Técnicas de Conteo

Ing. M.Sc. Javier Antonio Ballesteros Ricaurte

Se les denomina técnicas de conteo a: las variaciones, permutaciones y combinaciones las cuales son parte de las MD que estudia las diversas formas de realizar agrupaciones con los elementos de un conjunto, formándolas y calculando su número, existen distintas formas de realizar estas agrupaciones, según se repitan los elementos o no, según se puedan tomar todos los elementos de que disponemos o no y si influye o no el orden de colocación de los elementos, etc.

Las bases para entender el uso de las técnicas de conteo son el principio multiplicativo y el aditivo.

Principio Multiplicativo

Si se desea realizar una actividad que consta de r pasos, en donde el primer paso de la actividad a realizar puede ser llevado a cabo de N1 maneras o formas, el segundo paso de N2 maneras o formas y el r-ésimo paso de Nr maneras o formas, entonces esta actividad puede ser llevada a efecto de:

N1 x N2 x ....x Nr maneras o formas

Ejemplo

Una persona desea construir su casa, para lo cuál considera que puede construir los cimientos de su casa de cualquiera de dos maneras (concreto o block de cemento), mientras que las paredes las puede hacer de adobe, adobón o ladrillo, el techo puede ser de concreto o lámina galvanizada y por último los acabados los puede realizar de una sola manera ¿cuántas maneras tiene esta persona de construir su casa?

Solución:

- Considerando que r = 4 pasos
- N1= maneras de hacer cimientos = 2
- N2= maneras de construir paredes = 3
- N3= maneras de hacer techos = 2
- N4= maneras de hacer acabados = 1
- N1 x N2 x N3 x N4 = 2 x 3 x 2 x 1 = 12 maneras de construir la casa

Principio Adaptativo

Si se desea llevar a efecto una actividad, la cuál tiene formas alternativas para ser realizada, donde la primera de esas alternativas puede ser realizada de M maneras o formas, la segunda alternativa puede realizarse de N maneras o formas ..... y la última de las alternativas puede ser realizada de W maneras o formas, entonces esa actividad puede ser llevada a cabo de

M + N + ...+ W maneras o formas

Ejemplo

Una persona desea comprar una lavadora de ropa, para lo cuál ha pensado que puede seleccionar de entre las marcas Whirpool, Easy y General Electric, cuando acude a hacer la compra se encuentra que la lavadora de la marca W se presenta en dos tipos de carga (8 u 11 kilogramos), en cuatro colores diferentes y puede ser automática o semiautomática, mientras que la lavadora de la marca E, se presenta en tres tipos de carga (8, 11 o 15 kilogramos), en dos colores diferentes y puede ser automática o semiautomática y la lavadora de la marca GE, se presenta en solo un tipo de carga, que es de 11 kilogramos, dos colores diferentes y solo hay semiautomática. ¿Cuántas maneras tiene esta persona de comprar una lavadora?

Solución:

- M = Número de maneras de seleccionar una lavadora Whirpool
- N = Número de maneras de seleccionar una lavadora de la marca Easy
- W = Número de maneras de seleccionar una lavadora de la marca General Electric
- M = 2 x 4 x 2 = 16 maneras
- N = 3 x 2 x 2 = 12 maneras
- W = 1 x 2 x 1 = 2 maneras
- M + N + W = 16 + 12 + 2 = 30 maneras de seleccionar una lavadora

Variaciones

Las variaciones son aquellas formas de agrupar los elementos de un conjunto teniendo en cuenta que: la selección de elementos, orden en que se colocan y la repetición de elementos.

Variaciones sin repetición

- Las variaciones sin repetición de n elementos tomados de p en p se definen como las distintas agrupaciones formadas con p elementos distintos, eligiéndolos de entre los n elementos de que disponemos, considerando una variación distinta a otra tanto si difieren en algún elemento como si están situados en distinto orden.

$$V_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Ejemplo

- Si tengo 5 objetos {a, b, c, d, e}, puedo formar grupos ordenados de 3 de ellos de muchas maneras:
- cada grupo ordenado decimos que es una variación de estos 5 elementos de orden 3, o también, tomados de 3 en 3.

