TEMA 2. CINEMÁTICA. DINÁMICA. TRABAJO Y ENERGÍA

Objetivos

1. Distinguir los diferentes tipos de movimiento de un cuerpo.
2. Representar los diagramas de fuerzas que actúan sobre un determinado cuerpo.
3. Introducir el concepto de la aceleración de Coriolis, para explicar la circulación de los vientos respecto de la Tierra.
4. Introducir el concepto de trabajo y energía.

Bibliografía

1. Apuntes División Física Aplicada
2. Física (Cap. 2 al 10) – Tipler Mosca - Reverté – 2003
3. Problemas de Física- Burbano

1. CINEMÁTICA

Es la parte de la física que estudia el movimiento, sin tener en cuenta las causas que lo producen. Conocido el movimiento de una partícula en un instante determinado, podemos saber las características del movimiento en cualquier otro instante, pasado o futuro.

1.1. Conceptos generales

Usaremos un *sistema de referencia* o de coordenadas para fijar la posición en el espacio de un determinado móvil o partícula en movimiento. Los sistemas de coordenadas pueden ser: cartesianos ($x, y, z \ / \ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), intrínsecos ($\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$) y polares ($\vec{r}, \theta / \vec{u}_r, \vec{u}_z$).

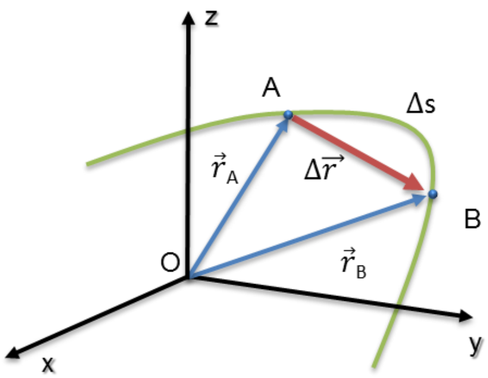
Vector desplazamiento

Si consideramos dos puntos en el espacio A y B, y una partícula que se mueve desde A hasta B, al camino seguido por la partícula para ir de A a B se denomina *trayectoria*. La longitud de la trayectoria se simboliza como *Δs*. Mientras que a la distancia entre A y B se le llama *desplazamiento* $(\Delta\vec{r})$. El desplazamiento es la diferencia entre los *vectores de posición* ($\vec{r}$) de cada punto.

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A} = \Delta x\,\vec{\imath} + \Delta y\,\vec{\jmath} + \Delta z\,\vec{k}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{r_A} = x_A\vec{\imath} + y_A\,\vec{\jmath} + z_A\vec{k} \\ \overrightarrow{r_B} = x_B\vec{\imath} + y_B\,\vec{\jmath} + z_B\vec{k}\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\Delta\vec{r} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} + (z_B - z_A)\vec{k}$$



Vector velocidad

Al cociente entre el vector desplazamiento ($\Delta\vec{r}$) entre A-B y el intervalo de tiempo ($\Delta t = t_B - t_A$) correspondiente, se le llama *vector velocidad media* ($\overrightarrow{v_m}$)

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Mientras que cuando se consideran intervalos de tiempo muy cortos, el *vector velocidad instantánea* ($\vec{v}$), se define como el límite del vector velocidad media cuando Δt tiende a cero, o lo que es lo mismo, la derivada del vector de posición respecto al tiempo.

$$\boldsymbol{\vec{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{d\vec{r}}}{\boldsymbol{dt}}$$

También se le llama celeridad o rapidez, y está representada por un vector tangente a la trayectoria. Si la calculamos tomando de referencia un sistema de coordenadas cartesianas, tendremos:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$$

Ejemplo: Una partícula se mueve en tres dimensiones, su vector posición viene dado por:

$$\vec{r}(t) = (6 - 2t)\vec{\imath} + (3 + 4t - 6t^2)\vec{\jmath} - (1 + 3t - 2t^2)\vec{k}$$

donde las distancias están en metros y el tiempo t en segundos. Calcular:

a) ¿Cuál es el vector velocidad en t=3s?
El vector velocidad vendrá dado por:
$$\vec{v}(t) = (-2)\vec{\imath} + (+4 - 12t)\vec{\jmath} - (3 - 4t)\vec{k}$$
En t=3s, entonces será:
$$\vec{v}(t) = (-2)\vec{\imath} + (-32)\vec{\jmath} + (9)\vec{k} = (-2, -32, 9)$$

b) Cual será el modulo de la velocidad en t=3
Hay que calcular el módulo del vector velocidad:
$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-32)^2 + (9)^2} = 33.3\, m/s$$

Vector aceleración

Análogamente a la velocidad, se definen los vectores de aceleración como:

Vector aceleración media:

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Vector aceleración instantánea:

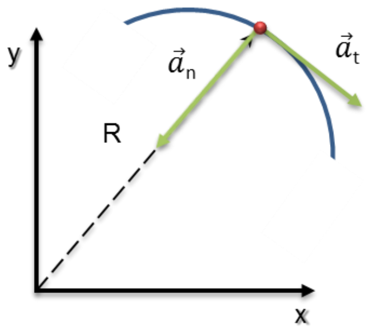
$$\vec{\boldsymbol{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{d\vec{v}}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

Ejemplo: Si continuamos con el ejemplo anterior, calcular:

a) El vector aceleración:
$$\vec{a}(t) = -12\vec{\jmath} + 4\vec{k}$$
Que es constante para cualquier valor de t

b) El módulo de la aceleración:
$$|\vec{a}| = \sqrt{(-12)^2 + (4)^2} = 12.6\, m/s^2$$

Es decir, una variación de la velocidad siempre implica una aceleración. La variación puede ser del módulo de la velocidad (*aceleración tangencial* $\overrightarrow{a_t}$, vector tangencial a la trayectoria) o de la dirección de la velocidad (*aceleración normal* o *centrípeta* $\overrightarrow{a_n}$, vector perpendicular a la trayectoria). A estas componentes se les denominan componentes intrínsecas de la aceleración, de modo que $\vec{a} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n}$.

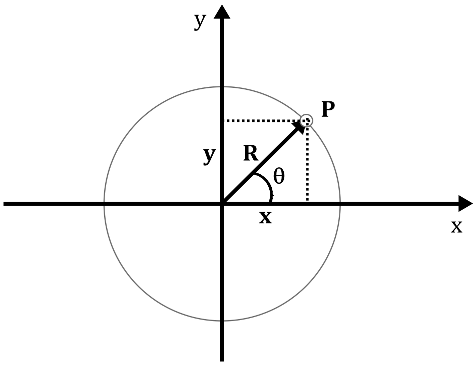


$$\overrightarrow{a_t} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} \rightarrow Aceleración\ tangencial$$

$$\overrightarrow{a_n} = v\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_n} \rightarrow Aceleración\ normal$$

Deducción de las aceleraciones normal y tangencial:

En un instante determinado una partícula se encuentra en el punto P formando un ángulo θ con el eje X. El vector posición vendrá dado por:



$$\vec{r} = R \cdot cos\theta\vec{\imath} + R \cdot sen\theta\vec{\jmath} = R(\overrightarrow{cos\theta\vec{\imath} + sen\theta\vec{\jmath}})$$
$$= R \cdot \overrightarrow{u_n}$$

El vector velocidad $\vec{v}$ se obtiene derivando el vector posición con respecto del tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -R \cdot sen\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}\vec{\imath} + R \cdot cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}\vec{\jmath}$$

Donde $\frac{d\theta}{dt}$ es la variación del ángulo con respecto del tiempo, también conocida como la velocidad angula ω. De tal forma que se puede reescribir el vector velocidad:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -R \cdot sen\theta \cdot \omega\,\vec{\imath} + R \cdot cos\theta \cdot \omega\,\vec{\jmath} = R \cdot \omega\,(-sen\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}\,) = R \cdot \omega \cdot \overrightarrow{u_t}$$

Para calcular el vector aceleración derivamos el vector velocidad (derivada de un producto de funciones):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\left[\frac{d\omega}{dt} \cdot (-sen\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}\,) + \omega \cdot \left(-cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}\vec{\imath} - sen\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}\,\vec{\jmath}\right)\right] =$$
$$= R \cdot \alpha \cdot \overrightarrow{u_t} - \omega^2 \cdot R \cdot \overrightarrow{u_n}$$

Donde $\frac{d\omega}{dt} = \alpha$ es la aceleración angular. Observamos que el vector aceleración tiene dos componentes. Una en la dirección de la velocidad (aceleración tangencial) y otra dirigida en la dirección del vector posición (aceleración normal). El signo menos indica que va hacia el centro de la circunferencia. Teniendo en cuenta que $\theta = s/R$, donde s es la longitud del arco recorrida y que $v = \frac{ds}{dt}$, podemos relacionar las variables angulares con las lineales:

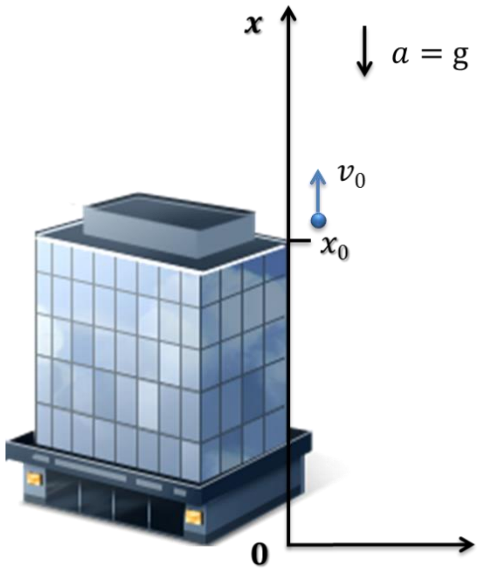
$$|\vec{a_n}| = \omega^2 \cdot R = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \cdot R = \left(\frac{1}{R}\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot R = \frac{v^2}{R}$$

$$|\vec{a_t}| = \alpha \cdot R = \frac{d\omega}{dt} \cdot R = \frac{d\left(\frac{v}{R}\right)}{dt} \cdot R = \frac{dv}{dt}$$

1.2. Tipos de movimiento

Movimiento rectilíneo

Tipo	Características	Fórmulas	Ejemplo
RECTILÍNEO UNIFORME (m.r.u)	$\vec{v} = cte$ $\vec{a} = 0$	$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v} \cdot t$	Un coche en una carretera recta siempre a la misma velocidad.
RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (m.r.u.a)	$\vec{v} \neq cte$ $\vec{a} = cte \begin{cases} a_t = cte \\ a_n = 0 \end{cases}$	$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a} \cdot t$ $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$	Una piedra que cae desde un 4º piso (acelerado). Una piedra que lanzamos hacia arriba (decelerado).
RECTILÍNEO ACELERADO (general)	$\vec{v} \neq cte$ $\vec{a} \neq cte$	$\vec{v} = \vec{v_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{a} \cdot dt$ $\vec{r} = \vec{r_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{v} \cdot dt$	Cuando vamos frenando con el coche, la desaceleración no es constante.



Ejemplo: Un cuerpo es lanzado desde el techo de un edificio de altura x_0 con velocidad v_0. Determinar las ecuaciones del movimiento, la altura máxima y el tiempo que tarda el cuerpo en alcanzar el origen.

En primer lugar, establecemos el origen y la dirección del movimiento, el eje x. Después, los valores de la posición inicial, y los valores y signos de la velocidad inicial, y de la aceleración, tal como se indica en la figura. Resultando las siguientes ecuaciones del movimiento

$$a = -g$$

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Cuando alcanza la altura máxima, la velocidad del móvil es cero. De la ecuación de la velocidad se obtiene el tiempo que transcurre, desde que se lanza, hasta que llega a dicha posición. El tiempo transcurrido se sustituye en la ecuación de la posición, obteniéndose la máxima altura que alcanza el móvil, medida desde el suelo.

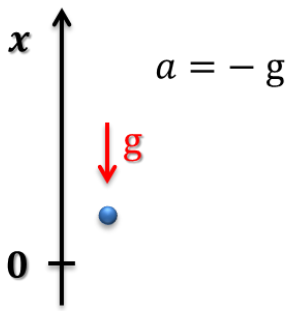
$$t = \frac{v_0}{g}$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}$$

El tiempo que tarda en llegar al suelo, se obtiene a partir de la ecuación de la posición, poniendo $x = 0$, y resolviendo una ecuación de segundo grado.

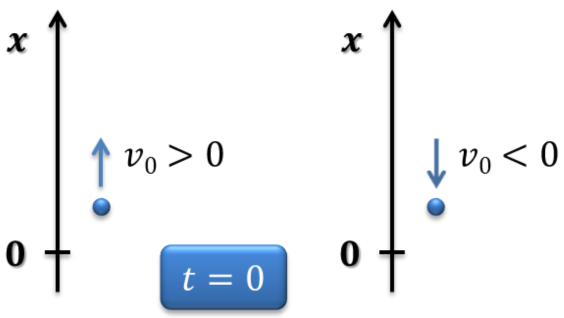
$$0 = x_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Nota: como podrá comprobar el lector, la solución del problema es independiente de la situación del origen. Si colocamos el origen en el punto de lanzamiento, la posición inicial x_0 es cero, pero el suelo se encuentra en la posición $-x_0$ respecto de dicho origen, resultando la misma ecuación. La altura máxima se calcula ahora desde el techo del edificio, no desde el origen.



