Tema 1

Funciones de una variable.

1.1. Concepto de función.

Definición 1.1 *Se llama función (real de variable real) a toda correspondencia (o regla), f, que a cada número x le asigna un único valor $f(x)$.* ♣

Ejemplo 1.1 *La regla que a cada número le asigna su cuadrado, $f(x) = x^2$, es una función, ya que un número tiene un único cuadrado. Sin embargo, la regla que a cada número le asigna el número del que es cuadrado no es una función, ya que a un número positivo le asocia dos números (4 es el cuadrado de 2 y -2)*

En el primer caso, tenemos una ecuación que relaciona un número con su cuadrado $y = x^2$. En el segundo caso también se establece una relación entre los números mediante la ecuación $x = y^2$, pero no tenemos una función. Sin embargo, podemos definir como funciones las raíces cuadradas positiva y negativa: la función $f(x) = \sqrt{x}$ y la función $f(x) = -\sqrt{x}$. ♣

Ejemplo 1.2 *La regla que a cada número le asocia este número, $f(x) = x$, es la función identidad y la regla que asigna a todos los números un mismo valor fijo $c \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$, es la función constante. Obsérvese que en ambos casos a un número le asociamos sólo un número (distinto para todos en la primera y el mismo para todos en la segunda).* ♣

Ejemplo 1.3 *Podemos definir una función mediante varias reglas parciales, por ejemplo, la función valor absoluto es*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

Para ello, debemos comprobar que en los puntos comunes las reglas definen el mismo número. ♣

Definición 1.2 *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- *El* ***dominio*** *de* f*,* D*, son los puntos en los que está definida*

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / \exists f(x)\}.$$

- *La* ***imagen****,* ***rango*** *o* ***recorrido*** *de* f *son los valores que toma en* $\mathbb{R}$

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in D \ \ \text{con} \ \ f(x) = y\}.$$

- *La* ***gráfica*** *de* f *es su representación en el plano formada por el conjunto de puntos*

$$\mathrm{Grf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in D \ , \ f(x) = y\}. \qquad \clubsuit$$

Ejemplo 1.4

- *La función* $f(x) = c$ *está definida para todo número y sólo tiene un resultado. Por tanto, su dominio está formado por todos los números reales y su imagen por el número c. Su gráfica son los puntos del plano que verifican la ecuación* $y = c$*:*

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \qquad \mathrm{Im}(f) = \{c\} \qquad \mathrm{Grf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = c\}.$$

- *La función* $f(x) = x$ *está definida para todo número y todo número es un resultado. Por tanto, su dominio y su imagen están formados por todos los números reales. Su gráfica son los puntos del plano que verifican la ecuación* $y = x$ *(la bisectriz del primer cuadrante):*

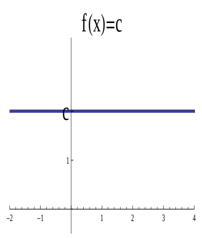
$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \qquad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \qquad \mathrm{Grf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}.$$

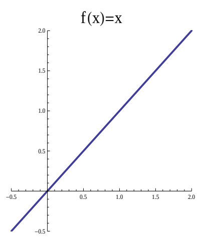
- *La función* $f(x) = x^2$ *está definida para todo número y todo número positivo es el cuadrado de algún número. Por tanto, su dominio está formado por todos los números reales y su imagen por los números reales positivos. Su gráfica son los puntos del plano que verifican la ecuación* $y = x^2$*:*

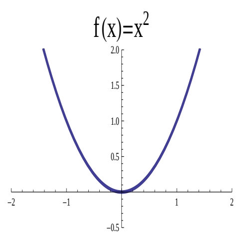
$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \qquad \mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\} \qquad \mathrm{Grf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\}.$$

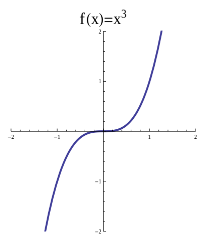
- *La función* $f(x) = x^3$ *está definida para todo número y todo número es el cubo de algún número. Por tanto, su dominio y su imagen están formado por todos los números reales. Su gráfica son los puntos del plano que verifican la ecuación* $y = x^3$*:*

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \qquad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \qquad \mathrm{Grf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^3\}. \qquad \clubsuit$$









Ejemplo 1.5

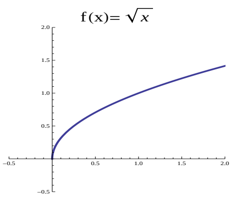
- *La función* $f(x) = \sqrt{x}$ *está definida para todo número positivo y su resultado es el número positivo del que es cuadrado. Por tanto, su dominio y su imagen están formado por todos los números positivos.*

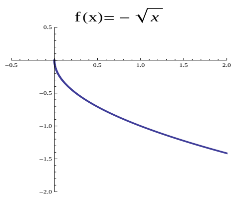
$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\} \qquad \mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}/y \geq 0\} \qquad \mathrm{Grf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/y = \sqrt{x}\}.$$

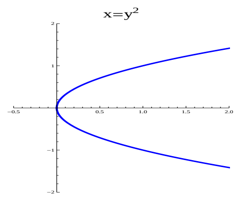
- *La función* $f(x) = -\sqrt{x}$ *está definida para todo número positivo y su resultado es el número negativo del que es cuadrado. Por tanto, su dominio está formado por todos los números positivos y su imagen están formado por todos los números negativos.*

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\} \qquad \mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}/y \leq 0\} \qquad \mathrm{Grf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/y = -\sqrt{x}\}.$$

- *La función* $f(x) = \sqrt{x}$ *y la función* $f(x) = -\sqrt{x}$ *verifican la ecuación implícita* $x = y^2$*, que no define una función pero une en la misma gráfica las gráficas de ambas funciones.* ♣







Definición 1.3 *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Decimos que f *es* ***periódica*** *de periodo* T*, si* $\exists T > 0/f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in D$. ♣

<u>**Nota**</u> Si f es periódica de periodo T su gráfica se repite cada T.

Definición 1.4 *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- f *está* ***acotada superiormente*** *si existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) \leq M \ \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$.
- f *está* ***acotada inferiormente*** *si existe* $m \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) \geq m \ \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$.

f *está* ***acotada*** *si está acotada superior e inferiormente.* ♣

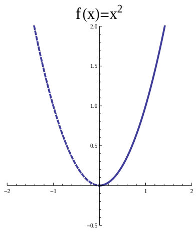
<u>**Nota**</u> f está acotada si y solo si existe un $K \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq K \ \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$.

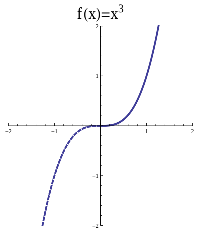
Definición 1.5 *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- f *es* ***par*** *si* $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$.
- f *es* ***impar*** *si* $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D$. ♣

<u>**Nota**</u> Si f es par es simétrica con respecto al eje OY y si es impar es simétrica con respecto al origen.

Ejemplo 1.6 *La función* $f(x) = x^2$ *es par,* $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$*, y la función* $f(x) = x^3$ *es impar,* $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$





Las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ *y* $f(x) = -\sqrt{x}$ *no son ni pares ni impares.* ♣

Definición 1.6 *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- f *es **inyectiva** si elementos distintos de su dominio tienen siempre imágenes distintas:*

$$x \neq x' \ \text{ con } \ x, x' \in Dom(f) \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$

- f *es **sobreyectiva** si el conjunto imagen es todo* $\mathbb{R}$*:*

$$\forall y \in \mathbb{R}\, \exists x \in Dom(f) / f(x) = y$$

*Una función es **biyectiva** si es simultáneamente inyectiva y sobreyectiva.* ♣

Nota Una función es inyectiva si todo elemento de la imagen tiene un único origen, f es sobreyectiva si todo número es imagen de algún elemento del dominio y, por tanto, es biyectiva si todo número es imagen de un único elemento del dominio

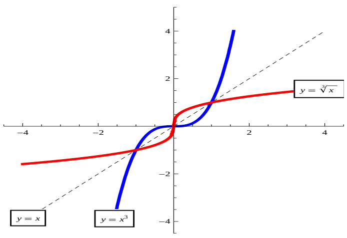
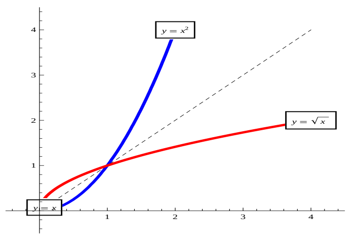
Definición 1.7 *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *inyectiva en D* ($\forall y \in \mathrm{Im}(f)\ \dot{\exists} x \in Dom(f) / f(x) = y$)*.*

*La **función inversa de** f,* f^{-1}*, a cada* $y \in Im(f)$ *le asocia el único* x *tal que* $f(x) = y$*:*

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y$$ ♣

Nota El dominio de f^{-1} es la imagen de f, su imagen es el dominio de f y su gráfica es la imagen simétrica respecto a la bisectriz del primer cuadrante de la gráfica de f.

Ejemplo 1.7

La función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *es la función inversa de* $f(x) = x^3$ *en todo su dominio, pero la función* $f(x) = \sqrt{x}$ *es la función inversa de* $f(x) = x^2$ *para* $x \geq 0$*, de forma que consideramos como dominio sólo el intervalo* $[0, +\infty)$*.* ♣

Definición 1.8 *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- f *es* ***creciente*** *si* $\forall x_1, x_2 \in D \; x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ *(estrictamente si* $f(x_1) < f(x_2)$*).*
- f *es* ***decreciente*** *si* $\forall x_1, x_2 \in D \; x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ *(estrictamente si* $f(x_1) > f(x_2)$*).*

f *es* ***monótona*** *si cumple alguno de los casos anteriores.* ♣

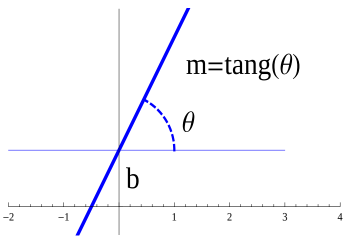
Observación: La monotonía es una propiedad global de la función. Esto significa que solo tiene sentido decir que una función es monótona en un determinado conjunto y no que es monótona en un punto, lo que carece de significado. Cuando decimos que una función es monótona en un punto lo que en realidad queremos decir es que es monótona en un entorno del punto (conjunto lo suficientemente pequeño que contiene al punto). De la misma forma, cuando decimos que una función es monótona lo que en realidad queremos decir es que es monótona en su dominio.

