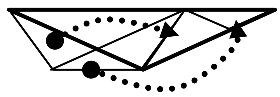
iii) Descomponer en hexágono y dos triángulos rectángulos y cambiar estos de sitio

3. **Triángulo**.

i) Prolongar los lados no paralelos hasta que se corten



ii) Trazar las diagonales, descomponerlo en triángulos y componer estos para formar un triángulo.



Medir la superficie de un polígono **p** es asignar un número a la cantidad de superficie de ese polígono. Para ello se fija una cantidad de superficie [u] = U de M, representada por un polígono (que suele tomarse cuadrado), a la que se llama **unidad**, y se busca el número que permite obtener **p** a partir de U (es decir, el número *m* tal que **p** = *m*●U). A este número *m* se le llama *área de **p** en unidad U*. Como se puede apreciar el área (la medida) es un isomorfismo que conserva el orden entre el semimódulo M y un semimódulo numérico (en la educación secundaria obligatoria sería el de los números reales). Insistamos, la cantidad de superficie de un polígono es única, e igual a la de cualquier otro polígono obtenido por descomposición y recomposición. Sin embargo, el área de este polígono es un número que está ligado a la unidad de medida establecida.

Medir la superficie de un polígono es buscar un procedimiento para comparar su cantidad de superficie con la superficie unidad. El método más sencillo sería colocar el polígono unidad tantas veces como sea posible para rellenar el polígono problema. Para poder hacer esto necesitamos que el polígono unidad tenga una forma que tesele el plano (que recubra el plano sin solaparse). La figura que se toma habitualmente es el cuadrado, lo que genera el nombre de las unidades de medida de superficie (metro cuadrado). Medir superficies consistiría en ver cuántos cuadrados unidad caben en el polígono que se mide. Se dice que la *medida* es *directa* si se hace materialmente la superposición de unidades en el polígono para ver cuántas caben.

La comparación entre la unidad y la figura que se pretende medir no es siempre sencilla por lo que se recurre a *métodos indirectos* que consisten en medir longitudes de los segmentos del polígono problema, y obtener el número de veces que contienen a la unidad por medio de una operación entre esas longitudes de segmentos bien elegidos del polígono. Esta segunda forma nos lleva a determinar estrategias para determinar el área en función de las longitudes, y a estas estrategias aritméticas se les llama *fórmulas*.

En los textos (preferentemente de Educación Primaria) se pueden encontrar tareas encaminadas a realizar la medida de manera directa en las que siempre quedaría perfectamente definida la unidad para poder superponerla cuantas veces haga falta. Al trabajar con fórmulas se hace abstracción de la unidad. Ello nos lleva a cometer abusos en la expresión, como cuando se dice:

A: *El área del rectángulo es igual al producto de su base por su altura*.

En esta fórmula cometemos abusos de lenguaje. Si vamos eliminando sobreentendidos gradualmente tenemos que comenzar por concretar qué es "base" y “altura”, lo que nos lleva a la nueva expresión:

B: *El área del rectángulo es igual a la medida de la longitud de la base multiplicada por la medida de la longitud de la altura del rectángulo.*

Aun en esta nueva frase estamos dando por supuesta la unidad de referencia, ya que lo que queremos decir es:

C: *El número de cuadrados unidad que caben en un rectángulo (área del rectángulo en unidades cuadradas) es igual al producto entre el número de veces que cabe el lado de la unidad en la base (medida de la longitud de la base en unidades el lado del cuadrado), y el número que cabe en la altura (medida de la longitud de la altura) del rectángulo.*

Esta última frase es demasiado larga, y por ello en la enseñanza se simplifica a su primera expresión. Pero con ello se corre el riesgo de perder de vista su significado. En la enseñanza de las matemáticas se suele reducir la expresión para simplificar lo que hay que recordar (*dos y dos son cuatro*, en lugar de *el resultado de la sumar dos más dos es cuatro*, por ejemplo, o el enunciado famoso de la propiedad commutativa “*el orden de los sumandos no altera la suma*”). Se trata de reglas mnemotécnicas que facilitan el recuerdo. Pero, tal como indican los estándares curriculares (Ferrini-Mundy 2000, y NCTM 1991), y el currículo de secundaria (MEC 1991), el recuerdo no puede hacer perder significado a lo aprendido. Para abordar la superficie y el área sin perder su sentido tenemos que buscar estrategias de aprendizaje que permitan dar por supuestos los sobreentendidos, para lo que necesitamos ver que las frases A y la C son equivalentes, es decir que el alumno entienda C aunque diga A, con ello evitaremos convertir la fórmula en una definición demasiado completa que pueda generar dificultades de comprensión.

Con objeto de que se aprecie el significado de la frase C anterior, sugerimos una serie de tareas para que ésta adquiera sentido. No resulta muy complicado proponer en clase de secundaria que los alumnos traten de *obtener las fórmulas que permitirían determinar el número de triángulos equiláteros iguales que caben en una serie de polígonos* (Castro y otros, 1997). Para ello es conveniente emplear papel isométrico, comenzando por obtener el número de triángulos que caben en figuras que encierran una cantidad entera de lados de triángulo en su base y/o en su altura (figura 3). La generalización de esta situación se enriquece con el manejo de fracciones y su comprobación, empleando para ello papel isométrico milimetrado.

Figura 3: Numero de triángulos equiláteros que caben en figuras dadas.