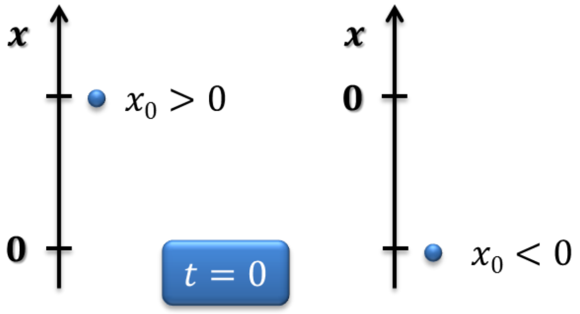
Signo de la aceleración:

Si el eje x apunta hacia arriba la aceleración de la gravedad vale $a = -g$, *con g* = 9.8 ó 10 m/s^2



Signo de la velocidad inicial:

Si el eje x apunta hacia arriba y el cuerpo es inicialmente lanzado hacia arriba el signo de la velocidad inicial es positivo, en caso de ser lanzado hacia abajo el signo se considera negativo.

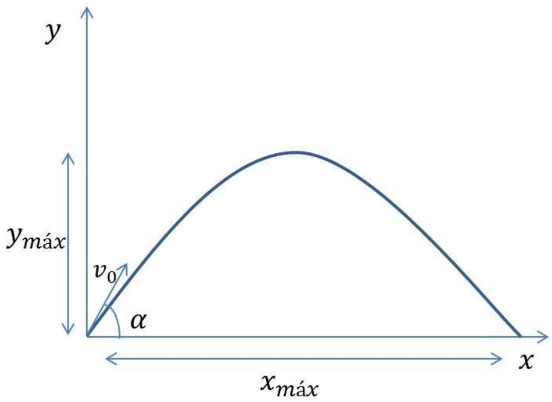


Situación del origen:

Se acostumbra a poner el origen, en el punto en el que es lanzado el móvil en el instante inicial. Esto no tiene que ser siempre así, y si un cuerpo es lanzado desde el techo de un edificio podemos situar el origen en el suelo, la posición inicial del móvil correspondería a la altura del edificio h.

Si situamos el origen en el techo del edificio y lanzamos el móvil desde el suelo, la posición inicial sería $-h$.

Ejemplo: Consideremos un cañón que dispara un obús desde el suelo $(y_0 = 0)$ con cierto ángulo α menor de 90° con la horizontal.



Las ecuaciones del movimiento, resultado de la composición de un movimiento uniforme a lo largo del eje X, y de un movimiento uniformemente acelerado a lo largo del eje Y, son las siguientes:

$$\begin{cases} a_y = -g \\ a_x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_y = v_{0y} - gt \\ v_x = v_{0x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x = v_{0x} \cdot t \end{cases}$$

La vector velocidad inicial se debe descomponer en los dos ejes elegidos:

$$v_{0y} = v_0 \cdot sen\ \alpha$$

$$v_{0x} = v_0 \cdot cos\ \alpha$$

a) ¿Calcular el tiempo total de vuelo?

Es el tiempo total que el móvil permanece en movimiento. Para calcularlo tenemos en cuenta que $y = 0$ cuando el cuerpo llega al suelo.

$$0 = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \cdot sen\ \alpha}{g}$$

b) ¿Calcular el alcance máximo?

Es la distancia horizontal que recorre el móvil. La obtenemos al substituir en la ecuación de la coordenada $x$la expresión del tiempo de movimiento.

$$x_{max} = v_{0x} \cdot \frac{2v_0 \cdot sen\ \alpha}{g} = v_0 \cdot cos\ \alpha \frac{2v_0 \cdot sen\ \alpha}{g} = \frac{2{v_0}^2 \cos\alpha \cdot sen\ \alpha}{g}$$

Y utilizando la relación trigonométrica $2\cos\alpha \cdot sen\ \alpha = sen\ 2\ \alpha$, resulta:

$$x_{máx} = \frac{{v_0}^2 \cdot sen\ 2\alpha}{g}$$

Su valor máximo se obtiene para un ángulo $\theta\ = 45^o$, teniendo el mismo valor para $\theta\ = 45^o + \alpha$, que para $\theta\ = 45^o - \alpha.$ Por ejemplo, tienen el mismo alcance los proyectiles disparados con ángulos de tiro de 30^o y 60^o, ya que sen(2·30)=sen(2·60).

c) ¿Calcular la altura máxima?

La altura máxima se alcanza cuando $v_y = 0$, es decir cuando $0 = v_{0y} - gt = v_0 \cdot sen\ \alpha - gt$.De aquí deducimos el valor de t.

$$t = \frac{v_0 \cdot sen\ \alpha}{g}$$

Sustituimos este valor en la ecuación de la coordenada y

$$y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = y = v_0 \cdot sen\ \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \cdot sen\ \alpha \frac{v_0 \cdot sen\ \alpha}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \cdot sen\ \alpha}{g}\right)^2 =$$

$$= \frac{{v_0}^2 \cdot sen^2\ \alpha}{g} - \frac{{v_0}^2 \cdot sen^2\ \alpha}{2g}$$

$$y_{máx} = \frac{{v_0}^2 \cdot sen^2\ \alpha}{2g}$$

Movimiento circular

Consideramos una partícula que se mueve a lo largo de una circunferencia, siendo radio de curvatura constante (R), el ángulo descrito θ, la longitud de la trayectoria recorrida ($s = R\theta$), y definiendo *velocidad angular* (ω) como la derivada del ángulo θ con respecto al tiempo, tendremos que la velocidad y aceleración de dicha partícula son:

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

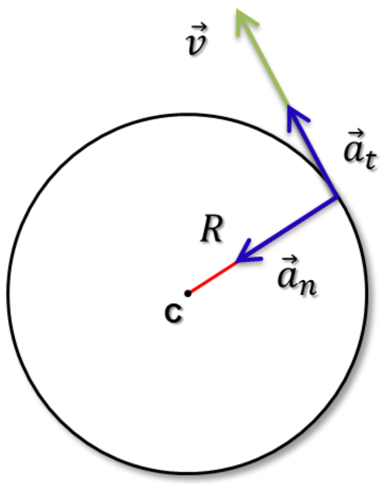
donde, a la derivada de la velocidad angular en función del tiempo se le llama *aceleración angular* (α).

Generalmente, se describe el movimiento circular de una partícula con velocidad constante a partir del *periodo* (T), o tiempo transcurrido en realizar una vuelta/revolución completa. El periodo también se define como la inversa de la *frecuencia* (f), o número de vueltas por unidad de tiempo, midiéndose en el SI en s^{-1}.

$$T = \frac{1}{f}$$

La velocidad angular también se puede expresar en función de la frecuencia, $\omega = 2\pi f$ y en el SI se mide en rad/s.

Tipo	*Características*	*Fórmulas*	*Ejemplo*
CIRCULAR UNIFORME (m.c.u)	$\vec{\omega} = cte$ $\vec{\alpha} = 0$	$\theta = \theta_0 + \vec{\omega} t$	Un disco dando vueltas sobre un tocadiscos.
CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO (m.c.u.a)	$\vec{\omega} \neq cte$ $\vec{\alpha} = cte$	$\vec{\omega} = \omega_0 + \vec{\alpha} t$ $\theta = \theta_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\alpha} t^2$	La rueda de un camión cuando éste aumenta su velocidad o acelera.



Resumiendo:

La dirección de la velocidad de un móvil en movimiento circular es tangente a la circunferencia que describe.

Un móvil tiene aceleración tangencial a_t siempre que cambie el módulo de la velocidad con el tiempo. El sentido de la aceleración tangencial es el mismo que el de la velocidad si el móvil acelera, y de sentido contrario si frena. Un móvil que describe un movimiento circular uniforme no tiene aceleración tangencial.

Un móvil que describe un movimiento circular siempre tiene aceleración normal, a_n ya que cambia la dirección de la velocidad con el tiempo. La aceleración normal tiene dirección radial y sentido hacia el centro de la circunferencia que describe.

La aceleración del móvil se obtiene sumando vectorialmente ambas componentes de la aceleración.

Ejemplo: A una rueda de 0.1 m de radio, que está girando con una velocidad de $\omega_0 = 4\pi$ rad/s, se le aplican los frenos y se detiene en 4 s.

- La aceleración angular $\omega = \omega_0 + \alpha t$

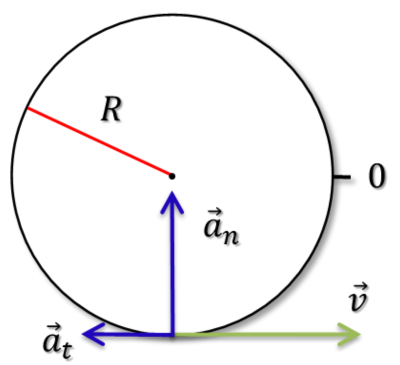
  En el instante $t = 4$ s la velocidad angular $\omega = 0$, por lo que $\alpha = -\pi$ rad/s^2

  El ángulo girado hasta este instante viene dado por

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta = 0 + 4\pi \cdot 4 + \frac{1}{2}(-\pi)4^2 = 8\pi\, rad$$

- En el instante $t = 1$ s, la posición y la velocidad angular del móvil es:



$\theta = 7\pi/2 = 2\pi + 3\pi/2$ rad

$\omega = 4\pi + (-\pi)\cdot 1 = 3\pi$ rad/s

La velocidad lineal

$v = \omega \cdot r$ $\quad v = 0.3\pi$ m/s

La componente tangencial de la aceleración es $a_t = \alpha \cdot r$ $\quad a_t = -0.1\pi$ m/s^2

Fuerzas Debidas a la Gravedad Terrestre	Peso: $\vec{p} = m\vec{g}$	Fuerza debida a la gravedad g = 9.81 N/kg =9.81 m/s^2
Fuerzas Fundamentales	Fuerza Gravitatoria	Fuerza de atracción mutua entre los objetos
	Fuerza Electromagnética	Fuerza entre cargas eléctricas
	Fuerza Nuclear	Fuerza entre partículas subatómicas

Fuerzas de Contacto entre dos Cuerpos	Fuerza de Rozamiento	Fuerza que se opone al movimiento, es paralela a la superficie de contacto
	Fuerza Normal	Fuerza perpendicular a la superficie de contacto
	Tensión	Fuerza que ejerce un trozo de cuerda sobre otro adyacente
	Ligaduras	Fuerzas condicionantes del movimiento

La componente normal de la aceleración es $a_n = v^2/r$ $a_n = 0.9\pi^2$ m/s^2

2. DINÁMICA

Es el estudio de la relación entre el movimiento de una partícula, o grupo de partículas, y las causas que lo producen.

Así, el concepto de *fuerza*, en sentido dinámico, queda definido como la causa capaz de producir o modificar el estado de reposo o de movimiento de un cuerpo, o de originar una deformación en él. En el SI la fuerza se expresa en newtons (N) o kg·m/s^2

El conjunto de fuerzas que actúan sobre un cuerpo equivalen a una *fuerza neta* o *resultante* que es la que dará lugar al movimiento o deformación del cuerpo.

Las fuerzas que directamente pueden actuar sobre un cuerpo son:

2.1. Leyes de Newton

- *Primera ley de Newton*: Ley de inercia.

Todo cuerpo sobre el que no actúa ninguna fuerza permanece en reposo o en movimiento rectilíneo a velocidad constante.

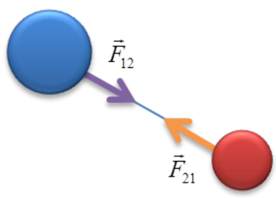
$$\vec{F} = 0 \ \rightarrow \vec{a} = 0$$

- *Segunda ley de Newton*: Ley fundamental.

Aplicando la definición de fuerza a un objeto de masa constante, se obtiene que *la fuerza neta ejercida sobre un cuerpo es igual al producto de su masa por la aceleración que éste adquiere.*

$$\overrightarrow{F_{neta}} = \sum \vec{F} = m\vec{a}$$

- *Tercera ley de Newton*: Ley de acción y reacción.



Cuando dos partículas aisladas interactúan entre sí, la fuerza sobre una partícula (acción) es igual y opuesta a la fuerza sobre la otra (reacción).

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}$$

Esta ley equivale a afirmar que las fuerzas, cualquiera que sea su naturaleza, nunca se dan solas, sino por parejas. Consideremos un objeto situado en el interior de un coche, cuando éste acelera (acción) nota una fuerza dirigida en sentido contrario al movimiento (reacción). Estas fuerzas que se ponen de manifiesto en las partes móviles de un sistema cuando existe aceleración, se denominan *fuerzas de inercia*. Dichas fuerzas no son reales, solo sirven para equilibrar a las fuerzas que actúan directamente sobre el cuerpo, y generar situaciones ideales que facilitan el cálculo matemático.