Ejemplo 1.8 *La función* $f(x) = x^3$ *y la función* $f(x) = \sqrt{x}$ *son estrictamente crecientes en su dominio. La función* $f(x) = -\sqrt{x}$ *es estrictamente decreciente. La función* $f(x) = x^2$ *no es ni creciente ni decreciente pero es creciente en* $[0, +\infty)$ *y decreciente en* $(-\infty, 0]$*.* ♣

1.2. Funciones elementales.

1.2.1. Funciones lineales.

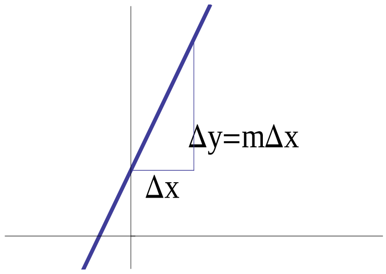
Una función lineal es una función cuya representación en el plano es una línea recta y se puede escribir como $f(x) = mx + b$ donde m y b son constantes reales. Está definida en todo $\mathbb{R}$, su imagen es también todo $\mathbb{R}$ (salvo en el caso $m = 0$ que es una función constante) y su gráfica es la recta cuya ecuación es $y = m\,x + b$.



Nota La constante m, que recibe el nombre de pendiente de la recta, determina la inclinación de la recta, ya que es la tangente del ángulo de inclinación de la recta con el eje OX, $m = \tan(\theta)$.

Nota La constante b es el punto de corte de la recta con el eje OY y determina el desplazamiento de la recta con respecto al origen, hacia arriba si es positiva y hacia abajo si es negativa.

Nota Cuando la variable pasa de un valor inicial x_0 a un valor x el aumento que experimentan los valores de la función, que denotamos por $\triangle y$, es proporcional al incremento de la variable, que denotamos por $\triangle x$ y m es la constante de proporcionalidad ($\triangle y = m\triangle x$). Por tanto, m es el aumento que experimentan los valores de la función cuando aumentamos la variable x en una unidad



Nota Si denotamos $y_0 = f(x_0)$ e $y = f(x)$ obtenemos la ecuación punto-pendiente de la recta

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Observación: Para $b = 0$ la función $f(x) = mx + b$ tiene unas propiedades especiales que estudiaremos dentro del bloque de Álgebra, ya que sólo en este caso es realmente una aplicación lineal; lo que hace que a veces se distinga entre función afín ($b \neq 0$) y función lineal ($b = 0$).

1.2.2. Funciones potencia.

Las potencias de exponente natural, n, se definen para todo $x \in \mathbb{R}$ como $f(x) = x^n$ y tiene distinto comportamiento según n sea par o impar. Para n impar tienen $\mathbb{R}$ por imagen y son estrictamente crecientes. Para n par tienen por imagen el intervalo $[0, +\infty)$, no son inyectivas y sólo son estrictamente crecientes e inyectivas en el intervalo $[0, +\infty)$.

La potencia de exponente negativo, $n = -m$ con $m \in N$, se definen para $x \neq 0$ como

$$f(x) = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

Las funciones $f(x) = \sqrt[n]{x}$ o raíces n-ésimas son las funciones inversas de las potencias de exponente natural. Para n impar están definidas en todo $\mathbb{R}$ y para n par están definidas y tienen su imagen sólo en el intervalo $[0, +\infty)$. En ambos casos son estrictamente crecientes en su dominio y verifican

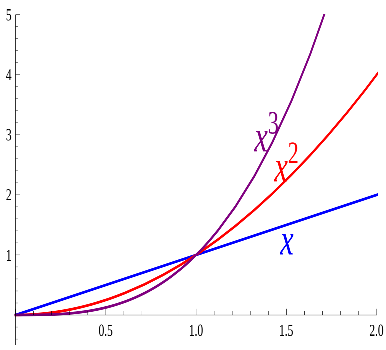
$$y = \sqrt[n]{x} \Longleftrightarrow y^n = x;$$

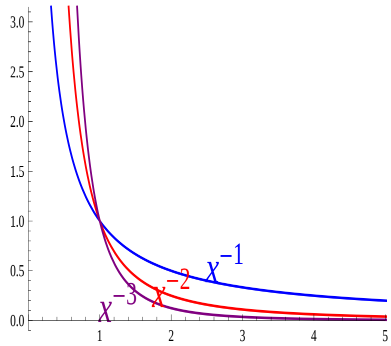
ecuación que incluye tanto $y = \sqrt[n]{x}$ como $y = -\sqrt[n]{x}$.

Las potencias de exponente racional están definidas para $x > 0$ y para $x = 0$ cuando $\frac{p}{q} > 0$ como

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

Nota Cuando tomamos valores crecientes de x hacia $+\infty$ la función x^n crece más rápido cuanto más grande es el exponente n y la función x^{-m} $(m > 0)$ se acerca a cero tanto más rápido cuanto más grande es m. Cuando nos acercamos a cero los valores de la función x^n se acercan a cero tanto más rápido cuanto más grande es el exponente n y las potencias de exponente negativo x^{-m} crecen hacia $+\infty$ tanto más rápido cuanto más grande es m.





1.2.3. Funciones polinómicas y racionales.

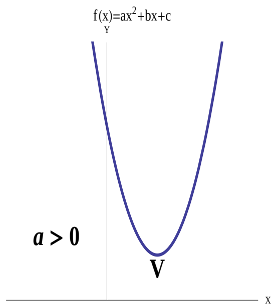
Las funciones polinómicas (o polinomios) están definidas en todo $\mathbb{R}$ y son funciones de la forma

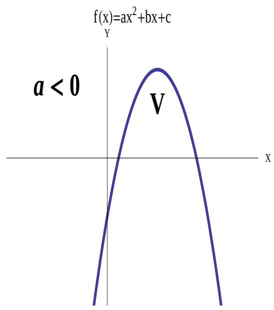
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

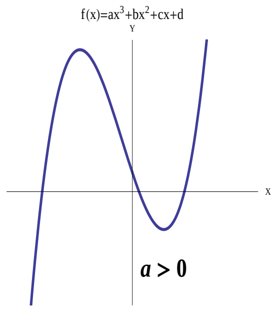
con n natural y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

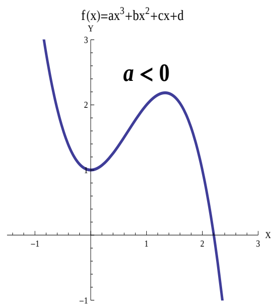
<u>Nota</u> Para $n = 2$, $p(x) = ax^2 + bx + c$, son parábolas verticales cuyo vértice es $V\left(-\frac{b}{2a}, p\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ y puede tener hasta dos puntos de corte con el eje OX que se obtienen mediante la fórmula

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$





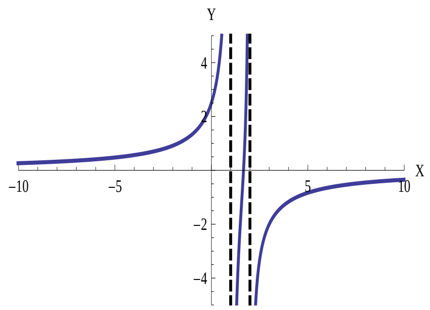




Las funciones racionales son aquellas que pueden expresarse como cociente de dos funciones polinómicas, $f(x) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ y su dominio es $\mathbb{R}$ menos el conjunto de los ceros o raíces del denominador.

Ejemplo 1.9 *Para obtener el dominio de* $f(x) = \dfrac{-3x+5}{x^2-3x+2}$ *igualamos a cero el denominador*

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

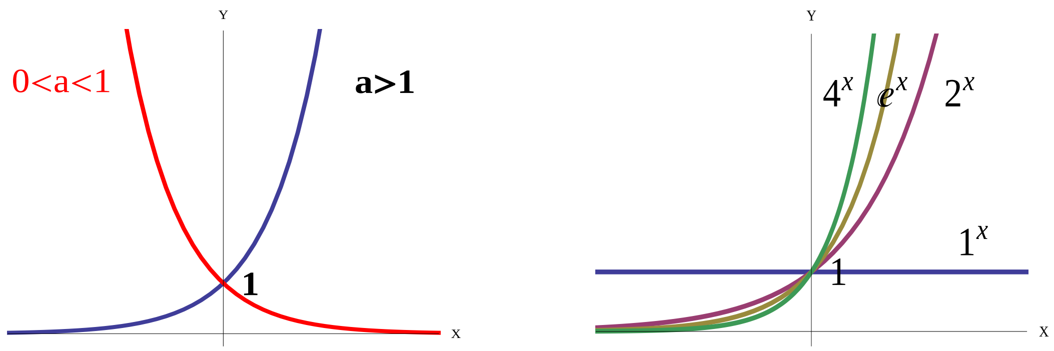


Por tanto, su dominio es $\mathbb{R} - \{1, 2\}$ ♣

1.2.4. Funciones exponenciales y logarítmicas.

Las funciones exponenciales, $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ son las funciones en las que al aumentar en una unidad la variable x el aumento que experimentan los valores de la función es proporcional al valor de la función, donde a es el factor de proporcionalidad y siempre es positivo $(a > 0)$:

$$f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x = a \cdot f(x)$$



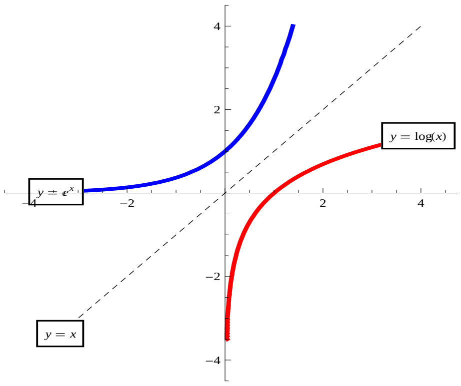
Nota Las funciones exponenciales están definidas en todo $\mathbb{R}$ y sus valores son siempre positivos. Son crecientes para $a > 1$ y decrecientes para $a < 1$. Entre ellas destaca $f(x) = e^x = \exp(x)$.

