UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TÓPICOS FUNDAMENTAIS EM TEORIA DA MEDIDA

por

Harllen Araújo de Sena

João Pessoa, Setembro de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TÓPICOS FUNDAMENTAIS EM TEORIA DA MEDIDA

por

Harllen Araújo de Sena

sob orientação do

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação de Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

João Pessoa, Setembro de 2019

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S474t Sena, Harllen Araújo de.
Tópicos Fundamentais em Teoria da Medida / Harllen Araújo de Sena. - João Pessoa, 2019.
58 f. : il.

Orientação: Fágner Dias Araruna.
Monografia (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Teoria da medida. Integral de Lebesgue. I. Araruna, Fágner Dias. II. Título.

UFPB/CCEN

TÓPICOS FUNDAMENTAIS
EM TEORIA DA MEDIDA

por

Harllen Araújo de Sena

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação de Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Fágner Dias Araruna

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna (Orientador)

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos

Miriam Silva Pereira

Prof.ª Dra. Miriam da Silva Pereira

Setembro de 2019

A meus pais.

Agradecimentos

Sou grato pelos auspícios fornecidos pela Universidade Federal da Paraíba, ao apoio e paciência dos professores em particular ao professor Fágner Dias Araruna a professora Miriam da Silva Pereira que me indicou aquele como orientando, agradeço a estes e também ao professor Joedson Silva dos Santos pelas sugestões e correções deste trabalho. Agradeço aos meus colegas, precipuamente a Edson Rafael Braga do Nascimento e Julian Alexandre de Amorim que me auxiliaram na elaboração deste trabalho, e sobretudo a minha mãe pelo apoio motivacional.

Resumo

Neste trabalho abordamos alguns dos principais conceitos em teoria da medida, iniciando com uma passagem breve no sistema numérico real estendido e algumas de suas principais propriedades. Abordamos também o conceito de sigma-álgebra, mensurabilidade de funções, seguindo com a definição generalizada de medida em sigma-álgebras e outros resultados essenciais, e finalizaremos com a decomposição, construção e produto de medidas.

Palavras-chave: Teoria da medida. Integral de Lebesgue.

Abstract

In this work we approach some of the main concepts of measure theory, beginning with a brief passage in the extended real number system and a few of its main properties. We also approach the concept of sigma-algebra, mensurability of functions following with the generalized definition of measure on sigma-algebras and others essential results, and we will finish with the decomposition, construction and product of measures.

Keywords: Measure theory. Lebesgue's Integral.

Conteúdo

Introdução

A Teoria da medida é um estudo amplo, servindo de fundamento para várias teorias matemáticas como por exemplo teoria ergódica, teoria das probabilidades, física matemática e EDP. Por exemplo quando se aborda problemas em EDP deseja-se manipular certas classes de funções que não são integráveis à Riemann, por este motivo trabalha-se com funções integráveis à Lebesgue que é uma extensão daquela classe, e a integral daquelas funções segundo Lebesgue coincidem com sua integral de Riemann, na realidade, a teoria desenvolvida por Henri Lebesgue trata-se de uma generalização da teoria criada por Bernhard Riemann. Também em um contexto moderno, trabalha-se com o espaço de Sobolev, que é definido por meio de espaços L_p, que por sua vez são abordados em teoria da medida.

Como é sabido os gregos já possuiam uma noção de medida, a saber, área, comprimento e volume todas basedas em invariâncias por isometrias (aplicações que preservam distância). Este fato era usado por exemplo no cálculo de áreas e.g. de figuras planas complexas, usando métodos ingênuos como o cálculo de áreas por exaustão e pelo procedimento de decomposição finita, que viria a ser o precursor do cálculo integral desenvolvido por Riemann. Essencialmente os gregos provaram a existência de "funções de conjuntos" possuindo aquelas invariâncias, definida em uma classe específica de conjuntos. Fundamentalmente a teoria da medida é uma generalização e formalização destes conceitos elementares.

No Capítulo 1 será apresentado o sistema númerico real estendido que trata-se de uma extensão algébrica convencional do corpo dos números reais. Serão também abordadas algumas noções topológicas e propriedades que serão utilizadas nos próximos capítulos.

Seguidamente, no Capítulo 2, definiremos um outro conceito fundamental da teoria, o de σ-álgebra. Este servirá de conjunto domínio para medidas, base para se definir a classe de funções mensuráveis e outros conceitos relacionados.

No Capítulo 3 serão mostrados os teoremas de decomposição, a saber os teoremas de decomposição de Hahn, Jordan e Lebesgue, que serão utilizados nos teoremas seguintes, a relação de medidas absolutamente contínuas e o teorema de Radon-Nikodým que forence uma relação entre duas medidas e a integral de Lebesgue. Serão também vistos a relação 'mutualmente singular' e os teoremas de representação de Riesz que fornecem representações de funcionais lineares limitados em espaços $L_p, (1 \leqslant p < \infty)$ em termos de integral de funções mensuráveis.

Quanto ao Capítulo 4, será abordado a definição de medida exterior e suas propriedades, os teoremas de extensão de Carathéodory e de Hahn, conceitos estes que permite extensões de medidas em álgebras à σ-álgebras, usado por exemplo na construção da medida Lebesguiana em espaços euclidianos $\mathbb{R}^n, (1 \leqslant n < \infty)$.

Finalmente, no Capítulo 5, será definido uma medida em um produto de espaços mensuráveis, será também exposto o teorema da classe monótona e finalizando com o teorema de Tonelli e o famoso teorema de Fubini.

Capítulo 1

Introdução à teoria

Em teoria da medida usualmente trabalha-se com funções tomando valores infinitos, estes valores serão aqui representados por $-\infty$ e $+\infty$, e serão chamados menos infinito e mais infinito respectivamente. Veremos que o conjunto $\{\pm\infty\}$ adjuntado a $\mathbb{R}$ admite uma ordem simples (ou total) e uma estrutura topológica.

1.1 O sistema númerico real estendido

Definição 1.1.1. *Se '$<$' é a ordem usual em $\mathbb{R}$, então $[a,b],(a,b),[a,b)$ e $(a,b]$ denotarão os intervalos de extremos a,b, convenciona-se $b-a$ como sendo o comprimento do intervalo.*

Definição 1.1.2. *Denominamos o conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \{\pm\infty\} \cup \mathbb{R}$ [1] de sistema númerico real estendido (ou conjunto dos números reais estendido, ou ainda reta estendida).*

Observação 1.1.1. *Sejam A e B conjuntos, denotaremos o conjunto de todas as funções definidas em A com imagens em B por B^A, vale salientar que o conjunto $\{0,1\}^A$ é também denotado por 2^A, além disso existe uma identificação entre este e o conjunto das partes (a classe de todos os subconjuntos) de A.*

Definição 1.1.3. *Dada uma família arbitrária de conjuntos $\{C_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ indexada pelo conjunto Γ, definiremos o produto cartesiano dos conjuntos C_γ como sendo o conjunto [2]*

$$\prod_{\gamma\in\Gamma} C_\gamma := \left\{ f \in \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} C_\gamma \right)^{\Gamma} : f(\gamma) \in C_\gamma \right\}, \tag{1.1.1}$$

No caso particular de $\Gamma = \{1,\ldots,n\} \subset \mathbb{N}$ e $C_i = C$, para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$ escreveremos o produto cartesiano por C^n, e quando $\Gamma = \mathbb{N}$ e $C_n = C$, para todo $n \in \mathbb{N}$ chamaremos seus elementos de sequências que serão denotadas por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente por (x_n).

Observação 1.1.2. *Os termos de uma sequência podem se repetir uma quantidade infinita enumerável de vezes. Por conveniência para deixar explícito que o contradomínio de uma sequência (x_n) é C escreveremos simplesmente $(x_n) \subseteq C$.*

[1] Estamos admitindo que $\{\pm\infty\} = \{\mp\infty\} = \{-\infty,+\infty\}$.

[2] Salientamos aqui que a não vacuidade do produto cartesisano para Γ infinito, só é garantindo admitindo-se o axioma de E. Zermelo, o axioma da escolha.

Definição 1.1.4. *Dado um conjunto C, uma relação n-ária é um subconjunto do produto cartesiano C^n, quando $n = 1$, $n = 2$ ou $n = 3$ esta relação é chamada de unária, binária ou ternária respectivamente.*

Definiremos em seguida relações no conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ que são semelhantes as operações '$+$' adição e '$\cdot$' multiplicação usuais em $\mathbb{R}$, salientamos que estas operações são puramente convencionais.

Definição 1.1.5. *A adição $\oplus$ é a relação ternária (ou triádica) em $\overline{\mathbb{R}}$ dada por:*

$$\alpha \oplus \beta := \begin{cases} \alpha + \beta, & (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \\ -\infty, & (\alpha, \beta) \in A_-; \\ +\infty, & (\alpha, \beta) \in A_+; \end{cases} \tag{1.1.2}$$

em que

$$A_- = \Big(\{-\infty\} \times \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}\Big) \cup \Big(\overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\} \times \{-\infty\}\Big) \cup \Big(\mathbb{R} \times \{-\infty\}\Big) \cup \Big(\{-\infty\} \times \mathbb{R}\Big); \tag{1.1.3}$$

$$A_+ = \Big(\{+\infty\} \times \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}\Big) \cup \Big(\overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\} \times \{+\infty\}\Big) \cup \Big(\mathbb{R} \times \{+\infty\}\Big) \cup \Big(\{+\infty\} \times \mathbb{R}\Big). \tag{1.1.4}$$

A multiplicação $\odot$ é a relação ternária em $\overline{\mathbb{R}}$ dada por:

$$\alpha \odot \beta := \begin{cases} \alpha \cdot \beta, & (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \\ 0, & (\alpha, \beta) \in M_0; \\ -\infty, & (\alpha, \beta) \in M_-; \\ +\infty, & (\alpha, \beta) \in M_+; \end{cases} \tag{1.1.5}$$

em que

$$M_0 = \{\pm\infty\} \times \{0\} \cup \{0\} \times \{\pm\infty\}; \tag{1.1.6}$$

$$M_- = \Big(\{-\infty\} \times \overline{\mathbb{R}}^*_+\Big) \cup \Big(\overline{\mathbb{R}}^*_+ \times \{-\infty\}\Big) \cup \Big(\{+\infty\} \times \overline{\mathbb{R}}^*_-\Big) \cup \Big(\overline{\mathbb{R}}^*_- \times \{+\infty\}\Big); \tag{1.1.7}$$

$$M_+ = \Big(\{+\infty\} \times \overline{\mathbb{R}}^*_+\Big) \cup \Big(\overline{\mathbb{R}}^*_+ \times \{+\infty\}\Big) \cup \Big(\{-\infty\} \times \overline{\mathbb{R}}^*_-\Big) \cup \Big(\overline{\mathbb{R}}^*_- \times \{-\infty\}\Big). \tag{1.1.8}$$

No texto que segue substituiremos $\oplus$ e $\odot$ por $+$ e $\cdot$ respectivamente. Observemos que somente a multiplicação é uma lei de composição (uma operação binária), pois $+\infty + (-\infty)$ e $-\infty + (+\infty)$ (escreve-se simplesmente $\infty - \infty$ e $-\infty + \infty$) não estão definidas, se tentarmos definir $\infty - \infty$ chegaremos a uma contradição. De fato, levando em conta a estabilidade destas "operações" $(+, \cdot)$, suas definições e propriedades, temos três possibilidades a considerar

I. Se $\infty - \infty \in \mathbb{R}$ temos que

$$-\infty = -\infty + (\infty - \infty) = (\infty - \infty) + \infty = +\infty, \tag{1.1.9}$$

pois $\pm\infty + \alpha = \alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o que contradiz o fato de $\infty \neq -\infty$;

II. Se $\infty - \infty = +\infty$, admitindo a distributividade (pois queremos que isto seja satisfeito) de '$\cdot$' com relação a '$+$' temos $0 = (1-1)\cdot\infty = +\infty$ o que contradiz o fato $+\infty \notin \mathbb{R}$;

III. Se $\infty - \infty = -\infty$, chegaremos a uma contradição análoga ao item anterior.

Considere o par $(\mathbb{R}, \leqslant)$ em que '$\leqslant$' é a ordem usual em $\mathbb{R}$, sabemos que esta ordem torna $\mathbb{R}$ um conjunto linearmente ordenado (totalmente ordenado ou simplesmente ordenado), i.e., '$\leqslant$' satisfaz as seguintes propriedades:

O.I. (*Reflexividade*)

(1.1.10) $$\forall a\,(a \leqslant a)$$

O.II. (*Anti-simetria*)

(1.1.11) $$\forall a, \forall b\,(a \leqslant b \text{ e } b \leqslant a \Longrightarrow a = b);$$

O.III. (*Transitividade*)

(1.1.12) $$\forall a, \forall b, \forall c\,(\leqslant b \text{ e } b \leqslant c \Longrightarrow a \leqslant c);$$

O.IV. (*Conexidade ou comparabilidade*)

(1.1.13) $$\forall a, \forall b\,(a \leqslant b \text{ ou } b \leqslant a),$$

em que a, b, c pertencem ao universo de discurso.

Seguidamente, defina em $\overline{\mathbb{R}}$ a ordem '$\preccurlyeq$' tal que $-\infty \preccurlyeq a \preccurlyeq +\infty$, para todo $a \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\preccurlyeq$ coincidindo com '$\leqslant$' em $\mathbb{R}$, esta ordem torna $\overline{\mathbb{R}}$ um conjunto totalmente ordenado. De fato, suponha que um dos símbolos $\pm\infty$ ocorre no antecedente da condicional dada em (1.1.11), então o consequente é verdadeiro, para ver que (1.1.12) é válida considere dois casos, um em que $b \in \{\pm\infty\}$ e outro que $b \in \mathbb{R}$ em ambos podemos inferir que o consequente será verdadeiro, finalmente para atestar a validade de (1.1.13), é suficiente observar que a disjunção é válida para o caso em que a ou b (inclusivo) são os símbolos $\pm\infty$ e observar a definição de '$\preccurlyeq$'. Daqui podemos munir $\overline{\mathbb{R}}$ com a topologia $\mathfrak{T}$ ordem, aquela cuja base é a classe $\mathfrak{B}$ constituída dos intervalos $[-\infty, a)$, $(a, b), (b, +\infty], a, b, c \in \mathbb{R}$, posteriormente observe que este espaço topológico é Hausdorff, pois trata-se de um espaço munido de uma topologia ordem, conformemente podemos falar em limites de sequências $(x_n) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ no sentido conhecido no cálculo e análise em $\mathbb{R}$.

Diremos que uma sequência $(x_n) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ converge a $x \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou o limite de (x_n) é x) e escreve-se $\lim_n x_n = x$ se, e somente se, para toda vizinhança $V \in \mathfrak{T}$ de x existe $N_V \in \mathbb{N}$ associado tal que $x_n \in V$ para todo $n \geqslant N_V$, como esta topologia dispõe de uma base podemos tomar V com sendo um elemento básico em $\mathfrak{B}$, em símbolos

(1.1.14) $$\lim_n x_n = x \Longleftrightarrow (\forall B \in \mathfrak{B}, \exists N_B \in \mathbb{N} : n \geqslant N_b \Longrightarrow x_n \in B).$$

Imediatamente notemos que toda subsequência de uma sequência convergente em um espaço topológico é convergente, e sendo $(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{T})$ um espaço Hausdorff convergirá para o mesmo limite que a sequência. Podemos estabeler uma relação entre a noção de convergência dada por (1.1.14) e a noção usual, i.e., $\lim_n x_n = x \in \mathbb{R}$ se, e somente se,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geqslant N_\varepsilon \Longrightarrow x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon). \tag{1.1.15}$$

Os únicos elementos básicos contendo $x = -\infty$ são os da forma $[-\infty, E)$, em que $E \in \mathbb{R}$, em conformidade temos a asserção

$\lim_n x_n = -\infty$, se e somente se,

$$\forall E \in \mathbb{R}, \exists N_E \in \mathbb{N} : n \geqslant N_E \Longrightarrow x_n \in [-\infty, E) \Longrightarrow x_n < E. \tag{1.1.16}$$

Homologamente temos que os únicos elementos básicos contendo $x = +\infty$ são os da forma $(E, +\infty]$, em que $E \in \mathbb{R}$, consequentemente temos a proposição

$\lim_n x_n = +\infty$, se e somente se,

$$\forall E \in \mathbb{R}, \exists N_E \in \mathbb{N} : n \geqslant N_E \Longrightarrow x_n \in (E, +\infty] \Longrightarrow x_n > E. \tag{1.1.17}$$

Doravante substituamos o símbolo $\preccurlyeq$ por $\leqslant$ e observemos que conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ munido com a ordem $\leqslant$ tem a propriedade de que todo subconjunto S tem ínfimo e supremo [3], pois se for limitado superiormente (inferiormente) terá um supremo (ínfimo) em $\mathbb{R}$, caso contrário $\sup S = +\infty$ ($\inf S = -\infty$).

Definição 1.1.6. *Dada uma sequência $(x_n) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ definimos*

$$\liminf x_n := \sup_n \inf_{k \geqslant n} x_n, \ \limsup x_n := \inf_n \sup_{k \geqslant n} x_n. \tag{1.1.18}$$

Seguidamente façamos $b_n = \sup\{x_k \in \overline{\mathbb{R}} : k \geqslant n\}$, das definições de supremo podemos inferir que a sequência (b_n) é monótona não-crescente, i.e., $b_n \geqslant b_{n+1}$.

Lema 1.1.1. *Toda sequência (x_n) monótona não-decrescente (não-crescente) em $\overline{\mathbb{R}}$, é convergente.*

Prova. Seja (x_n) uma sequência monótona não-decrescente, o caso em que (x_n) é constante para n suficientemente grande é trivial, portanto podemos considerar uma sub-sequência de (x_n) monótona estritamente crescente, se (x_n) for limitada superiormente segue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \mathbb{R}$ para $n \geqslant N$, como a topologia subespaço em $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ coincide com a topologia usual, pois $\mathbb{R}$ é convexo e a ordem $\leqslant$ induzida em $\mathbb{R}$ é a mesma que a usual, decorre que $\lim_n x_n = \sup_n x_n \in \mathbb{R}$, caso (x_n) não seja limitada prova-se com o auxílio de (1.1.17) que $\lim_n = \sup_n x_n = +\infty$, de modo análogo prova-se para o caso em que (x_n) é não-crescente. $\square$

Observação 1.1.3. *Em geral se (x_n) é monótona não-decrescente (não-crescente) tem-se*

$$\lim_n x_n = \sup_n x_n \ (\lim_n x_n = \inf_n x_n), \tag{1.1.19}$$

como consequência temos que $\lim_n b_n = \inf_n b_n = \limsup x_n$, de maneira semelhante $\lim_n a_n = \liminf x_n$, onde $a_n = \inf_{k \geqslant n} x_n$.

[3]Um conjunto simplesmente ordenado em que todo subconjunto possui ínfimo e supremo é chamado de reticulado completo.

Lema 1.1.2. *Se X é um espaço topológico munido com a topologia ordem induzida pela ordem total '$\leqslant$', (x_n) e (y_n) duas sequências convergentes tais que $x_n \leqslant y_n$ para n suficentemente grande, então $x = \lim_n x_n \leqslant \lim_n y_n = y$.*

Prova. Suponha por redução ao absurdo que $y < x$, se existir $z \in X$ tal que $y < z < x$ considere as vizinhanças $V_x = \{w \in X : w > z\}$, $V_y = \{w \in X : w < z\}$ de x e y repectivamente, caso contrário faça $V_x = \{w \in X : w > y\}$, $V_y = \{w \in X : w < x\}$. Seguidamente notemos que estas são disjuntas além do mais existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n, y_n) \in V_x \times V_y$ para todo $n \geqslant N$, consequentemente $x_n > y_n$ para todo $n \geqslant N$, o que contradiz as premisas. □

Lema 1.1.3. *$\beta = \limsup x_n$ é um limite subsequencial de x_n.*

Prova. Fazendo $b_n = \sup\{x_k \in \overline{\mathbb{R}} : k \geqslant n\}$ devemos considerar os três casos:

i. Se $\beta = -\infty$, então $b_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ou existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $b_N = -\infty$, no primeiro caso tome (x_{k_n}) monótona satisfazendo $x_{k_n} \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, do lema anterior temos $\beta = \lim_n x_{k_n}$, no segundo caso $x_n = -\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N$, a existência da subsequência é evidente;

ii. Se $\beta = +\infty$, então $b_n = +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo a existência da subsequência é imediata;

iii. Se $\beta \in \mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ considere (x_{k_n}) satisfazendo $\beta < x_{k_n} \leqslant b_n < \beta + 1/(n+1)$ note que podemos adimitir que $b_n > \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois caso contrário (b_n) seria constante e a existência seria imediata, voltando a penúltima desigualdade podemos concluir que $\lim_n x_{k_n} = \beta$.

□

Observação 1.1.4. *O número real estendido β dado anteriormente é o maior com aquela propriedade, ou seja, dada outro $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que existe uma subsequência (x_{k_n}) com $\lim_n x_{k_n} = \gamma$, temos que $\gamma \leqslant \beta$. De fato, em virtude da convergência de (b_n) e da desigualdade $x_{k_n} \leqslant b_{k_n}$ temos que $\gamma = \lim_n x_{k_n} \leqslant \lim_n b_{k_n} = \beta$.*

No caso em que $\beta = \liminf x_n$, o lema 1.1.3 e a observação anterior podem ser provados imitando as provas anteriores, trata-se de um resultado dual.

Corolário 1.1.1. *Seja $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ o conjunto de todos os limites subsequenciais de uma sequência (x_n). Então*

$$\liminf x_n := \sup_n \inf_{k \geqslant n} x_n = \inf E, \ \limsup x_n := \inf_n \sup_{k \geqslant n} x_n = \sup E. \tag{1.1.20}$$

Corolário 1.1.2. *Se a sequência $(x_n) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é convergente, então*

$$\liminf x_n = \lim_n x_n = \limsup x_n. \tag{1.1.21}$$

Lema 1.1.4. *Se (x_n), $(y_n) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ são convergentes, então*

$$\lim_n x_n + \lim_n y_n = \lim_n (x_n + y_n), \tag{1.1.22}$$

admitindo que faça sentido o membro esquerdo da última igualdade.