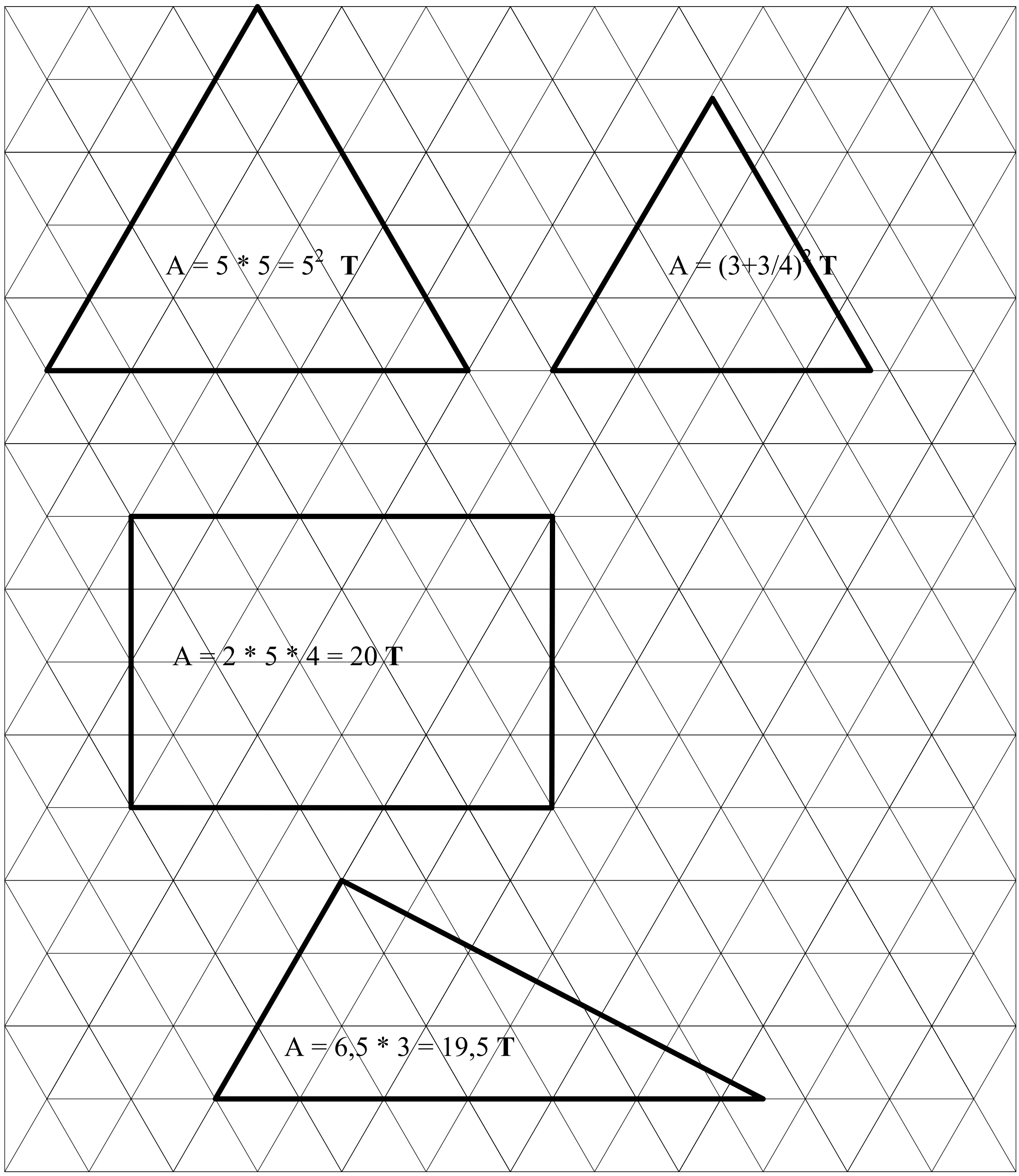
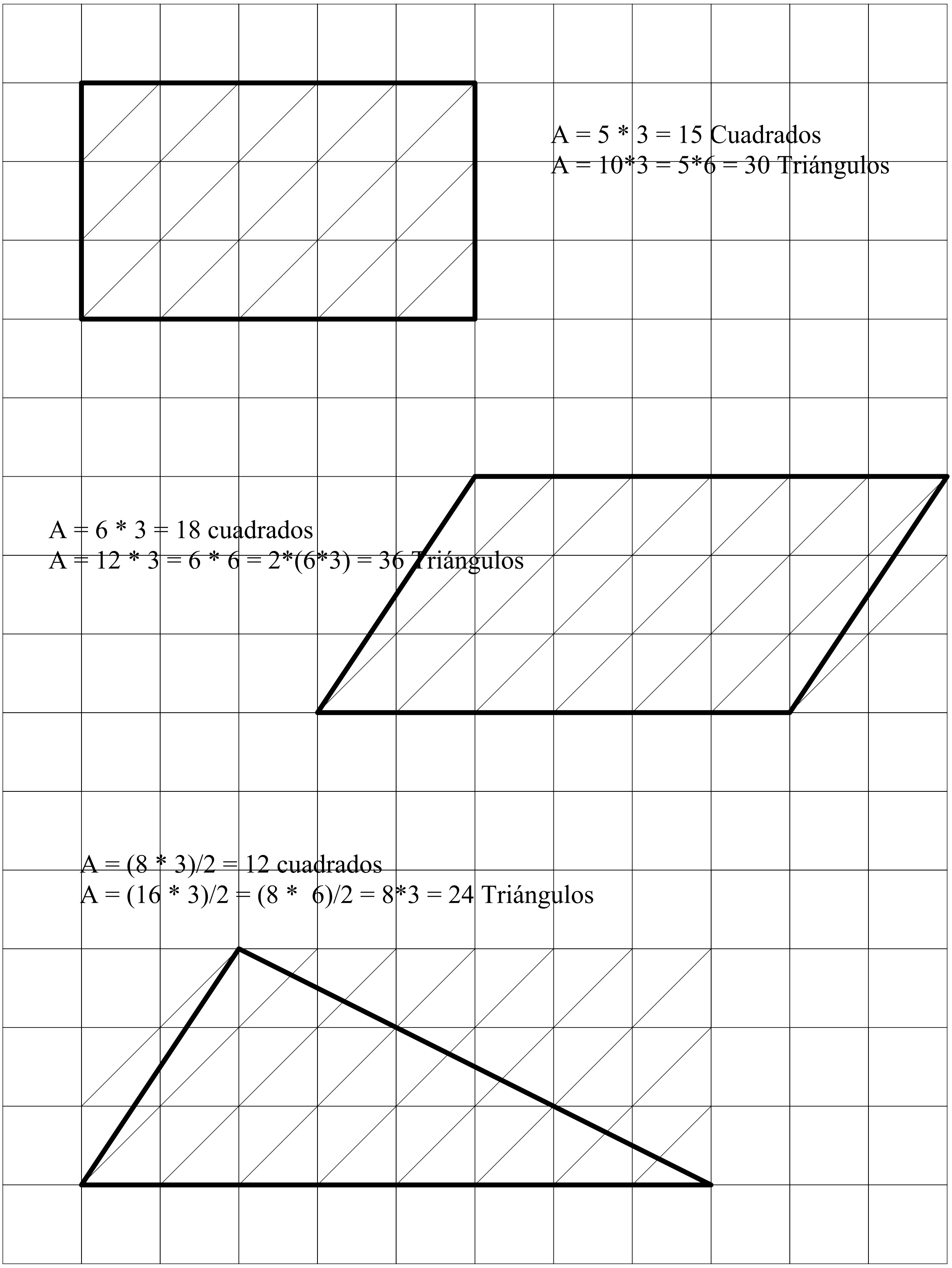

A = 5 * 5 = 5² **T**
A = (3+3/4)² **T**
A = 2 * 5 * 4 = 20 **T**
A = 6,5 * 3 = 19,5 **T**

Figura 4: Área en diversas unidades:

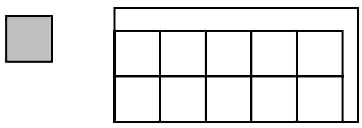


Comenzando por el recuento de triángulos se puede tratar de que los alumnos lleguen a sugerir fórmulas y a comprobar su validez para casos particulares. Pero también se pueden obtener o comprobar la validez de esta fórmulas buscando relaciones con las fórmulas para unidades cuadradas. Se puede partir de descomponer un cuadrado en dos triángulos isósceles y rectángulos, con lo que el número de triángulos isósceles y rectángulos es doble que el número de cuadrados (figura 4). A partir de esta conjetura se abre la posibilidad de continuar el razonamiento transformando el cuadrado en dos triángulos equiláteros, pero el proceso no es evidente ya que eso exigiría transformar en un rombo cuya altura no sería la del cuadrado, sino la del triángulo equilátero.

La repetición en clase de estos procesos de conteo y relación con las fórmulas del área con unidades cuadradas favorece que los alumnos perciban que las fórmulas de cálculo del área son relativas a la forma de la figura, con lo que al decir la frase A anterior deberemos tener como referente siempre al *número de cuadrados*.

Tal como hemos visto las fórmulas del área de las figuras dependen de la forma y el tamaño de la unidad. En la figura 5 podemos ver las fórmulas de las áreas de algunos polígonos en las dos opciones.

Figura 5: Fórmulas del área en unidad triangular, comparación de fórmulas

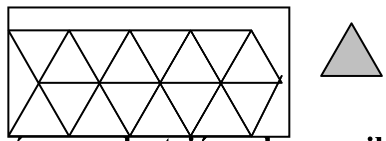


**El número de cuadrados que caben en**

**RECTÁNGULO es igual al**

- **producto entre el número que caben en la base por el número que caben en la altura**
- **producto entre el número de veces que el lado del cuadrado cabe en la base por el número de veces que cabe en la altura**
- **producto entre <u>la medida</u> de la base por <u>la medida</u> de la altura**

*** a x b**



**El número de triángulos equiláteros que caben en**

**RECTÁNGULO es igual al**

- **doble del producto entre el número que caben en la base por el número que caben en la altura**
- **doble del producto entre el número de veces que el lado del triángulo cabe en la base por el número de veces que cabe en la altura**
- **doble del producto entre <u>la medida</u> de la base por <u>la medida</u> de la altura**

*** 2 x a x b**

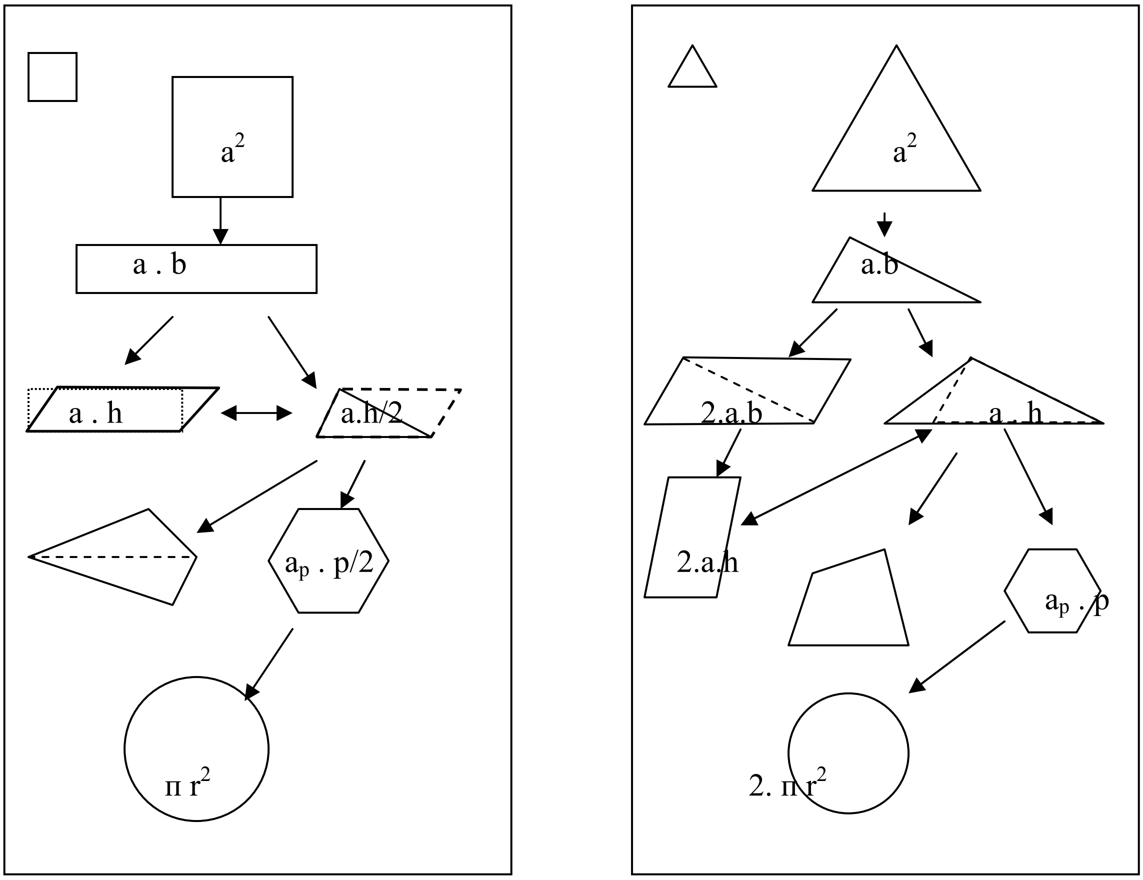
Pero no es necesario obtener de manera directa cada una de las fórmulas, sino que gracias a tareas como la de la figura 2, bastará con determinar algunas fórmulas para poder obtener otras. En la figura 2 veíamos que la superficie de un triángulo es la mitad de la superficie del paralelogramo de igual base y altura; a su vez la superficie de un paralelogramo es la misma que la del rectángulo transformado de igual base y altura (en el libro I de Los Elementos de Euclides, proposición 45, ya se explicaba el procedimiento de transformación de un polígono cualquiera en un paralelogramo, Puertas, 1991). Las equivalencias anteriores (descomposición en figuras más simples o transformaciones en figuras equivalentes) permiten obtener las fórmulas para el cálculo de las áreas de los polígonos. Dado que cualquier polígono puede ser descompuesto en triángulos, la fórmula del área de un polígono se podrá expresar como una fórmula que corresponda a la suma de las que permiten obtener las figuras resultantes de la descomposición realizada. Por tanto la fórmula del área de un polígono puede obtenerse a partir de la del área del triángulo.