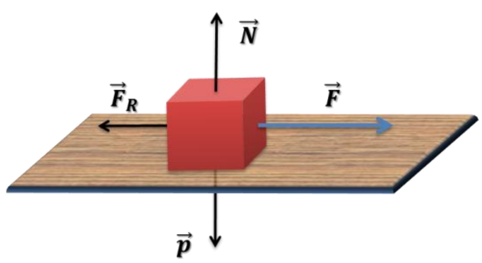
Por ejemplo, cuando hacemos girar una piedra sujeta a la mano por un hilo, existe la fuerza que ejerce la cuerda, *fuerza centrípeta*, pero tal como dice la tercera ley también existe una fuerza de reacción igual y opuesta, *fuerza centrífuga*, pero dicha fuerza no es real. Esto se puede comprobar si cortamos la cuerda, porque la piedra sale lanzada tangencialmente (hacia fuera), y no en dirección radial. Es decir, al cortar la cuerda desaparece la fuerza centrípeta e instantáneamente también la centrífuga.

2.2. Diagramas de fuerzas: resolución de problemas

Son diagramas que muestran esquemáticamente las fuerzas que actúan sobre un determinado sistema.

Suponemos un bloque metálico de masa $\boldsymbol{m}$, atado con una cuerda, arrastrado por una fuerza en la horizontal (eje $\boldsymbol{x}$). Las fuerzas que actúan sobre el bloque son:

1. El peso ($\vec{p}$)
2. Fuerza normal ($\vec{F}_n$ o $\vec{N}$)
3. Fuerza que se ejerce al tirar del bloque ($\vec{F}$)
4. Fuerza de rozamiento ($\vec{F}_R$)

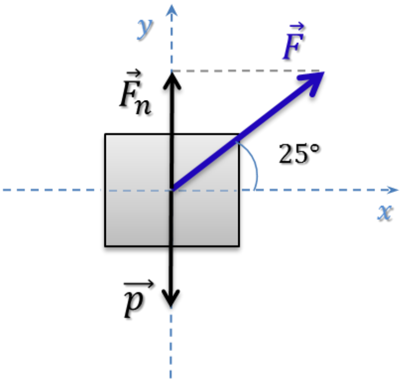


Los pasos que deben seguirse para resolver problemas son los siguientes:

a. Dibujar el diagrama de fuerzas, eligiendo un sistema de coordenadas adecuado.
b. Aplicar la segunda ley de Newton, en forma de componentes.
c. En problemas donde existen varios objetos, para simplificar las ecuaciones se emplea la tercera ley de Newton.
d. Despejar las incógnitas de las ecuaciones resultantes.
e. Comprobar las unidades y si los resultados son coherentes.

<u>Ejemplo</u>: Suponemos un bloque metálico con una masa de 80 kg, arrastrado por un estudiante que lo lleva atado a la cintura con una cuerda que forma un ángulo de 25° con la horizontal, con una fuerza 150 N.

Consideramos que la fuerza de rozamiento es despreciable. Determinar: a) la aceleración del bloque y b) la fuerza normal ejercida por la superficie del bloque.



Aplicamos la segunda ley de Newton a cada componente:

$$F_{nx} + p_x + F_x = ma_x \qquad (1)$$

$$F_{ny} + p_y + F_y = ma_y \qquad (2)$$

Si observamos en el diagrama de fuerzas las componentes x, tenemos:

$$F_{nx} = 0; \;\; p_x = 0 \; y \; F_x = F \cdot \cos 25$$

Lo aplicamos a la ecuación (1):

$$F \cdot \cos 25 = ma_x \;\; \rightarrow a_x = \frac{F \cdot cos25}{m} = 1.7 \, m/s^2$$

Si analizamos las componentes y en el diagrama:

$$a_y = 0, F_{ny} = F_n, p_y = -mg \; y \; F_y = F \cdot sen25$$

Lo aplicamos a la ecuación (2):

$$F_n - mg + F \cdot sen25 = 0 \;\; \rightarrow \;\; F_n = 721N$$

2.3.Fuerza centrípeta

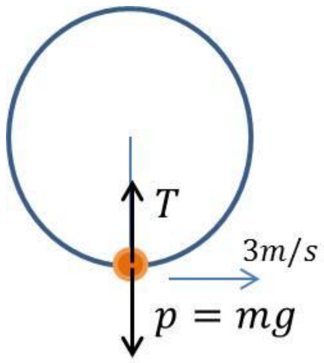
Es una fuerza resultante de todas las fuerzas radiales que actúan sobre un cuerpo con movimiento circular.

- Su sentido es tal que se dirige al centro de la trayectoria
- No se dibuja en el diagrama de fuerzas
- Obedece la segunda ley de Newton

$$F_{cp} = m \cdot a_n$$

donde a_n= aceleración normal (m/s^2)

<u>Ejemplo</u>: Una masa de 100 g atada a una cuerda de 50 cm de longitud gira en un plano vertical. Si cuando pasa por el punto más bajo su velocidad es de 3 m/s, ¿qué valor tiene la tensión de la cuerda en ese instante?



La fuerza centrípeta es la resultante de las dos fuerzas radiales (fuerzas que se encuentran en la dirección del radio), entonces:

$$\mathrm{F_{cp} = T - mg}$$

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\mathrm{F_{cp} = m \cdot a_n}$$

Luego:

$$\mathrm{T - mg = m\frac{v^2}{R}}$$

Remplazando datos: $\mathrm{T = 2{,}8N}$

3. MOVIMIENTO RELATIVO

Hasta ahora hemos estudiado el movimiento de un punto referido a sistemas de referencia fijos, es decir a *sistemas inerciales*. Pero con frecuencia debemos estudiar el movimiento respecto de un sistema de referencia en movimiento o *sistemas no inerciales*, y a partir de los resultados, conocer su movimiento respecto a otros sistemas fijos. Por ejemplo, los sistemas de referencia fijos se encuentran situados en la superficie de la Tierra y son arrastrados por ésta en su movimiento de traslación y de rotación. Por lo tanto, es necesario saber transformar los movimientos observados en ejes móviles, o *movimientos relativos*, a los correspondientes *movimientos absolutos* en ejes fijos.

La ley fundamental de la Dinámica (segunda ley de Newton) está postulada a partir de sistemas de referencia fijos o inerciales, por lo que nos proporciona la verdadera aceleración de un objeto, es decir, la aceleración absoluta que posee ($\vec{a}$), mientras que nosotros sólo observamos la aceleración relativa ($\vec{a}\,'$), relacionada con la aceleración de arrastre y la aceleración de Coriolis a través del *Teorema de Coriolis,*

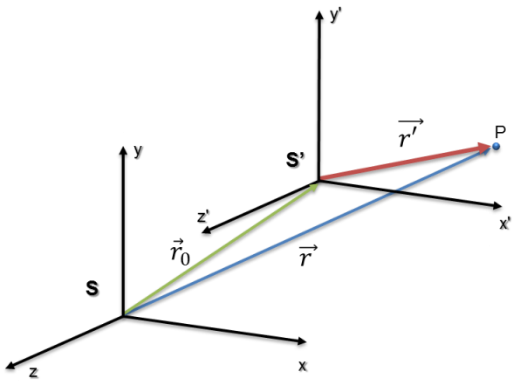
$$\vec{a}\,' = \vec{a} + \vec{a}_a + \vec{a}_c$$

Aceleración de arrastre $\quad \vec{a}_a = -\vec{a}_0\,' - \vec{\alpha}\times\vec{r}\,' - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$

Aceleración de Coriolis $\quad \vec{a}_c = -2\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$

**** Deducción del teorema de Coriolis***

Si consideramos un sistema de referencia con origen en *S*, y conocemos el vector posición $\vec{r}$, el de velocidad $\vec{v}$ y el de aceleración $\vec{a}$, de un punto *P* en dicho sistema de referencia, ¿cuáles son los valores $\vec{r}\,'$, $\vec{v}\,'$ *y* $\vec{a}\,'$ de ese mismo punto en un sistema de referencia con origen en <u>*S’*, que se mueve respecto a *S*</u>?

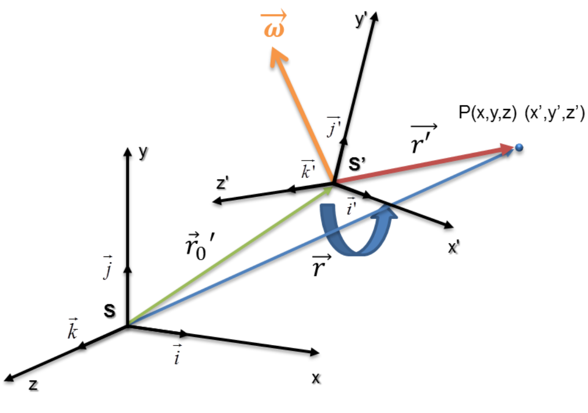


Si $\vec{r}_0$ es el vector desplazamiento que sufre el sistema de *S’* frente a *S*, tendremos que: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,'$

Si el punto *P* realiza un desplazamiento $d\vec{r}$ en un intervalo de tiempo dt, podremos escribir que:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt} \;\rightarrow\; \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,' \qquad \text{y} \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}\,'}{dt} \;\rightarrow\; \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,'$$

Si ahora estudiamos el caso anterior, pero además consideramos que el sistema de referencia <u>*S’* gira</u> con una velocidad angular constante ω <u>alrededor de un eje fijo en el sistema *S*</u>, un observador situado en *S* observará que el sistema *S’* gira con velocidad angular ω, mientras que para un observador en *S’* la situación es la



inversa: observará que *S* gira con una velocidad angular–ω.

Para el sistema *S′*, tendremos en cuenta que los vectores unitarios $\left(\vec{i}\,',\ \vec{j}\,',\ \vec{k}\,'\right)$ están girando, por lo que cambian de dirección con el tiempo, luego:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0\,' + \vec{r}\,' = \vec{r}_0\,' + \left(x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,'\right)}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_0\,'}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \vec{v}_0\,' + \frac{d}{dt}\left(x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,'\right) = \vec{v}_0\,' + \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}\,' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}\,' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}\,'\right) + \left(x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\right)$$

El primer paréntesis corresponde a la velocidad del sistema *S′* con respecto a *S* $\left(\vec{v}\,'\right)$, y el segundo representa la velocidad lineal de un punto situado a una distancia unidad del origen, que se mueve a una velocidad circular uniforme ω $\left(d\vec{i}\,'/dt = \vec{\omega}\times\vec{i}\,'...\right)$, es decir:

$$\vec{v} = \vec{v}_0\,' + \vec{v}\,' + x'\left(\vec{\omega}\times\vec{i}\,'\right) + y'\left(\vec{\omega}\times\vec{j}\,'\right) + z'\left(\vec{\omega}\times\vec{k}\,'\right) = \vec{v}_0\,' + \vec{v}\,' + \vec{\omega}\times\left(x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,'\right)$$

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0\,' + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$

En el caso particular de que el punto *P* se halle en reposo relativo respecto a *S′*, $\vec{v}\,' = 0$, es decir, el punto *P* se está moviendo respecto a los ejes fijos con una *velocidad* denominada *de arrastre* dada por la suma de la velocidad del origen móvil *S′* y de la velocidad de rotación de un eje que pasa por *S′*:

$$\boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'}$$

Así, la *velocidad absoluta* es la suma de la velocidad relativa más la de arrastre, $\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_a}$

De la misma manera, para la aceleración podemos escribir una expresión tal como:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}\,'}{dt} = (\vec{a}\,' + \vec{\omega}\times\vec{v}\,') + \vec{a}_0\,' + \vec{\alpha}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{v}\,' + \vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_0\,' + \vec{\alpha}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') + 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$$

Considerando, como antes, el caso particular donde el punto P se halla en reposo relativo, $\vec{v}\,' = 0$ y $\vec{a}\,' = 0$, todavía existe una aceleración no nula respecto a los ejes fijos denominada *aceleración de arrastre* dada por:

$$\boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_0\,' + \vec{\alpha}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')}$$

Así, la *aceleración absoluta* vendrá dada por la suma de la aceleración relativa, la de arrastre y otra *aceleración* complementaria o *de Coriolis*.

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_a + \vec{a}_c \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,'}$$

Podemos calcular la aceleración relativa $\left(\vec{a}\,'\right)$, en un determinado movimiento, a partir de la aceleración real, aplicando el teorema de Coriolis.

3.1. Movimiento de traslación

Si consideramos un sistema de referencia *S′* que se mueve respecto a otro sistema *S*, con:

a. Movimiento de traslación uniforme

Tendremos que $\vec{v}_0' = cte$, y como no gira $\vec{\omega} = 0$, como consecuencia tendremos que $\vec{a}_0' = 0 \ y \ \vec{\alpha} = 0$, así:

$$\vec{a}' = \vec{a} \begin{cases} \vec{a}_a = -\vec{a}_0' - \vec{\alpha} \times \vec{r}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = 0 \\ \vec{a}_c = -2\vec{\omega} \times \vec{v}' = 0 \end{cases}$$

Luego, la aceleración de un punto en movimiento es la misma, tanto para un sistema inercial, como no inercial, es decir, en un sistema de referencia con movimiento de traslación uniforme se pueden aplicar las leyes mecánicas igual que en un sistema en reposo. Esta afirmación se conoce como P*rincipio de la relatividad de Galileo*.