Prova. Basta considerar os casos

$$(\lim_n x_n, \lim_n y_n) \in \{+\infty\} \times \Big(\overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}\Big); \tag{1.1.23}$$

$$(\lim_n x_n, \lim_n y_n) \in \{-\infty\} \times \Big(\overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}\Big). \tag{1.1.24}$$

Demonstraremos o primeiro caso, o segundo segue de forma análoga. Como $\lim_n y_n = \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$, em virtude de $\lim_n y_n > -\infty$, podemos determinar $\gamma_\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \in (\gamma_\alpha, +\infty] \in \mathfrak{B}$, da definição existe $N_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in (\gamma_\alpha, +\infty]$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N_\alpha$. Posteriormente dado qualquer $E \in \mathbb{R}$, existe $N_E \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (E - \gamma_\alpha, +\infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N_E$, tomando $N = \max\{N_\alpha, N_E\}$ temos que $x_n + y_n \in (E, +\infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N$, o que prova $\lim_n(x_n + y_n) = +\infty$. □

Corolário 1.1.3. *Se* $(x_n), (y_n) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, *então*

$$\limsup(x_n + y_n) \leqslant \limsup x_n + \limsup y_n. \tag{1.1.25}$$

Prova. É suficiente considerar as sequências monótonas (a_n), (b_n) e (c_n) em $\overline{\mathbb{R}}$ dadas respectivamente por

$$a_n = \sup_{k \geqslant n} x_k, \;\; b_n = \sup_{k \geqslant n} y_k, \;\; c_n = \sup_{k \geqslant n}(x_k + y_k), \tag{1.1.26}$$

a desigualdade

$$c_n = \sup_{k \geqslant n}(x_k + y_k) \leqslant \sup_{k \geqslant n} x_k + \sup_{k \geqslant n} y_k = a_n + b_n, \tag{1.1.27}$$

aplicar a observação 1.1.3 e os lemas 1.1.2 e 1.1.4. □

Observação 1.1.5. *Usando a asserção*

$$\big(\forall (x_n) \subseteq \overline{\mathbb{R}}\big) \left(\limsup(-x_n) = \inf_n \sup_{k \geqslant n}(-x_n) = -\sup_n \inf_{k \geqslant n} x_n = -\liminf x_n\right), \tag{1.1.28}$$

e a compatibilidade da ordem '$\leqslant$' com respeito ao produto podemos concluir também que

$$\liminf x_n + \liminf y_n \leqslant \liminf(x_n + y_n). \tag{1.1.29}$$

Capítulo 2

Funções mensuráveis e medidas

Para introduzir o conceito de função mensurável é necessário definir outro conceito, o de σ-álgebra (ou σ-campo) sobre um conjunto X. Em seguida veremos algumas propriedades de funções mensuráveis e finalizaremos com o conceito de medida e suas propriedades.

2.1 O conceito de σ-álgebra

Definição 2.1.1. *Uma família $\boldsymbol{X}$ de subconjuntos de um conjunto X é uma σ-álgebra se satisfizer as seguintes propriedades*

I. $\emptyset, X \in \boldsymbol{X}$;

II. $X \setminus A \in \boldsymbol{X}, \forall A \in \boldsymbol{X}$;

III. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \forall \, (A_n) \subset \boldsymbol{X}$.

Um par ordenado $(X, \boldsymbol{X})$, constituído de um conjunto e uma σ-álgebra associada, é chamado de espaço mensurável. Qualquer um de seus membros é chamado de um conjunto $\boldsymbol{X}$-mensurável, quando não houver risco de ambiguidade este será chamado simplesmente de mensurável. Dada uma sequência $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{X}$ decorre das leis de De Morgan

$$X \setminus \left(\bigcup_{\xi \in \Xi} C_\xi \right) = \bigcap_{\xi \in \Xi} (X \setminus C_\xi), \qquad X \setminus \left(\bigcap_{\xi \in \Xi} C_\xi \right) = \bigcup_{\xi \in \Xi} (X \setminus C_\xi), \tag{2.1.1}$$

que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \boldsymbol{X}$, pois

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Big(X \setminus (X \setminus C_n) \Big) = X \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus C_n) \right) \in \boldsymbol{X}, \tag{2.1.2}$$

porque segundo II temos que $X \setminus C_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de III vem que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus C_n) \in \boldsymbol{X}$ e finalmente de II decorre a inclusão dada na última equação.

A propósito, existem outras classes de conjuntos que também desempenham papéis importantes em teoria da medida e podem servir de ponto de partida da teoria [1].

[1]Por exemplo no livro *Measure Theory* do autor Paul R. Halmos, a teoria é construída usando o conceito de anel de conjuntos.

Exemplos 2.1.1. *a) O conjunto* $\{\emptyset, X\} \subseteq 2^X$ *é uma* σ*-álgebra;*

b) Dado um um conjunto arbitrário X *o conjunto das partes* 2^X *é uma* σ*-álgebra;*

c) Seja X *um conjunto arbitrário e* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma partição de* X *contendo* $\emptyset$*. Então a coleção de todas uniões de elementos da partição é uma* σ*-álgebra de subconjuntos de* X*.*

2.2 Mensurabilidade de uma função

Definição 2.2.1. *Uma função* $f \in \mathbb{R}^X$ *é* $\boldsymbol{X}$*-mensurável ou simplesmente, mensurável quando não houver ambiguidade, se* $\{f > \alpha\} := \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \boldsymbol{X}$*, para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$*, os outros casos* $\{f \geqslant \beta\}, \{f \leqslant \beta\}, \{f < \beta\}$ *e* $\{f = \beta\}$ *(quando* $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$*) são definidos de maneira análoga.*

Lema 2.2.1. *Considere os conjuntos* $\{f \geqslant \alpha\}, \{f > \alpha\}, \{f \leqslant \alpha\}$ *e* $\{f < \alpha\}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ *definidos anteriormente, se um deles pertence a* $\boldsymbol{X}$*, então os outros também pertencerão.*

Prova. Inicialmente observemos que $\{f \geqslant \alpha\} = X \setminus \{f < \alpha\}$ e $\{f \leqslant \alpha\} = X \setminus \{f > \alpha\}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, decorre da estabilidade da σ-álgebra $\boldsymbol{X}$ com respeito a operação de complementação de conjuntos que

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\{f \geqslant \alpha\} \in \boldsymbol{X} \iff \{f < \alpha\} \in \boldsymbol{X})\,; \tag{2.2.1}$$

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\{f \leqslant \alpha\} \in \boldsymbol{X} \iff \{f > \alpha\} \in \boldsymbol{X})\,. \tag{2.2.2}$$

Seguidamente suponhamos que $\{f < \alpha\} \in \boldsymbol{X}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, decorre daí que dado $\beta \in \mathbb{R}$ arbitrário temos $\{f < \beta + 1/n\} \in \boldsymbol{X}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, consequentemente $I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f < \beta + 1/n\} \in \boldsymbol{X}$, resta-nos mostrar que $I = \{f \leqslant \beta\}$.

De fato,

$$\begin{aligned} x \in I &\iff x \in \{f < \beta + 1/n\}, \forall n \in \mathbb{N} \iff f(x) < \beta + 1/n, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\iff f(x) \leqslant \beta \iff x \in \{f \leqslant \beta\}, \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

logo

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\{f < \alpha\} \in \boldsymbol{X} \implies \{f \leqslant \alpha\} \in \boldsymbol{X})\,, \tag{2.2.4}$$

Posteriormente admitamos que $\{f \leqslant \alpha\} \in \boldsymbol{X}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, raciocinando de maneira homóloga dado $\beta \in \mathbb{R}$ arbitrário mostremos que $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f \leqslant \beta - 1/n\} = \{f < \beta\}$.

Conformemente,

$$\begin{aligned} x \in U &\iff \exists n \in \mathbb{N} : x \in \{f \leqslant \beta - 1/n\} \iff \exists n \in \mathbb{N} : f(x) \leqslant \beta - 1/n \\ &\iff f(x) < \beta \iff x \in \{f < \beta\}, \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

portanto

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\{f \leqslant \alpha\} \in \boldsymbol{X} \implies \{f < \alpha\} \in \boldsymbol{X})\,, \tag{2.2.6}$$

em suma

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\{f \leqslant \alpha\} \in \boldsymbol{X} \iff \{f < \alpha\} \in \boldsymbol{X})\,, \tag{2.2.7}$$

o que finaliza a prova. $\square$

Definição 2.2.2. *Se C é um subconjunto qualquer de um conjunto X, então a função característica $\chi_C \in \{0,1\}^X$ de C é definida por*

$$\chi_C(x) := \begin{cases} 1 & ,\text{se}\, x \in C; \\ 0 & ,\text{se}\, x \notin C. \end{cases} \tag{2.2.8}$$

Definição 2.2.3. *Uma função simples φ em $\overline{\mathbb{R}}^X$, é uma função que admite uma quantidade finita de valores, digamos $\{a_i\}_{i\in I} \subset \overline{\mathbb{R}}$, ($I$ finito) e sua representação padrão (ou canônica) é dada por $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i\chi_{\varphi^{-1}(a_i)}$, $c_i \in \mathbb{R}$, para todo $i \in I$.*

Observação 2.2.1. *Uma função simples φ admite várias representações embora a representação $\sum_{i\in I} a_i\chi_{A_i}$, ($I$ finito) em que todos os coeficientes $\{a_i\}_{i\in I}$ são distintos é única. De fato, dada qualquer outra representação $\tilde{\varphi} = \sum_{i\in I} a_i\chi_{B_i}$ (devem figurar o mesmo cardinal $|I|$ de parcelas se desejarmos que esta representação satisfaça as condições iniciais), podemos então inferir que $A_i = B_i$, para todo $i \in I$, pois*

$$x \in A_i \Longleftrightarrow \chi_{A_i}(x) = 1 \Longleftrightarrow \varphi(x) = a_i = \tilde{\varphi}(x) \Longleftrightarrow \chi_{B_i}(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in B_i \tag{2.2.9}$$

Visto que $\sum_{i=1}^n c_i\chi_{\varphi^{-1}(a_i)}$ é uma representação satisfazendo as condições anteriores, ela será única.

Lema 2.2.2. *Seja $(X, \boldsymbol{X})$ um espaço mensurável. Então $C \in \boldsymbol{X}$ se, e somente se, χ_C é $\boldsymbol{X}$-mensurável.*

Prova. Inicialmente observe que $\{\chi_C > \alpha\} \in \{\emptyset, C, X\} \subseteq \boldsymbol{X}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, se χ_C é $\boldsymbol{X}$-mensurável então $C = \{\chi_C > 0\} \in \boldsymbol{X}$. □

Observação 2.2.2. *Um resultado imediato deste lema é que funções constantes são mensuráveis.*

Lema 2.2.3. *Sejam f e g funções reais mensuráveis e seja $c \in \mathbb{R}$. Então as funções*

$$cf,\ f^2,\ f+g,\ fg,\ |f|, \tag{2.2.10}$$

também o são.

Prova:

I. Se $c = 0$, então $cf \equiv 0$, i.e., cf é constante por conseguinte mensurável. Caso contrário, segue da mensurabilidade de f em X que $\{cf > \alpha\} = \{f > \alpha/c\} \in \boldsymbol{X}$.

II. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, se $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$ segue que $\{f^2 > \alpha\} = X \in \boldsymbol{X}$, caso $\alpha \in \mathbb{R}^+$ temos que $(f(x))^2 > \alpha$ se, e somente se, $|f(x)| > \alpha$, i.e., $f(x) < -\alpha$ ou $f(x) > \alpha$, portanto $\{f^2 > \alpha\} = \{f < -\alpha\} \cup \{f > \alpha\}$ é uma reunião de conjuntos mensuráveis portanto é mensurável.

III. Mostremos que o conjunto $\{f + g < \alpha\}$ é $\boldsymbol{X}$-mensurável para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Para tal consideremos o conjunto $S_r = \{f > \alpha - r\} \cap \{f > r\} \in \boldsymbol{X}$, em seguida mostremos que $\{f + g < \alpha\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} S_r = U$ que é uma união enumerável, pois $\mathbb{Q}$ o é. Seja $x \in \{f + g < \alpha\}$ segue que $f(x) + g(x) > \alpha$, o que acarreta $g(x) > \alpha - f(x)$, da densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ segue que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $g(x) > r > \alpha - f(x)$, daí vem que $f(x) > \alpha - r$ e $g(x) > r$ por conseguinte $x \in S_r$. Por outro lado seja $x \in U$, tem-se que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x \in S_r$ donde diretamente obtem-se $(f + g)(x) = f(x) + g(x) > \alpha$, portanto podemos inferir que $x \in \{f + g < \alpha\}$, consequentemente $\{f + g < \alpha\} = U \in \boldsymbol{X}$.

IV. Basta notar que $fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$, e usar os itens anteriores.

V. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $\{|f| > \alpha\} = \{f < -\alpha\} \cup \{\alpha < f\} \in \boldsymbol{X}$.

$\square$

Definição 2.2.4. *Se $f \in \mathbb{R}^X$, então a parte negativa e positiva de f são definidas respectivamente por*

$$f^- := \max\{-f, 0\}, \qquad f^+ := \max\{f, 0\}. \tag{2.2.11}$$

Observação 2.2.3. *Segue diretamente desta definição que*

$$f = f^+ - f^- \qquad \text{e} \qquad |f| = f^+ + f^-, \tag{2.2.12}$$

que por sua vez implicam em

$$f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \qquad \text{e} \qquad f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), \tag{2.2.13}$$

decorre do lema 2.2.3 que f^- e f^+ são mensuráveis.

Definição 2.2.5. *Uma função $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ (função real estendida) é dita $\boldsymbol{X}$-mensurável, se $\{f > \alpha\} \in \boldsymbol{X}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Definição 2.2.6. *Dado um espaço mensurável $(X, \boldsymbol{X})$, denotaremos doravante a classe de funções reais estendidas $\boldsymbol{X}$-mensuráveis por $M(X, \boldsymbol{X})$. Note que esta classe contém uma representação da classe de funções reais $\boldsymbol{X}$-mensuráveis.*

Lema 2.2.4. *Uma função $f \in \overline{\mathbb{R}}^X \in M(X, \boldsymbol{X})$ se, e somente se, $A = \{f = -\infty\}$, $B = \{f = +\infty\} \in \boldsymbol{X}$ e a função $g \in \mathbb{R}^X$ definida por*

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & , x \notin A \cup B; \\ 0 & , x \in A \cup B \end{cases} \tag{2.2.14}$$

é mensurável.

Prova. Suponha que $f \in M(X, \boldsymbol{X})$, claramente $A, B \in \boldsymbol{X}$ e $g = \chi_{X \setminus (A \cup B)} \cdot f \in M(X, \boldsymbol{X})$, pois é um produto de funções mensuráveis. Reciprocamente suponhamos que $g \in M(X, \boldsymbol{X})$ e $A, B \in \boldsymbol{X}$, é suficiente notar que

$$\{f > \alpha\} = \begin{cases} \{g > \alpha\} \cup B \in \boldsymbol{X} & , \text{se } \alpha \in [0 + \infty); \\ \{g > \alpha\} \setminus A \in \boldsymbol{X} & , \text{se } \alpha \in (-\infty, 0). \end{cases} \tag{2.2.15}$$

$\square$

Lema 2.2.5. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M(X, \boldsymbol{X})$ e defina as funções*

$$f(x) := \inf f_n(x),\ F(x) := \sup f_n(x);$$
$$f^*(x) := \liminf f_n(x),\ F^*(x) := \limsup f_n(x).$$

Então $f, F, f^*, F^* \in M(X, \boldsymbol{X})$.

Prova. É suficiente notar que
(2.2.16)
$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \left(\{f \geqslant \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \geqslant \alpha\} \in \boldsymbol{X} \quad \text{e} \quad \{f \leqslant \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \leqslant \alpha\} \in \boldsymbol{X} \right).$$

Em virtude dos resultados anteriores e das identidades

$$f^* = \liminf f_n = \sup_n \inf_{k\geqslant n} f_k, \;\; F^* := \limsup f_n(x) = \inf_n \sup_{k\geqslant n} f_k, \tag{2.2.17}$$

podemos concluir que $f^*, F^* \in M(X, \boldsymbol{X})$. □

Corolário 2.2.1. *Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M(X, \boldsymbol{X})$ converge pontualmente para f em X, então $f \in M(X, \boldsymbol{X})$,*

Demonstração. Em vitude da convergência tem-se $\lim_n f_n = \limsup f_n$, como $f = \lim_n f_n$ decorre dai que $f \in M(X, \boldsymbol{X})$. □

Lema 2.2.6. *Se f é uma função não-negativa em $M(X, \boldsymbol{X})$, então existe uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M(X, \boldsymbol{X})$ tal que*

(*a*) $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x), \forall\, (x, n) \in X \times \mathbb{N}$;

(*b*) $f(x) = \lim \varphi_n(x), \forall x \in X$;

(*c*) φ_n *é uma função simples, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Prova. Inicialmente observemos que dado $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $\overline{\mathbb{R}}_+$ pode ser escrito como [2]

$$\overline{\mathbb{R}}_+ := [0, +\infty] = \bigsqcup_{k=0}^{n2^n-1} [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}) \sqcup [n, +\infty]. \tag{2.2.18}$$

Essencialmente para cada $n \in \mathbb{N}$ estamos dividindo o intervalo $[0, n)$ em $n2^n$ intervalos consecutivos e disjuntos, e adjuntando à união destes o intervalo $[n, +\infty]$ obteremos $\overline{\mathbb{R}}_+$, seguidamente definamos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$E_{k,n} := \begin{cases} \{k2^{-n} \leqslant f < (k+1)2^{-n}\}, & k \in \{0, \ldots, n2^n - 1\}; \\ \{f \geqslant n\}, & k = n2^n, \end{cases} \tag{2.2.19}$$

em seguida observemos que $f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_+) = X$, pois f é não-negativa real estendida, em consequência

$$X = f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_+) = \bigsqcup_{k=0}^{n2^n} f^{-1}(E_{k,n}), \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.2.20}$$

imediatamente definamos

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n} \left(k2^{-n} \chi_{E_{k,n}}(x) \right), \tag{2.2.21}$$

[2]Os símbolos '$\sqcup$' e '$\bigsqcup$' denotam uniões disjuntas.

seguidamente observemos

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{(n+1)2^{n+1}} \Big(k2^{-(n+1)}\chi_{E_{k,n+1}}(x)\Big)}_{(2.2.24)} = \overbrace{\sum_{k=0}^{n2^{n+1}-1} \Big(k2^{-(n+1)}\chi_{E_{k,n+1}}(x)\Big)}^{(2.2.23)} + \sum_{n2^{n+1}}^{(n+1)2^{n+1}} \Big(k2^{-(n+1)}\chi_{E_{k,n+1}}(x)\Big), \tag{2.2.22}$$

posteriormente notemos que dado $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $\{0, 1, \ldots, n2^{(n+1)} - 1\}$ possui $n2^n$ índices pares e ímpares, podemos então escrever a somatória indicada pela 'chave superior' na equação (2.2.22) por

$$\sum_{k=0}^{n2^n-1} \Big(2k2^{-(n+1)}\chi_{E_{2k,n+1}}(x)\Big) + \sum_{k=0}^{n2^n-1} \Big((2k+1)2^{-(n+1)}\chi_{E_{2k+1,n+1}}(x)\Big), \tag{2.2.23}$$

daí podemos escrever a somatória indicada pela 'chave inferior' na equação (2.2.22) por

$$\sum_{k=0}^{n2^n-1} \Big(2k2^{-(n+1)}\chi_{E_{2k,n+1}}(x) + (2k+1)2^{-(n+1)}\chi_{E_{2k+1,n+1}}(x)\Big) + \sum_{n2^{n+1}}^{(n+1)2^{n+1}} \Big(k2^{-(n+1)}\chi_{E_{k,n+1}}(x)\Big) \tag{2.2.24}$$

e observemos também que

$$\chi_{E_{k,n}}(x) = \chi_{E_{2k,n+1}}(x) + \chi_{E_{2k+1,n+1}}(x), \quad \forall k \in \{1, \ldots, n2^n - 1\}. \tag{2.2.25}$$

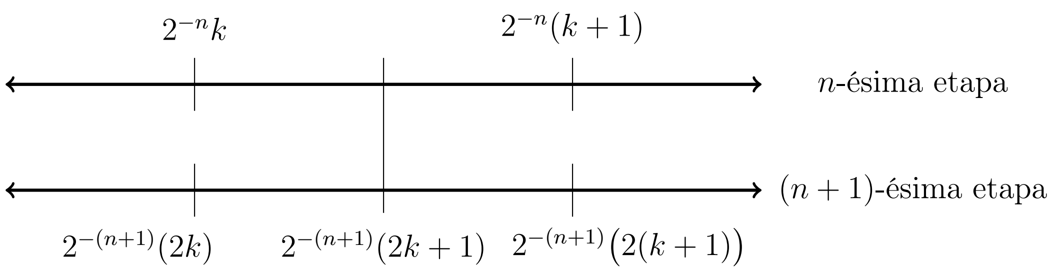

Figura 2.1: Representação diagramática das subdivisões de $\mathbb{R}_+$.

Daí temos que $E_{k,n} = E_{2k,n+1} \sqcup E_{2k+1,n+1}$ (vide definição de $E_{k,n}$ (2.2.19)), o que justifica a igualdade dada em (2.2.25).