Si partimos de estas equivalencias para las áreas en unidades cuadradas resulta básica la fórmula del área del rectángulo, ya que el cuadrado y el rectángulo es la figura que más fácilmente se descompone en cuadrados. Luego se pueden obtener todas las demás fórmulas de las áreas de los polígonos por descomposiciones de estos. Sin embargo, si el área es la cantidad de triángulos equiláteros, es más cómodo partir de paralelogramos sesentángulos, o bien de triángulos equiláteros o sesentángulos, ya que ellos se pueden teselar más fácilmente con triángulos equiláteros. Posteriormente se obtendrían todos las fórmulas de las áreas de los demás polígonos, fruto de descomposiciones y recomposiciones. En la figura 6 aparecen los esquemas más corrientes para obtener unas fórmulas a partir de otras, de la manera más natural en unidades cuadradas y triangulares.

Como ejemplo de aplicación de unas fórmulas para la determinación de otras, en el cuadro 2 aparece la expresión de las distintas fórmulas del cálculo del área del trapecio isósceles a partir de las transformaciones hechas anteriormente del trapecio en otros polígonos (cuadro 1). En este cuadro se considera el área como número de cuadrados.

Volvamos sobre las diferencias entre área como número de cuadrados y área como número de triángulos. Tal como hemos comentado la elección del cuadrado como unidad de medida va paralela con otras elecciones: el ángulo recto de 90º, la malla rectangular, la noción de perpendicularidad de 90º, la noción de altura basada en la perpendicularidad, etc.

Figura 6: esquema de relación de las fórmulas de las áreas de los polígonos para la unidad cuadrada y para la triangular.



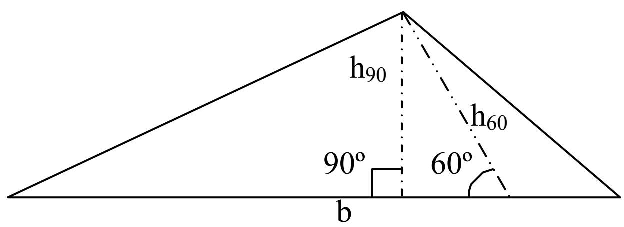

Cuadro 2: Fórmulas del área del trapecio isósceles a partir de su transformación en otros polígonos (según cuadro 1).

| | | Relación entre base y altura | El área del trapecio isósceles es |
|---|---|---|---|
| Paralelogramo equivalente | a.i | Por construcción:<br>Bp = B+b<br>Ap = h | $\frac{1}{2}[(B+b).h]$ |
| | a.ii | Por construcción:<br>Bp = B+b<br>Ap = h/2 | $(B+b).\frac{h}{2}$ |
| | a.iii | Cálculos algebraicos.<br>Bp. = b+(B-b)/2<br>Ap = h | $\frac{B+b}{2}.h$ |
| | a.iv | Por construcción<br>Bp=b; Bt=B-b<br>Ap=h=At | $b.h+(B-b).\frac{h}{2}$ |
| Rectángulo equiv | b.i | Cálculos algebraicos.<br>Br = b+(B-b)/2<br>Ar=h | $\frac{B+b}{2}.h$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | b.ii | Por construcción<br>Br =B/2 + b/2<br>Ar=h | $(\frac{B}{2}+\frac{b}{2}).h$ |
| | b.iii | Cálculos algebraicos<br>Br=b+2(B-b)/4<br>Ar=h | $\frac{B+b}{2}.h$ |
| Triángulo | c.i | Cálculos algebraicos<br>Bt1=B; Bt2=b<br>At1=h+m; At2=m | $B.\frac{(h+m)}{2} - b.\frac{m}{2}$<br>Siendo $\frac{m+h}{m}=\frac{B}{b}$ |
| | c.ii | Por construcción<br>Bt=B+b<br>At = h | $\frac{1}{2}.(B+b).h$ |

Si queremos determinar el número de triángulos isósceles y rectángulos que caben en las figuras podemos seguir empleando la malla cuadrada y la altura de 90º. Pero si queremos obtener el número de triángulos equiláteros que caben en determinadas figuras es más fácil partir de una trama isométrica (cada vértice está a igual distancia de los seis que le rodean), tal como se observa en la figura 3. Entonces la noción de altura se ve afectada por el cambio de unidad de medida. En una geometría del plano en la que el triángulo equilátero fuese la unidad de medida de superficies la altura cómoda para trabajar debería ser la longitud del segmento que forma 60º grados con la base, y no 90º como sucede en la geometría en la que se utiliza el cuadrado como unidad de medida. Por tanto un simple cambio de unidad conduce a fórmulas que están a medio camino entre las nociones ligadas a una forma geométrica y otra. Hay que realizar además el cambio de alturas para obtener las fórmulas adecuadas.

Figura 7: triángulo con las dos alturas




Unidades cuadradas: Área Triángulo = ½ b . $h_{90}$

Unidades triangulares: Área Triángulo = b . $h_{60}$

La elección de una unidad triangular tiene además otros efectos, así para un alumno que ha trabajado ya la obtención de áreas de las figuras planas es un ejercicio matemático muy motivador e intrigante descubrir que cuando se toma como unidad de medida el triángulo equilátero, en un triángulo equilátero en cuyo lado cabe "a" veces el lado de la unidad, caben $a^2$ triángulos (tiene de área $a^2$). Este puede ser el comienzo para realizar una reflexión sobre las nociones geométricas que son consecuencia de la elección del cuadrado como unidad de medida y poner de manifiesto cuáles son consustanciales con la forma cuadrada y cuáles no dependen de esta forma geométrica. Una de las consecuencias más conocidas es la de los *números cuadrados*. Expresados en su nomenclatura más general los *números cuadrados* son las *potencias segundas* de los números. El hecho de que el área de un cuadrado se obtenga mediante la potencia segunda de la medida de su lado ha ocasionado que el nombre *números cuadrados* desbanque a la terminología de potencias. Pero cuando uno mide superficies empleando como unidad de medida el triángulo equilátero observa que las *potencias segundas* están relacionadas con *el área de los triángulos equiláteros* (tal como apreciamos en las figuras 3 y 5). Por tanto, las potencias segundas de los números no son una propiedad exclusiva de la figura cuadrada. Una civilización que hubiera elegido el triángulo equilátero como unidad de medida posiblemente se hubiera visto conducida a llamar a las potencias segundas "*números equiláteros*", término que etimológicamente refleja mejor la representación geométrica de las potencias segundas de los números, puesto que resalta la igualdad de la medida de los lados.