Por ejemplo, un pasajero andando por el pasillo de un avión, durante un vuelo normal. Éste puede moverse igual que si estuviera en tierra, incluso, si no mira por la ventana, no podría saber si el avión está en movimiento o no.

b. Movimiento de traslación acelerado

En este caso, la velocidad de moviendo entre los sistemas no será constante $(\vec{v}_0' \neq cte)$, y como sigue sin girar $\vec{\omega} = 0$, es decir $\vec{a}_0' \neq 0 \ y \ \vec{\alpha} = 0$, luego:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0 \quad \begin{cases} \vec{a}_a = -\vec{a}_0' \\ \vec{a}_c = 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, al viajar en un tren sólo se percibe la aceleración de arrastre cuando éste arranca, frena o cambia de velocidad, pero no durante la marcha normal.

3.2 Movimiento de rotación: Fuerza de Coriolis y fuerza centrífuga

Si consideramos un sistema de referencia *S'* que se mueve y gira respecto al sistema *S*, con movimiento de rotación uniforme, tendremos que $\vec{v}' \neq 0$, $\vec{\omega} = cte$, $\vec{a}_0' = 0$ y $\vec{\alpha} = 0$.

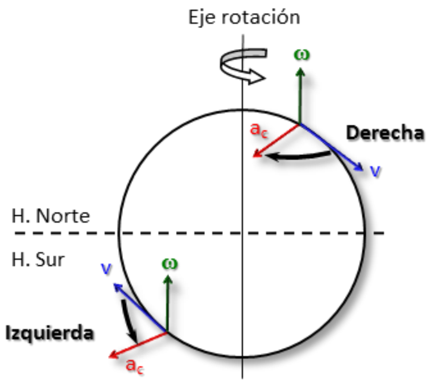
$$\vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}_a + \vec{a}_c \begin{cases} \vec{a}_a = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\ \vec{a}_c = -2\vec{\omega} \times \vec{v}' \end{cases}$$

Sobre todo objeto en rotación actúa la *fuerza centrífuga*, que tiende a alejar los sistemas (aunque aparentemente no actúe ninguna fuerza), y la *fuerza de Coriolis* (excepto cuando $\vec{v}'$ y $\vec{\omega}$ son paralelos). Por lo tanto, tendremos:

$$\vec{a}_a = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = R\omega^2 = aceleración\ centrifuga$$

$$a_c = -2\vec{\omega} v' sen\varphi \quad (\varphi, es\ el\ ángulo\ formado\ por\ \vec{\omega}\ y\ \vec{v}')$$

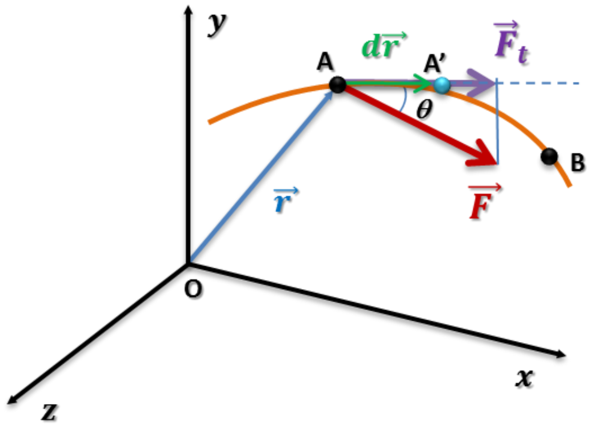
Por ejemplo, un cuerpo que se mueve sobre la Tierra a lo largo de un meridiano, de Norte a Sur, se encuentra sometido a una aceleración que sólo es nula en el ecuador; en los restantes puntos tiende a producirse una desviación hacia la derecha en el hemisferio Norte y hacia la izquierda en el hemisferio Sur. Por lo tanto, la aceleración de Coriolis es capaz de explicar, en parte, la circulación atmosférica o circulación de los vientos



respecto a la Tierra, al modificar la trayectoria de los vientos en el desplazamiento provocado por la diferencia de temperaturas.

4. TRABAJO Y ENERGIA

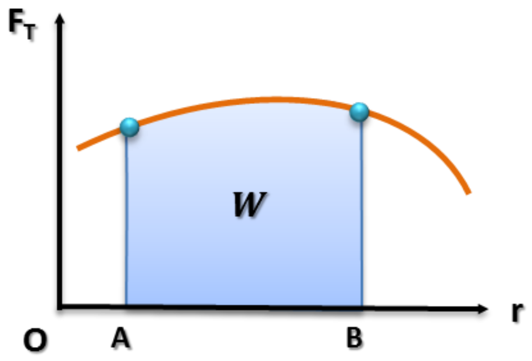
Concepto de Trabajo



Se denomina trabajo infinitesimal, al producto escalar del vector fuerza por el vector desplazamiento.

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot ds \cdot cos\theta = F_t ds$$

Donde F_t es la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento, ds es el módulo del vector desplazamiento $\boldsymbol{d\vec{r}}$, y θ el ángulo que forma el vector fuerza con el vector desplazamiento. El trabajo total a lo largo de la trayectoria entre los puntos A y B es la suma de todos los trabajos infinitesimales.

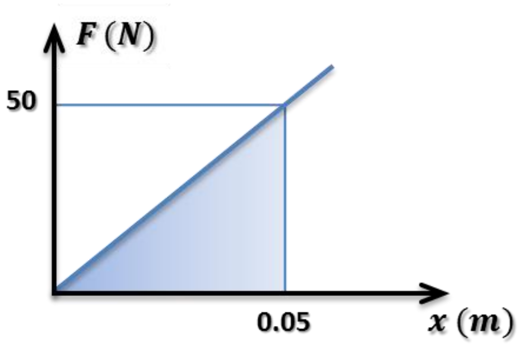


$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_t \cdot ds$$

Su significado geométrico es el área, bajo la representación gráfica, de la función que relaciona la componente tangencial de la fuerza F_t, y el desplazamiento s.

Ejemplo: Calcular el trabajo necesario para estirar un muelle 5 cm, si la constante elástica del muelle es de 1000 N/m.

La fuerza necesaria para deformar un muelle es *F*=1000·*x* N, donde *x* es la deformación. El trabajo de esta fuerza se calcula mediante la integral:



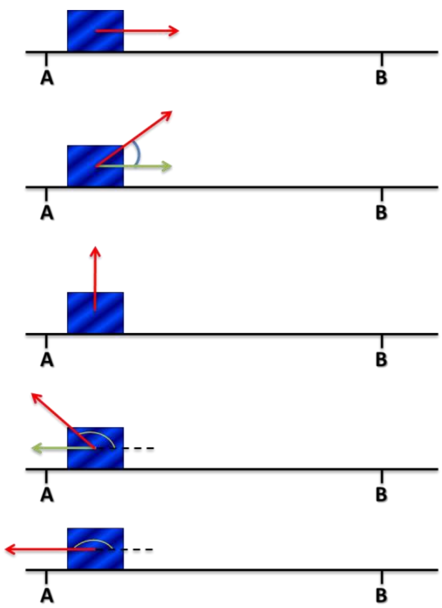
$$W = \int_0^{0.05} 1000x \cdot dx = 1000 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{0.05} = 1000 \cdot \frac{0.05^2}{2} = 1.25\,J$$

El área del triángulo de la figura sería: (0.05·50)/2 = **1.25 J**

Cuando la fuerza es constante, el trabajo se obtiene multiplicando la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento por el desplazamiento.

$$W = F_t \cdot s$$

Ejemplo: Calcular el trabajo de una fuerza constante de 12 N, cuyo punto de aplicación se traslada 7 m, si el ángulo entre las direcciones de la fuerza y del desplazamiento son 0°, 60°, 90°, 135°, 180°.



$$W = 12 \cdot cos0 \cdot 7 = 84\,J$$

$$W = 12 \cdot cos60 \cdot 7 = 42\,J$$

$$W = 12 \cdot cos90 \cdot 7 = 0\,J$$

$$W = 12 \cdot cos135 \cdot 7 = -42\sqrt{2}\,J$$

$$W = 12 \cdot cos180 \cdot 7 = -84\,J$$

- Si la fuerza y el desplazamiento tienen el mismo sentido, el trabajo es positivo
- Si la fuerza y el desplazamiento tienen sentidos contrarios, el trabajo es negativo
- Si la fuerza es perpendicular al desplazamiento, el trabajo es nulo.

Concepto de Energía Cinética

Supongamos que $\vec{F}$ es la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula de masa m. El trabajo de dicha fuerza es igual a la diferencia entre el valor final y el valor inicial de la energía cinética de la partícula.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_A^B F_t \cdot ds = \int_A^B m a_t ds = \int_A^B m \frac{dv}{dt} ds =$$

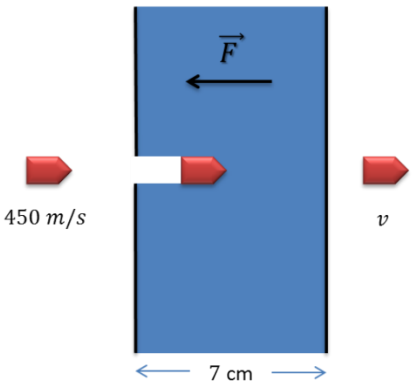
$$= \int_A^B m \frac{ds}{dt} dv = \int_A^B m v dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

En la primera línea hemos aplicado la segunda ley de Newton; la componente tangencial de la fuerza es igual a la masa por la aceleración tangencial. En la segunda línea, la aceleración tangencial a_t es igual a la derivada del módulo de la velocidad, y el cociente entre el desplazamiento ds, y el tiempo dt que tarda en desplazarse, es igual a la velocidad v del móvil. Se define energía cinética como la expresión:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

El teorema del Trabajo-Energía indica que el trabajo de la resultante de las fuerzas que actúa sobre una partícula modifica su energía cinética.

Ejemplo: Hallar la velocidad con la que sale una bala después de atravesar una tabla de 7 cm de espesor y que opone una resistencia constante de *F*=1800 N. La velocidad inicial de la bala es de 450 m/s y su masa es de 15 g.



El trabajo realizado por la fuerza F es -1800·0.07=-126 J

La velocidad final v es

$$-126 = \frac{1}{2} \cdot 0.015 \cdot v^2 - \frac{1}{2} 0.015 \cdot 450^2 \rightarrow \quad v = 431 m/s$$

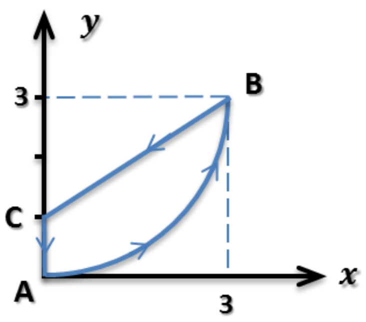
Fuerzas conservativas. Energía potencial

Una fuerza es conservativa cuando el trabajo de dicha fuerza es igual a la diferencia entre el valor inicial y final de una función que solo depende de las coordenadas. A dicha función se le denomina energía potencial (E_p).

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{pA} - E_{pB}$$

El trabajo de una fuerza conservativa no depende del camino seguido para ir del punto A al punto B. El trabajo de una fuerza conservativa a lo largo de un camino cerrado es cero.

$$\oint \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$$



Ejemplo: Sobre una partícula actúa la fuerza $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}\ N$.

Calcular el trabajo efectuado por la fuerza a lo largo del camino cerrado ABCA.

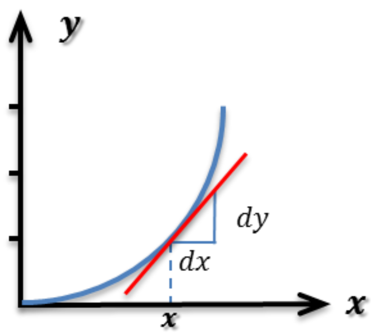
- La curva AB es el tramo de parábola $y = x^2/3$
- BC es el segmento de la recta que pasa por los puntos (0,1) y (3,3)
- CA es la porción del eje Y que va desde el origen al punto (0,1)

El trabajo infinitesimal dW es el producto escalar del vector fuerza por el vector desplazamiento:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath}) \cdot (dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath}) = F_x dx + F_y dy$$

Las variables x e y se relacionan a través de la ecuación de la trayectoria $y = f(x)$, y los desplazamientos infinitesimales dx y dy se relacionan a través de la interpretación geométrica de la derivada $dy = f'(x) \cdot dx$. Donde $f'(x)$ es la derivada de la función $f(x)$ con respecto a x.

Vamos a calcular el trabajo en cada uno de los tramos y el trabajo total en el camino cerrado.



- *Tramo AB*

Trayectoria $y = x^2/3, dy = (2/3)x \cdot dx$

$$dW = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy = 2x \cdot \frac{x^2}{3} \cdot dx + x^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x \cdot dx = \frac{4}{3}x^3 \cdot dx$$

$$W_{AB} = \int_0^3 \frac{4}{3}x^3 dx = 27\ J$$

- *Tramo BC*

  La trayectoria es la recta que pasa por los puntos (0,1) y (3,3). Se trata de una recta de pendiente 2/3 y cuya ordenada en el origen es 1.