Dos resultados anteriores decorre que

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) &= \sum_{k=0}^{n2^n-1}\left(k2^{-n}\left(\chi_{E_{2k,n+1}}(x)+\chi_{E_{2k+1,n+1}}(x)\right)\right)+n\chi_{E_{n2^n,n}}(x)\\
&= \sum_{k=0}^{n2^n-1}\left(k2^{-n}\left(\chi_{E_{2k,n+1}}(x)+\chi_{E_{2k+1,n+1}}(x)\right)\right)\\
&\qquad\qquad + n\left(\chi_{E_{n(2^{n+1}),n+1}}(x)+\chi_{E_{n(2^{n+1})+1,n+1}}(x)\right)\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n2^n-1}\left(2k2^{-(n+1)}\chi_{E_{2k,n+1}}(x)+(2k+1)2^{-(n+1)}\chi_{E_{2k+1,n+1}}(x)\right) \qquad (2.2.26)\\
&\qquad\qquad + n\chi_{E_{n(2^{n+1}),n+1}}(x)+(n+1)\chi_{E_{n(2^{n+1})+1,n+1}}(x)\\
&\qquad\qquad + \sum_{n2^{n+1}+2}^{(n+1)2^{n+1}}\left(k2^{-(n+1)}\chi_{E_{k,n+1}}(x)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{(n+1)2^{n+1}}\left(k2^{-(n+1)}\chi_{E_{k,n+1}}(x)\right)=\varphi_{n+1}(x) \qquad (x\in X),
\end{aligned}$$

consequentemente (φ_n) é uma sequência monótona não-descrescente de funções simples, conformemente os itens (a) e (b) são satisfeitos. Posteriormente seja $x \in \{f < +\infty\}$ note que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um único inteiro $k_n = \lfloor 2^n f(x) \rfloor$ que satisfaz $\varphi_n(x) = k_n 2^{-n} \leqslant f(x) < (k_n+1)2^{-n} = \varphi_n(x)+2^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, consequentemente $\lim_n \varphi_n(x) = f(x)$ (convergência uniforme), e finalmente se $x \in \{f = +\infty\}$, segue que $\varphi_n(x) = (n2^n)2^{-n} = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por conseguinte $\lim_n \varphi_n(x) = +\infty$, o que prova o item (b) e finaliza a prova. □

2.3 Funções entre espaços mensuráveis

Definição 2.3.1. *Uma função $f : X \longrightarrow Y$ entre os espaços mensuráveis $(X, \boldsymbol{X})$ e $(Y, \boldsymbol{Y})$ é dita ser $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$-mensurável se, e somente se, $f^{-1}(S) \in \boldsymbol{X}$, para todo $S \in \boldsymbol{Y}$.*

Lema 2.3.1. *Sejam $f \in Y^X$ e $\mathcal{A}$ uma ágebra de subconjuntos de X. Então a classe $f^{-1}(\mathcal{A}) := \{f^{-1}(A) \in X : A \in \mathcal{A}\}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X.*

Prova. Como $\emptyset, Y \in \mathcal{A}$ segue que $\emptyset = f^{-1}(\emptyset), X = f^{-1}(Y) \in f^{-1}(\mathcal{A})$, sejam $A, B \in f^{-1}(\mathcal{A})$ logo $f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(A \setminus B) \in f^{-1}(\mathcal{A})$, pois $A \setminus B \in \mathcal{A}$, como a imagem inversa é compatível com uniões arbitrárias, em particular será com uniões enumeráveis, em consequeência $f^{-1}(\mathcal{A})$ é uma σ-álgebra. □

Lema 2.3.2. *Sejam $f \in Y^X$ e X munido de uma σ-álgebra $\mathcal{B}$. Então a coleção $\mathcal{C} = \{A \in 2^Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}\}$ é uma álgebra de subconjuntos de Y.*

Prova. Evidentemente $\emptyset = f^{-1}(\emptyset), X = f^{-1}(Y) \in \mathcal{B}$, logo $\emptyset, Y \in \mathcal{C}$, de forma análoga ao lema anterior podemos provar a estabilidade com respeito a operação de complementação de conjuntos, e reuniões enumeráveis. □

Definição 2.3.2. *Seja X um conjunto e $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ definiremos a σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}$ como sendo a menor σ-álgebra contendo $\mathcal{F}$ e é denotada por uma classe $\sigma(\mathcal{F})$. A álgebra gerada por $\mathcal{F}$ define-se de maneira análoga. Demonstra-se que a σ-álgebra gerada por um conjunto conincide com a interseção de todas as álgebras contendo a classe prescrita $\mathcal{F}$.*

Lema 2.3.3. *Se $f \in Y^X$ e $\mathcal{F} \subseteq 2^X$, então $\sigma(f^{-1}(\mathcal{F})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$.*

Prova. Uma das inclusões é trivial, pois $f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$ e conforme os lemas anteriores esta última é uma σ-álgebra de subconjuntos de X, daí vem $\sigma(f^{-1}(\mathcal{F})) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$. Para ver a outra inclusão faça $\mathcal{B} = \{A \in 2^X : f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{F}))\}$, imediatamente observe que $f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{F}))$, logo $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, consequentemente $f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{B})$ e por definição $f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{F}))$ daí vem que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{F}))$. $\square$

Lema 2.3.4. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq 2^X$. Se $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$, então $\sigma(\mathcal{B}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$.*

Prova. $\sigma(\mathcal{B})$ é a menor σ-álgebra contendo $\mathcal{B}$, em virtude de $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$, decorre imediatamente que $\sigma(\mathcal{B}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$. $\square$

Lema 2.3.5. *Se X é um conjunto e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq 2^X$, são tais que todo elemento de $\mathcal{B}$ pode ser escrito como uma união enumerável de elementos de $\mathcal{A}$, então $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{B})$.*

Prova. Decorre do lema anterior a inclusão $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{B})$, para ver a outra inclusão note que dado $B \in \mathcal{B}$ este é escrito como uma reunião enumerável de elementos de $\mathcal{A}$, logo $B \in \sigma(\mathcal{A})$, pois este último é uma σ-álgebra do lema anterior segue que $\sigma(\mathcal{B}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$, o que acarreta a igualdade $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{B})$. $\square$

Definição 2.3.3. *Denotaremos a σ-álgebra gerada pelos abertos de $\mathbb{R}$ por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ esta é chamada de σ-álgebra Borel.*

Observação 2.3.1. *A σ-álgebra Borel é gerada pelas classes*

I. *classe de intervalos da forma (r, s);*

II. *classe de intervalos da forma $[r, s)$;*

III. *classe de intervalos da forma $(r, s]$;*

IV. *classe de intervalos da forma $[r, s]$;*

V. *classe de intervalos da forma $(-\infty, r)$;*

VI. *classe de intervalos da forma $(r, +\infty)$;*

VII. *classe de intervalos da forma $[r, +\infty)$;*

VIII. *classe de intervalos da forma $(-\infty, r]$;*

em que $r, s \in \mathbb{Q}$.

Prova. Dada qualquer classe é sempre possível escrever os intervalos de outra em termos de uniões enumeráveis e de intersecção e complementação finitas de conjuntos da classe prescrita. Logo é suficiente verificar que a primeira gera $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, que é um resultado elementar de topologia, a classe dada por I constitui uma base enumerável para a topologia usual em $\mathbb{R}$, cf. a referência [4]. $\square$

Proposição 2.3.1. *Seja $f \in \mathbb{R}^X$. Então f é $\boldsymbol{X}$-mensurável se, e somente se, f é $(\boldsymbol{X}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mensurável.*

Prova. Evidentemente se f é $(\boldsymbol{X}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mensurável será $\boldsymbol{X}$-mensurável. Reciprocamente, se f é $\boldsymbol{X}$-mensurável então $f^{-1}(\mathcal{R}) \subseteq \boldsymbol{X}$ sendo $\mathcal{R} \in 2^{\mathbb{R}}$ o conjunto dos raios abertos e fechados de $\mathbb{R}$, é suficiente notar que $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e $f^{-1}(\sigma(\mathcal{R})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{R})) \subseteq \boldsymbol{X}$. □

2.4 O conceito de medida

Definição 2.4.1. *Uma medida é uma função em $\overline{\mathbb{R}}$ definida em uma σ-álgebra $\boldsymbol{X}$ de subconjuntos de um conjunto X, satisfazendo as seguintes propriedades:*

I. $\mu(\emptyset) = 0$;

II. $\mu(S) \geqslant 0, \forall S \in \boldsymbol{X}$;

III. $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$, *para toda sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituída de termos mutualmente disjuntos.*

Exemplos 2.4.1. *a) Dado um espaço de medida $(X, \boldsymbol{X})$ a função $\mu \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{X}}$ identicamente nula $\mu \equiv 0$ é uma medida;*

b) Sejam $(X, \boldsymbol{X})$ um espaço de medida e $x \in X$ a função $\delta_x \in \{0,1\}^{\boldsymbol{X}}$ dada por $\delta_x(E) = \chi_E(x)$ é uma medida, é comumente conhecida como medida de Dirac [3];

c) Sejam $X = \mathbb{N}$ e $\boldsymbol{X} = 2^{\mathbb{N}}$, a função contagem $\mu \in \left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)^{\boldsymbol{X}}$ onde $\mu(E)$ é o número de elementos de E se E é finito e $\mu(E) = +\infty$ caso contrário, é uma medida;

d) Sejam $X = \mathbb{N}$, $\boldsymbol{X} = 2^{\mathbb{N}}$ e $\sum_n a_n$ uma série convergente de termos positivos, a função $\mu \in \left(\mathbb{R}_+\right)^{\boldsymbol{X}}$ dada por $\mu(E) = \sum_{n\in E} a_n$, é uma medida.

2.5 Propriedades de medida

Lema 2.5.1. *Seja μ uma medida definida em uma σ-álgebra $\boldsymbol{X}$. Se $A, B \in \boldsymbol{X}$ e $A \subseteq B$, então $\mu(A) \leqslant \mu(B)$. Além disso, se $\mu(A) < +\infty$, então $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

Prova. É suficiente observar que $B = (B \setminus A) \sqcup A$ e usar a aditividade de μ, em consequência temos $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$, daí segue que se $\mu(A) < \infty$ então $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$. □

Lema 2.5.2. *Seja (A_n) uma sequência de subconjuntos de um conjunto X. Seja $E_0 = \emptyset$ e*

$$E_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad F_n := A_n \setminus E_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.5.1}$$

[3]Paul Adrien Maurice Dirac (8 de Agosto de 1902 – 20 de Outubro de 1984), foi um físico téorico inglês que realizou contribuições fundamentais para mecânica quântica e eletrodinâmica quântica.

Então (E_n) é uma sequência monótona crescente e (F_n) é uma sequência de termos mutualmente exclusivos tais que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{2.5.2}$$

Prova. Para ver que a sequência $(E_n) \subseteq 2^X$ dada por $E_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ é crescente é suficiente notar a inclusão

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k = E_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.5.3}$$

que é imediata do axioma de subconjuntos. Posteriormente provemos que a sequência $(F_n) \subseteq 2^X$ dada por $F_n = A_n \setminus E_{n-1}$ é uma sequência de termos mutualmente exclusivos, para tal consideremos dois números naturais distintos m e n, sem perda de generalidade podemos supor que $m < n$, conformemente:

$$F_m = A_m \setminus E_{m-1} \subseteq A_m \overset{(1)}{\subseteq} (X \setminus A_n) \cup E_{n-1} = X \setminus F_n \tag{2.5.4}$$

(1) Em decorrência de $A_m \subseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k = E_{n-1}$, pois $m \leqslant n-1$.

Consequentemente $F_n \cap F_m = \emptyset$. Finalmente para ver a última igualdade notemos que

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k \overset{(1)}{=} E_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_n, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.5.5}$$

(1) Em virtude de E_n constituir uma sequência crescente.

Dai segue imediatamente que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, consequentemente $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Seguidamente mostremos $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} F_n$, para este fim notemos que se $(C_n)_{n\in\mathbf{Z}_+} \subseteq 2^X$ (admitindo $C_0 = \emptyset$) é uma sequência crescente, então a sequência $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $D_n = C_n \setminus C_{n-1}$ é tal que

$$\mathbf{P}(n) : \bigcup_{k=1}^{n} D_k = \bigcup_{k=1}^{n} C_k, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{2.5.6}$$

I. A propriedade é válida para $n = 2$, claramente:

$$\begin{aligned} D_1 \cup D_2 = (C_1 \setminus \emptyset) \cup C_2 \setminus C_1 = C_1 \cup (C_2 \setminus C_1) \\ = (C_2 \cap C_1) \cup (C_2 \setminus C_1) = C_1 \cup C_2; \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

II. Supondo que $\mathbf{P}(n)$ seja válida, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(n+1) : \bigcup_{k=1}^{n+1} D_k = D_{n+1} \cup \bigcup_{k=1}^{n} D_k = (C_{n+1} \setminus C_n) \cup \bigcup_{k=1}^{n} C_k \\ = (C_{n+1} \setminus C_n) \cup C_n = C_{n+1} \cup C_n = C_{n+1} \cup \bigcup_{k=1}^{n} C_k = \bigcup_{k=1}^{n+1} C_k. \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Por fim, é suficiente fazer $C_n = E_n$ e notar que

$$F_n = A_n \setminus E_{n-1} = \Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)\setminus C_{n-1} = E_n \setminus E_{n-1}, \tag{2.5.9}$$

o que finaliza a prova. □

Lema 2.5.3. *Seja μ uma medida definida em uma σ-álgebra $\boldsymbol{X}$.*

i. *Se (C_n) é uma sequência crescente em $\boldsymbol{X}$, então*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_n C_n. \tag{2.5.10}$$

ii. *Se (D_n) é uma sequência decrescente em $\boldsymbol{X}$ e se $\mu(D_1) < +\infty$, então*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \lim_n D_n. \tag{2.5.11}$$

Prova. i. No lema anterior fazendo $A_0 = C_0 = \emptyset$ e $A_n = C_n$, para $n \in \mathbb{N}$ teremos que $E_n = \bigcup_{i=1}^{n} C_i = C_n$ e $F_n = C_n \setminus E_{n-1} = C_n \setminus C_{n-1}$, pois C_n é crescente logo $\bigcup_{i=1}^{n} C_i = C_n$, decorrerá que

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) &\overset{(1)}{=} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \overset{(2)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\big(C_n \setminus C_{n-1}\big) \\ &= \lim_n \sum_{k=1}^{n} \mu\big(C_k \setminus C_{k-1}\big) \overset{(3)}{=} \lim_n \sum_{k=1}^{n} \big(\mu(C_k) - \mu(C_{k-1})\big) \\ &\overset{(4)}{=} \lim_n \mu(C_n).\end{aligned} \tag{2.5.12}$$

(1) pois os argumentos de μ são iguais segundo o lema 2.5.2;

(2) pela aditividade contável de μ;

(3) pelo lema 2.5.1;

(4) pois a soma é telescópica.

ii. Primeiramente note que se (D_n) é uma sequência decrescente decorre que que a sequência $(D_1 \setminus D_n)$ é crescente, isto se deve pelo fato de a operação de complementação inverter a ordem da inclusão, do lema 2.5.1 e do resultado 'i' anterior temos

$$\begin{aligned}\mu(D_1) - \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\Big) &= \mu\bigg(D_1 \setminus \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\Big)\bigg) = \mu\bigg(\bigcup_{n=1}^{\infty} (D_1 \setminus D_n)\bigg) \\ &= \lim_n \mu(D_1 \setminus D_n) = \lim_n \big(\mu(D_1) - \mu(D_n)\big) \\ &= \mu(D_1) - \lim_n \mu(D_n),\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

dai vem que

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\Big) = \lim_n \mu(D_n), \tag{2.5.14}$$

vale salientar que o argumento anterior é válido porque $\mu(D_1) < \infty$, e em virtude da inclusão $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \subseteq D_1$ temos $\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\Big) < \infty$ e também porque o primeiro membro de (2.5.13) é finito.

$\square$

Definição 2.5.1. *Um espaço de medida é uma terna constituída de um conjunto X, uma σ-álgebra e uma medida associada, em símbolos é representado por $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$.*

Definição 2.5.2. *Dado um espaço de medida $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$, diz-se que uma propriedade é satisfeita em μ-quase todo o conjunto X (ou em μ-quase todo $x \in X$, ou ainda μ-quase todo lugar, ou em quase toda parte), e escreve-se μ-q.t.p. ou μ-q.t.l., quando for falsa em um conjunto de medida nula, ou equivalentemente quando for verdadeira no complementar de um conjunto de medida nula.*

Observação 2.5.1. *Dada uma propriedade φ (uma função proposicional) significativa para os elementos de X, podemos indagar se a definição anterior pode ser substituída ou implicar $\mu\big(\{X : \varphi\}\big) = 0$, em que $\{X : \varphi\} = \{x \in X : \varphi(x)\}$. A resposta é negativa a menos que se possa garantir que $\{X : \varphi\} \in \boldsymbol{X}$.*

Capítulo 3

Decomposição de medidas

Neste capítulo serão estudados os teoremas de decomposição, a saber os teoremas de decomposição de Hahn, Jordan e Lebesgue, a noção de medidas absolutamente contínuas e o teorema de Radon-Nikodým que forence uma relação entre duas medidas σ-finitas em termos de uma integral de uma função mensurável. Serão também estudados a relação 'mutualmente singular' e os teoremas de representação de Riesz que fornecem representações de funcionais lineares limitados em espaços $L_p, (1 \leqslant p < \infty)$ em termos de integral de funções mensuráveis.

3.1 Preliminares

Definição 3.1.1. *Seja $(X, \boldsymbol{X})$ um espaço de mensurável, uma carga em $\boldsymbol{X}$ é uma função $\lambda \in \mathbb{R}^X$ tal que $\lambda(\emptyset) = 0$ e é contalvelmente aditiva, i.e., se (E_n) é uma sequência de termos mutualmente exclusivos, então*

$$\lambda\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n). \tag{3.1.1}$$

Vale salientar para que λ esteja bem definida, deve-se impor que a última série seja absolutamente convergente (ou que seja incondicionalmente convergente), pois a união $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ independe da ordem das parcelas E_n.

Teorema 3.1.1. (Teorema da Convergência Monótona) *Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções em M^+, que converge para uma função f em μ-quase todo lugar, então*

$$\lim_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu. \tag{3.1.2}$$

Para uma prova cf. [1] p. 35.

3.2 Teoremas de decomposição

Definição 3.2.1. *Seja λ uma carga definida em uma σ-álgebra de conjuntos de um espaço X, definiremos um conjunto como negativo, nulo e positivo relativos a λ como sendo conjuntos $X_-, X_0, X_+ \in \boldsymbol{X}$, tais que $\lambda(X_- \cap E) \leqslant 0 = \lambda(X_0 \cap E) \leqslant \lambda(X_+ \cap E)$, para todo $E \in \boldsymbol{X}$, respectivamente.*

Lema 3.2.1. *Todos os subconjuntos de um conjunto P são positivos se, e somente se, P é positivo e uniões finitas de conjuntos positivos são conjuntos positivos.*

Demonstração. Uma das implicações segue da equivalência $(A \subseteq B) \equiv (A \cap B = A)$, para dois conjuntos A, B quaisquer. Seja $P \in \boldsymbol{X}$ um subcojunto positivo em relação a uma carga λ, se $S \subseteq P$, então $\lambda(S \cap E) = \lambda((S \cap E) \cap P) \geqslant 0$, para todo $E \in \boldsymbol{X}$. Para provar a segunda asserção é suficiente provar que união de conjuntos positivos, ainda é positivo, sejam $A, B \in \boldsymbol{X}$ dois subconjuntos positivos visto que $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$, como $(A \cap B), A \setminus B \subseteq A$ e $A \setminus B \subseteq B$ e que λ é finitamente aditiva decorre a que $\lambda((A \cup B) \cap E) = \lambda((A \setminus B) \cap E) + \lambda((B \setminus A) \cap E) + \lambda(A \cap B \cap E) \geqslant 0$, para todo $E \in \boldsymbol{X}$, o resultado geral decorre por indução sobre o número de conjuntos que figuram na união. □

Observação 3.2.1. *Para conjuntos negativos e nulos obtêm-se um resultado análogo.*

Teorema 3.2.1. (Teorema da decomposição de Hahn [1]) *Sejam $(X, \boldsymbol{X})$ um espaço mensurável λ uma carga definida em $\boldsymbol{X}$. Então X admite uma partição $X = X_- \cup X_+$, $X_- \cap X_+ = \emptyset$.*

Prova. Inicialmente seja X^+ a classe de todos os subconjuntos positivos de X, verifica-se que $X^+ \neq \emptyset$, pois pela definição temos $\emptyset \in X^+$, sabendo que $\lambda(E) \in \mathbb{R}$, para todo $E \in \boldsymbol{X}$, podemos conceber $\alpha = \sup\{\lambda(E) \in \mathbb{R} : E \in X^+\} \in \overline{\mathbb{R}}$, aqui não estamos excluindo a possibilidade de $\alpha = +\infty$, provaremos mais adiante que $\alpha < +\infty$, podemos posteriormente construir uma sequência de conjuntos $(E_n) \subset X^+ : \lim_n \lambda(E_n) = \alpha$, que podemos admití-la crescente, pois se este não for o caso faça $F_n = \bigcup_{i=1}^n E_i$, sabemos que a sequência (F_n) é crescente, além disso $\lambda(E_n) \leqslant \lambda(F_n) \leqslant \alpha$, pois $F_n \in X^+$. Em seguida defina $X_+ := \bigcup_n E_n$, mostremos que X_+ é positivo.

