

## Pertemuan 1:

Pengintegralan dengan substitusi, pengintegralan parsial, dan pengintegralan beberapa fungsi trigonometri.

### TEKNIK INTEGRASI

#### Pengintegralan Dengan Substitusi

Teorema 1:

Misalkan  $g$  suatu fungsi yang terdiferensialkan pada selang  $I$  dan  $F$  adalah antiturunan dari fungsi  $f$  pada  $I$ . Jika  $u=g(x)$ , maka

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f'(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Diskusikan !

1. Buktikan teorema1 di atas

2. Hitunglah  $\int_0^{\sqrt{5}} x\sqrt{9-x^2} dx$

Teorema 2:

Jika  $g$  mempunyai turunan yang kontinu pada selang  $[a,b]$  dan  $f$  kontinu pada daerah nilai dari  $g$ , maka

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Diskusikan !

1. Buktikan teorema2 di atas

2. Hitunglah  $\int_0^1 (x+1)^3 dx$

#### Latihan 1:

Hitunglah integral berikut:

1.  $\int \frac{7dx}{x^2 - 6x + 25}$

2.  $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

$$3. \int \frac{e^x dx}{4 + 9e^{2x}}$$

$$4. \int \frac{\cos(\sqrt{4x^2})}{x} dx$$

$$5. \int_2^5 x \sqrt{x^2 - 4} dx$$

$$6. \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{\cos \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$7. \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$8. \int_0^1 \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} dx$$

### Pengintegralan Parsial

Teorema 3:

Jika  $u$  dan  $v$  adalah suatu fungsi dengan perubah  $x$ , maka  $\int u dv = uv - \int v du$  atau  $\int uv' dx = uv - \int vu' dx$

**Bukti:** Jika  $y = uv$ ,  $u$  dan  $v$  suatu fungsi dengan perubah  $x$ , maka diferensiasi dari  $y$  adalah  $dy = u dv + v du$

Dengan mengintegalkan kedua ruas persamaan tersebut, diperoleh

$$\int dy = \int u dv + \int v du$$

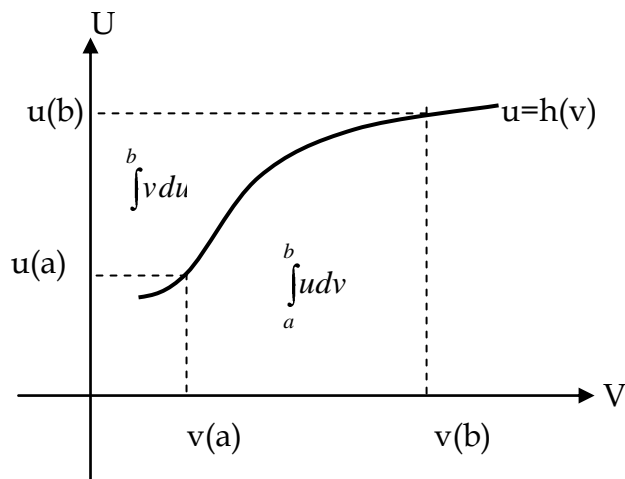
$$y = \int u dv + \int v du$$

$$uv = \int u dv + \int v du$$

Dengan demikian diperoleh,  $\int u dv = uv - \int v du \dots(1)$

Karena  $u$  dan  $v$  suatu fungsi dengan perubah bebas  $x$ , maka  $du = u' dx$  dan  $dv = v' dx$ . Dari bentuk (1) diperoleh  $\int uv' = uv - \int vu' dx$ .

Arti geometri pengintegralan parsial:



$$\int_a^b u dv = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v du = \left[ uv \right]_a^b - \int_a^b v du$$

Teorema 4:

Jika  $u$  dan  $v$  adalah suatu fungsi dengan variabel  $x$ , maka

$$\int_a^b u dv = \left[ uv \right]_a^b - \int_a^b v du$$

Diskusikan!

Tentukan integral berikut:

1.  $\int e^x \sin x \, dx$
2.  $\int_1^e \ln x \, dx$

Latihan 2:

1. Hitunglah  $\int f'(x) g(x) \, dx$  dan  $\int f'(x) = \sin x$  dan  $g(x) = x^2$ . Hitunglah  $\int f(x) g'(x)$ , jika  $f(x) = e^x$  dan  $g(x) = \cos x$ .
2. Hitunglah
  - a.  $\int \ln^2 x \, dx$
  - b.  $\int \sin(\ln x) \, dx$
  - c.  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x \csc^2 x \, dx$

## Pengintegralan Beberapa Fungsi Trigonometri

### A. Pengintegralan Fungsi Sinus dan Fungsi Kosinus

Kasus 1:

Bentuk  $\int \sin^n x \, dx$  dan  $\int \cos^n x \, dx$  dengan  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  ganjil

Untuk menyelesaikannya gunakan rumus:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Kasus 2:

Bentuk  $\int \sin^n x dx$  dan  $\int \cos^n x dx$ , dengan  $n \in N$ ,  $n$  genap

Penyelesaiannya gunakan rumus:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

Diskusikan!

