TEKNIK-TEKNIK PENGINTEGRALAN

1. Teknik Subtitusi

   <u>Teorema :</u>

   Misal g fungsi yang terdiferensialkan dan F suatu anti turunan dari f, jika

   u = g(x) maka $\int$ f(g(x))g'(x) dx = $\int$ f(u) du = F(u) + c = F(g(x)) + c

   <u>Contoh :</u>

   1. Hitunglah $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

   Jawab :

   Misalkan u = $\sqrt{x}$ = $x^{1/2}$ sehingga du = $\frac{1}{2}x^{-1/2}$ dx maka $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ = 2

   $\int \sin\sqrt{x}\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)dx$ = 2$\int \sin u du$

   = 2 cos u + c = 2 cos $\sqrt{x}$ + c.

   2. Hitunglah $\int \frac{6e^{1/x}}{x^2}dx$.

   Jawab :

   Misalkan u = $\frac{1}{x}$ sehingga du = $\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ dx

   Maka $\int \frac{6e^{1/x}}{x^2}dx$ = – 6$\int e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$

   = – 6 $\int e^u du$

   = – 6 e^u + c

   = – 6 $e^{1/x}$ + c.

2. Pengintegralan Bentuk-Bentuk Trigonometri

2.a. $\int$ $\sin^n x$ dx, $\int$ $\cos^n x$ dx

   Jika n bilangan bulat positif ganjil, maka keluarkan faktor sin x atau cos x dan kemudian gunakan kesamaan

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Jika n bilangan bulat positif genap, maka gunakan rumus setengah sudut

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

<u>Contoh :</u>

1. $\int \sin^5 x\,dx = \int \sin^4 x \sin x\,dx$

$$= -\int (1-\cos^2 x)^2\, d(\cos x)$$

$$= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\, d(\cos x)$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$$

2. $\int \cos^4 x\,dx = \int \left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x\,(2)\,dx + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

2.b. $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$

Jika m atau n bilangan bulat positif ganjil dan eksponen lain sembarang, maka keluarkan faktor sin x atau cos x yang berpangkat ganjil tersebut kemudian gunakan kesamaan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Jika m dan n bilangan bulat positif genap, maka gunakan rumus setengah sudut.

<u>Contoh :</u>

Tentukan : 1. $\int \sin^3 x \cos^{-4} x \, dx$

2. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$

2.c. $\int \operatorname{tg}^n x \, dx$, $\int \operatorname{cotg}^n x \, dx$.

Keluarkan faktor $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ dalam kasus tg atau faktor $\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$ dalam kasus cotg.

<u>Contoh :</u>

$$\int \operatorname{cotg}^4 x \, dx = \int \operatorname{cotg}^2 x (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \, dx$$
$$= \int \operatorname{cotg}^2 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx - \int \operatorname{cotg}^2 x \, dx$$
$$= -\int \operatorname{cotg}^2 x \, d(\operatorname{cotg} x) - \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \, dx$$
$$= -\frac{1}{3} \operatorname{cotg}^3 x + \operatorname{cotg} x + x + c$$

2.d. $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x \, dx$, $\int \operatorname{cotg}^m x \operatorname{cosec}^n x \, dx$

Jika n genap dan m sembarang, maka keluarkan faktor $\sec^2 x$ atau $\operatorname{cosec}^2 x$.

Jika m ganjil dan n sembarang, keluarkan faktor tg x.sec x.

<u>Contoh :</u>

Tentukan : 1. $\int \operatorname{tg}^{-3/2} x \sec^4 x \, dx$

2. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^{-1/2} x \, dx$

2.e. $\int \sin mx \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \sin nx \, dx$,

$\int \cos mx \cos nx \, dx$.

Gunakan kesamaan :

$\sin mx \cos nx = ½[\sin (m+n)x + \sin (m - n)x]$

$\sin mx \sin nx = -½[\cos (m+n)x - \cos (m - n)x]$

$\cos mx \cos nx = ½[\cos (m+n)x + \cos (m - n)x]$

<u>Contoh :</u>

$$\int \sin 2x \cos 3x \, dx = 1/2 \int \sin 5x + \sin (-x) \, dx$$
$$= 1/10 \int \sin 5x \, d(5x) - ½ \int \sin x \, dx$$

= - 1/10 cos 5x + ½ cos x + c.