De fato,

$$\lambda(X_+ \cap E) = \lim_n \lambda(E_n \cap E) \geqslant 0, \forall E \in \boldsymbol{X}, \tag{3.2.1}$$

além disso temos $\alpha = \lim_n \lambda(E_n) = \lambda(X_+) < \infty$, pois $\lambda(E) \in \mathbb{R}$, para todo $E \in \boldsymbol{X}$. Posteriormente provemos que $X_- = X \setminus X_+$ é um conjunto negativo, suponhemos por redução ao absurdo que não o seja, então existe $E \in \boldsymbol{X}$ subconjunto de X_- tal que $\lambda(E) > 0$. O conjunto E não pode ser positivo, pois caso contrário $\lambda(X_+ \cup E) > \lambda(X_+) = \alpha \geqslant 0$, contrariando a maximalidade de α, consequentemente $N_0 = \{E' \subseteq E : \lambda(E') < 0\} \neq \emptyset$, sejam $n_1 = \min\{\lfloor -\lambda(E')^{-1} \rfloor \in \mathbb{N} : E' \in N_0\}$ e $E_1 \in N_0 : n_1 = \lfloor -\lambda(E_1)^{-1} \rfloor$, daí vem

$$\lambda(E \setminus E_1) = \lambda(E) - \lambda(E_1) \geqslant \lambda(E) + \frac{1}{n_1} > \lambda(E) > 0, \tag{3.2.2}$$

também verifica-se que $E \setminus E_1$ não pode ser positivo, pois $\lambda(X_+ \cup (E \setminus E_1)) > \lambda(X_+) = \alpha$, o contraria novamente a maximalidade de α. Como anteriormente podemos concluir que $N_1 = \{E' \subseteq E \setminus E_1 : \lambda(E') < 0\} \neq \emptyset$, em seguida considere $n_2 = \min\{\lfloor -\lambda(E')^{-1} \rfloor \in \mathbb{N} : E' \in N_1\}$ e $E_2 \in N_1 : n_2 = \lfloor -\lambda(E_2)^{-1} \rfloor$. Indutivamente definamos $N_{k+1} = \{E' \subseteq E \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) : \lambda(E') < 0\}$, $n_{k+1} = \min\{\lfloor -\lambda(E')^{-1} \rfloor \in \mathbb{N} : E' \in N_k\}$ e $E_{k+1} \in N_k :$

[1]Hans Hahn matemático austríaco (27 de setembro de 1879 - 24 de julho de 1934), uma de suas contribuições é o teorema de Hahn-Banach (provado independentemente).

$n_{k+1} = \lfloor -\lambda(E_{k+1})^{-1} \rfloor$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Posteriormente definamos $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ e notemos que

$$-\infty < \lambda(F) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k) \leqslant -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} \leqslant 0, \tag{3.2.3}$$

segue daí que a última série é convergente, consequentemente $\lim_k 1/n_k = 0$. Seja $G \subseteq E \setminus F$ um conjunto mensurável com $\lambda(G) < 0$, em virtude do último resultado podemos tomar k suficientemente grande tal que $n_k - 1 \geqslant \lfloor -\lambda(G)^{-1} \rfloor$, notando que $G \subseteq E \setminus F \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[E \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i \right) \right]$ e que $\lambda(G) < 0$, temos $G \in N_k$, mas $\lfloor -\lambda(G)^{-1} \rfloor \leqslant n_k - 1 < n_k = \lfloor -\lambda(E_k)^{-1} \rfloor$, contradizendo a minimalidade deste último, portanto qualquer subconjunto de $E \setminus F$ tem medida não-negativa, i.e., $E \setminus F$ é um conjunto positivo, induzindo novamente uma contradição com a maximalidade de α, pois $\lambda(X_+ \sqcup (E \setminus F)) > \lambda(X_+) = \alpha$, uma vez que $\lambda(E \setminus F) = \lambda(E) - \lambda(F) > 0$, o que finaliza a demonstração. □

Observação 3.2.2. *Dados um espaço mensurável X e uma carga qualquer, uma decomposição de X em um conjunto negativo e positvo em relação a λ, é chamada* **decomposição de Hahn***, em geral uma tal decomposição não é única.*

O próximo lema mostra que a unicidade da decomposição é irrelevante.

Lema 3.2.2. *Se X_i^-, X_i^+, $(i = 1, 2)$ são duas decomposições de Hahn, então*

$$\lambda(X_1^- \cap E) = \lambda(X_2^- \cap E),\ \lambda(X_1^+ \cap E) = \lambda(X_2^+ \cap E),\ \forall E \in \boldsymbol{X}. \tag{3.2.4}$$

Prova. Primeiramente observe que dado $E \in \boldsymbol{X}$, então $\lambda(E \cap (X_1^- \setminus X_2^-)) = 0$, pois $E \cap (X_1^- \setminus X_2^-) \subseteq X_1^- \cap X_2^+$, da vem

$$\lambda(E \cap X_1^-) = \lambda(E \cap X_1^- \cap X_2^-) + \lambda(E \cap (X_1^- \setminus X_2^-)) = \lambda(E \cap X_1^- \cap X_2^-), \tag{3.2.5}$$

analogamente podemos concluir que $\lambda(E \cap X_2^-) = \lambda(E \cap X_1^- \cap X_2^-)$, o que acarreta $\lambda(E \cap X_1^-) = \lambda(E \cap X_1^-)$, para todo $E \in \boldsymbol{X}$, o outro caso é demonstrado de forma análoga. □

Definição 3.2.2. *Sejam $(X, \boldsymbol{X})$ um espaço mensurável e X_+, X_- uma decomposição de Hahn arbitrária de X, definiremos a variação negativa e positiva por*

$$\lambda_-(E) = -\lambda(X_- \cap E),\ \lambda_+(E) = \lambda(X_+ \cap E), \tag{3.2.6}$$

respectivamente. Como estas últimas são não-negativas, finitamente aditivas e contavelmente aditivas decorre que serão medidas em $\boldsymbol{X}$. A variação total é dada por

$$|\lambda| = \lambda_+ + \lambda_-, \tag{3.2.7}$$

sendo esta última uma soma de medidas, será a fortiori uma medida em $\boldsymbol{X}$, além disso verifica-se que $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$, i.e., a decomposição de Hahn do espaço X em relação a carga λ induz uma decomposição da mesma, como a diferença de duas medidas.

O teorema a seguir mostra que a decomposição $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ possui uma particularidade em relação as outras decomposições de λ.

Teorema 3.2.2. (Teorema da decomposição de Jordan [2]) *Sejam λ uma carga e μ, ν medidas em $\boldsymbol{X}$ tais que $\lambda = \mu - \nu$. Então*

$$\lambda_-(E) \leqslant \nu(E), \quad \lambda_+(E) \leqslant \mu(E), \forall E \in \boldsymbol{X}. \tag{3.2.8}$$

Prova. Se $E \in \boldsymbol{X}$, então

$$\lambda_-(E) = -\lambda(X_- \cap E) = \nu(X_- \cap E) - \mu(X_- \cap E) \leqslant \nu(X_- \cap E) \leqslant \nu(E); \tag{3.2.9}$$

$$\lambda_+(E) = \lambda(X_+ \cap E) = \mu(X_+ \cap E) - \nu(X_+ \cap E) \leqslant \mu(X_+ \cap E) \leqslant \mu(E). \tag{3.2.10}$$

□

Definição 3.2.3. *Sejam μ, ν duas medidas, diremos que ν é absolutamente contínua em relação (ou relativa) a μ, quando $\nu(E) = 0$ sempre que $\mu(E) = 0$, e escreveremos $\nu \ll \mu$ ou $\nu \gg \mu$. Quando μ, ν forem cargas diremos que ν é absolutamente contínua em relação a μ quando $|\nu|$ for absolutamente contínua em relação a $|\mu|$.*

Lema 3.2.3. *Sejam μ, ν medidas finitas. Então $\nu \ll \mu$ se, e somente se, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ existe $\delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*$, tal que se $\mu(E) < \delta(\varepsilon)$, então $\nu(E) < \varepsilon$.*

Prova. Uma das implicações é evidente, pois dado $E \in \boldsymbol{X} : \mu(E) = 0$, podemos a implicação $\mu(E) < 0 \Longrightarrow \nu(E) < \varepsilon$ é válida para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, consequentemente $\nu(E) = 0$. Reciprocamente, usando a contrapositiva suponhamos que exista $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, tal que $\nu(E) \geqslant \varepsilon$, para todo $(E, \delta) \in \boldsymbol{X} \times \mathbb{R}_+^* : \mu(E) < \delta$, daí podemos construir um sequência $(E_n) \in \boldsymbol{X} : \mu(E_n) < 2^{-n}$ e $\nu(E_n) \geqslant \varepsilon$, considerando a sequência $(F_n) \subset \boldsymbol{X} : F_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i$, da semiaditividade contável de μ decorre $\mu(F_n) \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \mu(E_i) \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i} = 2^{n+1}$, como (F_n) é uma sequência decrescente vem que

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim_n \mu(F_n) = 0; \tag{3.2.11}$$

$$\nu(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim_n \nu(F_n) \geqslant \varepsilon, \tag{3.2.12}$$

o que prova que ν não é absolutamente contínua com respeito a μ. □

Observação 3.2.3. *Dada $f \in M^+(X, \boldsymbol{X})$, a integral indefinida de f dada por*

$$\mu(E) = \int_E f \, d\nu, \quad (E \in \boldsymbol{X}) \tag{3.2.13}$$

é uma medida em $\boldsymbol{X}$. A representação dada em (3.2.13) *é uma condição suficiente para que $\mu \ll \nu$, o próximo teorema mostra que se μ, ν forem σ-finitas então* (3.2.13) *é uma condição necessária para $\mu \ll \nu$.*

Teorema 3.2.3. (Teorema de Radon [3]-Nikodým [4]) *Sejam $(X, \boldsymbol{X})$ um espaço mensurável μ, ν medidas σ-finitas tais que $\mu \ll \nu$. Então existe uma função $f \in M^+(X, \boldsymbol{X})$ unicamente determinada em ν-quase todo lugar tal que $\mu(E) = \int_E f \, d\nu$, para todo $E \in \boldsymbol{X}$.*

[2]Marie Ennemond Camille Jordan matemático francês (5 Janeiro de 1838 - 22 de Janeiro de 1922), conhecido pelo teorema da curva de Jordan e pela medida de Jordan-Peano que é uma extensão da noção de mensurabilidade de conjuntos em espaços euclidianos.

[3]Johann Karl August Radon (16 de Dezembro de 1887 – 25 de Maio de 1956) responsável pela demonstração daquele teorema para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, pela medida e transformada de Radon, esta última de grande importância sendo aplicada em reconstruções tomográficas, e.g. tomografia computadorizada com base em raios X.

[4]Otto Marcin Nikodým (3 de Agosto de 1887 – 4 de Maio d 1974) foi um matemático polonês, reponsável pela generalização do teorema de Radon.

Prova. Inicialmente provemos o resultado quando μ, ν forem finitas em seguida estenderemos o resultado quando forem σ-finitas. Para $c \in \mathbb{R}_+^*$ consideremos a carga $\mu - c\nu$, e a decomposição de Hahn de X associada $N_c, P_c \in \boldsymbol{X}$, em seguida definamos a sequência

$$(3.2.14) \qquad A_k = \begin{cases} N_c, \ k = 1; \\ N_{kc} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i, \ k > 1 \end{cases},$$

da própria construção vê-se que os termos A_k são mutualmente disjuntos, em seguida observemos que $\bigcup_{j=1}^{k} N_{jc} = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$, para tal usaremos o seguinte resultado

Afirmação 3.2.1. *Seja $\{A_i\}_{i=1}^n$ uma família de conjuntos qualquer, defina $\{B_i\}_{i=1}^n$, por*

$$(3.2.15) \qquad B_k = \begin{cases} A_1, \ k = 1; \\ A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i, \ 1 < k \leqslant n \end{cases},$$

temos $\bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$.

Prova. A demonstração é feita usando o princípio indutivo sobre $n \in \mathbb{N}$ (vide lema 2.5.2). □

Dai vem que $A_k = N_{kc} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} N_{ic} = N_{kc} \cap \bigcap_{i=1}^{k-1} P_{ic}$, por conseguinte se $E \in 2^{A_k} \cap \boldsymbol{X}$, então $E \subseteq N_{kc} \cap P_{(k-1)c}$, o que acarreta $\mu(E) - kc\nu(E) \leqslant 0 \leqslant \mu(E) - (k-1)c\nu(E)$, que por sua vez implica $(k-1)c\nu(E) \leqslant \mu(E) \leqslant kc\nu(E)$, posteriormente faça $B = X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} P_{jc}$, daí vem $B \subseteq P_{jc}$, para todo $j \in \mathbb{N}$, em consequência temos $0 \leqslant kc\nu(B) \leqslant \mu(B) \leqslant \mu(X) < \infty$, para todo $k \in \mathbb{N}$, que só será válida se $\nu(B) = 0$, da hipótese $\mu \ll \nu$ segue que $\mu(B) = 0$, em seguida defina $f_c := \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)c\chi_{A_k}$, verifiquemos que $f_c \in M^+$, claramente $f_c \geqslant 0$, para ver que $f_c \in M$, considere $\alpha \in \mathbb{R}$ e os seguintes casos

i. Se $\alpha \leqslant 0$, então $\{f > \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \boldsymbol{X}$;

ii. Se $\alpha > 0$, então se $m = \min\{k \in \mathbb{N} : (k-1)c > \alpha\}$, então $\{f > \alpha\} = \bigcup_{k=m} A_k \in \boldsymbol{X}$

, portanto $f \in M^+$. Sabemos que $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \sqcup B$, daí dado qualquer $E \in \boldsymbol{X}$, temos $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty}(A_k \cap E) \sqcup (B \cap E)$.

Defina $\mu_c(E) := \int_E f_c \, d\nu$, $\kappa_c := \int E(f_c + c) \, d\nu, E \in \boldsymbol{X}$, visto que $f_c, f_c + c \in M^+$, decorre que μ_c, κ_c são medidas sobre $\boldsymbol{X}$, logo

$$(3.2.16) \qquad \begin{aligned} \mu_c(E) &= \mu_c\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(A_k \cap E) \sqcup (B \cap E)\right) = \mu_c(B \cap E) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_c(A_k \cap E) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)c\nu(A_k \cap E) \leqslant \mu(B \cap E) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap E) = \mu(E) \end{aligned}$$

e

$$(3.2.17) \qquad \begin{aligned} \kappa_c(E) &= \kappa_c\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(A_k \cap E) \sqcup (B \cap E)\right) = c\nu(B \cap E) + \sum_{k=1}^{\infty} kc\nu(A_k \cap E) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kc\nu(A_k \cap E) \geqslant \mu(B \cap E) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap E) = \mu(E), \end{aligned}$$

de onde podemos concluir

$$\int_E f_c \, d\nu = \mu_c(E) \leqslant \mu(E) \leqslant \kappa_c(E) = \int_E (f_c + c) \, d\nu \leqslant \int_E f_c \, d\nu + c\nu(X). \tag{3.2.18}$$

Fazendo $c_n = 2^{-n}$ podemos determinar uma sequência de funções (f_n), tal que

$$\int_E f_n \, d\nu \leqslant \mu(E) \leqslant \int_E f_n \, d\nu + 2^{-n}\nu(X), \tag{3.2.19}$$

se $m \leqslant n$, então

$$\int_E f_m \, d\nu \leqslant \mu(E) \leqslant \int_E f_m \, d\nu + 2^{-n}\nu(X) \tag{3.2.20}$$

$$\int_E f_n \, d\nu \leqslant \mu(E) \leqslant \int_E f_n \, d\nu + 2^{-n}\nu(X), \tag{3.2.21}$$

o que implica $\left|\int_E (f_n - f_m)\right| \leqslant 2^{-n}\nu(X)$, para todo $E \in \boldsymbol{X}$, posteriormente notemos que

$$\begin{aligned} \int |f_n - f_m| \, d\nu = \int_{\{f_n - f_m < 0\}} |f_n - f_m| \, d\nu + \int_{\{f_n - f_m = 0\}} |f_n - f_m| \, d\nu \\ + \int_{\{f_n - f_m > 0\}} |f_n - f_m| \, d\nu \leqslant 2^{-n+1}\nu(X), \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

como (f_n) é Cauchy em L mais precisamente em L_1, visto este último é completo (f_n) possui um limite $f \in M$, podemos inferir daqui que a sequência $(f_n) \subseteq M^+$ é Cauchy na medida, segue que esta admite uma subsequência que converge na na medida e em ν-quase todo lugar a uma função $g \in M$ que podemos admitir não-negativa, pois $(f_n) \subseteq M^+$, além disso $g = f$ em ν-quase todo lugar — aqui estamos apenas confirmando que o limite está em M^+ — consequentemente (f_n) converge a $f \in M^+$ em L_1 (uma demonstração destes fatos encontra-se nos 6° e 7° capítulos da referência [1]). Além do mais

$$\left| \int_E f \, d\nu - \int_E f_n \, d\nu \right| \leqslant \int_E |f - f_n| \, d\nu \leqslant \int |f_n - f| \, d\nu, \tag{3.2.23}$$

de (3.2.19) e (3.2.23) vem

$$\mu(E) = \lim_n \int_E f_n \, d\nu = \int_E f \, d\nu, \tag{3.2.24}$$

o que finaliza a primeira parte da prova. Posteriormente provemos a unicidade, sejam $f, g \in M^+$, tais que $\mu(E) = \int_E f \, d\nu = \int_E g \, d\nu$, para todo $E \in \boldsymbol{X}$

Suponhamos agora que μ, ν sejam σ-finitas, temos portanto

$$\begin{aligned} \int |f - g| \, d\nu &= \int_{\{f-g<0\}} |f - g| \, d\nu + \int_{\{f-g=0\}} |f - g| \, d\nu + \int_{\{f-g>0\}} |f - g| \, d\nu \\ &\leqslant \left| \int_{\{f-g<0\}} (f - g) \, d\nu \right| + \left| \int_{\{f-g>0\}} (f - g) \, d\nu \right| = 0, \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

a última igualdade é dada pelo fato $\int_E (f - g) \, d\nu = \int_E (g - f) \, d\nu = 0$, para todo $E \in \boldsymbol{X}$, pois $\nu(X) < \infty$, consequentemente $|f - g| = 0$ em ν-quase todo lugar, que por sua vez implica $f = g$ em ν-quase todo lugar, q.e.d.

Posteriormente admitamos que μ, ν sejam σ-finitas, segue que existem sequências (X_n^μ), $(X_n^\nu) \subseteq \boldsymbol{X}$, tais que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n^\mu = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n^\nu = X$ e $\mu(X_n^\mu), \mu(X_n^\nu) < \infty$ que podemos supô-las estritamente crescentes, estamos interessados em uma sequência crescente $(X_n) \subseteq \boldsymbol{X} : \mu(X_n), \nu(X_n) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para este fim, verifiquemos se existe uma subsequência de alguma das sequências, cujos termos estejam contidos em uma quantidade finita de termos da outra digamos (X_n^μ), daí fazendo $X_n = X_n^\mu, n \in \mathbb{N}$, temos a sequência desejada. Caso contrário podemos admitir que cada termo de uma das sequências esteja contido em uma quantidade enumerável de termos da outra. Para X_1^μ, seja $X_{n_1}^\nu \in \boldsymbol{X} : X_1^\mu \cap X_{n_1}^\nu \neq \emptyset$, admita $\{X_{n_i}^\nu\}_{i=1}^k$ escolhidos escolhamos $X_{n_{k+1}}^\nu \in \boldsymbol{X} : n_{k+1} > n_k$ e $X_{k+1}^\nu \cap X_{n_{k+1}}^\nu \neq \emptyset$, a sequência $X_k = X_k^\nu \cap X_{n_k}^\nu$ é a sequência requerida, pois é crescente e usando a

Afirmação 3.2.2. *Sejam X um conjunto arbitrário, $(A_n), (B_n) \in 2^X$ duas sequências estritamente crescentes, satisfazendo $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = X$ e $A_n \cap B_n \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap B_n)$.*

Prova. Claramente $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap B_n) \subseteq X$, seja $x \in X$, da hipótese $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = X$, existem $n_i \in \mathbb{N}$, $(i = 1, 2) : x \in A_{n_1} \cap B_{n_2}$, fazendo $n = \max_{i=1,2} n_i$, temos que $x \in A_n \cap B_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap B_n)$. □

Para prosseguirmos precisaremos da

Afirmação 3.2.3. *Se $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ é um espaço de medida, $f \in M^+$ e $F \in \boldsymbol{X}$, então*

$$\int_F f\, d\mu = \int f\, d\mu_F, \quad \mu_F(E) = \mu(E \cap F), \forall E \in \boldsymbol{X}. \tag{3.2.26}$$

Prova. Seja $\varphi = \sum_{i\in I} \chi_{\varphi^{-1}(a_i)}$ (I finito) uma função simples qualquer, temos

$$\begin{aligned}\int_F \varphi\, d\mu &= \int_F \sum_{i\in I} \chi_{\varphi^{-1}(a_i)}\, d\mu = \int \sum_{i\in I} \chi_{\varphi^{-1}(a_i)\cap F}\, d\mu = \sum_{i\in I} \int \chi_{\varphi^{-1}(a_i)\cap F}\, d\mu \\ &= \sum_{i\in I} \mu(\varphi^{-1}(a_i) \cap F) = \sum_{i\in I} \mu_F(\varphi^{-1}(a_i)) = \int \varphi\, d\mu_F,\end{aligned} \tag{3.2.27}$$

a fortiori

$$\int_F f\, d\mu = \sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f} \int_F \varphi\, d\mu = \sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f} \int \varphi\, d\mu_F = \int f\, d\mu_F. \tag{3.2.28}$$