Tentukan integral berikut:

1.  $\int \cos^3 x dx$
2.  $\int \cos^2 x dx$

Teorema 5 (rumus rekursif):

$$(a) \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx, n \in N$$

$$(b) \int \sin^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx, n \in N$$

Diskusikan!

1. Buktikan teorema 5 di atas (Petunjuk: gunakan pengintegralan parsial)
2. Tentukanlah  $\int \sin^5 x dx$

Kasus 3:

Bentuk  $\int \sin^m x \cos^n x dx$ , dengan salah satu  $m$  atau  $n$  bilangan asli ganjil, lainnya boleh sebarang.

Penyelesaian bentuk integral tersebut, sama seperti penyelesaian bentuk (1), yaitu menggunakan rumus

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Kasus 4:

Bentuk  $\int \sin^m x \cos^n x dx$ ,  $m$  dan  $n$  dua-duanya bilangan asli genap.

Penyelesaiannya seperti bentuk (2), yaitu menggunakan rumus:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

Kasus 5:

Bentuk  $\int \sin mx \cos nx \, dx$ ,  $\int \sin mx \sin nx \, dx$  dan  $\int \cos mx \cos nx \, dx$ ;

$m, n \in R$

Penyelesaiannya gunakan rumus:

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

Diskusikan!

Tentukanlah integral berikut:

1.  $\int \sin^3 x \cos^{-4} x \, dx$
2.  $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$
3.  $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$

Teorema 6 (Pengintegralan lainnya):

$$(a) \int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$$

$$(b) \int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$$

$$(c) \int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$(d) \int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

Kasus 1:

Bentuk  $\int \tan^n x \, dx$  dan  $\int \cot^n x \, dx$  dengan  $n \in N$

Penyelesaiannya gunakan identitas:

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

Diskusikan!

1. Buktikan teorema 6 diatas (Petunjuk: gunakan substitusi)
2. Tentukan  $\int \tan^4 x dx$

Teorema 7 (Teorema Rekursif):

- (1)  $\int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x d(\tan x) - \int \tan^{n-2} x dx, n \in N$
- (2)  $\int \cot^n x dx = - \int \cot^{n-2} x d(\cot x) - \int \cot^{n-2} x dx, n \in N$
- (3)  $\int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1} [\sec^{n-2} x \tan x + (n-2) \int \sec^{n-2} x dx], n \in N, n > 1$
- (4)  $\int \csc^n x dx = \frac{1}{n-1} [-\csc^{n-2} x \cot x + (n-2) \int \csc^{n-2} x dx], n \in N, n > 1$

Diskusikan!

1. Buktikan teorema 7 diatas.
2. Gunakan teorema di atas untuk menentukan  $\int \tan^5 x dx$

Kasus 2:

Bentuk  $\int \tan^m x \sec^n x dx$  dan  $\int \cot^m x \csc^n x dx$  dengan n bilangan asli genap dan m bilangan sebarang

Penyelesaiannya gunakan identitas:

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Kasus 3:

Bentuk  $\int \tan^m x \sec^n x dx$  dan  $\int \cot^m x \csc^n x dx$  dengan m bilangan asli ganjil dan n bilangan sebarang

Penyelesaiannya gunakan identitas:

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

Diskusikan! Dengan menggunakan kasus 2 dan 3, tentukan integral berikut:

1.  $\int \tan^{-3/2} x \sec^4 x dx$
2.  $\int \tan^3 x \sec^{-1/2} x dx$

**Latihan 3:**

Tentukanlah integral berikut:

1.  $\int (\sin^6 x + \cos^6 x) dx$
2.  $\int \tan^6 2x dx$
3.  $\int \sin^7 3x \cos^2 3x dx$
4.  $\int \tan^3 2x \cos^6 2x dx$
5.  $\int \cot x \csc^3 x dx$
6.  $\int \sin^3 t \sqrt[5]{\cos t} dt$
7.  $\int \tan^5 t \sec^{-3/2} t dt$
8.  $\int \frac{d\theta}{\cos 5\theta}$
9.  $\int_{-\pi/2}^0 \cos^4 x dx$
10.  $\int_{\pi/2}^{3/2\pi} \sin 4x \cos 2x dx$