  $y = (2/3)x + 1, dy = (2/3) \cdot dx$

$$dW = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy = 2x\left(\frac{2}{3}x + 1\right)dx + x^2 \cdot \frac{2}{3}dx = (2x^2 + 2x)dx$$

$$W_{AB} = \int_3^0 (2x^2 + 2x)dx = -27\, J$$

- *Tramo CD*

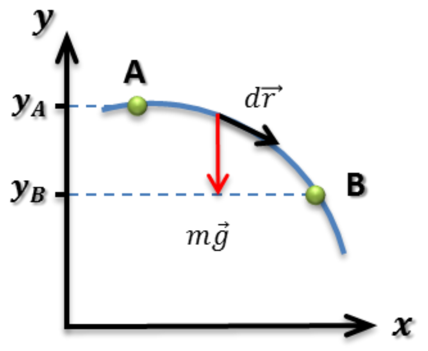
  La trayectoria es la recta $x = 0$, $dx = 0$, La fuerza $\boldsymbol{F} = 0$ y por tanto, el trabajo $W_{CA} = 0$

- El trabajo total

$$W_{ABCA} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = 27 + (-27) + 0 = 0$$

El peso es una fuerza conservativa

Ejemplo: Calculemos el trabajo de la fuerza peso $F = -\mathrm{mg}\, j$ cuando el cuerpo se desplaza desde la posición A cuya ordenada es y_A hasta la posición B cuya ordenada esy_B.



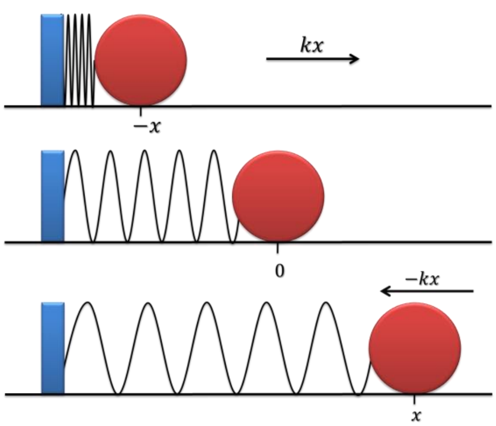
$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -mg\vec{j} \cdot (dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath}) =$$

$$= \int_A^B mg\, dy = mgy_A - mgy_B$$

La energía potencial E_p correspondiente a la fuerza conservativa peso tiene la forma funcional

$$E_p = mgy + c$$

Donde *c* es una constante aditiva que nos permite establecer el nivel cero de la energía potencial.



La fuerza que ejerce un muelle es conservativa

Como vemos en la figura, cuando un muelle se deforma x, ejerce una fuerza sobre la partícula proporcional a la deformación x y de signo contrario a ésta.

Para $x < 0, F = kx$

Para $x > 0, F = -kx$

El trabajo de esta fuerza es, cuando la partícula se desplaza desde la posición x_A a la posición x_B es

$$\int_A^B F dx = \int_A^B -kx dx = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

La función energía potencial E_p correspondiente a la fuerza conservativa F vale

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + c$$

El nivel cero de energía potencial se establece del siguiente modo: cuando la deformación es cero $x = 0$, el valor de la energía potencial se toma cero, $E_p = 0$, de modo que la constante aditiva vale $c = 0$.

$$F = -kx \qquad\qquad E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

Principio de Conservación de la Energía

Si solamente una fuerza conservativa $\boldsymbol{F}$ actúa sobre una partícula, el trabajo de dicha fuerza es igual a la diferencia entre el valor inicial y final de la energía potencial

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{pA} - E_{pB}$$

Como hemos visto en el apartado anterior, el trabajo de la resultante de las fuerzas que actúa sobre la partícula es igual a la diferencia entre el valor final e inicial de la energía cinética.

$$\int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = E_{CB} - E_{CA}$$

Igualando ambos trabajos, obtenemos la expresión del principio de conservación de la energía

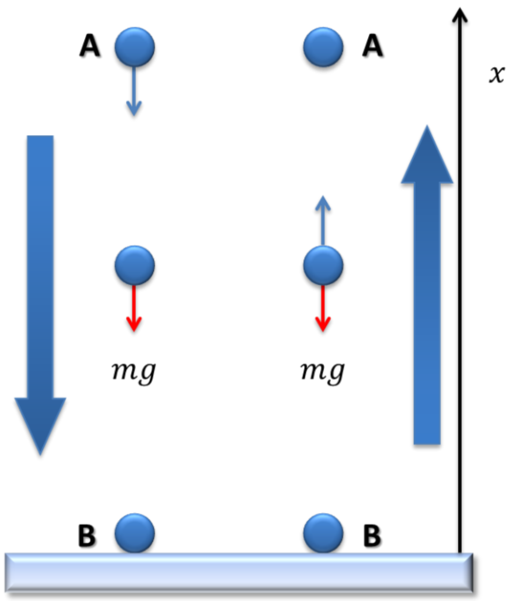
$$E_{kA} + E_{pA} = E_{kB} + E_{pB}$$

La energía mecánica de la partícula (suma de la energía potencial más cinética) es constante en todos los puntos de su trayectoria.

Fuerzas No Conservativas

Para darnos cuenta del significado de una fuerza no conservativa, vamos a compararla con la fuerza conservativa peso.

El peso es una fuerza conservativa.



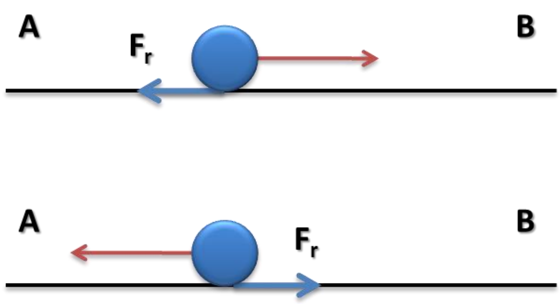
$$W_{AB} = mgx$$

$$W_{BA} = -mgx$$

El trabajo total a lo largo el camino cerrado A-B-A, W_{ABA} es cero.

La fuerza de rozamiento es una fuerza no conservativa

Cuando la partícula se mueve de A hacia B, o de B hacia A, la fuerza de rozamiento es opuesta al movimiento. El trabajo es negativo porque la fuerza es de signo contrario al desplazamiento



$$W_{AB} = -F_r x$$

$$W_{BA} = -F_r x$$

El trabajo total a lo largo del camino cerrado A-B-A, W_{ABA} es distinto de cero

$$W_{ABA} = -2F_r x$$

Balance de energía

En general, sobre una partícula actúan fuerzas conservativas $\vec{F}_C$ y no conservativas $\vec{F}_{NC}$. El trabajo de la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a la diferencia entre la energía cinética final menos la inicial.

$$\int_A^B \left(\overrightarrow{F_C} + \overrightarrow{F_{NC}}\right) \cdot d\vec{r} = E_{cB} - E_{cA}$$

El trabajo de las fuerzas conservativas es igual a la diferencia entre la energía potencial inicial y la final.

$$\int_A^B \overrightarrow{F_C} \cdot d\vec{r} = E_{pA} - E_{pB}$$

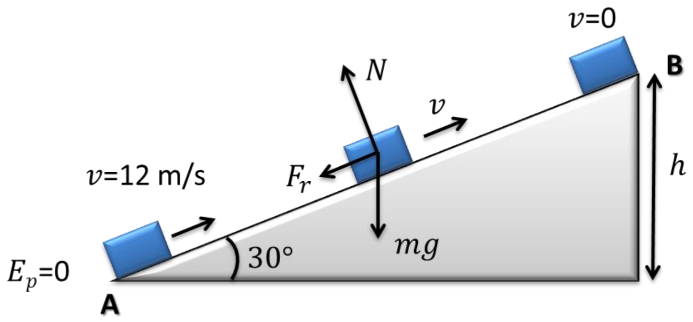
Aplicando la propiedad distributiva del producto escalar obtenemos que

$$\int_A^B \overrightarrow{F_{NC}} \cdot d\vec{r} = (E_c + E_p)_B - (E_c + E_p)_A = E_B - E_A$$

El trabajo de una fuerza no conservativa modifica la energía mecánica (cinética más potencial) de la partícula.

Ejemplo 1: Un bloque de masa 0.2 kg inicia su movimiento hacia arriba, sobre un plano de 30° de inclinación, con una velocidad inicial de 12 m/s. Si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0.16. Determinar:

- la longitud *x* que recorre el bloque a lo largo del plano hasta que se para
- la velocidad *v* que tendrá el bloque al regresar a la base del plano



Cuando el cuerpo asciende por el plano inclinado:

- La energía del cuerpo en A es $E_A = ½ \cdot 0.2 \cdot 12^2 = 14.4\,J$
- La energía del cuerpo en B es $E_B = 0.2 \cdot 9.8 \cdot h = 1.96 \cdot h\ = 0.98x\,J$ (ya que $h = x \cdot sen30$)
- El trabajo de la fuerza de rozamiento cuando el cuerpo se desplaza de A a B es

$$W = \int_0^x \vec{F} \cdot d\vec{r} = -Fr \cdot x = -\mu \cdot mg \cdot cos\theta \cdot x = -0.16 \cdot 0.2 \cdot 9.8 \cdot cos30 \cdot x = -0.272 \cdot x\,J$$

De la ecuación del balance energético $W = E_B - E_A$, despejamos $x = 11.5\,m$; $h = x \cdot sen30 = 5.75\,m$

Cuando el cuerpo desciende

- La energía del cuerpo en B es:

  $E_B = m \cdot g \cdot h = 0.2 \cdot 9.8 \cdot h = 1.96 \cdot h\ = 0.98 \cdot x = 0.98 \cdot 11.5 = 11.27\,J$
- La energía del cuerpo en la base del plano $E_A = ½ \cdot m \cdot v^2 = ½ \cdot 0.2 \cdot v^2$
- El trabajo de la fuerza de rozamiento cuando el cuerpo se desplaza de B a A es:

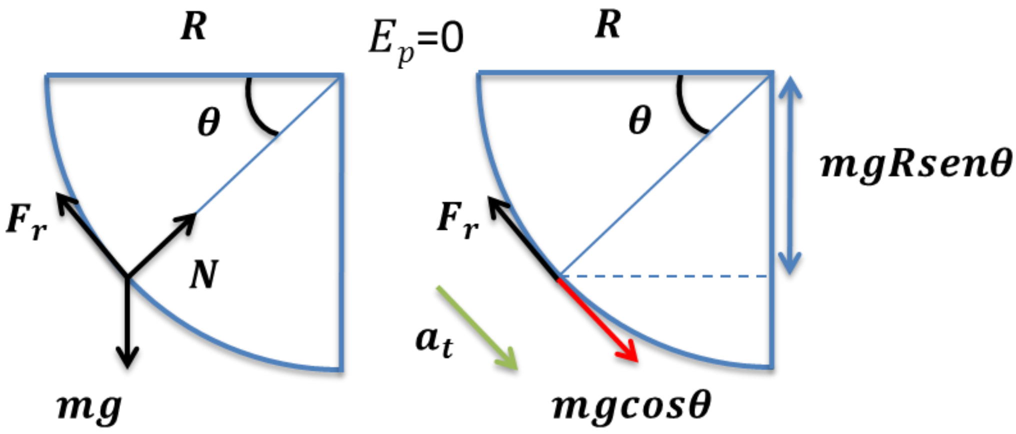
$$W = \int_0^x \vec{F} \cdot d\vec{r} = -Fr \cdot x = -\mu \cdot mg \cdot cos\theta \cdot x = -0.16 \cdot 0.2 \cdot 9.8 \cdot cos30 \cdot 11.5 = -3.12\,J$$

De la ecuación del balance energético $W = E_A - E_B$ despejamos $v = 9.03\,m/s$.

Ejemplo 2: Una partícula de masa *m* desliza sobre una superficie en forma de cuarto de circunferencia de radio *R*, tal como se muestra en la figura.

Las fuerzas que actúan sobre la partícula son:

- El peso *mg*
- La reacción de la superficie *N*, cuya dirección es radial
- La fuerza de rozamiento F_r, cuya dirección es tangencial y cuyo sentido es opuesto a la velocidad de la partícula.



Descomponiendo el peso mg, a lo largo de la dirección tangencial y normal, escribimos la ecuación del movimiento de la partícula en la dirección tangencial

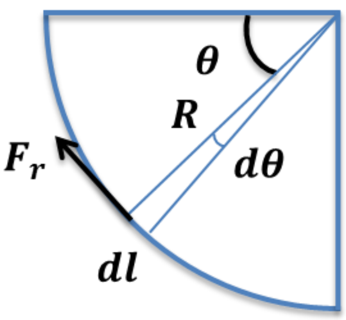
$$ma_t = mg \cdot cos\theta - F_r$$

Donde $a_t = dv/dt$ es la componente tangencial de la aceleración. Escribimos en forma de ecuación diferencial la ecuación del movimiento

$$m\frac{dv}{dt} = mgcos\theta - F_r$$

Calculamos el trabajo W_r realizado por la fuerza de rozamiento, teniendo en cuenta que ésta es de sentido contrario al desplazamiento

$$W = \int_0^\theta F_r \cdot dl \cdot cos180 = \int_0^\theta -mg \cdot cos\theta \cdot dl + \int_0^\theta m\frac{dv}{dt}dl$$



Teniendo en cuenta que el deslazamiento es un pequeño arco de circunferencia $dl = R \cdot d\theta$ y que

$$\frac{dv}{dt}dl = \frac{dl}{dt}dv = vdv$$

El trabajo realizado por la fuerza no conservativa F_r vale

$$W_R = -mgR\int_0^\theta cos\theta \cdot d\theta + m\int_0^v vdv$$

$$W_R = -mgRsen\theta + \frac{1}{2}mv^2$$

Si el móvil parte del reposo ($v = 0$), en la posición $\theta = 0$, cuando llega a la posición θ:

- La energía cinética se ha incrementado en $mv^2/2$
- La energía potencial ha disminuido en $mgRsen\theta$

El trabajo de la fuerza de rozamiento es igual a la diferencia entre la energía final y la energía inicial o bien, la suma de la variación de energía cinética más la variación de energía potencial.