□

Em seguida definamos μ_n, ν_n, para todo $n \in \mathbb{N}$, respectivamente por $\mu_n(E) := \mu(X_n \cap E)$, $\nu_n(E) := \nu(X_n \cap E)$, para todo $E \in \boldsymbol{X}$, ambas são finitas além disso $\mu_n \ll \nu_n$, pois $\mu \ll \nu$, do resultado anterior existe $g_n \in M^+$, tal que $\mu_n(E) = \int_E g_n\, d\nu_n$, para todo $E \in \boldsymbol{X}$, e da afirmação imediatamente anterior temos $\mu_n(E) = \int_E g_n\, d\nu_n = \int_E g_n \chi_{X_n}\, d\nu$, para todo $E \in \boldsymbol{X}$, fazendo $h_n = g_n \chi_{X_n}$, decorre que $h_n \in M^+$ e $h_n(X \setminus X_n) = \{0\}$. Posteriormente observemos que se $m \leqslant n$ temos

$$\int h_m\, d\nu = \mu_m(X_m) = \mu(X_m) = \mu_n(X_m) = \int h_n \chi_{X_m}\, d\nu\,, \tag{3.2.29}$$

daqui podemos concluir que $h_m = h_n\chi_{X_m}$ em ν-quase todo lugar, por conseguinte $h_m = h_n$ em ν-quase todo $x \in X_m$, em seguida defina $f_n := \max_{1\leqslant i\leqslant n} h_i$, desta definição podemos deduzir que $(f_n) \subseteq M^+$ é monótona crescente, seguidamente verifiquemos

$$\int h_n\, d\nu = \int f_n\, d\nu,\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.2.30}$$

para este fim basta provar que $h_n = f_n$, ν-q.t.l., da equivalência

$$h_n(x) = f_n(x) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} h_i(x) \iff h_n(x) \geqslant h_i(x),\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \tag{3.2.31}$$

temos a seguinte caracterização de um elemento $x \in X \setminus \{f_n = h_n\}$

$$h_n(x) < f_n(x) \iff \exists i \in \{1, \dots, n\} : h_i(x) > h_n(x). \tag{3.2.32}$$

Seja $J \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ o conjunto dos índices tais que $\{h_j > h_n\} \neq \emptyset$, notemos que para um destes índices temos

$$\{h_j > h_n\} = (\{h_j > h_n\} \cap X_j) \sqcup \underbrace{(\{h_j > h_n\} \cap X \setminus X_j)}_{=\emptyset}, \tag{3.2.33}$$

como $h_j = h_n$ ν-q.t.l. em X_j segue que $\nu(\{h_j > h_n\}) = \nu(\{h_j > h_n\} \cap X_j) = 0$, o que prova que $\nu(X \setminus \{f_n = h_n\}) = \nu(\bigcup_{j\in J}\{h_j > h_n\}) = 0$, q.e.d. Se $E \in \boldsymbol{X}$, então

$$\mu(E \cap X_n) = \mu_n(E) = \int_E h_n\, d\nu = \int_E f_n\, d\nu, \tag{3.2.34}$$

fazendo $\lim_n f_n = f$ temos pelo fato de $(E \cap X_n)$ ser crescente e pelo teorema da convergência monótona ((f_n) é monótona) que

$$\mu(E) = \lim_n \mu_n(E) = \lim_n \int_E h_n\, d\nu = \lim_n \int_E f_n\, d\nu = \int_E f\, d\nu. \tag{3.2.35}$$

Imediatamente provemos a ν-unicidade, sejam $f, g \in M^+$ tais que $\mu(E) = \int_E f\, d\nu = \int_E g\, d\nu$, daí vem $\int_{X_n} f\, d\nu = \int_{X_n} g\, d\nu = \mu(X_n) < \infty$, consequentemente $f\chi_{X_n} = g\chi_{X_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ν-q.t.l., para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $N_n \in \boldsymbol{X} : \nu(N_n) = 0$ e $f(x) = g(x)$, para todo $x \in X_n \setminus N_n$, fazendo $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$, temos $\nu(N) = 0$ e que se $x \in X \setminus N$, então $x \in X_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, pois $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ e $x \in X \setminus N_n$, em consequência $x \in X_n \setminus N_n$, logo $f(x) = g(x)$, consequentemente $f = g$, ν-q.t.l. q.e.d. □

A função dada no teorema anterior é chamada de derivada Radon-Nikodým e denotada por $\frac{d\mu}{d\nu}$, pelo fato de possuir algumas propriedades reminiscentes de derivada.

Afirmação 3.2.4. *Sejam μ, ν medidas σ-finitas definidas em um espaço mensurável $(X, \boldsymbol{X})$ tais que $\mu \ll \nu$ e $g \in M^+(X, \boldsymbol{X})$. Então*

$$\int g\, d\mu = \int g\, \frac{d\mu}{d\nu}\, d\nu \tag{3.2.36}$$

Prova. Das hipóteses segue do teorema de Radon-Nikodým que existe $f \in M^+(X, \boldsymbol{X})$, tal que

$$\mu(E) = \int_E d\mu = \int_E f\, d\nu. \tag{3.2.37}$$

Imediatamente provemos que o resultado é válido para funções simples em $M^+(X, \boldsymbol{X})$, portanto seja $\varphi = \sum_{i\in I} a_i \chi_{\varphi^{-1}(a_i)}$, ($I$ finito) temos

$$\int \varphi\, d\mu = \int \sum_{i\in I} a_i \chi_{\varphi^{-1}(a_i)}\, d\mu = \sum_{i\in I} a_i \int \chi_{\varphi^{-1}(a_i)}\, d\mu = \sum_{i\in I} a_i \int \chi_{\varphi^{-1}(a_i)} f\, d\nu$$
$$= \int \sum_{i\in I} a_i \chi_{\varphi^{-1}(a_i)} f\, d\nu = \int \varphi f\, d\nu. \tag{3.2.38}$$

Posteriormente visto que $g \in M^+(X, \boldsymbol{X})$ podemos determinar uma sequência (γ_n) de funções simples monótona crescente convergindo para g em todo lugar, do teorema da convergência monótona vem

$$\int g\, d\mu = \lim_n \int \gamma_n\, d\mu = \lim_n \int \gamma_n \frac{d\mu}{d\nu}\, d\nu = \int g \frac{d\mu}{d\nu}\, d\nu \tag{3.2.39}$$

□

Afirmação 3.2.5. *Sejam λ, μ, ν medidas σ-finitas definidas em um espaço mensurável $(X, \boldsymbol{X})$ tais que $\lambda \ll \mu$, $\mu \ll \nu$. Então*

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = \frac{d\lambda}{d\mu}\frac{d\mu}{d\nu}, \ \ \nu\text{-q.t.l.} \tag{3.2.40}$$

Também se μ_i, $(i = 1, 2)$ são σ-finitas em X e $\mu_i \ll \nu$, então

$$\frac{d}{d\nu}(\mu_1 + \mu_2) = \frac{d\mu_1}{d\nu} + \frac{d\mu_1}{d\nu}, \ \ \nu\text{-q.t.l.} \tag{3.2.41}$$

Prova. Seja $E \in \boldsymbol{X}$, como $\lambda \ll \mu$ do teorema anterior segue que existe $\frac{d\lambda}{d\mu} \in M^+$, tal que $\lambda(E) = \int_E \frac{d\lambda}{d\mu}\, d\mu$ e da afirmação imediatamente anterior $\lambda(E) = \int_E \frac{d\lambda}{d\mu}\, d\mu = \int_E \frac{d\lambda}{d\mu}\frac{d\mu}{d\nu}\, d\nu$, da transitividade da relação $\ll$ segue daquele teorema que existe $\frac{d\lambda}{d\nu} \in M^+$ tal que $\lambda(E) = \int_E \frac{d\lambda}{d\nu}\, d\nu$, o que prova a primeira parte. Sejam agora μ_i, $(i = 1, 2)$ σ-finitas em X e $\mu_i \ll \nu$, temos $(\mu_1 + \mu_2)(E) = \int_E \frac{d}{d\nu}(\mu_1 + \mu_2)\, d\nu$, pois $\mu_1 + \mu_2 \ll \nu$ e $\mu_i(E) = \int_E \frac{d\mu_i}{d\nu}\, d\nu$, o resultado segue da linearidade da integral. □

Afirmação 3.2.6. *Sejam μ, ν medidas σ-finitas definidas em um espaço mensurável $(X, \boldsymbol{X})$ tais que $\mu \ll \nu$, $\nu \ll \mu$. Então*

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \frac{1}{\frac{d\nu}{d\mu}}, \ \ \mu\text{-q.t.l.} \tag{3.2.42}$$

Prova. A prova decorre da identidade

$$\mu(E) = \int_E d\mu = \int_E \frac{d\mu}{d\nu}\, d\nu = \int_E \frac{d\mu}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu \tag{3.2.43}$$

□

Observação 3.2.4. *Por meio de um argumento simétrico demonstra-se que*

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{1}{\frac{d\mu}{d\nu}}, \ \ \nu\text{-q.t.l.} \tag{3.2.44}$$

Definição 3.2.4. *Sejam μ, ν duas medidas em um espaço mensurável $(X, \boldsymbol{X})$, diremos que μ e ν são mutualmente singulares se existirem $A, B \subset \boldsymbol{X}$, tais que $X = A \sqcup B$ e $\mu(A) = \nu(B) = 0$, neste caso denotaremos por $\mu \perp \nu$, apesar desta relação ser simétrica escreve-se μ é singular em relação a ν, quando $\mu \perp \nu$.*

Teorema 3.2.4. (Teorema da decomposição de Lebesgue) *Sejam μ, ν duas medidas σ-finitas definidas num espaço de medida $(X, \boldsymbol{X})$. Então existem únicas medidas $\mu_i, (i = 1, 2)$ tais que $\mu_1 \perp \nu$, $\mu_2 \ll \nu$ e $\mu = \mu_1 + \mu_2$.*

Prova. Inicialmente definamos $\xi := \mu + \nu$, sabe-se que soma de funções σ-finitas também é σ-finita, além disso se $\mu, \nu \ll \xi$, pois se $\xi(E) = (\mu + \nu)(E) = 0$, decorre que $\mu(E) = \nu(E) = 0$, do teorema de Radon-Nikodým existem $f, g \in M^+$, tais que

$$\mu(E) = \int_E f\, d\xi,\ \nu(E) = \int_E g\, d\xi,\ \forall E \in \boldsymbol{X}, \tag{3.2.45}$$

em seguida defina

$$\mu_1(E) := \mu(E \cap \{g = 0\}),\ \mu_2(E) := \mu(E \cap \{g > 0\}), \tag{3.2.46}$$

temos que $\mu_1(\{g > 0\}) = \nu(\{g = 0\}) = 0$, portanto $\mu_1 \perp \nu$. Seja agora $\nu(E) = 0$, segue que $g = 0$ μ-q.t.l., consequentemente $\mu(\{g > 0\}) = 0$, o que por sua vez implica $\mu_2(E) = 0$, portanto $\mu_2 \ll \nu$, além disso

$$\mu(E) = \mu((E \cap \{g = 0\}) \sqcup (E \cap \{g > 0\})) = \mu_1(E) + \mu_2(E), \forall E \in \boldsymbol{X}. \tag{3.2.47}$$

Finalmente provemos a unicidade, para tal consideremos outra decomposição $\mu = \mu_1' + \mu_2'$, temos portanto $\mu_1 + \mu_2 = \mu_1' + \mu_2' \geqslant 0$, logo $\mu_1 - \mu_1' + \mu_2 = \mu_2' \geqslant 0$, o que implica $\mu_1 - \mu_1' = \mu_2' - \mu_2 \geqslant 0$, portanto $\varpi := \mu_1 - \mu_1' = \mu_2' - \mu_2$ é uma medida tal que $\varpi \ll \nu$, pois se $\nu(E) = 0$, segue que $\mu_2' = \mu_2 = 0$, em virtude de $\mu_2', \mu_2 \ll \nu$, em seguida mostremos que $\varpi \perp \nu$, para este fim sabemos que existem $A, B, C, D \in \boldsymbol{X}$, tais que $\nu(A) = \mu_1(B) = 0$ e $X = A \sqcup B$ e $\nu(C) = \mu_1'(D) = 0$ e $X = C \sqcup D$, faça $E = A \cup C$, $F = B \cap D$ e note que $\nu(E) = \varpi(F) = 0$ e $X = E \sqcup F$, daí vem que $\varpi \perp \nu$, posteriormente precisaremos da seguinte

Afirmação 3.2.7. *Sejam ϱ, ς duas medidas em uma σ-álgebra $\boldsymbol{X}$. Se $\varrho \ll \varsigma$ e $\varrho \perp \varsigma$, então $\varrho \equiv 0$.*

Prova. Sejam $R, S \in \boldsymbol{X}$, tais que $\varrho(R) = \varsigma(S) = 0$ e $X = R \sqcup S$, da hipótese $\varrho \ll \varsigma$ segue gue $\varrho(S) = 0$, consequentemente $\varrho(E) = \varrho(R \cap E) + \varrho(S \cap E) = 0$, para todo $E \in \boldsymbol{X}$. □

Logo, podemos concluir que $\mu_i = \mu_i', (i = 1, 2)$, pois $\varpi \ll \nu$ e $\varpi \perp \nu$ q.e.d. □

Definição 3.2.5. *Um funcional linear em $L_p(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ é uma aplicação linear $G \in \mathbb{R}^{L_p}$, i.e.,*

$$G(\alpha f + g) = \alpha G(f) + G(g), \forall f, g \in L_p, \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{3.2.48}$$

Um funcional em L_p é limitado se existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+^*$, tal que

$$|G(f)| \leqslant C\|f\|_p, \forall f \in L_p \tag{3.2.49}$$

Neste caso a função $\|.\| : \mathbb{R}^{L_p} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$\|G\| := \sup\{|G(f)| \in \mathbb{R}_+ : \|f\|_p \leqslant 1\} \tag{3.2.50}$$

é uma norma em $\mathbb{R}^{L_p}$. De fato,

N_I. *Claramente* $\|G\| \geqslant 0$, *para todo* $G \in \mathbb{R}^{L_p}$, *e* $\|G\| = 0$ *se, e somente se,* $G \equiv 0$, *pois se* $\|G\| = 0$ *dado qualquer* $f \in L_p \setminus \{0\}$ *temos que* $|G(f \cdot \|f\|_p^{-1})| = 0$, *consequentemente* $|G(f)| = 0$, *a recíproca é evidente;*

N_{II}. *Seja* $\alpha \in \mathbb{R}$, *segue das propriedades de supremo que* $\|\alpha G\| = |\alpha|\|G\|$;

N_{III}. *Se* $G, H \in \mathbb{R}^{L_p}$, *então* $\|G+H\| \leqslant \|G\|+\|H\|$, *pois* $|(G+H)(f)| \leqslant |G(f)|+|H(f)| \leqslant \|G\| + \|H\|$, *para toda* $f \in L_p : \|f\|_p \leqslant 1$, *segue daí o requerido.*

No texto que segue um funcional linear positivo em L_p *é tal que* $G(f) \geqslant 0$, *para toda* $f \in L_p \cap (\mathbb{R}_+)^X$.

Lema 3.2.4. *Se* G *é um funcional linear limitado em* L_p, *então existem funcionais* G^-, G^+ *lineares positvos e limitados em* L_p, *tais que* $G = G^+ - G^-$.

Prova. Inicialmente consideremos $f \in L_p \cap (\mathbb{R}_+)^X$, e definamos

$$G^+(f) := \sup\{G(g) \in \mathbb{R} : g \in L_p \text{ e } 0 \leqslant g \leqslant f\}, \tag{3.2.51}$$

seguidamente note que $0 \in L_p : 0 \leqslant f$, logo $G^+(f) \geqslant 0$, para toda $f \in L_p \cap (\mathbb{R}_+)^X$, posteriormente verifiquemos que se $c \in \mathbb{R}_+^*$, então $G^+(cf) = c\,G^+(f)$, para este fim defina $A := \{g \in L_p : 0 \leqslant g \leqslant f\}$ e $B := \{h \in L_p : 0 \leqslant h \leqslant cf\}$, destas definições podemos concluir sem dificuldades que $cA = B$, portanto

$$\begin{aligned} G^+(cf) &= \sup\{G(h) \in \mathbb{R} : h \in B\} = \sup\{G(cg) \in \mathbb{R} : g \in A\} \\ &= c \sup\{G(g) \in \mathbb{R} : g \in A\} = c\,G^+(f) \end{aligned} \tag{3.2.52}$$

Sejam agora $f_i \in L_p \cap (\mathbb{R}_+)^X$, $(i = 1, 2)$, e $g_i \in L_p : 0 \leqslant g_i \leqslant f_i$, temos $G(g_1) + G(g_2) = G(g_1 + g_2) \leqslant G^+(f_1 + f_2)$, daí vem $G^+(f_1) + G^+(f_2) \leqslant G^+(f_1 + f_2)$. Por outro lado seja $0 \leqslant g \leqslant f_1 + f_2$, defina $g_1 := \max\{0, g - f_2\}$ e $g_2 := \min\{f_2, g\}$, notemos que $g = g_1 + g_2$

I. Se $(g - f_2)(x) < 0$, então $(g_1 + g_2)(x) = 0 + g(x) = g(x)$;

II. Se $(g - f_2)(x) \geqslant 0$, então $(g_1 + g_2)(x) = (g - f_2)(x) + f_2(x) = g(x)$

Além disso $G(g) \leqslant G^+(f_1) + G^+(f_2)$, para toda $g \in L_p : 0 \leqslant g \leqslant f_1 + f_2$, logo $G^+(f_1 + f_2) \leqslant G^+(f_1) + G^+(f_2)$, consequentemente $G^+(f_1 + f_2) = G^+(f_1) + G^+(f_2)$, para toda $f_i \in L_p \cap (\mathbb{R}_+)^X$.

Para $f \in L_p$ arbitrário defina

$$G^+(f) = G^+(f^+) - G^+(f^-), \tag{3.2.53}$$

seguidamente mostremos que G^+ é limitado. Notemos primeiramente que $G(f) \leqslant |G(f)| \leqslant C\|f\|_p$, para toda $f \in L_p$, o que acarreta $|G^+(f)| \leqslant C\|f\|_p$, para toda $f \in L_p \cap (\mathbb{R}_+)^X$ e visto que $|f| = f^- + f^+$, para toda $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, temos

$$\forall f \in L_p \left(|G^+(f)| \leqslant |G^+(f^-)| + |G^+(f^+)| \leqslant C\|f^-\|_p + C\|f^+\|_p \leqslant 2C\|f\|_p\right) \tag{3.2.54}$$

Imediatamente mostremos que dadas $f, g \in L_p$, tem-se

$$G^+(f + g) = G^+(f) + G^+(g) \tag{3.2.55}$$

observando que

$$G^+(f+g) = G^+((f+g)^+) - G^+((f+g)^-); \tag{3.2.56}$$
$$G^+(f) + G^+(g) = G^+(f^+ + g^+) - G^+(f^- + g^-), \tag{3.2.57}$$

é suficiente mostrar que $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$ e usar a linearidade de G^+ provada anteriormente para funções não-negativas em L_p, o que mostra que G^+ é um funcional linear limitado em L_p. Em seguida definamos

$$G^- := G^+ - G, \tag{3.2.58}$$

desta definição decorre que G^- é limitada e linear pois G, G^+ o são, além disso é não-negativa uma vez que $G^+ \geqslant G$ e é conspícuo que $G = G^+ - G^-$ o que finaliza a prova. □

3.3 Teorema da representação de Riesz

Teorema 3.3.1. (Teorema da representação de Riesz [5] ($p = 1$)) *Se $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ é um espaço de medida σ-finito e G um funcional linear limitado em L_1, então existe uma função mensurável $g \in L_\infty$, tal que $G(f) = \int fg\, d\mu$, além disso $\|G\| = \|g\|_\infty$ e G é um funcional positivo se g for não-negativa.*

Prova. Inicialmente admitamos que $\mu(X) < +\infty$ e G um funcional linear limitado positivo em seguida definamos $\lambda(E) = G(\chi_E)$ e verifiquemos posteriormente que λ é uma medida em $\boldsymbol{X}$, claramente $\lambda(\emptyset) = 0$, $\lambda(E) \geqslant 0$, para todo $E \in \boldsymbol{X}$ e que λ é finitamente aditiva, para provar a aditividade contável provaremos que a função λ é contínua de baixo, i.e., dada uma sequência crescente $(E_n) : E_n \uparrow E \in \boldsymbol{X}$ então $\lambda(E) = \lim_n \lambda(E_n)$, para este fim observemos

$$0 \leqslant |\lambda(E) - \lambda(E_n)| = |G(\chi_E - \chi_{E_n})| \leqslant \|G\| \|\chi_E - \chi_{E_n}\|_1, \tag{3.3.1}$$

visto que $\mu(X) < \infty$, $|\chi_{E_n}| \leqslant 1$ e $\lim_n \chi_{E_n} = \chi_E$ em todo lugar, podemos inferir que $\lim_n \|\chi_E - \chi_{E_n}\|_1 = 0$, o que prova o requerido. Seja $E \in \boldsymbol{X} : \mu(E) = 0$ temos de

$$0 \leqslant |\lambda(E)| = |G(\chi_E)| \leqslant \|G\|\mu(E) = 0, \tag{3.3.2}$$

que $\lambda(E) = 0$, conformemente tem-se $\lambda \ll \mu$ e do teorema de Radon-Nikodým segue que existe $g \in M^+$, tal que $G(\chi_E) = \lambda(E) = \int_E g\, d\mu = \int \chi_E g\, d\mu$, para todo $E \in \boldsymbol{X}$, seja $\psi = \sum_{i\in I} a_i \chi_{\psi^{-1}(a_i)}$ (I finito) uma função simples arbitrária, temos

$$\begin{aligned} G(\psi) &= G\left(\sum_{i\in I} a_i \chi_{\psi^{-1}(a_i)}\right) = \sum_{i\in I} a_i G(\chi_{\psi^{-1}(a_i)}) = \sum_{i\in I} a_i \int \chi_{\psi^{-1}(a_i)} g\, d\mu \\ &= \int \sum_{i\in I} a_i \chi_{\psi^{-1}(a_i)} g\, d\mu = \int \psi g\, d\mu \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Seja $f \in M^+ \cap L_1$ arbitrária podemos determinar uma sequência crescente de funções simples $(\psi_n) \subseteq M^+$, que converge a f em todo lugar, novamente $\psi \leqslant f$, e $\lim_n \psi_n = f$ em

[5]Frigyes Riesz (22 de Janeiro de 1880 – 28 de Fevereiro de 1956) foi um matemático húngaro conhecido por ter feito contribuições fundamentais para a análise funcional.

todo lugar logo podemos inferir de $|G(f)-G(\psi_n)| \leqslant \|G\|\|f-\psi_n\|_1$ que $\lim_n G(\psi_n) = G(f)$, destes últimos resultados e do teorema da convergência monótona decorre

$$G(f) = \lim_n G(\psi_n) = \lim \int \psi_n g \, d\mu = \int f g \, d\mu, \tag{3.3.4}$$

para f arbitrária podemos usar a identidade $f = f^+ - f^-$ e considerar duas sequências $(\psi_n^+), (\psi_n^-) \subseteq M^+$ monótonas crescentes de funções simples convergindo para f^+ e f^- em todo lugar, respectivamente. Temos pelo mesmo motivo
(3.3.5)

$$\begin{aligned} G(f) = G(f^+) - G(f^-) &= \lim_n G(\psi_n^+) - \lim_n G(\psi_n^-) = \lim_n \int \psi_n^+ g \, d\mu - \lim_n \int \psi_n^- g \, d\mu \\ &= \int f^+ g \, d\mu - \int f^- g \, d\mu = \int (f^+ - f^-) g \, d\mu = \int f g \, d\mu. \end{aligned}$$

Se G é um funcional linear limitado em L_1 qualquer (ainda supondo que $\mu(X) < \infty$) use a decomposição $G = G^+ - G^-$, e para cada um dos funcionais G^+, G^-, temos do raciocínio anterior duas funções $g^+, g^- \in M^+$ associadas aos funcionais lineares positivos G^+, G^-, respectivamente.