Proposición 1.9 *Sean* $a, b > 0$ *y* $x, y \in \mathbb{R}$

(a) $a^0 = 1$ (b) $a^{x+y} = a^x a^y$ (c) $(ab)^x = a^x b^x$ (d) $(a^x)^y = a^{xy}$ ♣

Las funciones logarítmicas $f(x) = \log_a(x)$ son las funciones inversas de las funciones exponenciales y entre ellas destaca la función logarítmica de base e o logaritmo neperiano,

$$\ln(x) = \log_e(x)$$



Nota Las funciones logarítmicas sólo están definidas para números estrictamente positivos (su dominio es $(0, +\infty)$) y toman todos los valores (su imagen es $\mathbb{R}$). Son crecientes para $a > 1$ y decrecientes para $a < 1$. Su gráfica es la curva $y = \log_a(x)$ y verifican

$$y = \log_a(x) \Longleftrightarrow a^y = x$$

Proposición 1.10 *Sean $a, b > 0$ y $x, y > 0$*

(a) $\log_a 1 = 0$ (b) $\log_a a = 1$

(c) $a^{\log_a(x)} = x$ (d) $\log_a a^x = x$

(e) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ (f) $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

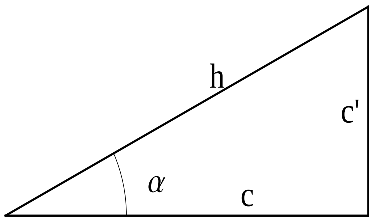
(g) $a^x = e^{x \ln a}$ (h) $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln a}$ ♣

(i) $\log_a(x^n) = n \log_a x$

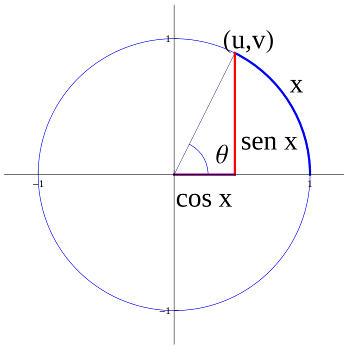
1.2.5. Funciones trigonométricas.

En un triángulo rectángulo el lado que está frente al ángulo recto es el más grande y se le denomina hipotenusa. A los otros dos lados se les llama catetos. Las razones trigonométricas correspondientes a un ángulo agudo del triángulo son las razones obtenidas en la comparación por cociente de las longitudes de estos lados, que, al ser magnitudes de la misma especie, dan como resultado un número abstracto. Considerando uno de los ángulos agudos del triángulo se pueden obtener seis razones distintas, aunque aquí nos vamos a centrar en tres (seno, coseno y tangente).

- **Seno**: se obtiene dividiendo el cateto opuesto entre la hipotenusa
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c'}{h}$$
- **Coseno**: se obtiene dividiendo el cateto contiguo entre la hipotenusa
$$cos\ \alpha = \frac{c}{h}$$
- **Tangente**: se obtiene dividiendo el cateto opuesto entre el cateto contiguo y, por tanto, corresponde al cociente del seno y el coseno:
$$\tan\alpha = \frac{c'}{c} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{cos\ \alpha}$$



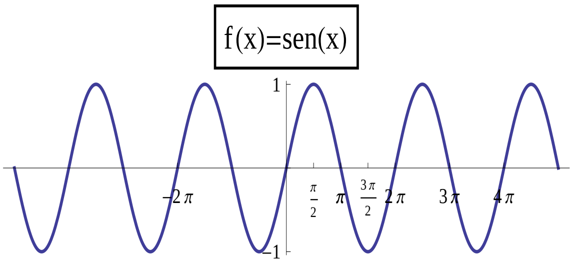
Para extender estas funciones al conjunto de los números reales consideramos la circunferencia de centro el origen y radio 1. Desde el punto de corte de la circunferencia con la parte positiva del eje de abscisas, para cada x y con la misma unidad de longitud que el radio, medimos un arco de longitud $|x|$ sobre la circunferencia, en el sentido contrario a las agujas del reloj si x es positivo y en el sentido de las agujas del reloj si es negativo.

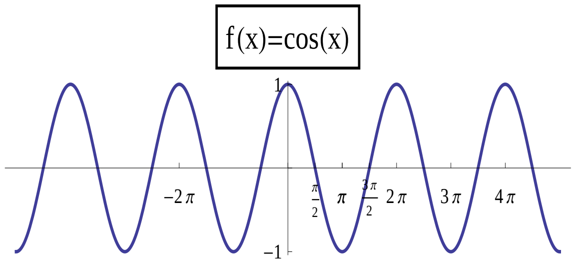


El punto final del arco tiene dos coordenadas, que denotamos por (u, v). Si trazamos la perpendicular al eje de abscisas que pasa por el punto final del arco obtenemos un triángulo rectángulo, en el cual un ángulo correspondiente al primer cuadrante tiene como seno la coordenada v y como coseno la coordenada u. Esta idea permite extender las funciones seno y coseno a cualquier número x definiendo el seno como la coordenada v y el coseno como la coordenada u. De esta forma, su dominio es todo $\mathbb{R}$ y su imagen el intervalo $[-1, 1]$.

Nota Cuando x crece y el punto final del arco recorre la circunferencia unidad los valores del seno y coseno oscilan. Como la circunferencia tiene longitud 2π el final del arco pasa por puntos en los que había estado antes y hace que los valores del seno y coseno se repitan cada 2π, por lo que son funciones periódicas de periodo 2π.

Nota El seno es una función impar mientras que el coseno es par. Si desplazamos sus gráficas a izquierda y derecha podemos superponer una sobre la otra.





Proposición 1.11 *Sean $a, b > 0$ y $x, y \in \mathbb{R}$*

(a) $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ (b) $\cos(-x) = \cos x$

(c) $\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ (d) $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen} x$

(e) $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$ (f) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

(g) $\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$ (h) $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

(i) $sen^2 x + \cos^2 x = 1$ *(fórmula fundamental de la trigonometría)*

Medida de ciertos ángulos y sus senos y cosenos							
Grados	**Radianes**	**Seno**	**Coseno**	**Grados**	**Radianes**	**Seno**	**Coseno**
0	0	0	1	90	$\frac{\pi}{2}$	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	180	π	0	-1
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	360	2π	0	1

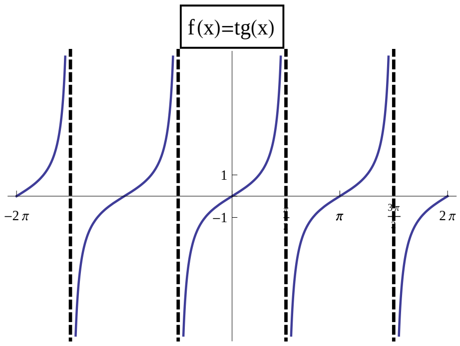
Nota La construcción de las funciones seno y coseno hace que midamos los ángulos en radianes, de forma que la medida de un ángulo en radianes es el número de radios que mide el arco (podemos hacerlo ya que la longitud de la circunferencia es proporcional al radio de ésta).

Nota Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$ y su ángulo es de 360º para convertir grados a radianes, y viceversa, utilizamos la equivalencia

$$360^{\underline{o}} \equiv 2\pi \text{ radianes}$$

La función tangente se define de forma natural como el cociente entre seno y coseno:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{cos\ x}$$



<u>Nota</u> La función tangente es periódica de periodo π y no está definida en los puntos donde se anula el coseno, que son de la forma $x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$ con $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Las funciones trigonométricas inversas o funciones arco son las inversas de las funciones trigonométricas, aunque no en sentido estricto, ya que las funciones trigonométricas no son inyectivas. Por tanto, para definirlas se a consideran sólo intervalos en los que estas funciones sean inyectivas y recorran toda la imagen de la función completa.