## 4. Consecuencias de las fórmulas en unidades triangulares

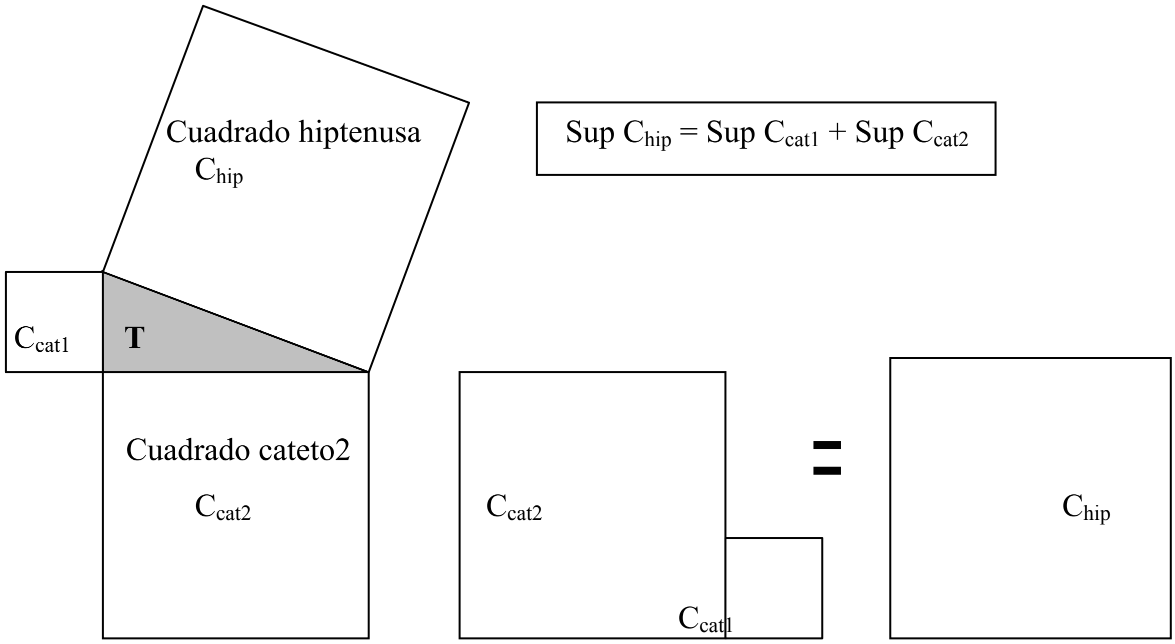
El estudio del significado de las fórmulas nos ha llevado a preocuparnos por la unidad de medida y su forma. Podemos continuar este tipo de razonamiento consistente en trabajar con las fórmulas de las áreas relacionadas íntimamente con su significado y con las propiedades de las figuras, y abarcar otros resultados matemáticos tradicionales relacionados con el área y la superficie. Por ejemplo el Teorema de Pitágoras.

Sabemos que el teorema de Pitágoras tiene muchas formulaciones. La formulación que emplea las superficies dice:

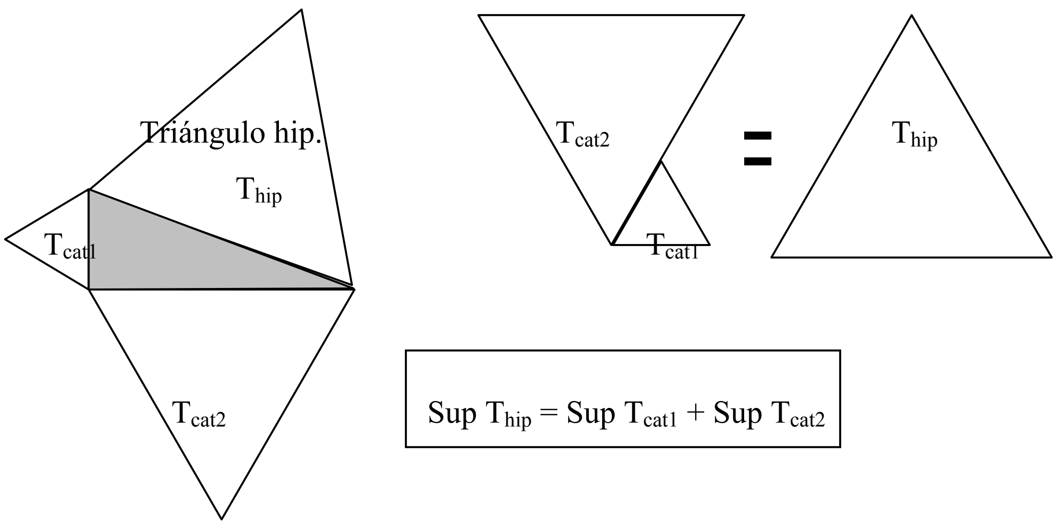
> *En un triángulo rectángulo, la superficie del cuadrado de lado la hipotenusa es igual a la suma de las superficies de los cuadrados de lados los catetos.*

Podemos ver este enunciado en la figura 8

Figura 8: Teorema de Pitágoras




**Generalización a otros polígonos: el triángulo equilátero**




Transformando las superficies en áreas, y midiendo estas en unidades cuadradas, la tesis del teorema sería la clásica:

*(Longitud de la hipotenusa)* $^2$ *= (longitud del cateto grande)* $^2$*+ (longitud del cateto pequeño)*$^2$

Nos podemos preguntar si esta fórmula está relacionada con la elección de la unidad de referencia del área, o no. Recordemos que una generalización de este teorema indica:

*En un triángulo rectángulo, la superficie de un polígono cualquiera situado* *sobre la hipotenusa es igual a la suma de las superficies de polígonos semejantes situados sobre los catetos.*

Por tanto, también sería cierta esta expresión cuando en lugar de situar cuadrados en los lados del triángulo rectángulo situáramos triángulos equiláteros. Luego, recordando la fórmula del área del cuadrado en medida cuadrada y del triángulo en medida triangular podemos afirmar que la expresión algebraica ($h^2 = a^2 + b^2$ ) representa ambas situaciones, es decir: el número de cuadrados (triángulos equiláteros) que caben en un cuadrado (triángulo equilátero) de lado la hipotenusa es igual a la suma del número de cuadrados (triángulos equiláteros) que caben en los cuadrados (triángulos equiláteros) de lados los catetos.

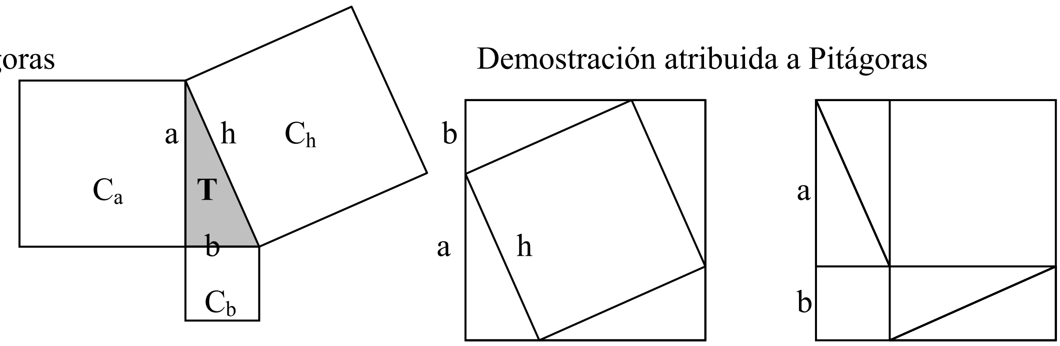
Incluso cabría aceptar que la expresión que llamamos algebraica del teorema es cierta, sea cual sea el polígono que tomemos como unidad de medida de superficies.

Pero hemos visto que la consideración de la unidad de medida de superficies en forma de triángulos equiláteros nos podía llevar a considerar que, en la nueva geometría triangular, la altura (representación de la perpendicularidad en la geometría de unidad cuadrada) debe formar un ángulo de 60º con la base. Con ello los que en la geometría de la perpendicularidad de 90º llamamos *triángulos rectángulos*, se llamarán ahora *triángulos sesentángulos*.

Estudiemos si hay una expresión sinónima del Teorema de Pitágoras (T.P.) en los triángulos *sesentángulos*. Para ello trabajaremos en geometría de unidad triangular. Recordando la demostración del T.P. podemos tratar de buscar una expresión equivalente para triángulos sesentángulos. Para ello recordemos una demostración atribuida a Pitágoras que toma un cuadrado de lado la suma de los catetos del triángulo rectángulo y colocar sobre él cuatro veces el triángulo de dos maneras (figura 9). Hagamos el mismo razonamiento empleando como figura de partida un "triángulo sensentángulo" y como polígonos sobre los lados triángulos equiláteros. Para estudiar la relación entre las superficies de los triángulos equiláteros de lados los catetos y la hipotenusa sesentángulos construimos un triángulo equilátero de lado la suma de los "catetos" y sobre él colocamos el triángulo sesentángulo de dos formas distintas (figura 9).