Seja agora G um funcional linear positivo e limitado em L_1 e μ σ-finita, segue das definições que existe uma sequência $(X_n) \subseteq \boldsymbol{X} : X_n \uparrow X$ e $\mu(X_n) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$, em seguida definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ as funções $\lambda_n(E) := G(\chi_{E \cap X_n}),\ \mu_n(E) := \mu(E \cap X_n)$, mostremos que λ_n é uma medida em $\boldsymbol{X}$, seja portanto $(E_k) \subseteq \boldsymbol{X} : E_k \uparrow E \in \boldsymbol{X}$, temos

$$|\lambda_n(E) - \lambda_n(E_k)| = |G((\chi_E - \chi_{E_k})\chi_{X_n})| \leqslant \|G\|\|(\chi_E - \chi_{E_k})\chi_{X_n}\|_1, \tag{3.3.6}$$

posteriormente note que $\lim_k \|(\chi_E - \chi_{E_k})\chi_{X_n}\|_1 = 0$, pois

$$\|(\chi_E - \chi_{E_k})\chi_{X_n}\|_1 = \int |(\chi_E - \chi_{E_k})\chi_{X_n}| \, d\mu = \int |\chi_E - \chi_{E_k}| \, d\mu_n, \tag{3.3.7}$$

e visto que $\mu_n(X) < \infty$, $|\chi_{E_k}| \leqslant 1$ e $\lim_k \chi_{E_n} = \chi_E$ em todo lugar. Podemos concluir como anteriormente que $\lambda_n \ll \mu_n$, e daí determinar uma função $g_n \in M^+$ tal que $\lambda_n(E) = \int_E g_n \, d\mu_n = \int \chi_E g_n \chi_{X_n} \, d\mu$, para todo $E \in \boldsymbol{X}$, em seguida fazendo $h_n = g_n \chi_{X_n}$, podemos inferir que $h_n \in M^+$ e $h_n(X \setminus X_n) = \{0\}$, fazendo $\tilde{g}_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} h_i$, podemos concluir de forma similar que

$$\int h_n \, d\mu = \int \tilde{g}_n \, d\mu, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.3.8}$$

Seja $f \in M^+ \cap L_1$, podemos determinar uma sequência $(\varphi_k) \subseteq M^+$ de funções simples monótona crescente que converge a f em todo lugar, pelo teorema da convergência monótona e do fato $\lim_k \|(f - \varphi_k)\chi_{X_n}\|_1 = 0$, temos

$$G(f\chi_{X_n}) = \lim_k G(\varphi_k \chi_{X_n}) = \lim_k \int \varphi_k \tilde{g}_n \, d\mu = \int f \tilde{g}_n \, d\mu, \tag{3.3.9}$$

fazendo $\lim_n \tilde{g}_n = g$, temos analogamente

$$\lim_n G(f\chi_{X_n}) = \lim_n \int f \tilde{g}_n \, d\mu = \int f g \, d\mu, \tag{3.3.10}$$

verifiquemos que $\lim_n G(f\chi_{X_n}) = G(f)$, para este fim oservemos

$$|G(f) - G(f\chi_{X_n})| \leqslant \|G\|\|f(1-\chi_{X_n})\|_1, \tag{3.3.11}$$

novamente $f(1-\chi_{X_n}) \leqslant f$ e $\lim_n f(1-\chi_{X_n}) = 0$ em todo lugar, logo $\lim_n \|f(1-\chi_{X_n})\|_1 = 0$ de (3.3.10) vem

$$G(f) = \int fg\,d\mu,\ \forall f \in M^+ \cap L_1, \tag{3.3.12}$$

como anteriormente podemos usar a linearidade de G e a decomposição $G = G^+ - G^-$ para concluir que (3.3.12) é válida para qualquer funcional G em L_1 e qualquer $f \in L_1$, concluindo assim a prova da existência. Finalmente resta-nos provar que $\|G\| = \|g\|_\infty$ cuja prova será dividida em duas partes

I. $\|g\|_\infty \leqslant \|G\|$. Para $c \in (1, +\infty)$ defina

$$f_c := \operatorname{sign}(g)\chi_{\{|g| \geqslant c\|G\|\}},\ E_c := \{|g| \geqslant c\|G\|\} \tag{3.3.13}$$

e em seguida observe que

$$G(f_c) \leqslant |G(f_c)| \leqslant \|G\|\mu(E_c), \tag{3.3.14}$$

observe também que

$$G(f_c) = \int_{E_c} |g|\,d\mu \geqslant c\|G\|\mu(E_c), \tag{3.3.15}$$

destas últimas desigualdades temos

$$c\|G\|\mu(E_c) \leqslant G(f_c) \leqslant \|G\|\mu(E_c) \tag{3.3.16}$$

que só será válida se $\mu(E_c) = 0$, posteriormente defina a sequência $(E_{c_n}) : c_n = 1 + \frac{1}{n}$ e faça $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{c_n}$, como $\mu(E_{c_n}) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ decorre que $\mu(N) = 0$ e $|g(x)| \leqslant \|G\|$, para todo $x \in X \setminus N$, daí vem $\sup(X \setminus N) \leqslant \|G\|$, consequentemente $\|g\|_\infty \leqslant \|G\|$.

II. $\|G\| \leqslant \|g\|_\infty$. Se $g \in L_\infty$, então para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $N_n \in \boldsymbol{Z}_\mu := \{N \in \boldsymbol{X} : \mu(N) = 0\}$ tal que $\sup|g|(X \setminus N_n) \leqslant \|g\|_\infty + \frac{1}{n}$, seguidamente defina $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$ claramente $\mu(N) = 0$, além do mais

$$\begin{aligned} x \in X \setminus N \Longrightarrow x \in X \setminus N_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow |g|(x) \leqslant \|g\|_\infty + \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \Longrightarrow \sup|g|(X \setminus N) \leqslant \|g\|_\infty, \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

consequentemente dado $f \in L_1 : \|f\|_1 \leqslant 1$ temos

$$\begin{aligned} |G(f)| = \left|\int fg\,d\mu\right| = \left|\int_N fg\,d\mu + \int_{X\setminus N} fg\,d\mu\right| \leqslant \int_{X\setminus N} |fg|\,d\mu \\ \leqslant \|f\|_1\|g\|_\infty = \|g\|_\infty, \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

o que prova o requerido.

□

Teorema 3.3.2. (Teorema da representação de Riesz $(p > 1)$**)** *Se* $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ *é um espaço de medida qualquer e* G *um funcional linear limitado em* $L_p\,(p > 1)$*, então existe uma função mensurável* $g \in L_q$*,* $q = p/(p+1)$*, tal que* $G(f) = \int fg\,d\mu$*, além disso* $\|G\| = \|g\|_q$ *e* G *é um funcional positivo se* g *for não-negativa.*

Prova. A demonstração da existência para este caso é essencialmente a mesma para o caso em que $p = 1$, portanto resta-nos provar que se $G(f) = \int fg\,d\mu$, então $g \in L_q$. Procederemos da seguinte maneira, demontraremos para o caso em que $\mu(X) < \infty$ e G um funcional linear limitado positivo, em seguida provaremos para μ σ-finita, e finalmente no caso de μ ser arbitrária provaremos que o funcional G se anula no complementar de um conjunto σ-finito. Admitamos inicialmente que $\mu(X) < \infty$ e G seja positivo, definamos $g_n = \operatorname{sign}(g)|g|^{\frac{q}{p}}\chi_{\{|g|<n\}}$, verifiquemos que $g_n \in L_p$, para todo $n \in \mathbb{N}$, para este fim notemos que

$$\int |g_n|^p\,d\mu = \int_{\{|g|<n\}} |g|^q\,d\mu = n^q\mu(\{|g| < n\}) < \infty, \tag{3.3.19}$$

em seguida provemos que $g \in L_q$, para isto basta observar

$$\int_{\{|g|<n\}} |g|^{\frac{q}{p}+1}\,d\mu = G(g_n) \leqslant \|G\| \left(\int_{\{|g|<n\}} |g|^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.3.20}$$

o que implica $\|g\chi_{\{|g|<n\}}\|_q \leqslant \|G\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue do teorema da convergência monótona que $g \in L_q$ e $\|g\|_q \leqslant \|G\|$, e também segue da desigualdade de Hölder que $|G(f)| \leqslant \|g\|_q$, para toda $f \in L_p$ tal que $\|f\|_p \leqslant 1$, consequentemente $\|G\| = \|g\|_q$. Posteriormente admitamos μ σ-finita, portanto existe uma sequência $(X_k) \subset \boldsymbol{X} : X_k \uparrow X : \mu(X_k) < \infty$, para todo $k \in \mathbb{N}$, fazendo $\mu_k(E) = \mu(E \cap X_k)$, temos

$$\int_{\{|g|<n\}} |g|^q\,d\mu_k = G(g_n\chi_{X_k}) \leqslant n^q\mu_k(\{|g| < n\}) < \infty, \tag{3.3.21}$$

como anteriormente podemos inferir que $\|g\chi_{X_k}\chi_{\{|g|<n\}}\|_q \leqslant \|G\|$, para todo $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, do teorema da convergência monótona vem $\|g\chi_{X_k}\|_q \leqslant \|G\|$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e novamente pelo mesmo vem $\|g\|_q \leqslant \|G\|$, a outra desigualdade é dada de forma idêntica ao caso anterior. No caso em que μ é arbitrária considere a sequência de funções $h_n \in L_p$: $\|G\|(1 - \frac{1}{n}) < |G(h_n)| \leqslant \|G\|$, fazendo $f_n = |h_n|\|h_n\|_p^{-1}$, temos que

$$\|G\|(1 - 1/n) < G(f_n) \quad \text{e} \quad \|f_n\| = 1, \tag{3.3.22}$$

em seguida precisaremos da

Afirmação 3.3.1. *Se* $f \in L_p(X, \boldsymbol{X}, \mu)$, $(1 \leqslant p < \infty)$*, então* $\{|f| \neq 0\}$ *é* σ*-finito, i.e., existe uma família* $(A_n) \subseteq \boldsymbol{X} : \{|f| \neq 0\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *e* $\mu(A_n) < \infty$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Prova. Definamos $A_n := \{n^{-1/p} < |f|\}$, claramente $\{|f| \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e

$$\mu(A_n) = \frac{n}{n}\mu(A_n) \leqslant n \int_{A_n} |n^{-1/p}f|^p\,d\mu \leqslant n\|n^{-1/p}f\|_p^p < \infty, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.3.23}$$

□

Em seguida provemos que dada uma família de funções $(f_n) \subseteq L_p$, existe um conjunto X_0 σ-finito tal que $f_n(X \setminus X_0) = \{0\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, para cada f_n, $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $\{f_n \neq 0\}$ é σ-finito, i.e., existe uma sequência $(X_{0,n,k})_{k\in\mathbb{N}} : \{f_n \neq 0\} \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_{0,n,k}$ e $\mu(X_{0,n,k}) < \infty$, conformemente fazendo $X_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_{0,n,k}$ claramente este é σ-finito e $X \setminus X_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (X \setminus X_{0,n,k}) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n = 0\}$. Sejam agora $E \in \boldsymbol{X} : \mu(E) < \infty$ e $E \cap X_0 = \emptyset$ e $t \in \mathbb{R}_+$, temos daí

$$\|f_n \pm t\chi_E\|_p \leqslant (1 + \mu(E)t^p)^{1/p}, \tag{3.3.24}$$

além disto temos

$$G(f_n) + G(\pm t\chi_E) \leqslant G(f_n \pm t\chi_E), \tag{3.3.25}$$

de (3.3.22), (3.3.24) e (3.3.25) vem

$$|G(t\chi_E)| \leqslant \|G\| \left[(1 + t^p\mu(E))^{1/p} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right], \tag{3.3.26}$$

fazendo $n \to \infty$ e dividindo o limite por $t > 0$ vem

$$G(\chi_E) \leqslant \frac{(1 + t^p\mu(E))^{1/p} - 1}{t}, \tag{3.3.27}$$

posteriormente aplicando a regra de L'Hospital para $t \to 0^+$ decorre que $G(\chi_E) = 0$, em seguida defina $\lambda_0(F) := G(\chi_{F\cap X_0})$, $\mu_0(F) := \mu(F \cap X_0)$, para todo $F \in \boldsymbol{X}$, não é difícil ver que λ_0, μ_0 são σ-finitas e $\lambda_0 \ll \mu_0$, do teorema de Radon-Nikodým decorre que existe $h_0 \in M^+$ tal que $\lambda_0(F) = \int_F h_0 \, d\mu_0 = \int \chi_F h_0 \chi_{X_0} \, d\mu$, para todo $F \in \boldsymbol{X}$, prova-se como anteriormente usando uma sequência de funções simples convergindo a $f \in M^+(X, \boldsymbol{X})$ em todo lugar, que $G(f\chi_{X_0}) = \int f h_0 \chi_{X_0} \, d\mu$ e que $G(f\chi_{X\setminus X_0}) = 0$, fazendo $g = h_0\chi_{X_0}$, acarreta

$$G(f) = G(f\chi_{X_0}) + G(f\chi_{X\setminus X_0}) = \int f h_0 \chi_{X_0} \, d\mu = \int f g \, d\mu, \forall f \in M^+(X, \boldsymbol{X}), \tag{3.3.28}$$

para $f \in L_p$ arbitária faça $f = f^+ - f^-$ e use a linearidade de G, para G arbitrário use a decomposição $G = G^+ - G^+$, e finalmente $\|G\| = \|g\|_q$, cuja prova é idêntica ao caso em que μ é σ-finita, pois X_0 é um conjunto σ-finito. $\square$

Capítulo 4

Construção de medidas

Neste capítulo será abordado a definição de medida exterior e suas propriedades, os teoremas de extensão de Carathéodory e de Hahn, conceitos estes que permite extensões de medidas em álgebras à σ-álgebras.

Estamos interessados no problema de extensão de uma medida μ a priori definida em uma álgebra $\boldsymbol{A}$ de subconjuntos de um espaço X, a uma uma medida μ^* definida em σ-álgebra $\boldsymbol{A}^* \supseteq \boldsymbol{A}$.

Seja μ uma medida definida em uma álgebra de subconjuntos de um conjunto X, definimos a medida exterior como sendo a função $\mu^* \in \overline{\mathbb{R}}^X$ dada por

$$\mu^*(S) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(S_n) \in \overline{\mathbb{R}}_+ : (S_n) \subseteq \boldsymbol{A},\ S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right\}, \forall S \in 2^X, \tag{4.0.1}$$

chamada de medida exterior. Apesar do nome, em geral esta função não é uma medida, no entanto possui algumas propriedades reminiscentes de medida, o próximo lema elucida este fato.

Lema 4.0.1. *A função μ^* possui as seguintes propriedades:*

I. $0 \leqslant \mu^*(E)$, $\forall E \in 2^X$*;*

II. $\mu^*(\emptyset) = 0$*;*

III. $\mu^*(E) \leqslant \mu^*(F)$, $\forall E, F \in 2^X : E \subseteq F$*;*

IV. $\mu^*(E) = \mu(E)$, $\forall E \in \boldsymbol{A}$*;*

V. $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$, $\forall (E_n) \subseteq 2^X$.

Prova. I. É suficiente ver que as somas $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(S_n)$ são não negativas uma vez que as medidas o são, logo sendo 0 uma cota inferior decorre que o ínfimo $\mu^*(S) \geqslant 0$;

II. Basta considerar a sequência $(S_n) : S_n = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e usar a definição (4.0.1) e o item anterior;

III. Observe que toda cobertura $(F_n) \subseteq \boldsymbol{A}$ de $F \in 2^X$ é uma cobertura de $E \subseteq F$, logo $\mu^*(E) \leqslant \mu^*(F)$;

IV. Seja $E \in A$ considerando a sequência $(E_n) \subseteq \boldsymbol{A} : E_1 = E$ e $E_n = \emptyset$, para todo $n > 1$, decorre que $\mu^*(E) \leqslant \mu(E)$, reciprocamente considerando uma cobertura arbitrária $(E_n) \subseteq \boldsymbol{A}$ de E, sendo μ uma medida em $\boldsymbol{A}$ decorre $\mu(E) = \mu(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, daí vem $\mu(E) \leqslant \mu^*(E)$.

V. Seja $(E_n) \subseteq 2^X$ uma sequência de conjuntos, admitamos que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, primeiramente observemos que se $\mu^*(E_n) = \infty$ para algum $n \in \mathbb{N}$, a desigualdade é óbvia, caso contrário seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos uma cobertura $(E_{n,k})_k \subseteq \boldsymbol{A}$ de E_n, tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{n,k}) < 2^{-n}\varepsilon + \mu^*(E_n)$, como a coleção $\{E_{n,k} \subset \boldsymbol{A} : (n,k) \in \mathbb{N}^2\}$ é enumerável e cobre E a definição de μ^* acarreta $\mu^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{n,k}) \leqslant \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$, a arbitrariedade de ε prova a desigualdade.

□

A partir de μ^*, podemos construir uma subcoleção $\boldsymbol{A}^*$ de 2^X cujos membros $A \in \boldsymbol{A}^*$ sastisfazem $\mu^*(E) = \mu^*(E \setminus A) + \mu^*(E \setminus A)$, para todo $E \in 2^X$, estes elementos são chamados μ^*-mensuráveis.

Teorema 4.0.1. (Teorema de extensão de Carathéodory [1]) *A terna* $(X, \boldsymbol{A}^*, \mu^*)$ *é um espaço de medida tal que* $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A}^*$ *e* μ^* *coincide com* μ *em* $\boldsymbol{A}$.

Prova. A definição de $\boldsymbol{A}^*$ mostra que $\emptyset$, X, $X \setminus E \in \boldsymbol{A}^*$, para todo $E \in \boldsymbol{A}^*$, seguidamente mostremos que $\boldsymbol{A}^*$ é estável com respeito a intersecções, para tal consideremos $E, F \in \boldsymbol{A}^*$, $S \in 2^X$ das relações

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap E) + \mu^*(S \setminus E),\ \mu^*(S \cap E); \tag{4.0.2}$$

$$\mu^*(S \cap E) = \mu^*(S \cap E \cap F) + \mu^*((S \cap E) \setminus F); \tag{4.0.3}$$

$$\mu^*(S \setminus (E \cap F)) = \mu^*((S \cap E) \setminus E) + \mu^*(S \setminus E), \tag{4.0.4}$$

podemos inferir que $\mu^*(S) = \mu^*(S \cap E \cap F) + \mu^*(S \setminus (E \cap F))$, o que prova que $E \cap F \in \boldsymbol{A}^*$, em seguida provemos que μ^* é finitamente aditiva

$$\begin{aligned}\mu^*(E \cup F) &= \mu^*((E \cup F) \cap E) + \mu^*((E \cup F) \setminus E) = \\ &= \mu^*(E) + \mu^*(F),\ \forall E, F \in \boldsymbol{A}^* : E \cap F = \emptyset\end{aligned} \tag{4.0.5}$$

Mostremos agora que $\boldsymbol{A}^*$ é uma σ-álgebra, para este fim consideremos $(E_n) \subseteq \boldsymbol{A}^*$ e $S \in 2^X$ e façamos $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, para seguirmos precisaremos da

Afirmação 4.0.1. *Sejam* $(A_n) \subseteq 2^X$ *uma sequência crescente e* $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. *Então* A *pode ser escrito como uma reunião enumerável de parcelas* B_n *mutualmente disjuntas.*

Prova. Basta fazer $B_1 = A_1$ e $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $n > 1$. □

Na afirmação anterior faça $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$, imediatamente temos uma sequência $(F_n) \subseteq \boldsymbol{A}^*$ de termos mutualmente disjuntos tal que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, definindo $G_n = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ e notando que $\boldsymbol{A}^*$ é uma álgebra podemos concluir que $G_n \in \boldsymbol{A}^*$, para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $\mu^*(S) = \mu^*(S \cap G_n) + \mu^*(S \setminus G_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(S \cap F_k) + \mu^*(S \setminus G_n)$, fazendo $n \to \infty$ e notando que $\mu^*(S \setminus G_n) \geqslant \mu^*(S \setminus E)$, pois $G_n \subseteq E$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\mu^*(S) \geqslant$

[1]Constantin Carathéodory (13 de Setembro de 1873 – 2 de Fevereiro de 1950) foi um matemático alemão de origem grega, que fez contribuições significativas para a teoria de funções de uma variável real, cálculo das variações e teoria da medida.