3. Teknik Subtitusi Yang Merasionalkan

3. a. Integran Yang Memuat Bentuk $\sqrt[n]{ax+b}$

Gunakan subtitusi u = $\sqrt[n]{ax+b}$.

<u>Contoh :</u>

Hitung $\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx$

Jawab : Misalkan u = $\sqrt[3]{x-4}$ maka u^3 = x – 4 dan

$3u^2$ du = dx sehingga

$\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx$ = $\int (u^3+4)u.3u^2\,du$

= $3\int (u^6+4u^3)\,du$

$= \frac{3}{7}u^7 + 3u^4 + c$

= $\frac{3}{7}$ $(x-4)^{7/3} + (x-4)^{4/3}$ + c

3.b. Integran Yang Memuat Bentuk $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$,

$\sqrt{x^2-a^2}$.

Gunakan subtitusi x = a sin t, x = a tg t dan x = a sec t berturut-turut untuk $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ dan $\sqrt{x^2-a^2}$.

<u>Contoh :</u>

1. Tentukan $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$

Jawab :

Misalkan x = 2 sin t, - π/2 ≤ t ≤ π/2 maka dx = 2 cos t dt dan $\sqrt{4-x^2}$ = $\sqrt{4-4\sin^2 t}$ = 2 cos t sehingga

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx = \int \frac{2\cos t}{4\sin^2 t} \text{ (2 cos t) dt}$$

$$= \int \cot g^2 t dt$$

$$= \int \text{ (cosec}^2 \text{ t – 1) dt = - cotg t – t + c}$$

$$= \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

2. Tentukan $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+26}}$

Jawab :

Terlebih dahulu bentuk kuadrat $x^2 + 2x + 26$ diubah menjadi kuadrat sempurna $(x + 1)^2 + 5^2$, kemudian misalkan u = x + 1 maka du = dx sehingga

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+26}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+5^2}}$$

kemudian misalkan pula u = 5 tg t, $-\pi/2 \le t \le \pi/2$ maka du = 5 $\sec^2$ t dt

dan $\sqrt{u^2+5^2} = \sqrt{5^2 tg^2 t + 5^2}$ = 5 sec t

sehingga $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+5^2}} = \int \frac{5\sec^2 t}{5\sec t}dt$

$$= \int \sec t dt$$

$$= \ln \left|\sec t + tgt\right| + c$$

$$= \ln \left|\frac{\sqrt{u^2+5^2}}{5} + \frac{u}{5}\right| + c$$

$$= \ln \left|\sqrt{u^2+5^2} + u\right| - \ln 5 + c.$$

Jadi $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+26}}$ = ln $\left| \sqrt{x^2+2x+26}+(x+1) \right| + K$.

4. Pengintegralan Parsial

Pengintegralan parsial (sebagian) dapat dilakukan jika pengintegralan dengan teknik subtitusi tidak memberikan hasil, dan dengan catatan bagian sisa pengintegralan lebih sederhana dari integral mula-mula.

$\int udv = uv - \int vdu$

Contoh :

1. Tentukan $\int$ x cos x dx

Jawab :

Ambil u = x dan dv = cos x dx maka du = dx dan v = sin x sehingga

$\int$ x cos x dx = $\int$ x d(sin x)

= x.sin x - $\int$ sin x dx

= x.sin x + cos x + c.

2. Hitunglah $\int$ x^2 sin x dx

Jawab

Ambil u = x^2 dan dv = sin x dx maka du = 2x dx dan v = - cos x sehingga

$\int$ x^2 sin x dx = -$\int$ x^2 d(cos x)

= - x^2 cos x + 2$\int$ x cos x dx

lakukan sekali lagi pengintegralan parsial, sehingga

= - x^2 cos x + 2 $\int$ x d sin x

= - x^2 cos x + 2x sin x – 2$\int$ sin x dx

= - x^2 cos x + 2x sin x + 2cos x + c

Jadi $\int$ x^2 sin x dx = - x^2 cos x + 2x sin x + 2cos x + c

Rumus Reduksi

Suat rumus yang berbentuk $\int f^{n}(x)\, dx = g(x) + \int f^{k}(x)\, dx$

dengan $k < n$ dinamakan rumus reduksi karena pangkat dari f berkurang.