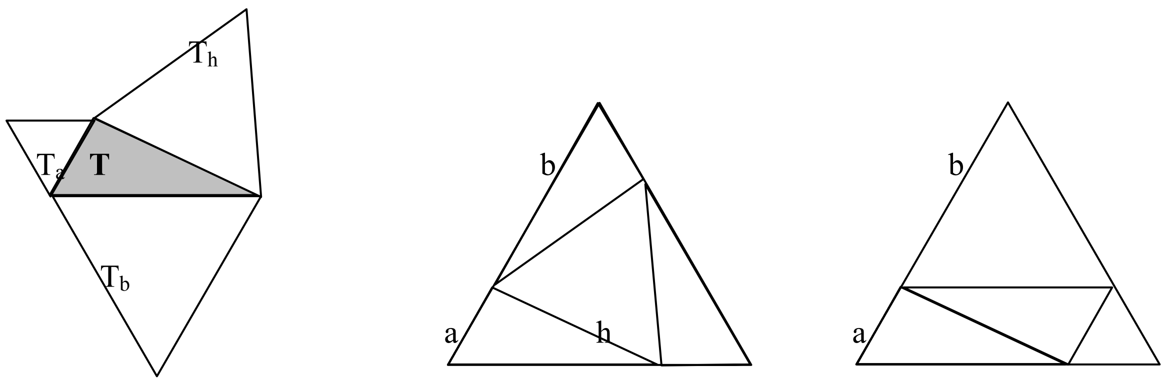
Figura 9: **Teorema del triángulo sesentángulo**

T. Pitágoras | Demostración atribuida a Pitágoras




Sup Cuadrado = 4Sup T + Sup $C_h$ = 4Sup T + Sup $C_a$+ Sup $C_b$

Teorema del Triángulo sesentángulo




3Sup **T** + Sup $T_h$ = 2 Sup **T** + Sup $T_a$ + Sup $T_b$

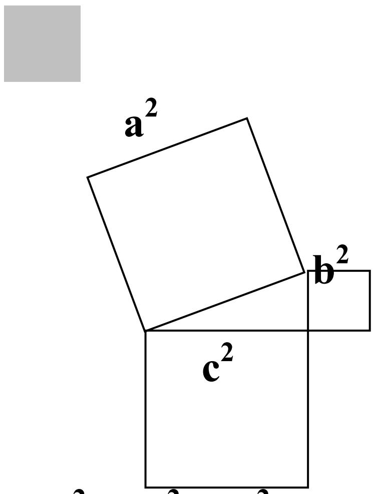
La superficie del triángulo equilátero de lado la hipotenusa de un triángulo sesentángulo es igual a la suma de la superficie de triángulo equilátero de lado un cateto y la superficie del triángulo equilátero de lado el otro cateto menos la superficie del triángulo sesentángulo

Tal como aparece en la figura 9, nos aparece una expresión nueva que expresa la relación entre estas superficies, es decir, el teorema ***del triángulo sesentángulo*** dice:

*En un triángulo sesentángulo, la suma de las superficies de los triángulos de lados los catetos, es igual a la superficie del triángulo equilátero de lado la hipotenusa del triángulo más la superficie del triángulo sesentángulo dado.*

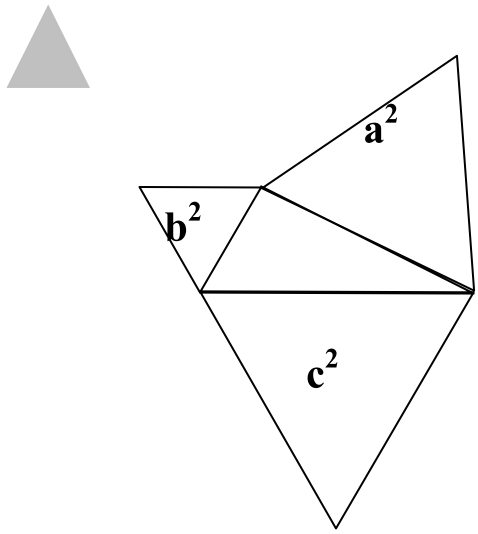
Figura 10: El teorema de Pitágoras y sus aplicaciones:

TEOREMA DE PITÁGORAS




$a^2 = b^2 + c^2$

DEL TRIÁNGULO SESENTÁNGULO




$a^2 + bc = b^2 + c^2$

APLICACIONES

## I) Calcular el tercer lado de un triángulo

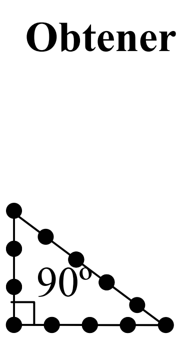
*c = 5, b = 7, A = 90º*

$a = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$

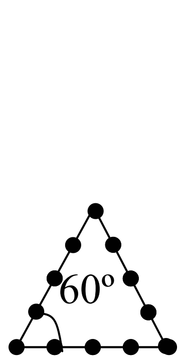
*c = 5, b = 7, A = 60º*

$a = \sqrt{25 + 49 - 35} = \sqrt{39}$

## II) Obtener ángulos




$5^2 = 4^2 + 3^2$

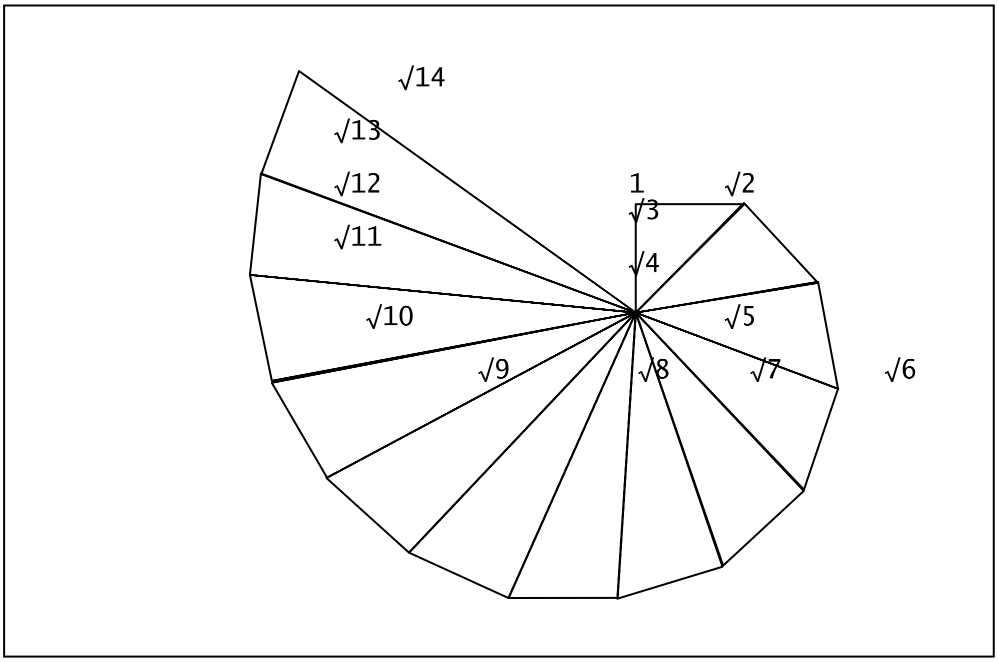



$4^2 + 4.4 = 4^2 + 4^2$

Este resultado podría quedarse en una curiosidad, si no nos atenemos a que los teoremas matemáticos tienen una utilidad fuera de la escuela. Para estudiar la utilidad de este teorema recordemos las utilidades del Teoremas de Pitágoras (figura 10).

Una utilización tradicional del Teorema de Pitágoras es calcular la longitud de un lado del triángulo rectángulo, conocidos los otros dos. Gracias a esta aplicación hemos podido obtener segmentos de longitud irracional cuadrática a partir de segmentos dados. La espiral clásica (figura 11) nos permite calcular todos los irracionales cuadráticos de números enteros.

Figura 11: Espiral de triángulos rectángulos de Teodoro de Cirens




Otra aplicación tradicional del teorema de Pitágoras es la que utiliza la tesis para construir la hipótesis, es decir, partir de unos segmentos que estén en relación pitagórica para obtener un triángulo rectángulo, y por tanto un ángulo recto. Así para dibujar en un jardín un seto en ángulo recto es mejor tomar cuerdas de tamaños dados (por ejemplo 3, 4 y 5), y formar un triángulo, el ángulo que se opone al de 5 es rectángulo (figura 10).

¿Se pueden extender estas aplicaciones al Teorema del Triángulo Sesentángulo (TTS)?. Para responderlo comencemos por convertir la expresión del TTS en superficies a expresión en áreas. En ese momento la fórmula resultante es:

| En un triángulo sesentángulo: $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2 + a \times b}$. | **TTS** |
|---|---|

Esta fórmula nos permite, por ejemplo determinar la longitud de la hipotenusa (lado opuesto al ángulo de sesenta grados)conocidos los dos catetos (otros dos lados), por medio de una operación aritmética (producto, suma y raíz cuadrada), aunque para el problema inverso (calcular un cateto en función de la hipotenusa y el otro cateto) nos vemos obligados a recurrir a la expresión algebraica que nos lleva a una ecuación de segundo grado para poder despejar.