$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(S \cap G_n) + \mu^*(S \setminus E)$ e do item M_V do lema imediatamente anterior temos as desigualdades

$$\text{(4.0.6)} \qquad \mu^*(S) \leqslant \mu^*(S \cap E) + \mu^*(S \setminus E),\ \mu^*(S \cap E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap G_n),$$

podemos inferir que $\mu^*(S) = \mu^*(S \cap E) + \mu^*(S \setminus E)$, para todo $S \in 2^X$, i.e., $E \in \boldsymbol{A}^*$, provando o requerido. Finalmente resta-nos provar que $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A}^*$, sejam $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $E \in \boldsymbol{A}$ e $B \in 2^X$, podemos considerar uma sequência $(B_n) \subseteq \boldsymbol{A} : B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leqslant \mu^*(B) + \varepsilon$, daí e do item M_V do lema 4.0.1, temos

$$\text{(4.0.7)} \quad \mu^*(B) = \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \setminus E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \cap E) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \setminus E) =$$
$$\stackrel{1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(B_n \cap E) + \mu(B_n \setminus E)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leqslant \mu^*(B) + \varepsilon,$$

em que a iqualdade destacada por 1 é validada pelos testes de comparação de séries ou somas de séries convergentes, a arbitrariedade de $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ prova que $E \in \boldsymbol{A}^*$, consequentemente $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A}^*$. □

Teorema 4.0.2. (Teorema de extensão de Hahn) *Se μ for σ-finita, então esta admitirá uma única extensão μ^* em $\boldsymbol{A}^*$.*

Prova. Seja ν uma outra extensão, inicialmente admitamos que $\mu(X) < \infty$, por conseguinte temos $\mu^*(X) = \nu(X) = \mu(X) < \infty$, pois $X \in \boldsymbol{A}$. Seja agora $A \in \boldsymbol{A}^*$ e $(A_n) \subseteq \boldsymbol{A} : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, temos $\nu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, pois ν concorda com μ em $\boldsymbol{A}$, a arbitrariedade da cobertura mostra a desigualdade $\mu^*(A) \leqslant \nu(A)$, para todo $A \in \boldsymbol{A}^*$, como μ^*, ν são aditivas temos que $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = \mu(X) = \nu(A) + \nu(X \setminus A)$, da desigualdade anterior podemos inferir $0 \leqslant \nu(A) - \mu^*(A) = \mu^*(X \setminus A) - \nu(X \setminus A) \leqslant 0$, consequentemente $\mu^*(A) = \nu(A)$, para todo $A \in \boldsymbol{A}^*$. Finalmente suponhamos μ σ-finita, sejam $A \in \boldsymbol{A}^*$ e $(X_n) \subseteq \boldsymbol{A} : X_n \uparrow X : \mu(X_n) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos portanto

$$\text{(4.0.8)} \qquad \mu^*(A) = \lim_n \mu^*(A \cap A_n) = \lim_n \nu(A \cap A_n) = \nu(A),\ \forall A \in \boldsymbol{A}^*,$$

pois $A \cap A_n \in \boldsymbol{A}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Capítulo 5

Medidas produto

Neste capítulo estamos interessados em construir uma medida em um produto de espaços mensuráveis, elucidaremos algumas propriedades de integrais e finalizaremos com os teoremas de Tonelli e Fubini.

Definição 5.0.1. *Seja X um conjunto, a classe $\mathcal{A} \in 2^X$ tal que $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ e é estável com respeito as operações de intersecção, união e complementação de conjuntos é chamada de álgebra. Um semi-anel $\mathcal{S} \in 2^X$ é uma classe tal que $\emptyset \in \mathcal{S}$, é estável com relação a operação de intersecção e dados $A, B \in \mathcal{S}$ tais que $A \subseteq B$ o conjunto $B \setminus A$ é uma união finita e de elementos mutualmente disjuntos de $\mathcal{S}$, caso $X \in \mathcal{S}$ esta será chamada de semi-álgebra.*

Lema 5.0.1. *A fim de que uma classe $\mathcal{A}$ seja uma álgebra de subconjuntos de X, é necessário e suficiente que $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ e $A \setminus B \in \mathcal{A}$, para quaisquer $A, B \in \mathcal{A}$.*

Prova. Notavelmente é uma condição necessária, pois se $\mathcal{A}$ é álgebra e $A, B \in \mathcal{A}$, então $A \setminus B \in \mathcal{A}$ e claramente $\emptyset, X \in \mathcal{A}$. Reciprocamente é suficiente observar que $A \cap B = A \setminus (X \setminus B) \in \mathcal{A}$, logo $A \cup B = X \setminus \big((X \setminus A) \cap (X \setminus B)\big) \in \mathcal{A}$. □

Em seguida provaremos um resultado auxiliar

Lema 5.0.2. *Seja $\{\{S_{\eta,\theta}\}_{\theta\in\Theta_\eta}\}_{\eta\in H}$, em que $\{\Theta_\eta\}_{\eta\in H}$ uma famíla arbitrária indexada pelo conjunto arbitrário $H \neq \emptyset$ constituída de conjuntos $\Theta_\eta \neq \emptyset$ de índices. Então vale* [1]

$$I = \bigcap_{\eta\in H} \bigcup_{\theta\in\Theta_\eta} S_{\eta,\theta} = \bigcup_{\upsilon\in\Upsilon} \bigcap_{\eta\in H} S_{\eta,\upsilon(\eta)} = U, \tag{5.0.1}$$

em que $\Upsilon = \prod_{\eta\in H} \Theta_\eta$. Além disso se $\{S_{\eta,\theta}\}_{\theta\in\Theta_\eta}$ for uma família disjunta para todo $\eta \in H$, então U é uma união disjunta.

Prova. Se $x \in I$, então $x \in \bigcup_{\theta\in\Theta_\eta} S_{\eta,\theta}$, para todo $\eta \in H$. Defina $\Theta_\eta(x) = \{\theta \in \Theta_\eta : x \in S_{\eta,\theta}\}$ e note que $\Theta_\eta(x) \neq \emptyset$, para todo $\eta \in H$, logo $\prod_{\eta\in H} \Theta_\eta(x) \neq \emptyset$. Portanto existe $\upsilon \in \prod_{\eta\in H} \Theta_\eta(x) \subseteq \Upsilon$ tal que $\upsilon(\eta) \in \Theta_\eta(x)$, para todo $\eta \in H$, i.e., $x \in S_{\eta,\upsilon(\eta)}$, para todo $\eta \in H$, em consequência $x \in U$. Reciprocamente se $x \in U$, então existe $\upsilon \in \Upsilon$ tal que $x \in \bigcap_{\eta\in H} S_{\eta,\upsilon(\eta)}$, para todo $\eta \in H$, daí vem que para todo $\eta \in H$ existe $\theta = \upsilon(\eta) \in \Theta_\eta$ tal que $x \in S_{\eta,\theta}$, o que prova que $x \in I$. Finalmente suponha por redução ao absurdo que existam $\upsilon, \varphi \in \Upsilon$ distintos tais que $\bigcap_{\eta\in H} S_{\eta,\upsilon(\eta)} \cap \bigcap_{\eta\in H} S_{\eta,\varphi(\eta)} \neq \emptyset$, temos

$$\emptyset \neq \bigcap_{\eta\in H} S_{\eta,\upsilon(\eta)} \cap \bigcap_{\eta\in H} S_{\eta,\varphi(\eta)} = \bigcap_{\eta\in H} \big(S_{\eta,\upsilon(\eta)} \cap S_{\eta,\varphi(\eta)}\big) \subseteq S_{\zeta,\upsilon(\zeta)} \cap S_{\zeta,\varphi(\zeta)}, \forall\zeta \in H, \tag{5.0.2}$$

[1] cf. fórmulas de distributividade pág. 107 proposição 8. em *Theory of Sets* por Nicolas Bourbaki.

em virtude de υ e φ serem distintos decorre que existe $\eta \in H$ tal que $\upsilon(\eta), \varphi(\eta) \in \Theta_\eta$ são distintos e tais que $S_{\eta,\upsilon(\eta)} \cap S_{\eta,\varphi(\eta)} \neq \emptyset$, o que contradiz a suposição de que $\{S_{\eta,\theta}\}_{\theta\in\Theta_\eta}$ é uma família composta de elementos mutualmente exclusivos. $\square$

Lema 5.0.3. *Seja $\mathcal{S}$ uma semi-álgebra de subconjuntos de um conjunto X. Então a coleção $\mathcal{A}$ constituída de uniões finitas de elementos de $\mathcal{S}$ é uma álgebra de subconjuntos de X. Além disso cada elemento de $\mathcal{A}$ pode ser escrito como uma união de elementos mutualmente exclusivos em $\mathcal{S}$.*

Prova. Inicialmente notemos que toda semi-álgebra é tal que $\emptyset, X \in \mathcal{A}$, seguidamente sejam $A = \bigcup_{i=1}^m A_i, B = \bigcup_{j=1}^n B_j \in \mathcal{A}$, em que $A_i, B_j \in \mathcal{S}$, para $(i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n}(A_i \setminus B_j) \tag{5.0.3}$$

das hipóteses podemos escrever $A_i \setminus B_j = A_i \setminus (B_j \cap A_i)$ como uma união disjunta de elementos de $\mathcal{S}$ digamos $A_i \setminus B_j = \bigcup_{k=1}^l C_{i,j,k}$, em que $C_{i,j,k} \in \mathcal{S}$, consequentemente

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n}\bigcup_{k=1}^{l} C_{i,j,k}, \tag{5.0.4}$$

em seguida segue do lema (5.0.2) que $\bigcap_{j=1}^n \bigcup_{k=1}^l C_{i,j,k} \in \mathcal{A}$, pois $\mathcal{S}$ é estável com respeito a intersecções, em consequência $A \setminus B$ é uma união finita de elementos de $\mathcal{S}$, portanto $\mathcal{A}$ é uma álgebra. Consideremos agora $A \in \mathcal{A}$, como anteriormente admitamos $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$ defina $B_1 = A_1$ e $B_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right)$, para $k \in \{2,\dots,m\}$. Seguidamente observemos que

$$A_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{k-1}\big(A_k \setminus A_i\big) \tag{5.0.5}$$

cada $A_k \setminus A_i$ $(k = 2,\dots,m)$ é uma união finita e disjunta de elementos de $\mathcal{S}$, decorre do lema (5.0.2) que $\bigcap_{i=1}^{k-1}\big(A_k \setminus A_i\big)$ é uma união disjunta de elementos de $\mathcal{S}$, pois $\mathcal{S}$ é estável com respeito a intersecções, como os conjuntos B_k $(k = 1,\dots,m)$ são disjuntos dois a dois decorre que $\bigcup_{k=1}^m B_k$ é uma união disjunta de elementos de $\mathcal{S}$. $\square$

Lema 5.0.4. *Se μ é uma função finitamente (contavelmente) aditiva definida em uma semi-álgebra $\mathcal{S}$, então μ adimite uma única extensão finitamente (contavelmente) aditiva, à álgebra $\mathcal{A}$ cujos elmentos são uniões finitas de elementos de $\mathcal{S}$.*

Prova. Cada elemento de $\mathcal{A}$ pode ser escrito como uma união finita disjunta de elementos de $\mathcal{S}$, portanto seja $A \in \mathcal{A}$ arbitrário, em que $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$ e $A_i \in \mathcal{S}$, para todo $i \in \{1,\dots,m\}$. Em seguida escrevamos a extensão de μ por ϖ e definamos

$$\varpi(A) := \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i), \tag{5.0.6}$$

em seguida mostremos que ϖ está bem definida, i.e., independe da decomposição de A em elementos de $\mathcal{S}$. Para este fim consideremos uma outra decomposição $A = \bigcup_{j=1}^n B_j$

temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\mu(A_i) &= \sum_{i=1}^{m}\mu(A_i\cap A) = \sum_{i=1}^{m}\mu\left(A_i\cap\left(\bigcup_{j=1}^{m}B_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mu(A_i\cap B_j)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\mu(B_j\cap A_i) = \sum_{j=1}^{n}\mu\left(B_j\cap\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)\right) = \sum_{j=1}^{n}\mu(B_i\cap A)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\mu(B_i).
\end{aligned}
\tag{5.0.7}
$$

Imediatamente mostremos a unicidade, para tal seja π outra extensão e $A\in\mathcal{A}$ arbitrário como anteriormente, logo

$$
\varpi(A) = \sum_{i=1}^{m}\mu(A_i) = \pi(A). \tag{5.0.8}
$$

Finalmente mostremos que ϖ é contavelmente aditiva em $\mathcal{A}$ se μ o for em $\mathcal{S}$. Seja $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$, união disjunta de elementos de $\mathcal{S}$, como $A\in\mathcal{A}$ existe uma decomposição finita para A em termos de elementos de $\mathcal{S}$, portanto seja $A=\bigcup_{j=1}^{m}B_j$, daí temos

$$
\begin{aligned}
\varpi(A) &= \sum_{j=1}^{m}\varpi(B_j) = \sum_{j=1}^{m}\varpi\left(B_j\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\right) = \sum_{j=1}^{m}\varpi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_j\cap A_n)\right)\\
&\overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty}\varpi\big(B_j\cap A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\varpi\big(B_j\cap A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty}\varpi\left(A_n\cap\bigcup_{j=1}^{m}B_j\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\varpi(A_n\cap A) = \sum_{n=1}^{\infty}\varpi(A_n)
\end{aligned}
\tag{5.0.9}
$$

(1) pois $\bigcup_{n=1}^{\infty}\big(B_j\cap A_n\big) = B_j$ e ϖ é contavelmente aditiva em $\mathcal{S}$.

□

Definição 5.0.2. *Sejam $(X,\boldsymbol{X})$ e $(Y,\boldsymbol{Y})$ dois espaços mensuráveis. Então um conjunto da forma $A\times B$, $(A,B)\in\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$ é chamado de retângulo mensurável ou simplesmente de retângulo.*

Lema 5.0.5. *A coleção R de todos os retângulos mensuráveis é uma semi-álgebra de subconjuntos de $Z = X\times Y$.*

Prova. Claramente $\emptyset, Z\in R$, se $A_i\times B_i\in R, (i=1,2)$, então $\bigcap_{i=1,2}A_i\times B_i = A_1\cap A_2\times B_1\cap B_2\in R$, i.e., R é fechado com respeito a operação de intersecção de conjuntos. Seja $A\times B$ um retângulo qualquer, notemos

$$
Z = (A\times B)\sqcup[A\times(X\setminus B)]\sqcup[(X\setminus A)\times B]\sqcup[(X\setminus A)\times(X\setminus B)], \tag{5.0.10}
$$

i.e., podemos particionar o espaço Z em retângulos disjuntos, seja $C\times D\supseteq A\times B$, temos que $(C\times D)\setminus(A\times B) = C\times D\cap(Z\setminus A\times B)$ é uma união finita de retângulos disjuntos, o que finaliza a prova. □

Definição 5.0.3. *Denotaremos por $\boldsymbol{Z}_0$ a álgebra gerada por R e $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y} = \sigma(R)$ (σ-álgebra gerada por R).*

Observação 5.0.1. *A álgebra gerada por R coincide com a álgebra $\boldsymbol{A}$ cujos elementos são uniões finitas de R, pois $R \subseteq \boldsymbol{A}$ e todo elemento de $\boldsymbol{A}$ está em $\boldsymbol{Z}_0$.*

Dados dois espaços de medida $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$, $(Y, \boldsymbol{Y}, \nu)$ podemos definir uma função não-negativa aditiva real estendida em R (coleção de todos os retângulos) por $\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$, para todo $A \times B \in R$.

Afirmação 5.0.1. *A função π definida anteriormente é contavelmente aditiva em R.*

Demonstração. Seja $(A_j \times B_j)_j \subseteq R$ uma sequência disjunta de retângulos tal que $\bigsqcup_j A_j \times B_j \subseteq R$, i.e., $\bigsqcup_j A_j \times B_j$ é um retângulo digamos $A \times B$, notemos que para qualquer retângulo $C \times D$, temos $\chi_{C\times D}(x, y) = \chi_C(x)\chi_D(y)$, daí temos

$$\chi_A(x)\chi_B(y) = \chi_{A\times B}(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j \times B_j}(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y), \tag{5.0.11}$$

mantendo x fixo, integrando a equação (5.0.11) com respeito a ν e usando o teorema da convergência monótona temos:

$$\begin{aligned} \chi_A(x)\nu(B) &= \int \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}\, d\nu = \int \lim_n \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}\, d\nu \\ &= \lim_n \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}(x)\nu(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x)\nu(B_j), \end{aligned} \tag{5.0.12}$$

integrando (5.0.12) com um raciocínio análogo demonstra-se que $\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j)$. □

Temos portanto o

Teorema 5.0.1. *Existe uma medida em $\boldsymbol{Z}$.*

Prova. Segundo o lema (5.0.4) a função π definida anteriormente pode ser estendida a uma função não-negativa contavelmente aditiva definida na álgebra $\boldsymbol{Z}_0$, i.e., a uma medida em $\boldsymbol{Z}_0$, do teorema de extensão de Carathéodory esta pode ser estendida a uma medida π^* em $\boldsymbol{Z}_0^*$, a restrição desta última a $\boldsymbol{Z}$ prova a existência, a unicidade só é confirmada se μ e ν forem σ-finitas, pois neste caso π será σ-finita e segundo o teorema de extensão de Hahn a extensão π^* é única. □

Imediatamente definiremos a noção de seção que será útil nos próximos resultados.

Definição 5.0.4. *Sejam $E \subseteq Z = X \times Y$ e $f \in \overline{\mathbb{R}}^Z$ as x e y seções de E e f são respectivamente*

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\},\ E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}; \tag{5.0.13}$$

$$f_x(y) = f(x, y),\ f^y(x) = f(x, y). \tag{5.0.14}$$

Lema 5.0.6. *Se $E \in \boldsymbol{Z}$ e $f \in M(Z, \boldsymbol{Z})$ então*

$$E_x \in \boldsymbol{Y},\ E^y \in \boldsymbol{X}; \tag{5.0.15}$$

$$f_x \in M(X, \boldsymbol{X}),\ f^y \in M(Y, \boldsymbol{Y}). \tag{5.0.16}$$

Prova. Seja C a classe de subconjuntos $S \in Z$ tais que $S_x \in \boldsymbol{Y}$ para todo $x \in X$, mostremos que C é uma σ-álgebra de subconjuntos de Z que contem R, daí podemos inferir que $C = \boldsymbol{Z}$. Inicialmente mostremos que todo retângulo de R está em C, seja portanto $U \times V \in R$ temos que $(U \times V)_x \in \{\emptyset, V\} \subseteq \boldsymbol{Z}$, claramente $\emptyset_x = \emptyset, Z_x = Y \in \boldsymbol{Y}$ além disso se $A, B \in C$ então $(A \setminus B)_x \in C$, pois

$$(5.0.17)\qquad \begin{aligned}(A \setminus B)_x &= \{y \in Y : (x,y) \in A \setminus B\}\\ &= \{y \in Y : (x,y) \in A\} \cap \{y \in Y : (x,y) \in Z \setminus B\}\\ &= \{y \in Y : (x,y) \in A\} \cap (Y \setminus \{y \in Y : (x,y) \in B\})\\ &= A_x \setminus B_x,\end{aligned}$$

e $A_x, Y \setminus B_x \in \boldsymbol{Y}$, pois $\boldsymbol{Y}$ é uma σ-álgebra, consequentemente C é uma álgebra de subconjuntos de Y, seja agora (A_n) uma sequência de subconjuntos de C temos que $\bigcup_n A_n \subseteq C$, pois se $\{A_\vartheta\}_{\vartheta \in \Theta} \subseteq Z$ é uma coleção arbitrária, então $\left(\bigcup_{\vartheta \in \Theta} A_\vartheta\right)_x = \bigcup_{\vartheta \in \Theta} (A_\vartheta)_x$

$$(5.0.18)\qquad \begin{aligned} y \in \left(\bigcup_{\vartheta \in \Theta} A_\vartheta\right)_x &\iff (x,y) \in \bigcup_{\vartheta \in \Theta} A_\vartheta \iff \exists \vartheta \in \Theta : (x,y) \in A_\vartheta\\ &\iff \exists \vartheta \in \Theta : y \in (A_\vartheta)_x \iff y \in \bigcup_{\vartheta \in \Theta} (A_\vartheta)_x,\end{aligned}$$

daí vem que $(\bigcup_n A_n)_x \in \boldsymbol{Y}$, consequentemente C é uma σ-álgebra que contem o conjunto R gerador de $\boldsymbol{Z}$, finalmente podemos inferir que $C = \boldsymbol{Z}$. Com um argumento simétrico demonstra-se que D a classe de subconjuntos $S \in Z$ tais que $S^y \in \boldsymbol{X}$, para todo $y \in Y$ é igual a $\boldsymbol{Z}$. Imediatamente sejam $f \in M(Z, \boldsymbol{Z})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que

$$(5.0.19)\qquad \{f_y > \alpha\} = \{y \in Y : f_y(x) > \alpha\} = \{(x,y) \in Z : f(x,y) > \alpha\}_x = \{f > \alpha\}_y \in Y,$$

pois $\{f > \alpha\} \in \boldsymbol{Z}$, a prova para o outro caso é feita de forma análoga usando um argumento simétrico. □

Definição 5.0.5. *Seja X um conjunto arbitrário qualquer uma classe $\boldsymbol{M}$ de subconjuntos de X é chamada de classe monótona, se for estável (fechada) com respeito a uniões e intersecções enumeráveis de sequências crescentes e decrescentes de $\boldsymbol{M}$. Seja $\boldsymbol{A}$ uma família qualquer de subconjuntos de X a classe monótona gerada por $\boldsymbol{A}$, é definida como sendo a menor classe monótona de subconjuntos de X que contém $\boldsymbol{A}$, verifica-se que esta é a intersecção de todas as classes monótonas contendo $\boldsymbol{A}$.*

Observa-se nitidamente que σ-álgebras são classes monótonas, em decorrência a σ-álgebra gerada por $\boldsymbol{A}$ cotém a classe monótona $\boldsymbol{M}$ gerada por $\boldsymbol{A}$. O próximo lema relaciona estes dois conceitos quando $\boldsymbol{A}$ é uma álgebra.