El trabajo total de la fuerza de rozamiento cuando la partícula describe el cuarto de círculo es

$$W_r = -mgR + \frac{1}{2}mv^2$$

5. CONOCIMIENTOS PREVIOS

1. Sea $\vec{a} = (3,4,5)\ y\ \vec{b} = (1,-6,3)$, calcular el módulo de ambos vectores, el producto escalar, y el ángulo que forman entre sí.

2. Calcular las siguientes integrales:
    a. $\int x^2 dx$
    b. $\int (3x^3 + x\,)dx$
    c. $\int \frac{1}{x} dx$
    d. $\int_0^1 (t^2 + b)\,dt$ siendo b una constante
    e. $\int_2^3 5x^2 dx$

6. CUESTIONES Y PROBLEMAS

1. La posición de un camión que circula a lo largo de una carretera recta viene dada por: $r_x(t) = x(t) = 2t^3 - 24t + 6$, donde x se mide en metros y t en segundos. Calcular: a) tiempo que emplea el camión en adquirir una velocidad de 72 m/s, b) la aceleración cuando lleva una velocidad de 30 m/s, c) el desplazamiento recorrido entre $t = 1\ s$ y $t = 4\ s$, d) distancia total recorrida en dicho intervalo de tiempo. Sol: a) 4 s; b) 36 m/s^2; c) 54 m; d) 74 m.

2. Dos coches A y B separados 100 m se mueven uno hacia el otro con velocidades iniciales de 5 y -4 m/s respectivamente, y a una aceleración constante de 1 y -2 m/s^2 respectivamente. Calcular: a) el instante de tiempo en que chocan, b) a qué distancia de A se encontrarán, c) las velocidades de A y de B en ese momento. Sol: a) 5.7 s; b) 44.7 m; c) 10.7 y -15.4 m/s.

3. Desde lo alto de una torre se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad inicial de 15 m/s. La piedra llega a una determinada altura y comienza a caer. Tomando como origen de coordenadas el punto de lanzamiento, a) calcular la posición y velocidad de la piedra cuando han transcurrido 1 s y 4 s después del lanzamiento. b) Asimismo, calcular la velocidad cuando se encuentra a 8 m por encima del punto de partida. c) ¿Cuánto tiempo transcurre desde que se lanzó hasta que vuelve a pasar por el punto de lanzamiento? Sol: 10.1 m y 5.2 m/s; -18.5 m y -24.2 m/s; 8.2 m/s; 3.1 s.

4. Una piedra que cae de lo alto de un acantilado recorre un tercio de su distancia total al suelo en el último segundo de su caída. ¿Qué altura tiene el acantilado? Sol: 146m

5. Una maceta cae desde una repisa de un edificio de apartamentos. Una persona de un apartamento inferior que dispone de un cronómetro, observa que la maceta tarda 0,2s en pasar a través de su ventana

que tiene 4m de altura. ¿A qué altura sobre el borde superior de la ventana está la repisa de la cual cayo la maceta?

6. Determinar la profundidad de un pozo si el sonido producido por una piedra que se lanza desde arriba, al chocar con el fondo, se oye 2 segundos después de haber sido lanzada. Dato: v_{sonido}=340 m/s. Sol: h=18.6 m.

7. Un avión de ayuda humanitaria baja en picado a una velocidad de 700 km/h, formando un ángulo de 45 grados con la horizontal. Cuando está a una altura de 400 m sobre el suelo suelta una caja de medicamentos. Calcular:

   a. El tiempo que tarda en llegar al suelo
   b. La velocidad con la que llega
   c. El punto en que cae (distancia a la vertical del avión en el instante del lanzamiento)

   Sol: t=2.67 s; |v|=213.7 m/s; x=365.8 m

8. Un jugador de fútbol golpea una pelota con una velocidad inicial de 22 m/s y un ángulo de θ = 40°. Ignorar la resistencia del aire y calcular:

   a. Máxima altura que alcanza el balón
   b. El tiempo que permanece el balón en el aire.
   c. Distancia a la que el balón da el primer bote.

   Sol: y=10 m; t=2.9 s; x=49 m

9. Un arco lanza flechas con una velocidad inicial del orden de 45 m/s. (a) Un arquero tártaro sentado a horcajadas en su caballo dispara una flecha elevando el arco 10^{o} por encima de la horizontal. Si el arco está 2.25 m por encima del suelo, ¿cuál es el alcance de la flecha? Supóngase que el suelo está nivelado y no considere la resistencia del aire. (b) Supóngase ahora que el caballo se mueve a galope tendido en la misma dirección en que se dispara la flecha y que el arquero coloca el arco de la misma forma que en el apartado anterior. Si la velocidad del caballo es de 12 m/s, ¿cuál es ahora el alcance de la flecha? Sol: 81.68 m; 103.67 m.

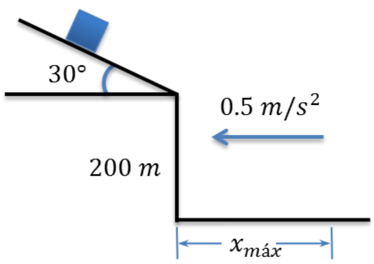
10. Un avión de transporte vuela horizontalmente a una altura de 12 km con una velocidad de 900 km/h cuando un paquete cae de la bodega de carga.

    a. ¿Cuánto tiempo tarda el paquete en chocar contra el suelo?
    b. ¿A qué distancia horizontal se encuentra el paquete desde donde cayó hasta el lugar en que chocó contra el suelo?
    c. ¿A qué distancia está el paquete respecto al avión cuando choca contra el suelo, suponiendo que el avión sigue volando con velocidad constante?

    Sol: 49.5s; 12372.5m; 12 km.

11. El coyote Wiley (Carnivorous Vulgaris) intenta cazar de nuevo al Correcaminos (Accelleratii Incrediblus). Ambos, en su frenética carrera llegan al borde de un profundo barranco de 15 m de ancho y 100 m de profundidad. El correcaminos salta con un ángulo de 15^{o} por encima de la horizontal y aterriza al otro lado del barranco sobrándole 1.5 m. a) ¿Cuál era la velocidad del Correcaminos antes de iniciar el salto? Ignore la resistencia al aire. b) El Coyote, con el mismo objetivo de superar el obstáculo, salta también con la misma velocidad inicial, pero con distinto ángulo de salida. Para su desgracia, le faltan 0.5 m para poder alcanzar el otro lado del barranco. ¿Con qué ángulo saltó? (Supóngase que éste fue inferior a 15° y recuerde la siguiente identidad trigonométrica: sen2θ=2senθ·cosθ). Sol: 18 m/s; 13°.

12. Un cuerpo baja deslizando por el plano inclinado de 30^{o} alcanzando al final del mismo una velocidad de 10 m/s. A



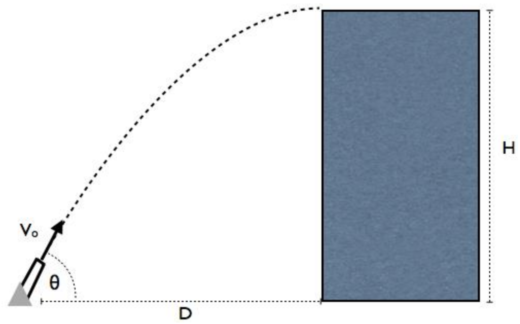
continuación cae, siendo arrastrado por un viento en contra que causa la aceleración horizontal indicada en la figura:

a. ¿Cuánto vale el alcance x_{max}?

b. ¿Con qué velocidad llega a ese punto?

Sol: $x_{máx}$=42.4 m; |v|=63.1 m/s.

13. Un cañón está disparando paquetes de emergencia a gente atrapada en el tejado de un edificio inundado de altura H=106m con respecto a la posición del cañón, la esquina del tejado está situada a una distancia horizontal D=54m con respecto al cañón. Se desea que los paquetes aterricen tangentes al tejado como se muestra en la figura para que el impacto sea lo menor posible y resbalen por el tejado hasta frenarse. Encontrar los valores del ángulo de lanzamiento y de la velocidad inicial necesaria para cumplir el objetivo. Sol: θ=75,7°, v_0=47,04m/s.



14. Desde un plano inclinado un ángulo de 30° e infinito se lanza un objeto, con una velocidad inicial de 10 m/s, perpendicularmente al plano. a) ¿A qué distancia del punto de lanzamiento cae el objeto? b) ¿Con qué velocidad llega al suelo? Sol: d=14,1 m; v=14,92 m/s

15. En un partido de Baseball una pelota es bateada por encima de la cabeza de un jugador. Ese jugador en el momento que la pelota es golpeada empieza a correr a una velocidad constante de 7m/s durante 2 segundos y coge la pelota a la misma altura que fue golpeada. El jugador estaba inicialmente a 18m de donde se golpeó la pelota. ¿Cuál es la velocidad inicial y el ángulo de la pelota cuando esta fue golpeada? Ignorar la resistencia al aire. Sol: v_0=18,76 m/s; θ=31,5°

16. La aceleración de un objeto depende del tiempo de la siguiente forma: $\vec{a} = (3t, 2)$. SI en el instante inicial el objeto se encuentra en la posición $\overrightarrow{r_0} = (1,2)m$ y tiene una velocidad $\overrightarrow{v_0} = (1,0)m/s$. Calcule el vector velocidad y el vector posición cuando han transcurrido 4s. Sol: $\vec{v} = (25,8)m/s$; $\vec{r} = (69,18)m$

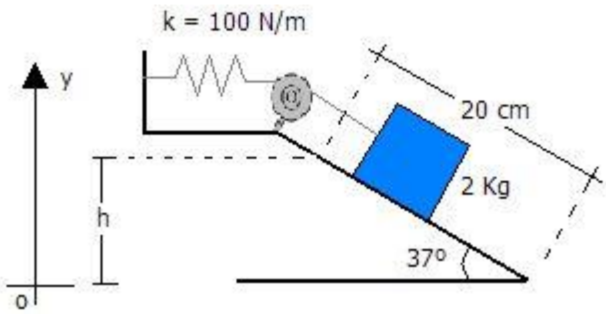
17. Un coche pasa por un semáforo en verde cuando t=0 con una velocidad inicial de 12m/s. La aceleración del coche en función del tiempo viene dada por:

$$a = \begin{cases} 0; & 0 < \mathrm{t} < \mathrm{t}_1 = 1\mathrm{s} \\ -6(\mathrm{t} - \mathrm{t}_1); & \mathrm{t}_1 < \mathrm{t} < \mathrm{t}_2 \end{cases}$$

a) Encontrar la velocidad y la posición del coche en función del tiempo. Realizar una gráfica de ambos.

b) Un ciclista circula a velocidad constante v_b y en t=0 se encuentra 17m detrás del coche. El ciclista alcanza al coche justo en el momento que éste se detiene. ¿Cuál es la velocidad del ciclista? Sol: 15m/s

18. Un bloque de 2 Kg situado sobre una pendiente rugosa se conecta a un resorte de masa despreciable que tiene una constante de resorte de 100 N/m (véase la figura). El bloque se suelta desde el reposo cuando el resorte no está deformado, y la polea no presenta fricción. El bloque se mueve 20 cm hacia abajo de la pendiente antes de detenerse. *Encuentre el coeficiente de fricción cinético entre el bloque y la pendiente.*

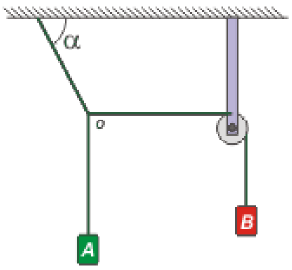


19. La ecuación del movimiento de una partícula que se desplaza por una circunferencia viene dada por: $s(t) = 1 - 3t + 2t^2$ (en unidades del SI). Calcular la velocidad, aceleración tangencial, normal y total de la partícula cuando al transcurrido 2 s, sabiendo que la aceleración normal es de 0.2 m/s^2 al cabo de 1 segundo. Sol: 5 m/s; 4 m/s^2; 5 m/s^2; 6.4 m/s^2.

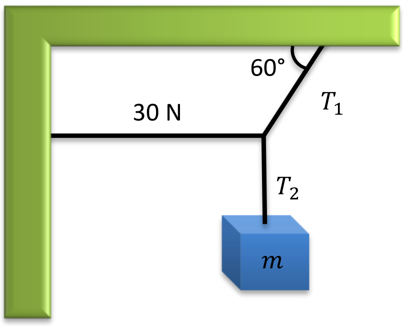
20. Dos móviles parten del mismo punto y en el mismo sentido recorriendo una circunferencia de 2 m de radio. El primero se mueve con una velocidad angular de 2 rad/s, y el segundo con una aceleración de 1 rad/s^2. ¿Cuánto tiempo tardarán en reunirse de nuevo? ¿Qué aceleraciones tangencial y radial tienen en ese instante? ¿Qué ángulo forman las aceleraciones totales de ambos móviles? Sol: t=4s; $a_{t1}=0$;$a_{n1}=8m/s^2$; $a_{t2}=2m/s^2$; $a_{n2}=32m/s^2$; $\theta=86{,}42^o$

21. Un tocadiscos posee una velocidad angular de 33 r.p.m. Se interrumpe la corriente en un determinado momento y como consecuencia el disco comienza a pararse con una aceleración de 0.5 rad/s^2. Hallar: a) tiempo que tarda en pararse, b) número de vueltas que da en ese tiempo. Sol: a) 6.91 s; b) 1.9 vueltas.