- La inversa de la función seno es la **función arcoseno**, $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$, que se define considerando la función seno sólo en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, ya que en este intervalo es inyectiva y cubre toda su imagen, que es el intervalo $[-1, 1]$. Por tanto, su dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y su imagen $[-\pi/2, \pi/2]$:

$$\operatorname{arc\,sen} : x \in [-1, 1] \longrightarrow \operatorname{arc\,sen} x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

donde $\operatorname{arc\,sen} x = y \iff \operatorname{sen} y = x$

- La inversa de la función coseno es la **función arcocoseno**, $f(x) = \operatorname{arc\,cos} x$, que se define considerando la función coseno sólo en el intervalo $[0, \pi]$, ya que en este intervalo es inyectiva y recorre toda su imagen, que es el intervalo $[-1, 1]$. Por tanto, su dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y su imagen $[0, \pi]$:

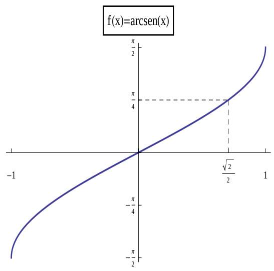
$$\operatorname{arc\,cos} : x \in [-1, 1] \longrightarrow \operatorname{arc\,cos} x \in [0, \pi]$$

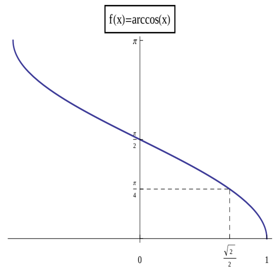
donde $\operatorname{arc\,cos} x = y \iff cos\ y = x$

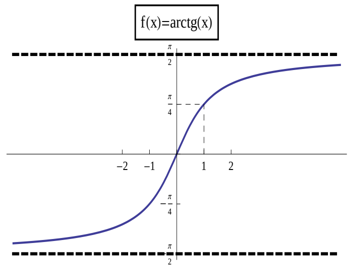
- La inversa de la función tangente es la **función arcotangente**, $f(x) = \arctan x$, que se define considerando la función tangente sólo en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, ya que en este intervalo es inyectiva y cubre toda su imagen, que es $\mathbb{R}$. Por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$ y su imagen $(-\pi/2, \pi/2)$:

$$\arctan : x \in [-\infty, \infty] \longrightarrow \arctan x \in (-\pi/2, \pi/2)$$

donde $\arctan x = y \iff \tan y = x$







Nota Las funciones arcoseno, arcocoseno y arcotangente verifican las ecuaciones implícitas sen $y = x$, *cos* $y = x$ y $\tan y = x$, respectivamente, pero estas ecuaciones no definen las funciones ya que incluyen valores que no corresponden a los dominios considerados.

Nota La función arcoseno es estrictamente creciente e impar, la función arcocoseno estrictamente decreciente y la función arcocotangente estrictamente creciente e impar (todas están acotadas).

1.3. Continuidad de funciones de una variable.

Definición 1.12 *Sean $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b]$.*

*f es **continua** en x_0 si*

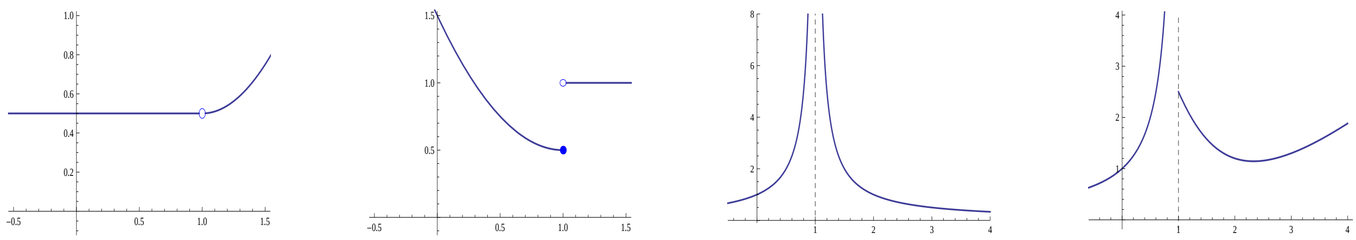
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

donde el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es l si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / x \in [a,b] \text{ y } 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

f es continua en $[a,b]$ si es continua en todos los puntos de (a,b), en a el límite por la derecha es $f(a)$ y en b el límite por la izquierda es $f(b)$. ♣

Nota Una función es discontinua en un punto si no es continua en el punto pero es continua en un entorno del punto (en este curso no estamos interesados en los distintos tipos de discontinuidad).



Funciones discontinuas en un punto

Nota Las funciones elementales que hemos visto en la sección anterior son continuas en sus dominios.

Nota El producto de un número por una función continua, la suma de funciones continuas, el producto de funciones continuas y la composición de funciones continuas son funciones continuas. Sin embargo, el cociente de funciones continuas sólo es una función continua en los puntos en los que no se anula el denominador.

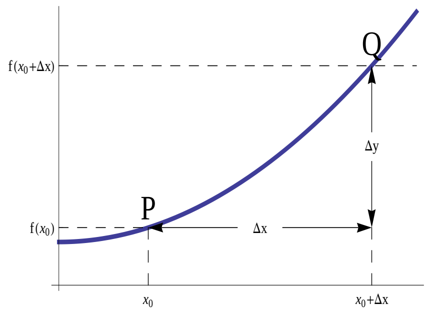
Proposición 1.13 *(Teoremas clásicos) Sea* $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua en* $[a, b]$ *entonces*

- *(Teorema de Bolzano). Si* $f(a)$ *y* $f(b)$ *tienen distinto signo existe* $c \in (a, b)$ *con* $f(c) = 0$.
- *(Teorema de los valores intermedios o de Darboux) Si* $c_1, c_2 \in [a, b]$ *con* $c_1 < c_2$ *y* $f(c_1) \neq f(c_2)$, f *alcanza cualquier valor entre* $f(c_1)$ *y* $f(c_2)$.
- *(Teorema de Weierstrass)* f *tiene un máximo y un mínimo absoluto en algún punto de* $[a, b]$ *(ver la sección 1.5).*

1.4. Derivada de funciones de una variable.

1.4.1. La derivada como tasa de variación

El valor de la derivada en un punto marca el ritmo del cambio que experimenta el valor de una variable, y, cuando se produce un cambio infinitesimal en el valor de la variable de la que depende, x. Para analizar cómo responde la variable a este cambio consideramos una función que las relaciona, $y = f(x)$ y partimos de un valor x_0 para la variable independiente, al que le corresponde un valor $f(x_0)$. Si tomamos otro valor x_1, al que le corresponde un valor $f(x_1)$, el incremento de la variable independiente es $\triangle x = x_1 - x_0$ y el incremento de la variable dependiente $\triangle y = f(x_1) - f(x_0)$ (normalmente el valor x_1 se escribe como $x_1 = x_0 + \triangle x$).



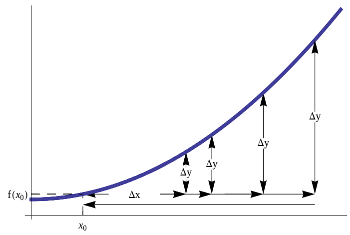
La **tasa media de variación de** y **con respecto a** x nos indica la variación relativa de una variable con respecto a la otra:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}.$$

Para estudiar como varía la variable dependiente con respecto a la variable independiente cerca del punto en el que nos encontramos buscamos que la diferencia con el otro punto sea cada vez más pequeña y calculamos el límite de la tasa media de variación cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero,

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x},$$

obteniendo la **tasa instantánea de variación de y con respecto a x en** x_0, que recibe el nombre de derivada de la función en x_0 y se denota por $f'(x_0)$.



Definición 1.14 *Sean $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$.*

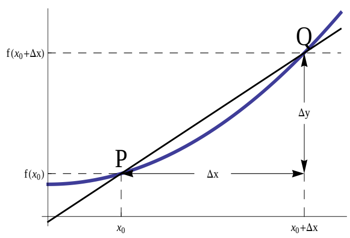
*La **derivada** de f en x_0*

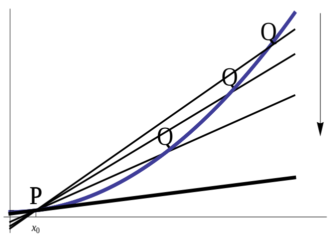
$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

*f es **derivable** en x_0 si este límite existe.*

f es derivable en un intervalo abierto si es derivable en todos los puntos del conjunto. ♣

<u>**Nota**</u> (Interpretación geométrica de la derivada) La tasa media de variación entre los puntos P y Q corresponde a la pendiente de la recta que corta a la gráfica $y = f(x)$ en estos puntos. Cuando $\triangle x$ tiende a cero, el punto Q se mueve sobre la gráfica acercándose a P y la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente, de forma que la derivada de la función en x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, f(x_0))$.





<u>**Nota**</u> (Interpretación económica) La **tasa marginal de variación** de f en x_0 es el incremento de la función cuando la variable dependiente se incrementa en una unidad y, siempre y cuando podamos considerar que este incremento es *pequeño*, corresponde aproximadamente a la derivada de f en x_0.

Ejemplo 1.10 *Coste medio y coste marginal.*

Supongamos que el coste de producir x unidades de un determinado producto viene dado por

$$C(x) = x^2 + 3x + 100,$$

medida en ciertas unidades monetarias, y que estamos produciendo cien unidades del producto, cuyo coste de producción es de $C(100) = 10{,}400$ u.m..

Si vamos a producir doscientas unidades del producto, con un coste de $C(200) = 40{,}700$ u.m., el coste medio de las cien nuevas unidades que producimos es

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{C(200) - C(100)}{200 - 100} = \frac{30{,}300}{100} = 303.$$

Cuando se producen muchas unidades del producto podemos considerar que un incremento de una unidad es un incremento pequeño y podemos escribir

$$C'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{C(x_0 + \triangle x) - C(x_0)}{\triangle x} \approx \frac{C(x_0 + 1) - C(x_0)}{1} = C(x_0 + 1) - C(x_0),$$

con lo que la derivada en x_0 (tasa instantánea de variación del coste con respecto al número de unidades producidas) es aproximadamente el coste adicional de producir una unidad más de producto cuando ya se han producido x_0 unidades del mismo (coste marginal).