Lema 5.0.7. *Se $\boldsymbol{A}$ é uma álgebra de subconjuntos de um espaço X, então a classe monótona $\boldsymbol{M}$ gerada por $\boldsymbol{A}$ coincide com a σ-álgebra $\boldsymbol{S}$ gerada por $\boldsymbol{A}$.*

Prova. É suficiente provarmos que $\boldsymbol{M}$ é uma σ-álgebra que contém $\boldsymbol{A}$, para este fim definamos para cada $E \in \boldsymbol{M}$ o conjunto $\boldsymbol{M}(E) := \{F \in \boldsymbol{M} : E \setminus F, E \cap F, F \setminus E \in \boldsymbol{M}\}$, em seguida seja $(F_n) \subseteq \boldsymbol{M}(E) : F_n \uparrow F$, mostremos que $F \in \boldsymbol{M}(E)$. Primeiramente note que $(E \setminus F_n) \subseteq \boldsymbol{M}(E) : E \setminus F_n \downarrow E \setminus F$, logo $E \setminus \bigcup_n F_n = \bigcap_n (E \setminus F_n) \in \boldsymbol{M}(E)$, em seguida claramente $E \cap \bigcup_n F_n = \bigcup_n E \cap F_n, (\bigcup_n F_n) \setminus E = \bigcup_n (F_n \setminus E) \in \boldsymbol{M}(E)$, pois $(E \cap F_n) \subseteq \boldsymbol{M}(E) : E \cap F_n \uparrow E \cap F$ e $(F_n \setminus E) \subseteq \boldsymbol{M}(E) : F_n \setminus E \uparrow F \setminus E$, o que mostra que $\boldsymbol{M}(E)$ é fechado com relação a reuniões enumeráveis, de maneira semelhante demonstra-se que é fechado com relação a intersecções contáveis, i.e., $\boldsymbol{M}(E)$ é uma classe monótona. Da definição observa-se que $F \in \boldsymbol{M}(E)$ se, e somente se, $E \in \boldsymbol{M}(F)$ e se $E \in \boldsymbol{A}$, então $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{M}(E)$, pois $\boldsymbol{A}$ é uma álgebra (vide definição de $\boldsymbol{M}(E)$), logo $\boldsymbol{M}(E) = M$. Sejam $E \in \boldsymbol{A}$ e $F \in M$ arbitrários, vimos que $M = M(E)$, da equivalência dada anteirormente decorre que $E \in M(F)$, logo $\boldsymbol{A} \subseteq M(F)$ para todo $F \in \boldsymbol{M}$, que dos argumentos anteriores podemos inferir que $M(F) = M$ para todo $F \in \boldsymbol{M}$, o que mostra que M é uma álgebra, além disso $\boldsymbol{M}$ é estável com respeito a uniões enumeráveis, i.e., $\boldsymbol{M}$ é uma σ-álgebra e pelo fato de $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{M}$ podemos concluir que $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S}$. □

Lema 5.0.8. *Sejam $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ e $(Y, \boldsymbol{Y}, \nu)$ dois espaços de medida σ-finitos. Se $E \in \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$, então as funções definidas por*

$$f(x) := \nu(E_x), \; g(y) := \mu(E^y) \tag{5.0.20}$$

são mensuráveis, além disso tem-se

$$\int_X f \, d\mu = \pi(E) = \int_Y g \, d\nu, \tag{5.0.21}$$

em que π é a medida produto definida anteriormente em $\boldsymbol{Z}$.

Prova. Inicialmente suponha que μ e ν sejam finitas, defina $\boldsymbol{M}$ a coleção de subconjuntos $E \in \boldsymbol{Z}$ tais que as funções em (5.0.20) sejam mensuráveis, mostremos que $\boldsymbol{M}$ é uma classe monótona contendo a álgebra $\boldsymbol{Z}_0$. Naturalmente começamos mostrando que $R \subseteq \boldsymbol{M}$, para tal seja $A \times B$ um retângulo mensurável observa-se sem dificuldades que $f(x) := \nu((A \times B)_x) = \chi_{_A}(x)\nu(B)$ e $g(y) := \mu((A \times B)^y) = \chi_{_B}(y)\mu(A)$ são mensuráveis, além do mais verifica-se a identidade

$$\begin{aligned}\int_X f \, d\mu = \int_X \chi_{_A} \nu(B) \, d\mu = \mu(A)\nu(B) = \pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \\ = \int_Y \chi_{_B} \mu(A) \, d\nu\end{aligned} \tag{5.0.22}$$

logo $\boldsymbol{Z}_0 \subseteq \boldsymbol{M}$. Seguidamente seja $(E_n) \subseteq \boldsymbol{M} : E_n \uparrow E$ definamos em seguida as sequências de funções $(f_n^c) \in M^+(X, \boldsymbol{X})$ e $(g_n^c) \in M^+(Y, \boldsymbol{Y})$ dadas respectivamente por $f_n^c(x) = \nu((E_n)_x)$ e $g_n^c(y) = \mu((E_n)^y)$, imediatamente definamos $f^c(x) := \lim_n f_n^c(x)$ e $g^c(y) := \lim_n g_n^c(y)$, é imediato que $f^c \in M(X, \boldsymbol{X})$ $g^c \in M(Y, \boldsymbol{Y})$, como (E_n) é uma sequência crescente decorre $((E_n)_x) \subseteq \boldsymbol{X}$ e $((E_n)^y) \subseteq \boldsymbol{Y}$ são sequências crescentes, da monotonicidade de μ e ν que (f_n^c) e (g_n^c) são sequências crescentes, também temos

$$f^c(x) = \lim_n f_n^c(x) = \lim \nu((E_n)_x) = \nu\left(\bigcup_n (E_n)_x\right) = \nu(E_x) \tag{5.0.23}$$

$$g^c(x) = \lim_n g_n^c(x) = \lim \mu((E_n)^y) = \mu\left(\bigcup_n (E_n)^y\right) = \mu(E^y) \tag{5.0.24}$$

do teorema da convergência monótona temos a identidade

$$\begin{aligned}\int_X f^c \, d\mu = \int_X \lim_n f_n^c \, d\mu = \lim_n \int_X f_n^c \, d\mu = \lim_n \pi(E_n) = \pi(E) = \\ = \lim_n \int_Y g_n^c \, d\nu = \int_Y \lim_n g_n^c \, d\nu = \int_Y g^c \, d\nu,\end{aligned} \tag{5.0.25}$$

o que prova que $E \in \boldsymbol{M}$. Seja agora $(F_n) \subseteq \boldsymbol{M} : F_n \downarrow F$ definamos as sequências de funções $(f_n^d) \in M^+(X, \boldsymbol{X})$ e $(g_n^d) \in M^+(Y, \boldsymbol{Y})$ por $f_n^d(x) = \nu((F_n)_x)$ e $g_n^d(y) = \mu((F_n)^y)$ como anteriormente podemos inferir que $f^d(x) = \lim_n f_n^d(x) = \nu(F_x) \in M^+(X, \boldsymbol{X})$ e $g^d(y) = \lim_n g_n^d(y) = \mu(F^y) \in M^+(Y, \boldsymbol{Y})$, em seguida observemos que $(\nu((Z \setminus F_n)_x))$ e $(\mu((X \setminus F_n)_y))$ é uma sequência crescente de funções mensuráveis, pois $\nu((Z \setminus F_n)_x) = \nu(Y) - \nu((F_n)_x)$ e $\mu((Z \setminus F_n)^y) = \mu(X) - \mu((F_n)^y)$ (diferença de funções mensuráveis) daí podemos inferir

$$\nu((Z \setminus F)_x) = \lim_n \nu((Z \setminus F_n)_x) = \nu(Y) - \nu(F_x) \in M^+(X, \boldsymbol{X}); \tag{5.0.26}$$

$$\mu((Z \setminus F)^y) = \lim_n \mu((Z \setminus F_n)^y) = \mu(X) - \mu(F^y) \in M^+(Y, \boldsymbol{Y}), \tag{5.0.27}$$

logo

$$\begin{aligned}
\int_X \nu(Y)\, d\mu - \int_X \nu((F)_x)\, d\mu &= \int_X \nu((Z \setminus F)_x)\, d\mu = \int_X \lim_n \nu((Z \setminus F_n)_x)\, d\mu \\
&= \lim_n \int_X \nu((Z \setminus F_n)_x)\, d\mu = \lim_n \pi(Z \setminus F_n) \\
&= \pi(Z) - \pi(F) \\
&= \lim_n \int_Y \mu((Z \setminus F_n)^y)\, d\nu = \int_Y \mu((Z \setminus F)^y)\, d\nu \\
&= \int_Y \mu(X)\, d\nu - \int_Y \mu((F)^y)\, d\nu
\end{aligned} \tag{5.0.28}$$

daí temos que

$$\int_X f^d\, d\mu = \int_X \nu((F)_x)\, d\mu = \pi(F) = \int_Y \mu((F)^y)\, d\nu = \int_Y g^d\, d\nu, \tag{5.0.29}$$

consequentemente $F \in \boldsymbol{M}$ e finalmente a classe monótona $\boldsymbol{M}_0$ gerada pela álgebra $\boldsymbol{Z}_0$ está contida em $\boldsymbol{M}$, e esta por sua vez está contida em $\boldsymbol{Z}$, por conseguinte temos $\boldsymbol{M}_0 \subseteq \boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{Z}$, visto que $\boldsymbol{Z}_0$ é álgebra, o teorema da classe monótona nos fornece $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{Z}$, consequentemente $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Z}$. Para o caso em que μ e ν sejam σ-finitas podemos considerar $(X_j \times Y_j) \subseteq \boldsymbol{Z} : X_j \times Y_j \uparrow Z$ e $\pi(X_j \times Y_j) = \mu(X_j)\nu(Y_j) < \infty$ defina (f_n^c), (g_n^c), (f_n^d) e (g_n^d) como anteriormente, a demonstração das inclusões $(f_n^c), (f_n^d) \in M^+(X, \boldsymbol{X})$ e $(g_n^c), (g_n^d) \in M^+(Y, \boldsymbol{Y})$ é idêntica ao caso em que μ e ν são finitas, portanto nos ateremos a demonstração de (5.0.21). Seja (f, g) qualquer par de funções (crescentes ou decrescentes), definamos as sequências (f_j) e (g_j) respectivamente por $f_j(x) := (f \cdot \chi_{X_j})(x)$ e $g_j(y) := (g \cdot \chi_{Y_j})(y)$, das considerações iniciais podemos concluir que estas são crescentes, logo podemos aplicar o teorema da convergência monótona, conformemente

$$\begin{aligned}
\int_X f\mu &= \int_X \lim_j f_j\, d\mu = \int_X \lim_j (f \cdot \chi_{X_j})\, d\mu = \lim_j \int_X f \cdot \chi_{X_j}\, d\mu \overset{(1)}{=} \lim_j \int_X f\, d\mu_j \\
&= \lim_j \pi_j(G) = \lim_j \int_Y g\, d\nu_j \overset{(2)}{=} \lim_j \int_Y g \cdot \chi_{Y_j}\, d\nu = \int_Y \lim_j (g \cdot \chi_{Y_j})\, d\nu \\
&= \int_Y g\, d\nu,
\end{aligned} \tag{5.0.30}$$

em que nas igualdades destacadas por (1) e (2) foi usada a afirmação 3.2.3, e $\mu_j(A) := \mu(X_j \cap A)$, $\nu_j(B) := \nu(Y_j \cap B)$, $\pi_j(P) := \pi(P \cap (X_j \times Y_j))$, para todo $(j, A, B, P) \in \mathbb{N} \times \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}$. $\square$

Teorema 5.0.2. (Teorema de Tonelli [2]) *Sejam $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ e $(Y, \boldsymbol{Y}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos e $F \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^Z$ mensurável. Então as funções f e g definidas respectivamente por*

$$f(x) = \int_Y F_x \, d\nu, \;\; g(y) = \int_X F^y \, d\mu \tag{5.0.31}$$

são mensuráveis, além disso

$$\int_X \left(\int_Y F_x \, d\nu \right) d\mu = \int_Z F \, d\pi = \int_Y \left(\int_X F^y \, d\mu \right) d\nu \tag{5.0.32}$$

Prova. Suponhamos inicialmente que $F = \sum_{i \in I} a_i \chi_{_{F^{-1}(a_i)}}$, ($I$ finito), observemos em seguida que $(\chi_{_A})_x(y) = \chi_{_{A_x}}(y)$, para todo $A \in 2^Z$, pois fixando x temos

$$\begin{aligned} (\chi_{_A})_x(y) = \chi_{_A}(x,y) &= \begin{cases} 1, & (x,y) \in A \Longleftrightarrow y \in A_x \\ 0, & (x,y) \in Z \setminus A \Longleftrightarrow y \in Y \setminus A_x \end{cases} \\ &= \chi_{_{A_x}}(y), \end{aligned} \tag{5.0.33}$$

analogamente verifca-se $(\chi_{_A})^y(x) = \chi_{_{A^y}}(x)$, conformemente $F_x = \sum_{i \in I} a_i \chi_{_{(F^{-1}(a_i))_x}}$ e $F^y = \sum_{i \in I} a_i \chi_{_{(F^{-1}(a_i))^y}}$ daqui e dos lemas 5.0.6 e 5.0.8 vem que

$$f(x) = \int_Y F_x \, d\nu = \int_Y \sum_{i \in I} a_i \chi_{_{(F^{-1}(a_i))_x}} \, d\nu = \sum_{i \in I} a_i \nu((F^{-1}(a_i))_x) \in M(X, \boldsymbol{X}); \tag{5.0.34}$$

$$g(y) = \int_X F^y \, d\mu = \int_X \sum_{i \in I} a_i \chi_{_{(F^{-1}(a_i))^y}} \, d\mu = \sum_{i \in I} a_i \mu((F^{-1}(a_i))^y) \in M(Y, \boldsymbol{Y}); \tag{5.0.35}$$

Imediatamente suponhamos que F seja não negativa real estendida mensurável, logo existirá uma sequência (Φ_n) monótona crescente de funções simples que converge a F em todo lugar, do teorema da convergência monótona e dos resultados anteriores podemos concluir

$$f(x) = \int_Y F_x \, d\nu = \int_Y \lim_n (\Phi_n)_x \, d\nu = \lim_n \int_Y (\Phi_n)_x \, d\nu \in M^+(X, \boldsymbol{X}); \tag{5.0.36}$$

$$g(y) = \int_X F^y \, d\mu = \int_X \lim_n (\Phi_n)^y \, d\mu = \lim_n \int_X (\Phi_n)^y \, d\mu \in M^+(Y, \boldsymbol{Y}), \tag{5.0.37}$$

além disso

$$\begin{aligned} \int_X \left(\int_Y F_x \, d\nu \right) d\mu &= \int_X \left(\int_Y \lim_n (\Phi_n)_x \, d\nu \right) d\mu = \lim_n \int_X \left(\int_Y (\Phi_n)_x \, d\nu \right) d\mu \\ &= \lim_n \int_Z \Phi_n \, d\pi = \int_Z F \, d\pi \\ &= \lim_n \int_Y \left(\int_X (\Phi_n)^y \, d\mu \right) d\nu = \int_Y \left(\int_X \lim_n (\Phi_n)^y \, d\mu \right) d\nu \\ &= \int_Y \left(\int_X F^y \, d\mu \right) d\nu \end{aligned} \tag{5.0.38}$$

□

[2]Leonida Tonelli (19 de Abril de 1885 – 12 de Março de 1946) foi um matemático italiano, responsável por criar uma variação do teorema de Fubini e por intruduzir métodos de semicontinuidade como uma ferramenta comum para o método direto no cálculo das variações.

Demonstremos em seguida um resultado que nos será útil no teorema de Fubini.

Lema 5.0.9. *Sejam* $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ *um espaço de medida e* $f \in M^+(X, \boldsymbol{X})$*. Se* $f \in L(X, \boldsymbol{X})$*, então* $\mu\big(\{f = +\infty\}\big) = 0$

Prova. Considere a sequência $(E_n) \subseteq \boldsymbol{X}$, tal que $E_n = \{n \leqslant f\}$ observa-se que E_n é uma sequência decrescente, além disso temos que $\{f = +\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$. De fato, se $x \in \{n+1 \leqslant f\}$, então $n \leqslant n+1 \leqslant f(x)$, logo $x \in \{n \leqslant f\}$, o que prova $\{n \leqslant f\} \supseteq \{n+1 \leqslant f\}$ $x \in \{f = +\infty\}$. Seguidamente se $x \in \{f = +\infty\}$ temos e evidentemente $f(x) \geqslant n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e reciprocamente se $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$, teremos que $f(x) \geqslant n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que prova $f(x) = +\infty$, consequentemente $x \in \{f = +\infty\}$. Imediatamente observemos que

$$\mu(E_n) \leqslant \int_{E_n} f \, d\mu \leqslant 1/n \cdot \int f \, d\mu < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{5.0.39}$$

daí

$$0 \leqslant \mu\big(\{f = +\infty\}\big) = \mu\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n\Big) = \lim_n \mu(E_n) \leqslant \lim_n \Big(1/n \cdot \int f \, d\mu\Big) = 0. \tag{5.0.40}$$

□

Em outros termos se uma função não-negativa mensurável é integrável, então esta é finita em μ-quase todo lugar.

Teorema 5.0.3. (Teorema de Fubini [3]) *Sejam* $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ *e* $(Y, \boldsymbol{Y}, \nu)$ *espaços de medida* σ*-finitos e seja* π *a medida produto definida anteirormente em* $\boldsymbol{Z}$*. Se* $F \in \mathbb{R}^Z \cap L(Z, \boldsymbol{Z}, \pi)$*, então as funções definidas em quase todo lugar por*

$$f(x) = \int_Y F_x \, d\nu, \;\; g(y) = \int_X F^y \, d\mu \tag{5.0.41}$$

possuem integrais finitas e

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \left(\int_Y F_x \, d\nu \right) d\mu = \int_Z F \, d\pi = \int_Y \left(\int_X F^y \, d\mu \right) d\nu = \int_Y g \, d\nu \tag{5.0.42}$$

Prova. Inicialmente note que

$$f(x) = \int_Y F_x \, d\nu = \int_Y (F_x)^+ \, d\nu - \int_Y (F_x)^- \, d\nu \tag{5.0.43}$$

e

$$g(y) = \int_X F^y \, d\mu = \int_X (F^y)^+ \, d\mu - \int_X (F^y)^- \, d\mu, \tag{5.0.44}$$

destas identidades obtemos

$$f^+(x) = \int_Y (F_x)^+ \, d\nu \quad \text{e} \quad f^-(x) = \int_Y (F_x)^- \, d\nu \tag{5.0.45}$$

[3]Guido Fubini (19 de Janeiro de 1879 – 6 de Junho de 1943) foi um matemático italiano, conhecido pelo teorema que recebe seu nome.

e

$$g^+(y) = \int_X (F^y)^+ \, d\mu \quad \text{e} \quad g^-(y) = \int_X (F^y)^- \, d\mu, \tag{5.0.46}$$

em seguida notemos

$$(F_x)^+(y) = \max\{0, F_x(y)\} = \max\{0, F(x,y)\} = F^+(x,y) = (F^+)_x(y), \forall y \in Y, \tag{5.0.47}$$

analogamente $(F_x)^-(y) = (F^-)_x(y)$, $(F^y)^+(x) = (F^+)^y(x)$ e $(F^y)^-(x) = (F^-)^y(x)$ para todo $(x,y) \in X \times Y$. Se F é integrável com respeito a π decorre que F^+, F^- possuem integral finita com respeito a π, daí temos

$$\int_X \left(\int_Y (F_x)^+ \, d\nu \right) d\mu = \int_Z F^+ \, d\pi = \int_Y \left(\int_X (F^y)^+ \, d\mu \right) d\nu \tag{5.0.48}$$

$$\int_X \left(\int_Y (F_x)^- \, d\nu \right) d\mu = \int_Z F^- \, d\pi = \int_Y \left(\int_X (F^y)^- \, d\mu \right) d\nu \tag{5.0.49}$$

em decorrência do lema anterior temos que as funções f^+ e f^-, bem como g^+ e g^- estão definidas, i.e., são finitas em quase todo lugar, por este motivo $f = f^+ - f^-$ e $g = g^+ - g^-$ estão definidas em quase todo lugar, além disso de (5.0.48) e (5.0.49) obtemos

$$\begin{aligned} \int_X f \, d\mu &= \int_X \left(\int_Y F_x \, d\nu \right) d\mu \\ &= \int_X \left(\int_Y (F_x)^+ \, d\nu \right) d\mu - \int_X \left(\int_Y (F_x)^- \, d\nu \right) d\mu \\ &= \int F^+ \, d\pi - \int F^- \, d\pi \\ &= \int F \, d\pi \\ &= \int F^+ \, d\pi - \int F^- \, d\pi \\ &= \int_Y \left(\int_X (F^y)^+ \, d\mu \right) d\nu - \int_Y \left(\int_X (F^y)^- \, d\mu \right) d\nu \\ &= \int_Y \left(\int_X F^y \, d\mu \right) d\nu \\ &= \int_Y g \, d\nu. \end{aligned} \tag{5.0.50}$$

□

Bibliografia

[1] Bartle, Robert G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.* New York, John Wiley & Sons, Inc, 1995.

[2] Bogachev, Vladimir I. *Measure Theory, Volume I.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

[3] Bourbaki, Nicolas. *Elements of the history of mathematics.* New York, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.

[4] Munkres, James R. *Topology, 2nd edition.* Prentice Hall, Inc, 2000.

[5] Rudin, Walter. *Principles of mathematical analysis.* McGraw-Hill, Inc, 1976.

[6] Tausk, Daniel V. *Notas Para o Curso de Medida e Integração.*