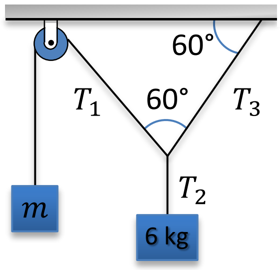
22. Dado el ángulo α, encontrar la relación entre las masas A y B sabiendo que el tramo de soga que va desde el punto O hasta la polea se halla en posición horizontal. Sol: tg $\alpha = m_a/m_b$



23. Determinar las tensiones y la masa del sistema en equilibrio que se representa en la figura. Sol: T_1=60N; T_2=52N; m=5,3Kg

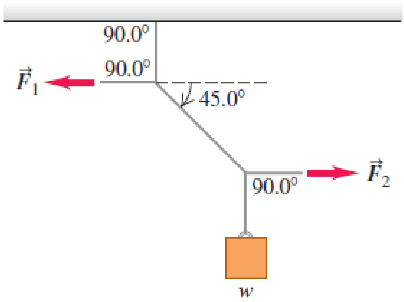


24. Determinar las tensiones y la masa desconocida del sistema en equilibrio que se muestra en la figura.

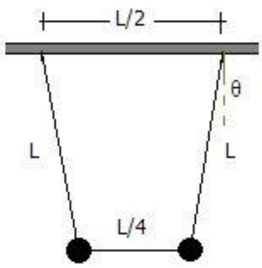


Sol: m=3.5Kg

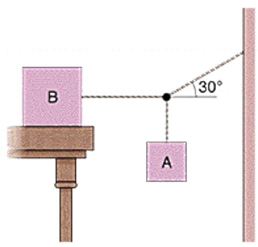
25. En la figura el peso *w* es de 60.0 N. a) Calcule la tensión en el cordón diagonal. b) Calcule la magnitud de las fuerzas horizontales $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ que deben aplicarse para mantener el sistema en la posición indicada. Sol: $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = 60N$



26. Dos esferas idénticas de masa m = 10 Kg, están colgadas con cuerdas de longitud L = 1.0 m de dos puntos separados una distancia 1/2*L (véase la figura). Las esferas están unidas por una cuerda de longitud 1/4*L. Calcule la tensión en cada una de las tres cuerdas. Sol: T_1=98,77 N; T_2=12,34N

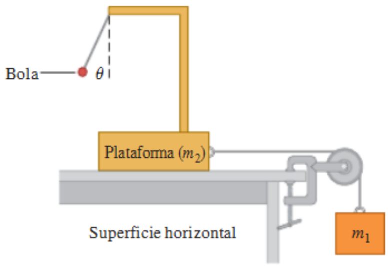


27. El bloque B de la figura tienen una masa de 70 Kg. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y la mesa es de 0,25; el ángulo θ es 30°; asumamos que la cuerda entre B y el nudo está horizontal. Encontrar el máximo peso del bloque para el cual es sistema estará en reposo.



28. Una partícula de 1 kg está sujeta a los extremos de una barra vertical de 4 m de longitud mediante dos cuerdas de 3 m cada una. Cuando el sistema gira alrededor del eje de la barra, las cuerdas se tensan. a) ¿Cuál debe ser la velocidad angular del sistema para que la tensión de la cuerda superior sea de 20 N? b) ¿Cuál es entonces la tensión de la cuerda inferior? Sol: 2.91 rad/s; 5.3 N. . Sol: $P_{máx}$= 99,02N

29. El sistema que se muestra en la figura puede usarse para medir la aceleración del mismo. Un observador que va sobre la plataforma mide el ángulo θ , que el cordón que sostiene la bola ligera forma con la vertical. No hay fricción en ningún lado. a) ¿Cómo se relaciona θ con la aceleración del sistema? b) Si m_1=250 kg y m_2=1250 kg, ¿cuál es el valor de θ? c) Si usted pudiera modificar m_1 y m_2, ¿cuál es el ángulo θ máximo que se puede alcanzar? Explique cómo necesita ajustar m_1 y m_2 para lograrlo. Sol: tg θ = $m_1/(m_1+m_2)$; θ=9,5° θ=45°



30. ¿Cómo se puede calcular la aceleración de un vehículo si, en el techo interior del mismo se coloca un péndulo de masa desconocida? Realice el diagrama de fuerzas correspondiente. Sol: tg $\theta = a/g$

31. Un bloque de 5 kg está sobre un plano inclinado 30°. Una fuerza de 5 N sujeta el bloque para evitar que caiga rápidamente. ¿Con qué aceleración baja el bloque? Si el bloque inicialmente se encuentra en reposo, ¿qué distancia ha recorrido el bloque al cabo de 3 s? Despreciar el rozamiento. Sol: 3.9 m/s^2; 17.55 m.

32. Durante las vacaciones de invierno la universidad celebra una carrera de trineos. Un participante comienza la carrera tirando, con una fuerza de 150 N, de una cuerda atada al trineo, que forma un ángulo de 25° con la horizontal. La masa del trineo es de 80 kg y el rozamiento entre el trineo y el hielo es despreciable. Determinar: a) Aceleración del trineo. b) Fuerza normal ejercida por la superficie sobre el trineo. c) Velocidad a la que se mueve el trineo, si parte del reposo y recorre 1 km. d) Trabajo realizado por el estudiante. Sol: 1.7 m/s; 721 N; 58.3 m/s; 136 kJ.

33. Un pastor intentar mover a una de sus ovejas (m = 15 kg) que se ha quedado paralizada en medio de la carretera debido al sonido de la bocina de un camión. Para ello, empuja a la oveja con una fuerza de 100 N formando un ángulo de 30° con la horizontal. Calcular la velocidad con la que se mueve la oveja cuando haya recorrido 3 m. Sol: 5.89 m/s.

34. Dos bloques (1 y 2) de masa 20 y 10 kg, respetivamente, están en contacto sobre una superficie horizontal sin rozamiento y sometidos a una fuerza de 50 N aplicada sobre el bloque 1. ¿Cuál será la aceleración del sistema? ¿Cuáles son las fuerza F_{12} y F_{21} que los bloques ejercen entre sí? Sol: 1.67 m/s^2; 16.7 N; 16.7 N.

35. De una polea ligera y sin rozamiento se suspende un hilo de masa despreciable que lleva en sus extremos masas de 1 y 3 kg. Las masa están inicialmente en reposo y a la misma altura, ¿cuál será la velocidad del sistema cuando la masa más pesada haya descendido 1,5 m? ¿y la tensión ejercida por la cuerda? Sol: 3.8 m/s; 14,7 N.

36. Un niño hace girar una piedra de 100 g sujeta a un hilo en el plano vertical, haciéndola dar 1 vuelta por segundo. Sabiendo que la cuerda tiene una longitud de 1 m, calcular:
   a. La tensión de la cuerda cuando la piedra está en la parte de arriba.
   b. La tensión en la cuerda cuando la piedra está en la parte de abajo
   c. ¿Cuál es la velocidad de rotación mínima para que la piedra pueda girar sin que la cuerda se afloje?

   Sol: 2.97 N; 4.93 N; 3.13 rad/s.

37. Se ata una cuerda a un cubo lleno de agua, el cual se hace girar en un círculo vertical de radio 0,600m. ¿Qué velocidad mínima debe tener el cubo en el punto más alto para no derramar agua? Sol: v=2,42 m/s

38. Una piedra de masa m=95 g se hace girar en un círculo horizontal en el extremo de una cuerda de 85 cm de longitud. El tiempo necesario para que la piedra dé una revolución completa es de 1,22 s. Calcular el ángulo que la cuerda forma con la horizontal. Sol: 25,8°.

39. Una partícula de masa m = 5 kg está unida al extremo de un cable de longitud l = 2 m cuyo otro extremo está fijo. La partícula recorre una circunferencia horizontal con velocidad constante v, tal que el cable forma un ángulo de 40° con la vertical en el extremo fijo. Determinar la velocidad de la esfera y la tensión del cable. Sol: 64 N; 3.25 m/s.

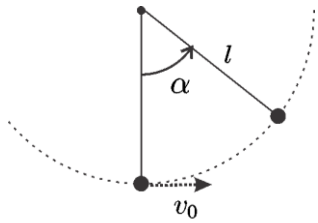
40. Una partícula de 1 kg está suspendida de un hilo de 2 m de longitud y masa despreciable. Si la partícula describe una trayectoria circular con velocidad angular 3,13 rad/s, calcular: a) la fuerza de tensión que ejerce el hilo, b) el ángulo que forma éste con la vertical, c) ¿cómo variaría el ángulo formado por el hilo si la masa de la partícula fuera de 2 kg? Sol: a) 19,6 N; b) 60°; c) no varía.

41. Un péndulo se ha construido uniendo una masa m a una cuerda de masa despreciable y longitud L. Se pone en movimiento la masa de tal forma que recorre la circunferencia mostrada en la figura. ¿Cuál debe ser la velocidad de la masa si el ángulo que forma con la vertical es θ? ¿Cuál es la tensión de la cuerda? Escribir los resultados en función de m, L y el ángulo θ. Sol: $v = \sqrt{L \cdot g \cdot sen\theta \cdot tg\theta}; T = m \cdot g/cos\theta$

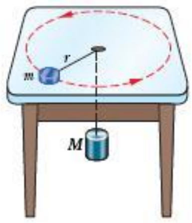
42. Deduzca cual puede ser la máxima velocidad con la que un coche puede coger una curva en las siguientes situaciones: a) sin rozamiento b) con rozamiento (μ) y sin peralte en la curva, c) con rozamiento (μ) y con peralte (α). Sol: a) No puede coger la curva; b) $v = \sqrt{\mu \cdot g \cdot R}$; c) $v = \sqrt{R \cdot g \frac{sen\theta + \mu cos\theta}{cos\theta - \mu sen\theta}}$

43. Con ayuda de una cuerda se hace girar un cuerpo de 1 kg en una circunferencia vertical de 1 m de radio, cuyo centro está situado 10,8 m por encima del suelo horizontal. La cuerda se rompe cuando la tensión es de 120 N, lo cual sucede cuando el cuerpo está en el punto más bajo de su trayectoria. Se pide:
   a) ¿Qué velocidad tiene el cuerpo cuando se rompe la cuerda? Sol.: $v = 10.5\,\vec{\imath}\,m/s$
   b) ¿Cuánto tardará en caer al suelo? Sol: $t = \sqrt{2}s$
   c) ¿Cuál será su velocidad en el instante de chocar con el suelo? Sol: |v|=17.4 m/s

44. Una pequeña esfera de masa m=0,6kg cuelga de una cuerda de masa despreciable y longitud l=1,1m. La esfera recorre un circulo vertical y su velocidad en la parte inferior es v0= 6m/s. No teniendo en cuenta el rozamiento con el aire y tomando g= 9,8m/s, encuentra: a) La velocidad y la tensión de la cuerda cuando $\alpha = 70°$. b) Si la cuerda se corta cuando $\alpha = 70°$, que altura alcanza la esfera con respecto al punto que fue lanzada. ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar el punto más alto? Sol: a) v=4,67 m/s, T=13,9N; b) t=0,45s



45. Un objeto de masa m=1,5 kg se desliza formando un circulo de radio r=20cm en una mesa sin rozamiento mientras está unido a un cilindro de masa M=2,5 kg por una cuerda a través de una agujero en la mesa. ¿Qué velocidad de m mantiene al cilindro parado? Sol: 1,81m/s

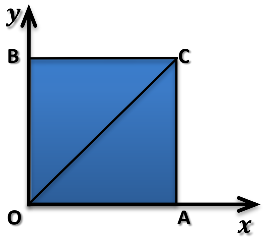


46. Un proyectil de 10 g es disparado del cañón de una escopeta con una fuerza de 18 N. Si la longitud del cañón es de 50 cm, ¿cuál será el trabajo realizado en el interior del cañón? ¿y cuál será la velocidad del proyectil al final del cañón? Sol: 9 J; 42.4 m/s.

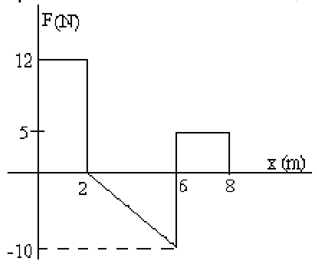
47. Calcular el trabajo realizado por la fuerza $F = (xy, 3x^2y)$ N al actuar sobre una partícula entre los puntos (1,1) y (3,9) a) a lo largo de la curva $y = x^2$. b) ¿Y a lo largo de la recta $y = 4x - 3$? c) ¿Es la fuerza conservativa? Sol: 748 J; 670.1 J; No.