Contoh :

$$\int \sin^{n} x dx = \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$$

(buktikan dengan menggunakan teknik pengintegralan parsial).

5. Pengintegralan Fungsi Rasional.

Fungsi rasional merupakan fungsi hasilbagi dua fungsi polinom (suku banyak) yang ditulis :

F(x) = $\frac{P(x)}{Q(x)}$, P(x) dan Q(x) fungsi-fungsi polinom dengan $Q(x) \neq 0$ untuk semua x di domain F.

Fungsi rasional dibedakan atas :

1. Fungsi Rasional Sejati yaitu fungsi rasional dimana derajat fungsi polinom pada pembilang lebih kecil dari pada derajat fungsi polinom pada penyebut.

   Contoh :

   $$f(x) = \frac{2}{(x+1)^3}, \quad g(x) = \frac{2x+2}{x^2-4x+8}$$

2. Fungsi Rasional Tak Sejati yaitu fungsi rasional dimana derajat fungsi polinom pada pembilang lebih besar dari atau sama dengan derajat fungsi polinom pada penyebut.

   Contoh : $f(x) = \dfrac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x}$

Fungsi rasional tak sejati dapat ditulis sebagai penjumlahan fungsi polinom dengan fungsi rasional sejati dengan jalan membagi fungsi pembilang dengan fungsi penyebut.

Contoh :

f(x) = $\dfrac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x}$ = $(x^2 - 3)$ + $\dfrac{14x+1}{x^3+5x}$

Permasalahan mengintegralkan fungsi rasional terletak pada bagaimana mengintegralkan fungsi rasional sejati.

Suatu fakta bahwa fungsi rasional sejati senantiasa dapat ditulis sebagai jumlah fungsi rasional sejati yang sederhana.

5.1. Penjabaran Fungsi Rasional Atas Faktor Linear Yang Berbeda.

Contoh :

Tentukan $\int \dfrac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}dx$

Jawab :

Jabarkan fungsi rasional atas faktor linear yang berbeda.

$$\frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} = \frac{5x+3}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$

maka 5x + 3 = A(x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+1)

dengan mengambil nilai x = 0, x = -1 dan x = 3 diperoleh

3 = A(-3) maka A = -1

-2 = B(4) maka B = - ½

18 = C(12) maka C = 3/2, sehingga

$$\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}dx = \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{-1/2}{x+1}dx + \int \frac{3/2}{x-3}dx$$

$$= -\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-3| + c$$

5.2. Penjabaran Fungsi Rasional Atas Faktor Linear Yang Berulang.

Contoh :

Hitunglah $\int \frac{x}{(x-3)^2} dx$

Jawab :

Jabarkan fungsi rasional atas faktor linear yang berulang.

$$\frac{x}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

maka x = A(x-3) + B

dengan mengambil x = 3 dan x = 0 diperoleh

B = 3 dan A = 1, sehingga

$$\int \frac{x}{(x-3)^2} dx = \int \frac{1}{x-3} dx + \int \frac{3}{(x-3)^2} dx$$

$$= \ln |x-3| - \frac{3}{x-3} + c$$

5.3. Penjabaran Fungsi Rasional Atas Faktor Linear Yang Berbeda dan Berulang.

<u>Contoh :</u>

Tentukan $\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2} dx$

Jabarkan fungsi rasional menjadi

$$\frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Selanjutnya kerjakan sama seperti 2 contoh terdahulu.

Yang perlu diperhatikan untuk tiap faktor $(ax + b)^k$ dalam penyebut maka ada sebanyak k suku penjabarannya, yaitu

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

5.4. Penjabaran Fungsi Rasional Atas Faktor Kuadrat Yang Berbeda.

Contoh :

Tentukan $\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} dx$

Jabarkan fungsi rasional menjadi

$$\frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{4x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

maka $6x^2 - 3x + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(4x+1)$

Selanjutnya tentukan A, B dan C seperti biasa dan tentukan harga masing-masing integral pecahan parsial.

5.5. Penjabaran Fungsi Rasional Atas Faktor Kuadrat Yang Berulang.

Contoh :

Tentukan $\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} dx$

Jabarkan fungsi rasional menjadi

$$\frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

Selanjutnya tentukan A, B, C, D dan E seperti biasa dan tentukan harga masing-masing integral pecahan parsial.