Solución:

- n= 5
- p=3
- sin repetición
- El número de variaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3 se denota por V5 3 y equivale a:

$$V_5^3 = 5.4.3 = \frac{5.4.3.2.1}{2.1} = \frac{5!}{2!} = 60$$

Si tengo 5 objetos {a, b, c, d, e} , los puedo colocar ordenadamente poniendo como primer elemento del grupo o bien la 'a' o la 'b' o la 'c' o la 'd' o la 'e'. Por tanto, hay 5 posibilidades para empezar:

- a _ _
- b _ _
- c _ _
- d _ _
- e _ _

Por cada una de estas 5 posibilidades, para colocar el 2° elemento tengo 4 posibilidades: elegir una cualquiera de las letras restantes. Por ejemplo, suponiendo que he colocado 1° la 'a', tendría:

- a b _
- a c _
- a d _
- a e _

De forma que si por cada elección del 1° tengo 4 posibilidades para el 2°, en conjunto tendré para los dos primeros elementos 5x4 = 20 posibilidades.

Análogamente, para colocar el 3° elemento, tendré, por cada elección del 1° y 2°, 3 nuevas posibilidades. Por ejemplo, si había colocado 1° la 'b' y 2° la 'e', tendría las siguientes posibilidades:

- b e a
- b e c
- b e d

Así que para el conjunto de los tres primeros elementos tengo 5x4x3 = 60 posibilidades.

Variaciones con repetición

Las variaciones con repetición de n elementos tomados de p en p se definen como las distintas agrupaciones formadas con p elementos que pueden repetirse, eligiéndolos de entre los n elementos de que disponemos, considerando una variación distinta a otra tanto si difieren en algún elemento como si están situados en distinto orden.

El número de variaciones que se pueden construir se puede calcular mediante la fórmula:

$$VR_n^p = n^p$$

Ejemplo

Si tengo 5 objetos {a, b, c, d, e}, puedo formar grupos ordenados de 3 de ellos, pudiéndose repetir los objetos en un mismo grupo, de la manera siguiente: cada grupo ordenado decimos que es una variación con repetición de estos 5 elementos de orden 3, o también, tomados de 3 en 3.

Donde:

- n = 5
- p = 3
- con repetición

El número de variaciones con repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3 se denota por VR53 y equivale a:

- VR5
- 3 = 5.5.5 = 53 = 125

Si tengo 5 objetos {a, b, c, d, e} , los puedo colocar ordenadamente poniendo como primer elemento del grupo o bien la 'a' o la 'b' o la 'c' o la 'd' o la 'e'. Por tanto, hay 5 posibilidades para empezar:

- a _ _
- b _ _
- c _ _
- d _ _
- e _ _

Por cada una de estas 5 posibilidades, para colocar el 2° elemento tengo otras 5 posibilidades: elegir una cualquiera de las letras. Por ejemplo, suponiendo que he colocado 1° la 'a', tendría:

- a a_
- a b _
- a c _
- a d _
- a e _

De forma que si por cada elección del 1° tengo 5 posibilidades para el 2°, en conjunto tendré para los dos primeros elementos 5x5 = 25 posibilidades.

Análogamente, para colocar el 3° elemento, tendré, por cada elección del 1° y 2°, 5 nuevas posibilidades. Por ejemplo, si había colocado 1° la 'b' y 2° la 'e', tendría las siguientes posibilidades:

- b e a
- b e b
- b e c
- b e d
- b e e

Así que para el conjunto de los tres primeros elementos tengo 5x5x5 = 125 posibilidades.

Permutaciones

Una permutación es una combinación en donde el orden es importante. La notación para permutaciones es P(n,r) que es la cantidad de permutaciones de “n” elementos si solamente se seleccionan “r”.