En nuestro caso estamos produciendo 100 unidades del producto, con un coste de producción de $C(100) = 10{,}400$ u.m., por lo que podemos suponer que un incremento de una unidad es un incremento pequeño. Como la derivada de la función en $x_0 = 100$ es

$$C'(100) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{C(100 + \triangle x) - C(100)}{\triangle x} = 203$$

el coste adicional que hay que soportar para producir la unidad ciento uno sería aproximadamente de 203 u.m.. Al ser el incremento real del coste $C(101) - C(100) = 10{,}604 - 10{,}400 = 204$ u.m. se puede considerar que es una aproximación bastante buena. ♣

Nota La derivada marca el ritmo del cambio que experimenta la variable dependiente cuando se produce un cambio en la variable independiente y cuanto mayor es el valor de la derivada mayor es el cambio que experimenta la variable dependiente. Si la derivada es positiva a un aumento de la variable independiente le corresponde un aumento de la variable dependiente y si es negativa a un aumento de la variable independiente le corresponde una disminución de la variable dependiente.

1.4.2. La función derivada y las reglas de derivación

Definición 1.15 *Sean* $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*.*

Si f *es derivable en* (a,b) *la* ***función derivada*** *de* f *asocia a cada* x *su derivada*

$$f' : x \in (a,b) \longrightarrow f'(x) \in \mathbb{R}. \qquad \clubsuit$$

Nota Las distintas notaciones que se usan para la función derivada de una función $y = f(x)$ son:

- y' o $f'(x)$, cuyo valor en un punto x_0 se escribe como $y'(x_0)$ o $f'(x_0)$;
- $\dfrac{dy}{dx}$ o $\dfrac{df}{dx}$, cuyo valor en un punto x_0 se escribe como $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x_0}$ o $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x_0}$

Para obtener el valor de la derivada de una función en un punto sin tener que aplicar la definición, que a veces es bastante complicado, se pueden combinar las reglas de derivación y las derivadas de las funciones elementales.

Proposición 1.16 *(Reglas de derivación) Sean* $f, g : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivables en* $x \in (a,b)$*.*

1. *Regla del múltiplo constante (*$k \in \mathbb{R}$*):* $(kf)'(x) = kf'(x)$*.*
2. *Regla de la suma:* $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$*.*
3. *Regla del producto:* $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$*.*
4. *Regla del cociente:* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ *siempre y cuando* $g(x) \neq 0$*.* $\clubsuit$

Derivadas de las funciones elementales					
$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$	
x^a	ax^{a-1}	$x > 0$ $a \in \mathbb{R}$	k	0	$x \in \mathbb{R}$ $k \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$	a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$ $a > 0$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$x > 0$	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$x > 0$ $a > 0$
$\operatorname{sen} x$	$cos\ x$	$x \in \mathbb{R}$	$\operatorname{arc\,sen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 \leq x \leq 1$
$cos\ x$	$-\operatorname{sen} x$	$x \in \mathbb{R}$	$\operatorname{arc\,cos} x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 \leq x \leq 1$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} \pm n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$	$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Ejemplo 1.11 *En el ejemplo 1.10 utilizamos la definición para calcular la derivada de la función de costes* $C(x) = x^2 + 3x + 100$ *en* $x_0 = 100$ *y vimos que era* $C'(100) = 203$. *Si utilizamos las reglas de derivación se tiene:*

$$C'(x) = \left(x^2 + 3x + 100\right)' = \left(x^2\right)' + 3\,(x)' + (100)' = 2x + 3 \cdot 1 + 0 = 2x + 3,$$

con $C'(100) = 2(100) + 3 = 203$ *(obviamente coincide con el valor obtenido con la definición).* ♣

Ejemplo 1.12 *La derivada la función tangente se calcula aplicando la regla del cociente al escribir:*

$$f(x) = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{cos\ x}$$

De forma que para cos $x \neq 0$ $(x \neq \frac{\pi}{2} \pm n\pi,\ n \in \mathbb{N})$ *se tiene*

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen}' x cos\ x - \operatorname{sen} x cos\ 'x}{cos\ ^2 x} = \frac{cos\ x cos\ x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{cos\ ^2 x} = \frac{cos\ ^2 x + \ \ sen\ ^2 x}{cos\ ^2 x},$$

que se puede escribir tanto como $f'(x) = \dfrac{1}{cos\ ^2 x}$ *como* $f'(x) = 1 + \tan^2 x$. ♣

Proposición 1.17 *(Regla de la cadena) Sean* $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : [c, d) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f *es derivable en* $x_0 \in (a, b)$ *y* g *es derivable en* $f(x_0) \in (c, d)$ *entonces* $g \circ f$ *es derivable en* x_0

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$ ♣

<u>Nota</u> (Interpretación económica) Si $y = y(x)$ y a su vez $x = x(t)$ se tiene que $y = y(t)$ y

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_t = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x(t)} \left.\frac{dx}{dt}\right|_t$$

de forma que la tasa de variación de y con respecto a t es producto de la tasa de variación de y con respecto a x por la tasa de variación de x con respecto a t.

Proposición 1.18 *(función inversa) Sea* $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua e inyectiva en* $[a, b]$.

Si f *es derivable en* $x_0 \in (a, b)$ *con* $f'(x_0) \neq 0$ *entonces* f^{-1} *es derivable en* $y_0 = f(x_0)$ *con*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$ ♣

<u>Nota</u> (Interpretación económica) Si $y = y(x)$ y la tasa de variación de y respecto a x es no nula entonces $x = x(y)$ y la tasa de variación de x respecto a y es la inversa de la tasa de variación de y respecto a x.

Ejemplo 1.13 *La función $y = \arctan x$ es la inversa de la función $x = \tan y$, por tanto, la derivada de la función $y = \arctan x$ es*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}. \qquad \clubsuit$$

Ejemplo 1.14 *(Derivación logarítmica) Como ejemplo vamos a ver la derivada de $y(x) = u(x)^{v(x)}$:*

En primer lugar tomamos logaritmos

$$\ln y(x) = \ln u(x)^{v(x)} = v(x) \ln u(x)$$

A continuación derivamos esta expresión

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Luego despejamos $y'(x)$ y sustituimos $y(x)$ por su valor

$$y'(x) = \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right) y(x) = \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right) u(x)^{v(x)}$$

Esta derivada se puede expresar como la "derivada respecto de u" por la derivada de u más la "derivada respecto de v" por la derivada de v:

$$y'(x) = \left(v(x) u(x)^{v(x)-1} \right) u'(x) + \left(u(x)^{v(x)} \ln[u(x)] \right) v'(x) \qquad \clubsuit$$

1.4.3. Consecuencias de la derivabilidad

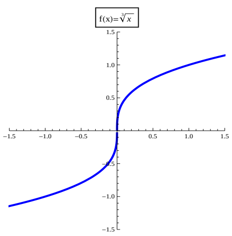
Proposición 1.19 *Sean $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$.*

Si f es derivable en x_0 entonces f es continua en x_0.

<u>**Nota**</u> El recíproco no es cierto, ya que f puede ser continua en x_0 sin que exista su derivada.

Ejemplo 1.15 *La función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es continua en $\mathbb{R}$ y no es derivable en cero, ya que la tangente es vertical y el valor de su derivada en cero es infinito, de forma que la derivada no está definida*

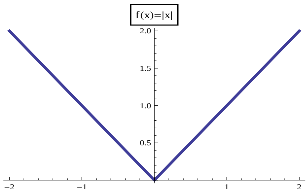
$$f'(0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(0 + \triangle x) - f(0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\triangle x}}{\triangle x} = \infty.$$



Esto muestra que una función continua que tenga tangente vertical no es derivable, ya que el cambio de valor de la función es demasiado brusco. $\clubsuit$

Ejemplo 1.16 *La función valor absoluto, $f(x) = |x|$, es continua en todo $\mathbb{R}$ pero no es derivable en cero, ya que si calculamos su derivada como $f(x) = x$ para $x \geq 0$ y $f(x) = -x$ para $x \leq 0$ hay que distinguir entre el límite por la izquierda y el límite por la derecha y ambos son distintos:*

$$f'(0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(0 + \triangle x) - f(0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{|\triangle x|}{\triangle x} = \begin{cases} \lim\limits_{\triangle x \to 0^-} \frac{-\triangle x}{\triangle x} = -1 \\ \lim\limits_{\triangle x \to 0^+} \frac{\triangle x}{\triangle x} = 1 \end{cases}$$



Esto muestra que una función continua que presente "picos" no es derivable, ya que aunque el cambio de valor de la función no sea brusco, sí lo es el cambio de dirección.

Obsérvese que podemos definir la derivada por la derecha y la derivada por la izquierda de una función en un punto considerando los límites laterales (cuando tienen sentido). En este ejemplo, la derivada en cero por la izquierda sería -1 y por la derecha 1. ♣

Proposición 1.20 *Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces*

- *f es creciente en (a, b) si y sólo si $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$.*
- *f es decreciente en (a, b) si y sólo si $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a, b)$.* ♣

Ejemplo 1.17 *Si la oferta y demanda de un bien dependen de su precio según las funciones $O(p)$ y $D(p)$ cuando el precio del bien se incrementa en una unidad la derivada de la primera función representa el aumento de la oferta y la derivada de la segunda la disminución de la demanda.*

Como la oferta aumenta si el precio del bien aumenta la gráfica de la oferta tiene pendiente positiva, $O'(p) > 0$, y, por el contrario, como la demanda disminuye si el precio aumenta, la gráfica de la demanda tiene pendiente negativa, $D'(p) < 0$. ♣

Proposición 1.21 *(Teoremas clásicos) $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)*

- *(Teorema de Rolle) Si $f(a) = f(b)$ existe $c \in (a, b)$ con $f'(c) = 0$.*
- *(Teorema del valor medio o de los incrementos finitos) Existe $c \in (a, b)$ con $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*
- *(Teorema de los valores intermedios para derivadas) Si $c_1, c_2 \in (a, b)$ con $f'(c_1) \neq f'(c_2)$ la derivada alcanza cualquier valor entre $f'(c_1)$ y $f'(c_2)$.* ♣

1.4.4. Aproximación lineal y diferencial

Cuando la función $f(x)$ es derivable en x_0, la relación entre la derivada y la pendiente de la recta tangente nos ha permitido obtener la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$, que es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{1.1}$$

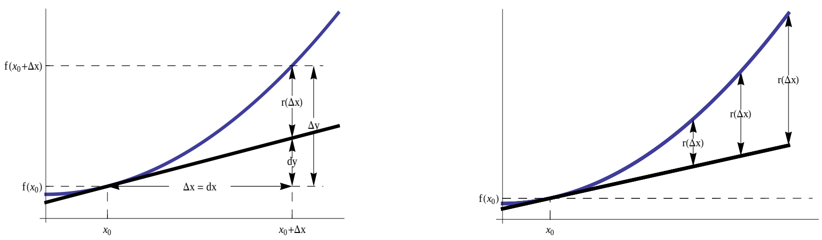
Como la gráfica $y = f(x)$ y la recta tangente en $(x_0, f(x_0))$ son "parecidas" para valores de x cercanos a x_0, esta recta tangente nos va a permitir aproximar en un entorno de x_0 la función por una función lineal. Para ello, en vez de considerar los valores reales de la función, tomamos los valores correspondientes a la recta tangente, ecuación 1.1, y obtenemos la **aproximación lineal** de f

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{1.2}$$

que también se puede escribir como $\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\triangle x$.