La construcción de longitudes irracionales es también posible a partir del TTS, e incluso añade alguna nueva expresión. En la figura 12 tenemos una espiral de longitudes irracionales construida utilizando el TTS.

El TTS no es la única forma obtener segmentos de longitud irracional, igual que para obtenerlos en la geometría de medida cuadrada no tenemos que emplear siempre el Teorema de Pitágoras. Si tomamos un cuadrado de partida y luego vamos dibujando cuadrados de lados las diagonales del anterior, podemos observar que cada uno de ellos tiene de superficie el doble que el anterior, ya que el nuevo puede descomponerse en cuatro triángulos rectángulos e isósceles iguales a los dos en que puede descomponerse el cuadrado original. Si aceptamos la fórmula (expresión algebraica) que nos da el área del cuadrado como el cuadrado de la longitud del lado, tenemos que aceptar que los lados de los nuevos cuadrados serán el producto del lado por raíz de dos (operación externa de un segmento por un número), para que al elevarlo al cuadrado nos resulte como área el doble de la del primero.

Igualmente podemos buscar relaciones entre las superficies de dos triángulos equiláteros, lo que nos permite obtener segmentos resultantes de multiplicar el lado por un irracional, tal como aparece en las figuras siguientes, en las que se han buscado relaciones fáciles entre las superficies de triángulos equiláteros para poder obtener el área de uno en función del otro, posteriormente se ha aplicado la fórmula del área en unidad triangular:

También podríamos aplicar el nuevo resultado para dibujar ángulos de 60º, pero así como existen números enteros fáciles (ternas pitagóricas) que forman triángulos rectángulos, no es tan fácil en el caso de ángulos de 60º, salvo que tomemos el triángulo equilátero (figura 10).

Podríamos seguir estudiando otras fórmulas conocidas por todos, como las relativas al cuadrado de la suma (ya que hemos visto que cuadrado de un número es equivalente a decir área del cuadrado que tiene de medida de lado ese número), e interpretar estas fórmulas a partir de superficies en triángulos (figura 16 y 17), observando que son iguales.

**Figura 12:** Espiral de triángulos de “hipotenusas irracionales” aplicando el TTS

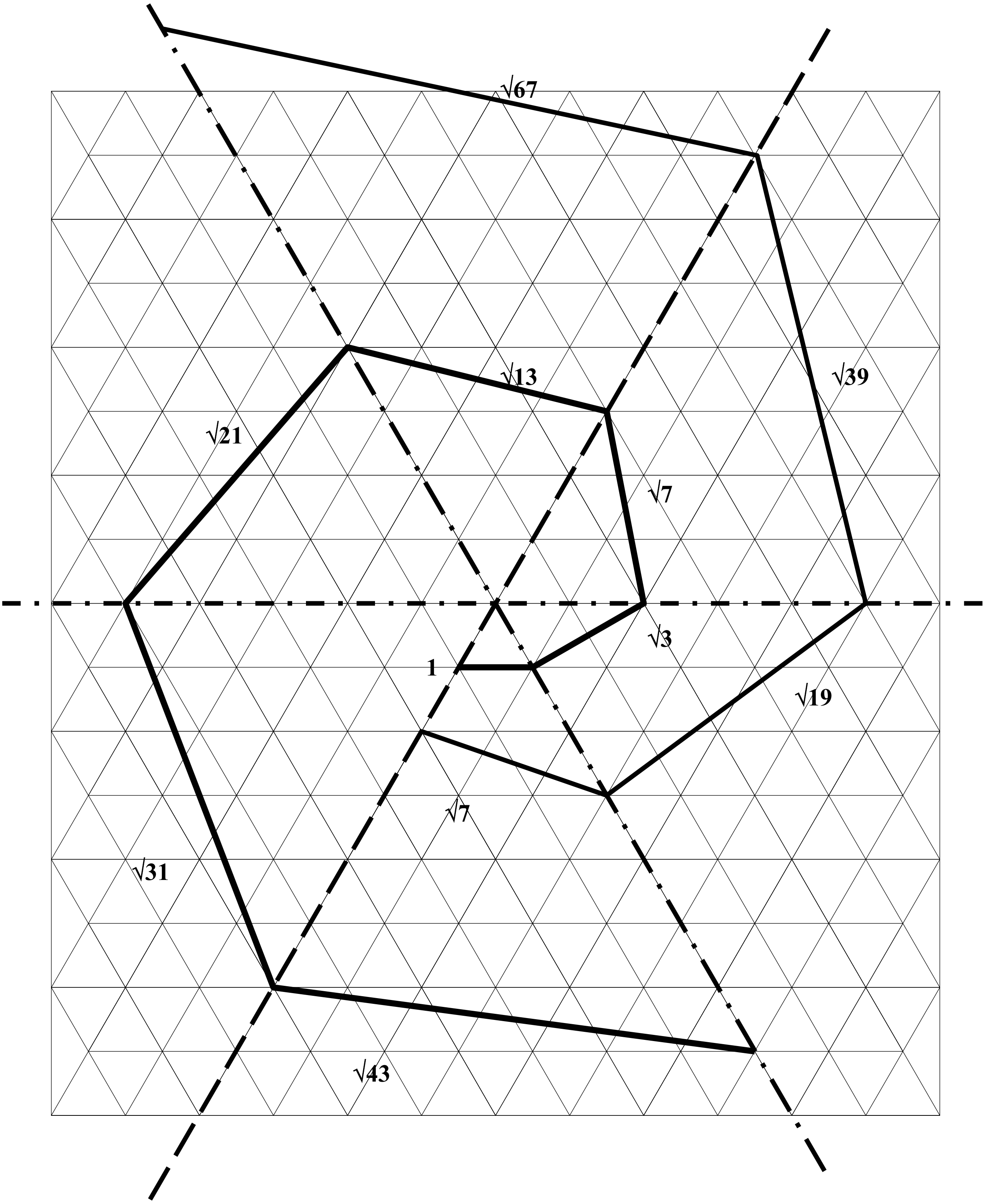
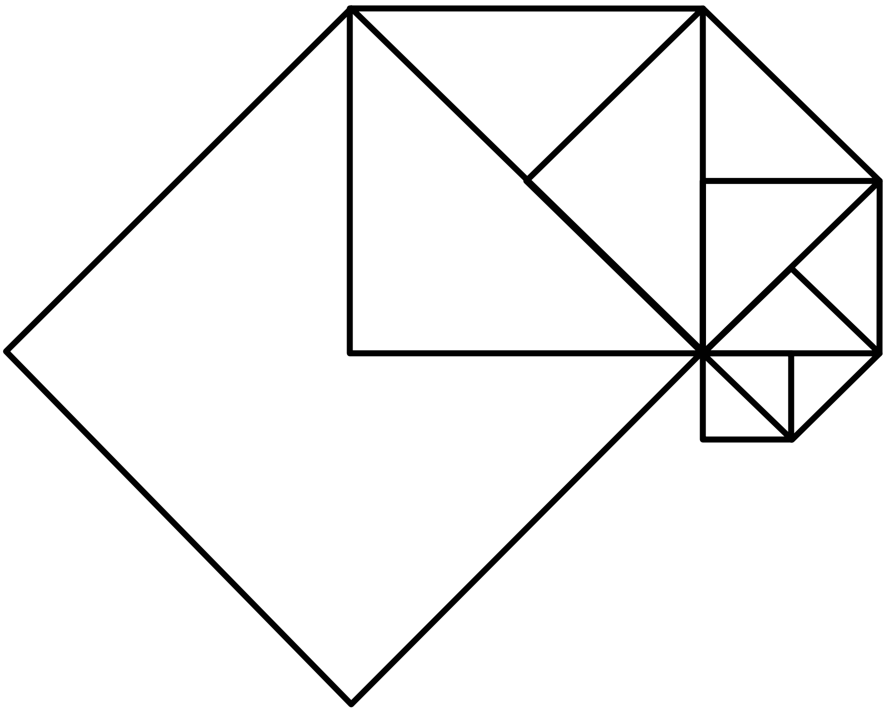


Figura 13: espiral de cuadrados y triángulos rectángulos e isósceles de lados el anterior por raíz de dos.