Permutaciones sin repetición

Las permutaciones sin repetición de n elementos se definen como las distintas formas de ordenar todos esos elementos distintos, por lo que la única diferencia entre ellas es el orden de colocación de sus elementos. Para formar un grupo se toman todos los elementos, no hay que seleccionar unos pocos, hay que tener en cuenta el orden en que se colocan los elementos; si se altera el orden, se tiene un grupo distinto y no se repiten los elementos dentro de un mismo grupo.

$$P_n = n!$$

Ejemplo

Si tengo 5 objetos {a, b, c, d, e} , los puedo colocar ordenadamente de muchas maneras, cada ordenación decimos que es una permutación de estos 5 elementos. El número de permutaciones de 5 elementos se denota por P5 y equivale a:

- P5 = 5.4.3.2.1 = 120

Si tengo 5 objetos {a, b, c, d, e}, los puedo colocar ordenadamente poniendo como primer elemento del grupo o bien la 'a' o la 'b' o la 'c' o la 'd' o la 'e'. Por tanto, hay 5 posibilidades para empezar:

- a _ _ _ _
- b _ _ _ _
- c _ _ _ _
- d _ _ _ _
- e _ _ _ _

Por cada una de estas 5 posibilidades, para colocar el 2° elemento tengo 4 posibilidades: elegir una cualquiera de las letras restantes. Por ejemplo, suponiendo que he colocado 1° la 'a', tendría:

- a b _ _ _
- a c _ _ _
- a d _ _ _
- a e _ _ _

De forma que si por cada elección del 1° tengo 4 posibilidades para el 2°, en conjunto tendré para los dos primeros elementos 5x4 = 20 posibilidades.

Análogamente, para colocar el 3° elemento, tendré, por cada elección del 1° y 2°, 3 nuevas posibilidades. Por ejemplo, si había colocado 1° la 'b' y 2° la 'e', tendría las siguientes posibilidades:

- b e a _ _
- b e c _ _
- b e d _ _

Así que para el conjunto de los tres primeros elementos tengo 5x4x3 = 60 posibilidades.

Permutaciones con repetición

Llamamos a las permutaciones con repetición de n elementos tomados de a en a, de b en b, de c en c, etc, cuando en los n elementos existen elementos repetidos (un elemento aparece a veces, otro b veces, otro c veces, etc) verificándose que a+b+c+...=n. Para formar un grupo se toman todos los elementos, no hay que seleccionar unos pocos, hay que tener en cuenta el orden en que se colocan los elementos; si se altera el orden, se tiene un grupo distinto y hay repetición de los elementos dentro de un mismo grupo. El número de estas permutaciones será:

$$PR_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a!\,b!\,c!}$$

Ejemplo

Si tengo 3 objetos {a, b, c} , los puedo colocar ordenadamente de manera que la 'a' aparezca 2 veces, la 'b' otras 2 veces y la 'c' 1 sola vez, cada uno de estos grupos decimos que es una permutación con repetición de estos 3 elementos.

El número de permutaciones con repetición de 3 elementos que se repiten 2 veces, 2 veces y 1 vez, teniendo por tanto cada grupo 5 elementos, se denota por P5 2,2,1 y equivale a:

$$P_5^{2,2,1} = \frac{5!}{2!\ 2!\ 1!} = 30$$

Si los 5 objetos que aparecen en las permutaciones fueran todos distintos, pongamos {a1, a2, b1, b2, c}, en lugar de estar repetidos algunos, evidentemente estaríamos en el caso de las permutaciones ordinarias y el número de grupos sería P5 = 120.

Si en uno de estos grupos cambiáramos el orden de las 'a' entre sí tendríamos una permutación distinta, pero si suprimiéramos los subíndices, entonces sería la misma. Lo mismo podríamos decir de las 'b'. Pero las distintas ordenaciones que se pueden hacer con las dos 'a' y las dos 'b' son 2! . 2! = 4, así que por cada 4 permutaciones ordinarias tenemos una permutación por repetición. Luego el número de estas últimas debe ser 120 / 4 = 30.

Combinaciones

Una combinación, es un arreglo de elementos en donde no nos interesa el lugar o posición que ocupan los mismos dentro del arreglo. En una combinación nos interesa formar grupos y el contenido de los mismos.

Combinaciones sin repeticiones

Las combinaciones sin repetición de n elementos tomados de p en p se definen como las distintas agrupaciones formadas con p elementos distintos, eligiéndolos de entre los n elementos de que disponemos, considerando una variación distinta a otra sólo si difieren en algún elemento, (No influye el orden de colocación de sus elementos).