A continuación introducimos dos nuevas variables: "dx" para representar el incremento de la variable independiente y "dy" para representar el incremento aproximado de la variable dependiente que se obtiene mediante la aproximación lineal. La función lineal que a "dx" le asocia "dy" recibe el nombre de diferencial de f en x_0. El error que se comete en esta aproximación, que recibe el nombre de residuo, corresponde a la diferencia entre el incremento que realmente sufre la función, $\triangle y$, y el incremento aproximado de la función que se obtiene mediante la diferencial, dy:

$$r_{x_0}(\triangle x) = \overbrace{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}^{\triangle y} - \overbrace{f'(x_0)\triangle x}^{dy}.$$



Como la diferencial toma como incremento de la variable dependiente el incremento que sufriría si siguiera variando a la misma tasa instantánea de variación (utiliza los valores correspondientes a la recta tangente) de la magnitud del error que se comete depende que podamos utilizar la diferencial para aproximar la función . Esto es posible si este error tiende a cero más rápido que el incremento de la variable independiente, es decir, si $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{r_{x_0}(\triangle x)}{\triangle x} = 0$.

Definición 1.22 *Sean* $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in (a, b)$.

*La **diferencial** de f en x_0 es la función $Df(x_0):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que:*

$$Df(x_0)[dx] = f'(x_0)dx.$$

*f es **diferenciable** en x_0 si*

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)-Df(x_0)(\triangle x)}{\triangle x}=0.$$ ♣

<u>**Nota**</u> La variable de la aplicación diferencial se denota por dx y sólo cuando queremos obtener el incremento aproximado de la función se sustituye por el incremento de la variable, $dx = \triangle x$.

<u>**Observación:**</u> La versión exacta de la aproximación lineal (ecuación 1.2) corresponde a la fórmula de Taylor de primer orden (esta fórmula no se estudia en este curso):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + r_{x_0}(x-x_0). \tag{1.3}$$

Proposición 1.23 *Sean $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ y $x_0\in(a,b)$.*

f es diferenciable en x_0 si y sólo si f es derivable en x_0 ♣

<u>**Observación:**</u> Esta proposición sólo se verifica para funciones de una variable. En los temas siguientes veremos que para funciones con más de una variable el concepto de función diferenciable es más restrictivo que el de función derivable.

Definición 1.24 *Sean $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ diferenciable $\forall x\in(a,b)$.*

La aplicación que a cada $x\in(a,b)$ le asocia la diferencial de f en x

$$x\in(a,b)\longrightarrow Df(x),$$

también recibe el nombre de diferencial de f y para cada $x\in(a,b)$ se tiene

$$Df(x): dx\in\mathbb{R}\longrightarrow dy = Df(x)[dx] = f'(x)\,dx\in\mathbb{R}.$$ ♣

<u>**Nota**</u> Para referirnos a la diferencial de una función $y = f(x)$ escribiremos

$$dy = f'(x)\,dx$$

de forma que para cada x tenemos una aproximación lineal de la función en un entorno del punto.

1.5. Extremos de funciones de una variable.

Definición 1.25 *Sean $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in [a,b]$.*

- *x_0 es un* ***máximo absoluto*** *si $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$*
- *x_0 es un* ***mínimo absoluto*** *si $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$*

  En ambos casos decimos que x_0 es un ***óptimo global*** *o* ***extremo absoluto*** *(estricto si las desigualdades son estrictas para $x \neq x_0$).*

- *x_0 es un* ***máximo local*** *si existe $\delta > 0$ tal que $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b]$*
- *x_0 es un* ***mínimo local*** *si existe $\delta > 0$ tal que $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b]$*

  En ambos casos decimos que x_0 es un ***óptimo local*** *o* ***extremo relativo*** *(estricto si las desigualdades son estrictas para $x \neq x_0$).* ♣

Proposición 1.26 *(condición necesaria de óptimo local) Sea $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en (a,b). Si f tiene un extremo relativo en $x_0 \in (a,b)$ entonces $f'(x_0) = 0$.* ♣

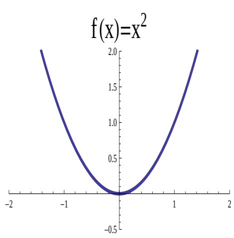
<u>Nota</u> Un punto en el que la derivada es cero recibe el nombre de **punto crítico**.

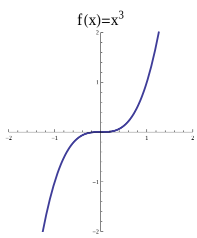
<u>Nota</u> En un punto crítico la recta tangente a la curva $y = f(x)$ es paralela al eje X.

<u>Nota</u> Si la función es derivable, un extremo relativo siempre es un punto crítico, pero no todo punto crítico es un extremo relativo (un punto crítico puede ser un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguna de las dos cosas).

Ejemplo 1.18 *En el caso de la parábola $f(x) = x^2$ el origen es un mínimo, por tanto, la derivada en $x = 0$ es cero (condición necesaria de óptimo local).*

En el caso de la función $f(x) = x^3$ la derivada en $x = 0$ también es cero, por lo que $x = 0$ es un punto crítico, pero no es ni un máximo ni un mínimo.





En ambos casos la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$ es el eje OX. ♣

Proposición 1.27 *(condición suficiente de óptimo local) Sean $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dos veces derivable en (a,b) y $x_0\in(a,b)$ un punto crítico de f.*

- *Si $f''(x_0)>0$ $\quad x_0$ es un mínimo relativo estricto.*
- *Si $f''(x_0)<0$ $\quad x_0$ es un máximo relativo estricto.*
- *Si $f''(x_0)=0$ $\quad$ no podemos afirmar nada.* ♣

Ejemplo 1.19 *En el caso de las funciones $f(x)=x^3$, $f(x)=x^4$ y $f(x)=-x^4$ la derivada en el origen es cero y, por tanto, $x=0$ es un punto crítico. Como su segunda derivada en $x=0$ también es cero la condición suficiente de óptimo local no aclara nada (para $f(x)=x^4$ el origen es un mínimo, para $f(x)=-x^4$ es un máximo y para $f(x)=x^3$ no es ni un mínimo ni un máximo).*

Nota Si f es n veces derivable en (a,b) con $f'(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ y $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ se tiene:

- Si n es par y $\begin{cases} f^{(n)}(x_0)>0 & f \text{ tiene un mínimo relativo estricto en } x_0\\ f^{(n)}(x_0)<0 & f \text{ tiene un máximo relativo estricto en } x_0\end{cases}$
- Si n es impar f no tiene ni un máximo ni un mínimo.

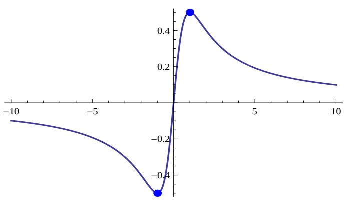
Ejemplo 1.20 *Estudio de los óptimos de la función $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$:*

En primer lugar determinamos los puntos en los que la derivada es cero (puntos críticos):

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=0\Longrightarrow 1-x^2=0\Longrightarrow\begin{cases}x=1\\ x=-1\end{cases}$$

A continuación calculamos su derivada segunda y estudiamos qué tipo de puntos son

$$f''(x)=\frac{2x\left(-3+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}\Longrightarrow\begin{cases}f''(1)=-\frac{1}{2}<0 & \textit{máximo}\\ f''(-1)=\frac{1}{2}>0 & \textit{mínimo}\end{cases}$$



Como $f(1)=\frac{1}{2}$ y $f(-1)=-\frac{1}{2}$ tenemos que el punto $(1,\frac{1}{2})$ es un máximo relativo y que el punto $(-1,-\frac{1}{2})$ es un mínimo relativo. Al observar su gráfica, vemos que son un máximo y un mínimo absolutos y que, por tanto, el valor máximo de la función es $\frac{1}{2}$ y su valor mínimo $-\frac{1}{2}$. ♣

Ejemplo 1.21 *Estudio de los óptimos de la función* $f(x) = \dfrac{9 + 12x + 7x^2 + x^3}{1 + x^2}$*:*

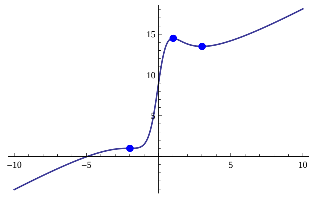
En primer lugar determinamos los puntos en los que la derivada es cero (puntos críticos):

$$f'(x) = \frac{(2+x)^2\,(3 - 4x + x^2)}{(1+x^2)^2} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