$S_n = 2\bullet\ S_{n-1} = 2^{n-1}\ S_1$

$L_n = \sqrt{2}\bullet\ L_{n-1} = (\sqrt{2})^{n-1}\bullet\ L_1$



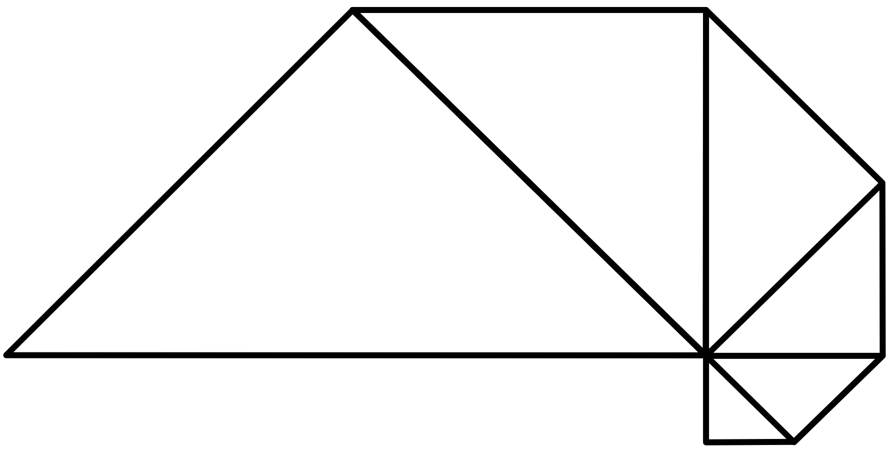


Figura 14: Triángulos de superficie 3 veces el anterior, y longitudes irracionales.

$S_n = 3 \bullet S_{n-1}$

Los lados son $\mathbf{a_n = \sqrt{3} \bullet a_{n-1} = (\sqrt{3})^{n-1} \bullet a}$

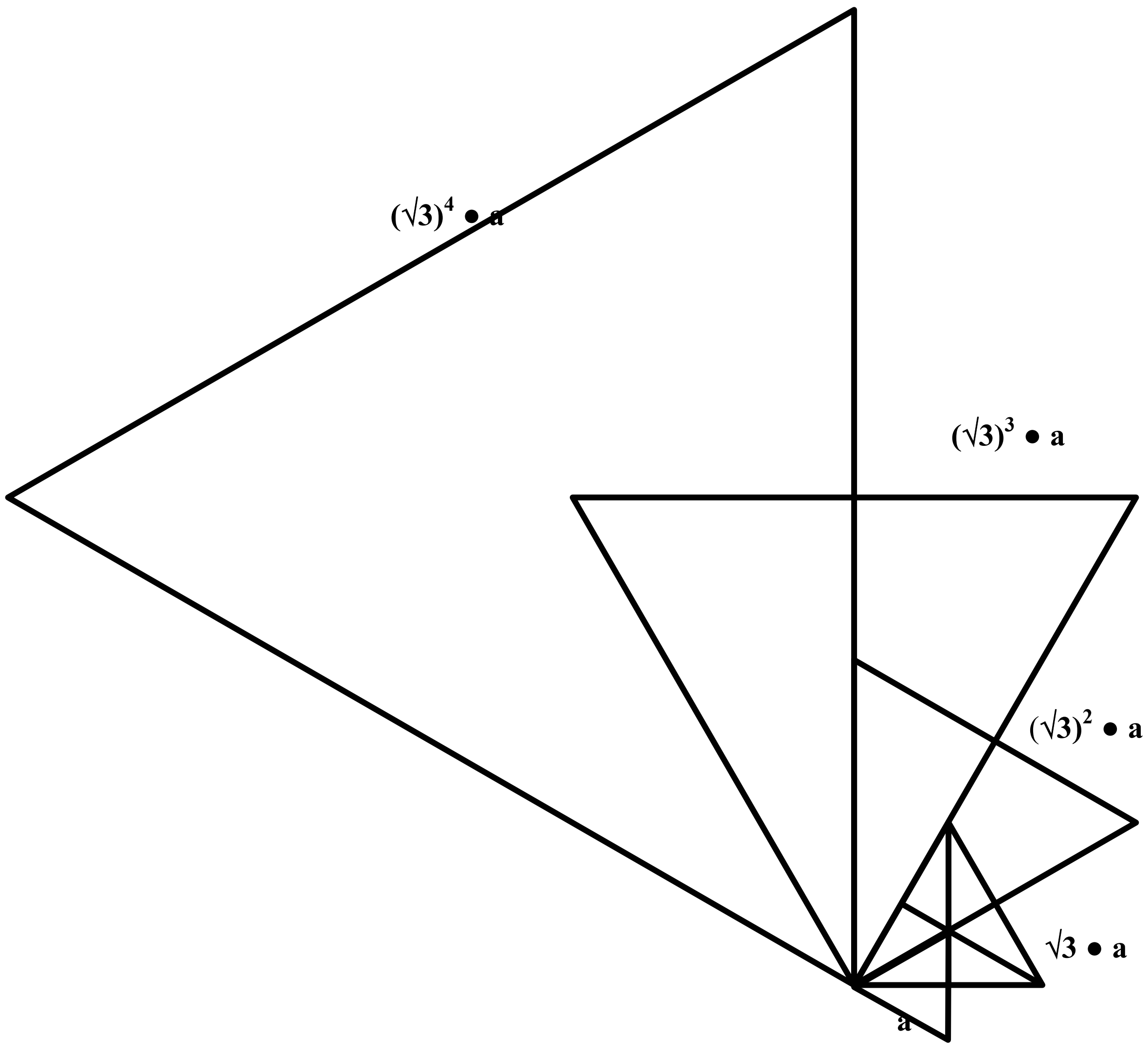


**Figura 15:** Triángulos de superficie 4/3 del anterior.
Lados de longitud 2√3/3 del anterior, aplicando la fórmula de cálculo del área con unidades en forma triangular.

$S_n = 4/3 \bullet S_{n-1}$

$a_n = (2\sqrt{3} \bullet a_{n-1}) /3 = (2\sqrt{3}/3)^{n-1} \bullet \mathbf{a}$

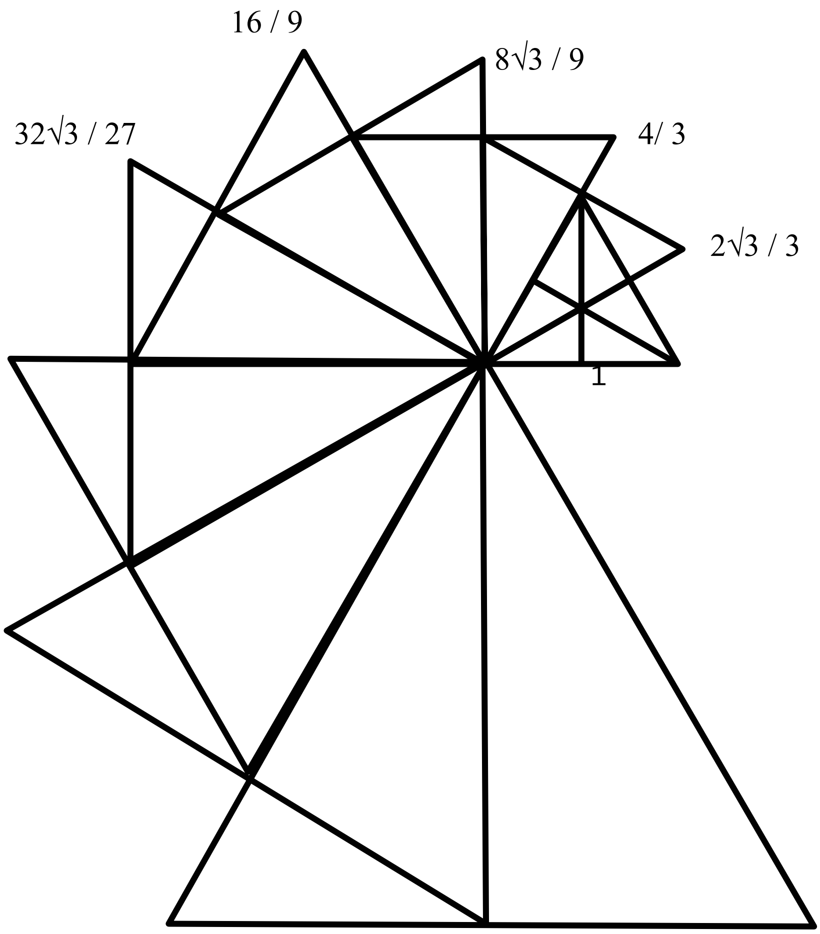
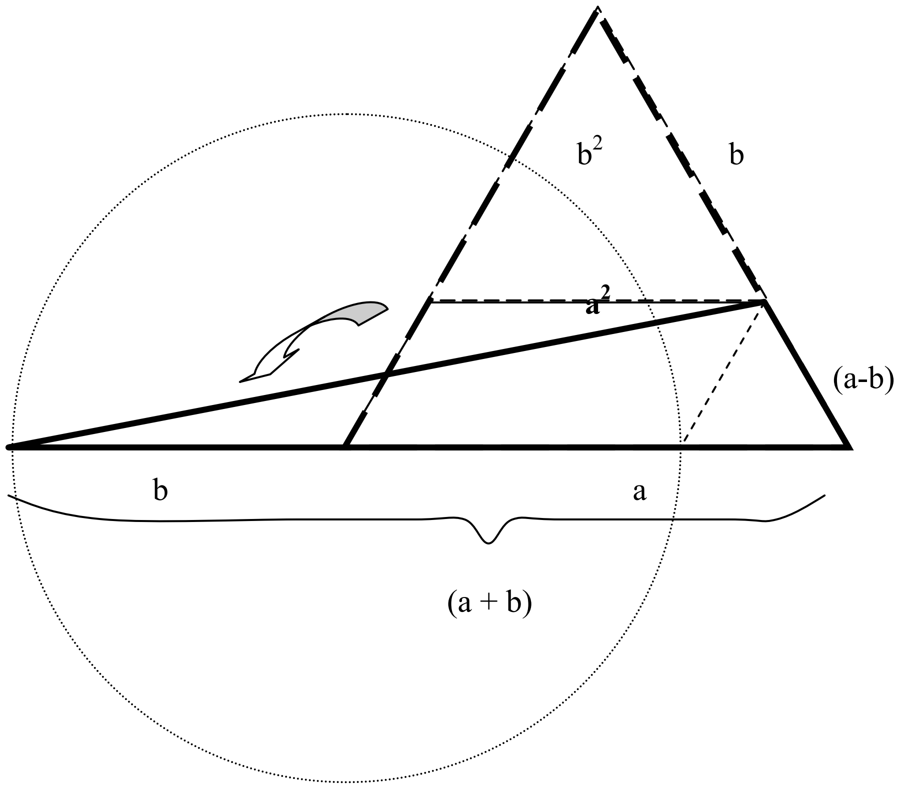