El número de combinaciones que se pueden construir esta dada por la fórmula:

$$C_n^{\,m} = \frac{V_n^{\,m}}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

Ejemplo

Si tengo 5 objetos {a, b, c, d, e}, puedo formar grupos no ordenados (subconjuntos) seleccionando 3 de ellos de muchas maneras, cada grupo decimos que es una combinación de estos 5 elementos de orden 3, o también, tomados de 3 en 3. No se tiene en cuenta el orden: si cambiamos el orden de los elementos en un grupo, sigue siendo el mismo grupo.

En el apartado dedicado a la Variaciones, se ha estudiado que a partir de 5 objetos {a, b, c, d, e} tomando de 3 en 3 se pueden formar 60 variaciones (grupos ordenados). Dos variaciones pueden estar formadas con los mismos objetos pero en distinto orden, por ejemplo: " b e a " , " e b a ".

Estos dos grupos son distintos considerados como variaciones, pero son el mismo considerados como combinaciones, o sea, es la misma combinación, puesto que el orden no se tiene en cuenta.

¿Cuántas variaciones hay con las mismas letras " b e a " y que sólo se diferencian entre sí en el orden en que están escritas? Es decir, ¿de cuántas maneras se pueden ordenar 3 letras?

P3 = 3! = 3.2.1 = 6

Luego entonces por cada combinación salen 6 variaciones. Como en total hay 60 variaciones, entonces el número de combinaciones debe ser 60 / 6 = 10.

Las siguientes con combinaciones encontradas:

abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde

Combinaciones con repetición

Las combinaciones con repetición de n elementos tomados de p en p se definen como las distintas agrupaciones formadas con p elementos que pueden repetirse, eligiéndolos de entre los n elementos de que disponemos, considerando una variación distinta a otra sólo si difieren en algún elemento, (No influye el orden de colocación de sus elementos). El número de combinaciones que se pueden construir se puede calcular mediante la fórmula:

$$CR_n^{\,m} = C^{\,m}_{\,n+m-1} = \frac{V^{\,m}_{\,n+m-1}}{P_m}$$

Ejemplo

Si tengo 5 objetos {a, b, c, d, e}, puedo formar grupos tomando 3 de ellos, pudiéndose repetir los elementos en un mismo grupo, cada grupo decimos que es una combinación con repetición de estos 5 elementos de orden 3. No se tiene en cuenta el orden: si cambiamos el orden de los elementos en un grupo, sigue siendo el mismo grupo.

El número de combinaciones con repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3 se denota por CR5 3 y equivale a:

$$CR_5^3 = C_7^3 = \frac{V_7^3}{P_3} = \frac{7.6.5}{3.2.1} = 35$$

Las siguientes son combinaciones encontradas:

aaa abb acc add aee
aab abc acd ade
aac abd ace
aad abe
aae
bbb bcc bdd bee
bbc bcd bde
bbd bce
bbe
ccc cdd cee
ccd cde
cce
ddd dee
dde
eee

Ejercicios:

Para los siguiente problemas realizar la programación en computadora

a) En una liga de baloncesto juegan 10 equipos, todos contra todos dos veces (ida y vuelta).

¿Cuántos partidos se habrán jugado al final de la misma?.

b) Con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5 ¿cuántos números de cinco cifras, sin repetición, se pueden formar?.

A. ¿Cuántos de esos números empiezan por 1?.
B. ¿Cuántos terminan en 5?.
C. ¿Cuántos empiezan por 1 y acaban en 5?.
D. ¿Cuántos son pares?.
E. ¿Cuántos son múltiplos de 5?.
F. ¿Cuántos son mayores que 20.000?.

c) Un club de baloncesto dispone de 10 jugadores de los cuales juegan 5 a la vez. ¿Cuántos equipos distintos de 5 jugadores pueden sacar el entrenador para cada partido?.

d) Con las letras de la palabra CINEMA ¿Cuántas palabras distintas, tengan sentido o no, se pueden formar?.

A. ¿Cuántas terminan en A?.
B. ¿Cuántas empiezan con N?.
C. ¿Cuántas empiezan con C y terminan en I?.
D. ¿Cuántas empiezan con vocal?.
E. ¿Cuántas tienen vocal y consonante alternadas?.

e) Siete chicos e igual número de chicas quieren formar pareja para el baile. ¿Cuántas parejas distintas se pueden formar?.