A continuación calculamos su derivada segunda y estudiamos qué tipo de puntos son

$$f''(x) = \frac{2\,(-2 - 33x + 6x^2 + 11x^3)}{(1+x^2)^3} \Longrightarrow \begin{cases} f''(3) = \frac{1}{2} < 0 & \textit{mínimo} \\ f''(1) = -\frac{9}{2} < 0 & \textit{máximo} \\ f''(-2) = 0 & \end{cases}$$

Como $f(3) = \frac{27}{2}$ *y* $f(1) = \frac{29}{2}$ *tenemos que el punto* $(3, \frac{27}{2})$ *es un mínimo relativo y que el punto* $(1, \frac{29}{2})$ *es un máximo relativo (al observar su gráfica vemos que no son óptimos absolutos). En* $x = 2$*, como la segunda derivada en es cero, no podemos afirmar nada y tenemos que calcular la tercera derivada. Se puede comprobar que* $f'''(-2) = \frac{6}{5}$ *y que, por tanto, no tiene ni un máximo ni un mínimo.* ♣



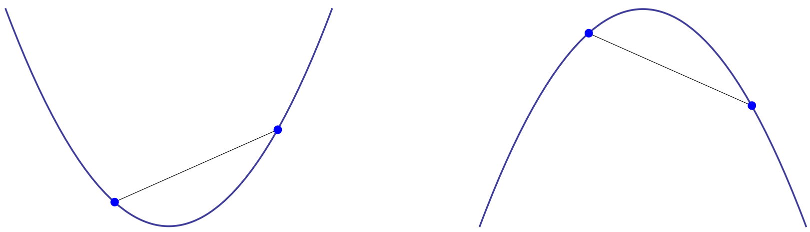
<u>**Nota**</u> El teorema de Weierstrass (proposición 1.13) garantiza que si f es continua en $[a, b]$ alcanza su máximo y su mínimo absoluto. Esto puede suceder o bien en un óptimo relativo del intervalo abierto (punto crítico) o bien en uno de los dos extremos del intervalo (a o b) o bien en un punto en el que la función no sea derivable.

1.6. Concavidad y convexidad.

Definición 1.28 *Sea* $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* I *un intervalo.*

f es ***convexa*** *en* I *si el segmento que une los puntos* $(a, f(a))$ *y* $(b, f(b))$ *está por encima de la gráfica de la función entre estos dos puntos* $\forall a, b \in I$ *con* $a < b$*.*

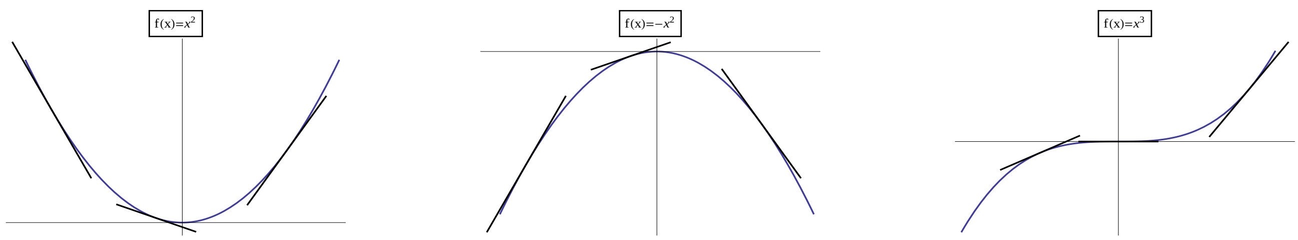
f es ***cóncava*** *en* I *si el segmento que une los puntos* $(a, f(a))$ *y* $(b, f(b))$ *está por debajo de la gráfica de la función entre estos dos puntos* $\forall a, b \in I$ *con* $a < b$*.* ♣



Funciones convexa y cóncava

Observación: La concavidad y la convexidad son propiedades globales de la función. Cuando decimos que una función es cóncava o convexa en un punto lo que en realidad queremos decir es que es cóncava o convexa en un entorno del punto y cuando decimos que una función es cóncava o convexa lo que en realidad queremos decir es que es cóncava o convexa en su dominio.

Nota Si f es derivable en un entorno de un punto y es convexa en dicho punto la curva se mantiene por encima de la recta tangente en un entorno del punto. Del mismo modo, si es cóncava la curva se mantiene por debajo de la recta tangente.



Ejemplo 1.22 *La función $f(x) = -x^2$ es convexa, la función $f(x) = x^2$ es cóncava y la función $f(x) = x^3$ es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $[0, +\infty)$.* ♣

Proposición 1.29 *Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable en (a, b).*

- *f es convexa en (a, b) si y sólo si $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b)$.*
- *f es cóncava en (a, b) si y sólo si $f''(x) \leq 0$ $\forall x \in (a, b)$.* ♣

Definición 1.30 *Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$.*

*f tiene un **punto de inflexión** en x_0 si en x_0 cambia de cóncava a convexa o viceversa.* ♣

Proposición 1.31 *Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en (a, b).*

Si f tiene un punto de inflexión en $x_0 \in (a, b)$ y existe $f''(x_0)$ entonces $f''(x_0) = 0$. ♣

Proposición 1.32 *Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable en (a, b) y $x_0 \in (a, b)$ con $f''(x_0) = 0$.*

Si existe $f'''(x_0)$ y es distinta de cero entonces f tiene un punto de inflexión en x_0. ♣

Nota Si x_0 es un punto de inflexión no tiene por qué ser $f'(x_0) = 0$.

1.7. Representación gráfica de funciones.

Para representar una función se realiza un estudio sistemático de la misma. Este estudio se compone de distintos pasos más o menos estándares. El procedimiento lo vamos a ver con un ejemplo, en el que se realizarán la mayor parte de los pasos que se suelen seguir para representar una función. En circunstancias normales, el objetivo de la representación determinará los pasos que se realizan. A veces, un simple bosquejo permite responder a la cuestión que queremos resolver y debemos proceder siempre de la manera más simple posible.

Ejemplo 1.23 *Representar* $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x + 1}$

- *Estudio previo:*

  ⋆ *Determinación de su dominio:*

  $2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Longrightarrow$ *está definida para* $x \neq -\frac{1}{2}$

  ⋆ *Cortes con los ejes y valores particulares de la función:*

  $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x + 1} = 0 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow & \textit{Corta al eje } OX \textit{ en } (1, 0) \\ f(0) = 1 \Longrightarrow & \textit{Corta al eje } OY \textit{ en } (0, 1) \end{cases}$$

  ⋆ *Simplificación del estudio (paridad, simetrías, periodicidad,...):*

  No presenta nada especial

- *Asíntotas verticales en los puntos singulares que no estén en el dominio:*

  En $x = -\frac{1}{2}$ *tiene una asíntota vertical*

  $$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x + 1} = -\infty \qquad \lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x + 1} = +\infty$$

- *Comportamiento en el infinito (asíntotas horizontales y oblicuas):*

  No tiene asíntotas horizontales

  $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x + 1} = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x + 1} = +\infty$$

  Tiene asíntota oblicua $y = mx + b$ *con*

  $$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2 - 2x + 1}{2x + 1}}{x} = \frac{1}{2} \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 - 2x + 1}{2x + 1} - mx \right] = -\frac{5}{4}$$

- *Estudio de la derivada:*

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2x - 4}{(2x+1)^2}$$

  ⋆ *Puntos con tangente vertical*

  No hay ningún punto del dominio donde la derivada sea infinita.

  ⋆ *Determinación de los puntos críticos*

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2x - 4}{(2x+1)^2} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

  ⋆ *Signo de la derivada: crecimiento y decrecimiento:*

  ∗ $f'(x) \geq 0$ *en* $(-\infty, -2] \quad \Longrightarrow \quad f$ *es creciente en* $(-\infty, -2]$.

  ∗ $f'(x) \leq 0$ *en* $[-2, -\frac{1}{2}) \quad \Longrightarrow \quad f$ *es decreciente en* $[-2, -\frac{1}{2})$.

  ∗ $f'(x) \leq 0$ *en* $(-\frac{1}{2}, 1] \quad \Longrightarrow \quad f$ *es decreciente en* $(-\frac{1}{2}, 1]$.

  ∗ $f'(x) \geq 0$ *en* $[1, +\infty) \quad \Longrightarrow \quad f$ *es creciente en* $[1, +\infty)$.

  Se deduce que en $x = -2$ *tiene un máximo relativo y en* $x = 1$ *un mínimo relativo.*

- *Estudio de la derivada segunda*

$$f''(x) = \frac{18}{(2x+1)^3}$$

  ⋆ *Puntos de inflexión*

  No tiene puntos de inflexión, ya que la derivada segunda no se anula.

  ⋆ *Signo de la derivada segunda: convexidad y concavidad*

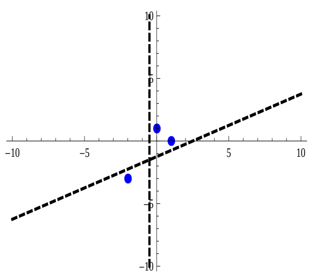
  ∗ $f''(x) \leq 0$ *en* $(-\infty, -\frac{1}{2}) \quad \Longrightarrow \quad f$ *es cóncava en* $(-\infty, -\frac{1}{2})$.

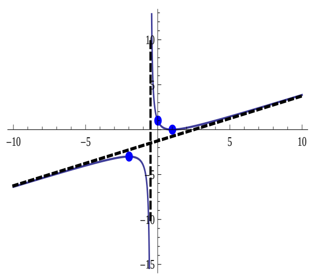
  ∗ $f''(x) \geq 0$ *en* $(-\frac{1}{2}, +\infty) \quad \Longrightarrow \quad f$ *es convexa en* $(-\frac{1}{2}, +\infty)$.