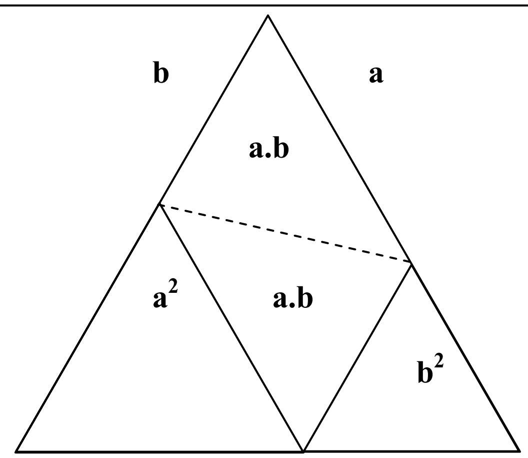
Figura 16: Suma por diferencia en geometría de unidades triangulares




Sup $T_{(a+b),\,(a-b)}$ = Sup $T_a$ – Sup $T_b$

$$\mathbf{(a+b)\ (a\text{-}b) = a^2 - b^2}$$

Figura 17: Cuadrado de la suma en unidades triangulares




$$\textbf{Sup } T_{a+b} = \textbf{Sup } T_a + \textbf{Sup } T_b + 2\ \textbf{Sup } T_{ab}$$

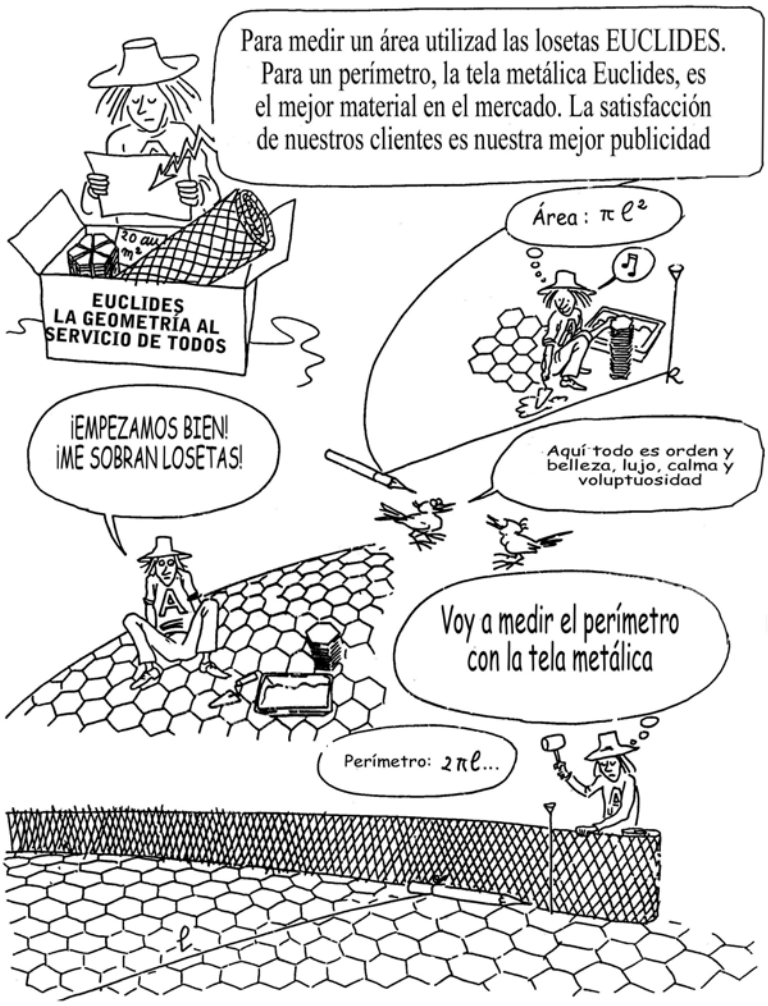
$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Para finalizar con esta actividad y como reflexión sobre el conocimiento que superficie y área se tiene, sugiero una mirada sobre el comic Le Geometricon, de Jean-Claude Petit (1980), en el que de una manera amena pero no exenta de rigor se estudian las geometrías no euclídeas. En la página 10 se ve a Anselme Laturlu, personaje central del comic, que está midiendo áreas y longitudes. Para ello ha comprado en la casa Euclides herramientas para realizar esas medidas, *losetas* para el *área*, y *tela metálica* para la *longitud*. Al situarse en una superficie esférica observa que las fórmulas tradicionales no le valen. Como puede verse en la figura 18, Anselme está realizando una *medida directa*, comparando las unidades con la cualidad del objeto que quiere medir (losetas con la superficie y tela metálica con la longitud). De esta forma observa que las fórmulas tradicionales de la geometría plana no son válidas para calcular áreas a partir de longitudes en la geometría esférica. Su cara de sorpresa nos da una idea de la importancia que tienen las fórmulas, y los errores en los que podemos caer si no les damos su sentido adecuado.

## 5. Conclusiones

Las reflexiones matemáticas realizadas a lo largo de este artículo nos muestran la complejidad de los conceptos de superficie y área, y se han propuesto tareas para afrontarla. También se ha visto que detrás de las fórmulas del área se esconden conceptos matemáticos diversos, que habría que precisar y trabajar durante la enseñanza secundaria, en concreto hemos sugerido que se trabaje el concepto de superficie antes de algebrizar por medio del empleo de las fórmulas. Pero además hemos querido mostrar que se puede hacer álgebra de expresiones relacionándolas con su significado y con representaciones geométricas, tratando de darle el máximo significado a todas las expresiones elementales.

**Figura 18: Le Géometricom. Petit, 1980, p. 10**




El análisis realizado nos ha permitido hacer una serie de propuestas para la enseñanza. Desglosando las fórmulas hemos diferenciado área de superficie, hemos destacado el papel de la unidad de medida y su repercusión en las mismas fórmulas, y por último hemos visto que incluso se pueden hacer matemáticas formales (obtener teoremas) en la educación secundaria, y al estudiar su utilidad nos hemos visto abocados a buscar el sentido y la utilidad de las fórmulas tradicionales.

En resumen, esperamos haber mostrado una parte de la riqueza de tareas que pueden realizarse sobre áreas y superficies para trabajar con algunas de las intenciones que proponen los documentos que rigen la enseñanza de la medida en la educación secundaria.

## Referencias


Bishop, A.J. (1999). *Enculturación matemática*. Madrid, MEC-Paidós.

Castro, E., Flores, P. y Segovia, I. (1997). Relatividad de las fórmulas del cálculo de la superficie de figuras planas. *SUMA* 26, pp. 23-32.

Chamorro, C. Y Belmonte, J. (1988). *El problema de la medida*. Madrid, Síntesis.

Dickson, L., Brown, M., Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: MEC-Lábor.

Ferrini-Mundy, J. y Martín, W.G. (Eds.) (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, NCTM.

Flores, P. (En prensa). El área del trapecio isósceles diagonales perpendiculares. *Épsilon*.

Kula, W. (1980). *Las medidas y los hombres*. Madrid: Siglo XXI.

MEC (1991). Real Decreto 1345/1991 de 6 de Septiembre, por el que se establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria. BOE nº 220, 13 Septiembre 1991.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática. Sevilla, SAEM THALES.

Olmo, M.A., Moreno, M.F. y Gil, F. (1988). *Superficie y Volumen*. Madrid, Síntesis.

Petit, J. (1980). *Le Géometricom*. Paris, Belin.

Puertas, M.L. (1991). *Euclides, Elementos. Libros I-IV*. Madrid, Gredos.

Segovia, I., Castro, E. Y Flores, P. (1996). El área del rectángulo. *UNO* 10, pp. 63-77.