  ⋆ *Estudio de los puntos críticos (máximos y mínimos)*

  ∗ f *tiene un máximo relativo en* $(-2, -3)$ $\left(f''(-2) = -\frac{2}{3} < 0 \text{ y } f(-2) = -3\right)$

  ∗ f *tiene un mínimo relativo en* $(1, 0)$ $\left(f''(1) = \frac{2}{3} > 0 \text{ y } f(1) = 0\right)$





Si representamos las asíntotas y los puntos clave sólo queda tener en cuenta los datos sobre crecimiento y concavidad para tener una buena aproximación de la función. ♣

Ejercicio del capítulo.

Ejercicio 1.24 *Calcula las derivadas de las siguientes funciones especificando su dominio y los puntos en los que son continuas y derivables.*

(a) $f(x) = 2xe^{x^2+1}$ (b) $\ln(x^3+x)$ (c) $f(x) = x\ln(x^2+1)$

Solución

(a) *Esta función es continua y derivable siempre*

$$f'(x) = 2e^{x^2+1}\,(2x^2+1)$$

(b) *Esta función está definida en los puntos en los que el argumento del logaritmo es positivo*

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}\,/x^3+x>0\} = (0,+\infty)$$

Es continua y derivable en todo su dominio

$$f'(x) = \frac{3x^2+1}{x^3+x} \ \ \textit{con} \ \ x>0$$

(c) *Esta función es continua y derivable siempre, ya que el argumento del logaritmo es positivo*

$$f'(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} + \ln\left(x^2+1\right)$$

♣

Ejercicio 1.25 *Calcula las derivadas de las siguientes funciones especificando su dominio y los puntos en los que son continuas y derivables ($a>0$).*

(a) $f(x) = \sqrt{ax^2-2x}$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-a}$ (c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{ax^2-2x}}{x+2}$

Solución

(a) *Esta función está definida en los puntos en los que el argumento de la raíz es positivo o nulo*

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}\,/ax^2-2x \geq 0\} = (-\infty,0] \cup \left[\tfrac{2}{a},+\infty\right)$$

La función es continua en su dominio pero no es derivable en los puntos donde se anula el argumento ($x=0$, $x=\frac{2}{a}$), ya que en estos puntos tienen tangente vertical:

$$f'(x) = \frac{ax-1}{\sqrt{ax^2-2x}} \ \ \textit{con} \ \ x \in (-\infty,0) \cup \left(\tfrac{2}{a},+\infty\right)$$

(b) *Esta función es continua siempre pero no es derivable en los puntos donde se anula el argumento de la raíz ($x=-a$, $x=a$):*

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt{(x^2-a)^2}} \ \ \textit{con} \ \ x \neq \pm a$$

(c) *Su dominio es casi el mismo que el de la primera función pero se excluye además el punto en el que se anula el denominador ($x = -2$).*

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}\,/ax^2 - 2x \geq 0, x \neq -2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 0] \cup \left[\tfrac{2}{a}, +\infty\right)$$

Al igual que las anteriores, es continua en su dominio y no es derivable en los puntos donde se anula el argumento de la raíz ($x = 0$, $x = \frac{2}{a}$):

$$f'(x) = \frac{2ax + x - 2}{(x+2)^2\sqrt{ax^2 - 2x}} \quad \textit{con } x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup \left(\tfrac{2}{a}, +\infty\right) \qquad \clubsuit$$

Ejercicio 1.26 *Calcula las derivadas de las siguientes funciones especificando su dominio y los puntos en los que son continuas y derivables ($a, b > 0$).*

(a)$f(x) = (bx+1)e^{ax^2+1}$ (b)$f(x) = \dfrac{e^{ax}+1}{x^2-1}$ (c)$f(x) = \ln\left(\dfrac{ax+b}{ax-b}\right)$

Solución

(a) *Esta función es continua y derivable siempre*

$$f'(x) = e^{ax^2+1}\left(2abx^2 + 2ax + b\right)$$

(b) *Esta función está definida siempre y cuando el denominador no se anule*

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}\,/x \neq \pm 1\}$$

Es continua y derivable en su dominio

$$f'(x) = \frac{ax^2e^{ax} - 2xe^{ax} - ae^{ax} - 2x}{\left(x^2-1\right)^2} \quad \textit{con } x \neq \pm 1$$

(c) *Esta función está definida en los puntos en los que el argumento del logaritmo es positivo*

$$\mathrm{Dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R}\,/\,\tfrac{ax+b}{ax-b} > 0\right\} = (-\infty, -\tfrac{b}{a}) \cup (\tfrac{b}{a}, +\infty)$$

Es continua y derivable en todo su dominio

$$f'(x) = \frac{-2ab}{(ax+b)(ax-b)} \quad \textit{con } x \in (-\infty, -\tfrac{b}{a}) \cup (\tfrac{b}{a}, +\infty) \qquad \clubsuit$$

Ejercicio 1.27 *Calcula las derivadas de las siguientes funciones especificando su dominio y los puntos en los que son continuas y derivables ($a, b > 0$).*

(a)$f(x) = \mathrm{sen}(ax)\mathit{cos}\,(ax)$ (b)$f(x) = \dfrac{\mathrm{sen}(ax)}{\mathit{cos}\,(bx)}$ (c)$f(x) = x\,\mathrm{arc\,tg}\,(ax^2+b)$

Solución

(a) *Esta función es continua y derivable siempre*

$$f'(x) = a\mathit{cos}\,^2(ax) - a\,\mathrm{sen}^2(ax)$$

(b) *Esta función está definida siempre y cuando el denominador no se anule*

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/ cos\ bx) \neq 0\}$$

Obsérvese que hay infinitos puntos en los que la función no esta definida, ya que la función $cos\ (bx)$ *es periódica de periodo* $\frac{2\pi}{b}$ *y dentro del intervalo* $\left[0, \frac{2\pi}{b}\right]$ *hay dos puntos en los que no está definida (*$x = \frac{\pi}{2b}$, $x = \frac{3\pi}{2b}$*). Esta situación se repite en cada periodo.*

Dentro de su dominio es continua y derivable

$$f'(x) = \frac{a cos\ (ax) cos\ (bx) + b \,\mathrm{sen}(ax)\,\mathrm{sen}(bx)}{cos\ ^2(bx)} \quad con\ cos\ (bx) \neq 0$$

(c) *Esta función es continua y derivable siempre*

$$f'(x) = \frac{2ax^2}{\left(ax^2+b\right)^2+1} + \mathrm{arc\,tg}\left(ax^2+b\right) \qquad \clubsuit$$

Ejercicio 1.28 *Calcula las derivadas de las siguientes funciones especificando su dominio y los puntos en los que son continuas y derivables.*

(a)$f(x) = x^x$ (b)$f(x) = \sqrt[x]{x}$ (c)$f(x) = x^{cos\ (x)}$ (d)$f(x) = (\mathrm{sen}\, x)^x$

Solución

(a) *Aunque esta función podría definirse para algunos valores negativos de* x*, sólo la consideramos definida cuando la base es positiva*

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/ x > 0\}$$

Derivamos esta función considerando que su derivada es la suma de dos derivadas que reflejan la variación total de la función. En la primera se toma el exponente como una constante y en la segunda lo que se toma como constante es la base

$$f'(x) = x \cdot x^{x-1} + x^x \ln x$$

Esta derivada se simplifica como

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1) \ \ con\ x > 0$$

(b) *Esta función sólo la consideramos definida cuando la base es positiva*

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/ x > 0\}$$

Para derivar esta función escribimos

$$f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$$

y aplicamos la misma regla de derivación que en el apartado anterior.

Así, volvemos a considerar que su derivada es la suma de dos derivadas, de forma que en la primera se toma el exponente como una constante y en la segunda lo que se toma como constante es la base

$$f'(x) = \frac{1}{x}x^{\frac{1}{x}-1} + x^{\frac{1}{x}}\ln(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Esta derivada se simplifica como

$$f'(x) = \frac{x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x)}{x^2} \quad \textit{con } x > 0$$

(c) *Esta función sólo la consideramos definida cuando la base es positiva*

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}\,/x > 0\}$$

La regla de derivación también es la misma, por lo que volvemos a considerar que su derivada es la suma de dos derivadas. En la primera se toma el exponente como una constante y en la segunda lo que se toma como constante es la base

$$f'(x) = \mathit{cos}\ (x)x^{\mathit{cos}\ (x)\,-\,1} - x^{\mathit{cos}\ (x)}\ln(x)\,\mathrm{sen}(x)\ \ \textit{con } x > 0$$

(d) *De nuevo consideramos que esta función está definida sólo cuando la base es positiva*

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}\,/\mathrm{sen}\,x > 0\}$$

Obsérvese que hay infinitos intervalos en los que la función no esta definida, ya que la función seno es periódica de periodo 2π y el seno toma tanto valores positivos como negativos. Dentro del intervalo $[0, 2\pi]$ solo esta definida en $(0, \pi)$, que es donde el seno es positivo. La situación se repite en cada uno de los periodos.

Su derivada sigue la misma regla que las funciones anteriores y es

$$f'(x) = x(\mathrm{sen}\,x)^{x-1}\mathit{cos}\ x + (\mathrm{sen}\,x)^x\ln(\mathrm{sen}\,x)\ \ \textit{con}\ \ \mathrm{sen}\,x > 0$$ ♣

Ejercicio 1.29 *Representar las siguientes funciones haciendo un estudio completo*

$$\text{(a)}f(x) = \frac{-3x+5}{x^2-3x+2} \quad \text{(b)}f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{(c)}f(x) = \frac{9+12x+7x^2+x^3}{1+x^2}$$

<u>Solución</u>

Son las gráficas de los ejemplos 1.9, 1.20 y 1.21.