48. Calcular el trabajo realizado por la fuerza $F = (xy^2, 2x^2)$ N al actuar sobre una partícula a lo largo de las siguientes trayectorias: a) La recta que une los puntos (0,0) y (3,2). b) La recta que une los puntos (3,2) y (1,4). c) La recta que une los puntos (1,4) y (0,0). ¿Es la fuerza conservativa? Sol: 21 J, -16 J, -6.7 J; No conservativa.

49. Una fuerza que actúa sobre una partícula que se mueve sobre el plano horizontal xy está dada por $\vec{F} = 2y\vec{\imath} + x^2\vec{\jmath}$, en donde x e y están en m. La partícula se mueve desde el origen hasta una posición final C de coordenadas x = 5 m e y = 5 m, como en la figura. Calcular el trabajo efectuado por la fuerza a lo largo de a) OAC, b) OBC, c) OC. d) ¿Es la fuerza conservativa? Sol: 125 J; 50 J; 66.67 J; No.



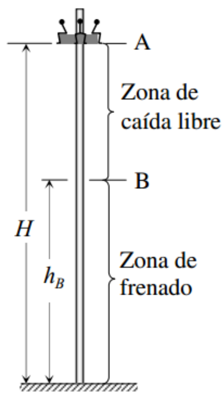
50. Una partícula de masa m=2 kg se mueve a lo largo del eje X, está sometida a una fuerza que varía con la posición x tal como se muestra en la figura. Si la velocidad inicial cuando pasa por el origen x=0 es de 3 m/s. Calcular su velocidad cuando pasa por la posición x=8 m. Sol: $v = \sqrt{23}\, m/s$



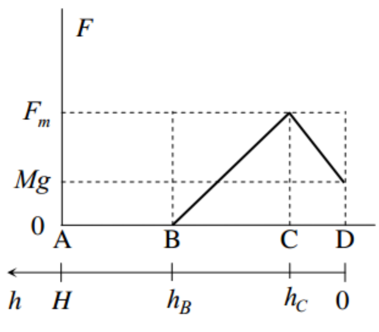
51. Cierto muelle no cumple la ley de Hooke. La fuerza (en N) que ejerce cuando se estira una distancia x (en m) tiene un módulo igual a $52{,}8x+38{,}4x^2$ en la dirección opuesta a la elongación. Calcule el trabajo requerido para estirar el muelle desde x=0.5 hasta x=1m. Con uno de los extremos fijos, una partícula de masa 2,17 kg se une al otro extremo cuando el muelle se ha estirado 1m. Si se suelta la partícula desde el reposo, cual es la velocidad en el momento en el que el muelle está estirado 0,5m. ¿Es la fuerza conservativa? Sol: a) W=31J; b) v=5,35m/s; c) Conservativa

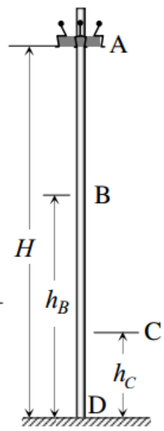
52. Una fuerza $\vec{F} = 3x^2 + 2x - 5\,\vec{\imath}\,N$ (la posición x en m) se aplica a un cuerpo de 10 kg de masa. Calcular el trabajo realizado por la fuerza entre x=2 y x=5m si se mueve a lo largo del eje x. Sabiendo que la velocidad del bloque en el punto x=2 m es de 5 m/s, calcular la velocidad del bloque en el punto x=5 m. Sol= 7,04m/s.

53. En un parque de atracciones, una atracción consiste en elevar hasta una altura H una plataforma en la que están sentados, bien sujetos, los sufridos pasajeros. Desde esta altura H, se deja caer la plataforma en caída libre hasta un punto B, en el que comienza a actuar una fuerza de frenado F constante. Como es lógico, esta fuerza debe conseguir que la plataforma llegue al suelo con velocidad nula. Sabiendo que la altura del punto B es h_B=3H/5, determina el valor que debe tener la fuerza, F, en función de la aceleración de la gravedad, g , y de la masa de la plataforma y los pasajeros, M. Donde se alcanzará la velocidad máxima?¿Cuál será su valor? Sol: $F = 5/3\, M \cdot g$; $v_{max} = \sqrt{\frac{4}{5} g \cdot H}$



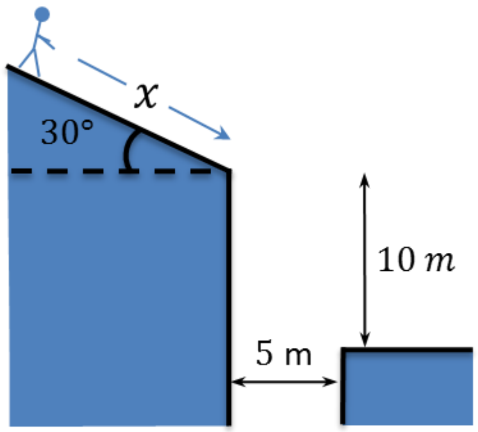
En la práctica, la fuerza de frenado aumenta linealmente entre los puntos B y C de la figura inferior, desde una fuerza nula hasta un valor máximo F_m , y después, entre C y D, la fuerza F disminuye linealmente hasta un valor igual al peso, Mg, como se esquematiza en la figura. De esta forma, también la aceleración final es nula y el “aterrizaje” no es violento. Determina el valor de F_m para que la plataforma llegue al suelo con velocidad nula. Expresa el resultado en función de M y g, teniendo en cuenta que h_B=3H/5 y h_C=H/5. ¿En qué punto del descenso alcanza la plataforma la velocidad máxima? Determina esta velocidad en función g y H . Sol: $F_m = 3\, M \cdot g$; $h_E = \frac{7}{15} H$; $v_{max} = \sqrt{\frac{14}{15} g \cdot H}$



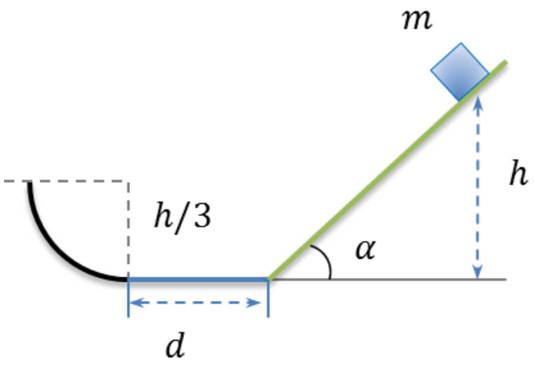


54. Un cuerpo de 15 kg se encuentra a 10 m de altura en reposo. Calcular la energía potencial y cinética: a) a los 10 m, b) al llegar al suelo dejándolo caer libremente y c) en el punto medio. Comprobar el principio de conservación de la energía. Sol: 1470 J, 0 J; 0 J, 1470 J; 735 J, 735 J.

55. Un patinador comienza a descender por una pendiente inclinada 30° respecto de la horizontal. Calcular el valor mínimo de la distancia x al final de la pendiente de la que tiene que partir, para que pueda salvar un foso de 5 m de anchura. El coeficiente de rozamiento entre el patinador y la pista es μ=0.2. Sol: x=3.6 m.



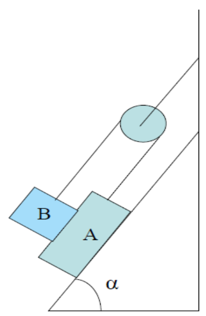
56. La pista de la figura está formada por un tramo inclinado un ángulo $\alpha = 30°$, un tramo horizontal de longitud d = 0.2 m y un cuadrante circular de radio R = h/3. Una masa considerada puntual de 3 kg se sitúa, sin velocidad inicial, a una altura h = 2 m sobre el plano inclinado y cae por la pista. Entre la masa y los dos tramos rectilíneos hay rozamiento con coeficiente μ = 0.2 y en el tramo curvo no hay rozamiento.



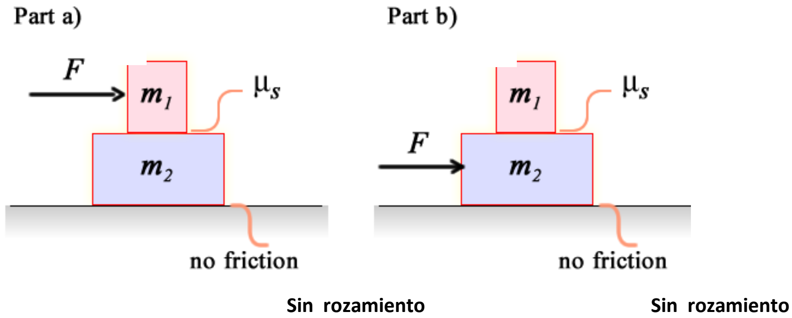
a. Calcular el trabajo de rozamiento desde la situación inicial hasta que la masa abandona la pista. Sol: -21.6 J.
b. Calcular la velocidad de la masa cuando abandona la pista. Sol: 3.43 m/s.

57. Sobre el bloque A de masa M que puede deslizar por un plano inclinado α grados con la horizontal, se apoya el bloque B de masa $m < M$ que puede deslizar a su vez sobre aquél. Ambos cuerpos están unidos por un hilo ideal. El coeficiente de rozamiento es μ en todas las superficies. a) Hallar el valor mínimo de α en función de M, m y μ para que el sistema inicie el movimiento. b) Si μ = 0,2 hallar la relación M/m para que el movimiento comience **cuando α = 45°.**

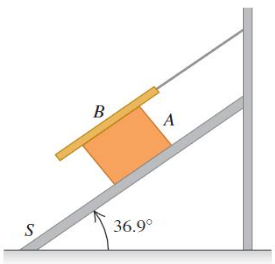
Sol: $tg\theta = \mu \cdot \frac{(M+3m)}{M-m}; M \geq 2m$



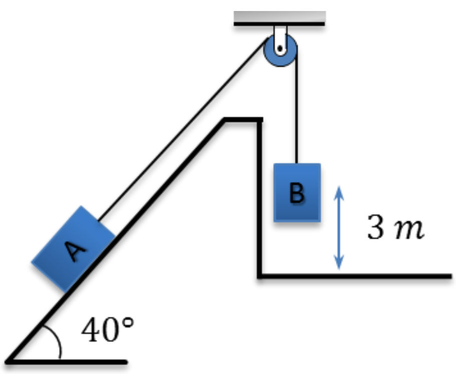
58. Considerar dos bloques en reposo uno encima de otro. El bloque inferior tiene una masa m_2=4,7 kg y descansa sobre una mesa sin rozamiento. El bloque superior tiene una masa m1=1,8 kg. Suponer que el coeficiente de rozamiento entre los dos bloques es μs = 0.6. a) Se aplica una fuerza de módulo F como indica la figura de la izquierda. ¿Cuál es el valor máximo de la fuerza que se puede aplicar al bloque superior de tal manera que los dos bloques sigan moviéndose juntos? b) Si ahora se aplica la fuerza como en la figura de la derecha, ¿cuál será la fuerza máxima que se puede aplicar al bloque inferior de tal manera que los dos bloques sigan moviéndose juntos? Sol: a) F=14,64N; b) F=38,22N



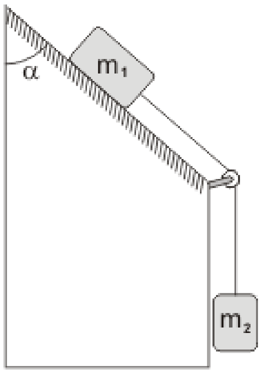
59. El bloque A, de peso **3*w***, resbala con velocidad constante bajando por un plano inclinado (S) de 36,9°, mientras la tabla B, de peso ***w***, descansa sobre A, estando sujeta con un cordón a la pared. A) Dibuje un diagrama de todas las fuerzas que actúan sobre el bloque A. b) Si el coeficiente de rozamiento es igual entre A y B, y entre S y A, determine su valor. Sol: μ=0,45



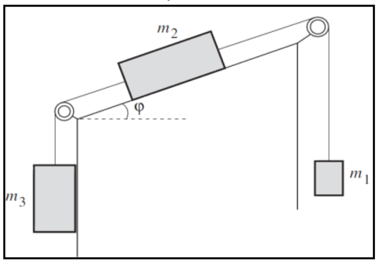
60. Dos bloques A y B, conectados mediante una cuerda inextensible, se sueltan partiendo del reposo en las posiciones representadas en la figura. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque A y el plano inclinado vale 0.12. El bloque B choca con la superficie horizontal 3 s después de soltarlo. Si el bloque A pesa 300 N, determinar: a) La aceleración y velocidad del cuerpo B cuando choca con la superficie horizontal. b) La masa del cuerpo B. c) La tensión en la cuerda, mientras los bloques están en movimiento. Sol: a=0.667 m/s^2, v=2 m/s; m_B= 26.3 kg; T=240.42 N.



61. Dos masas inicialmente en reposo se encuentran unidas por una cuerda inextensible y de masa despreciable como muestra la figura. Considere que entre m_1 y el plano inclinado hay rozamiento. Si el coeficiente de rozamiento estático es $\mu = 0,7$ y $\alpha = 60^o$. ¿Cuál es la máxima m_2 para que el sistema esté en equilibrio? Suponga que m_1 es un dato. Sol: $m_2=0,106m_1$

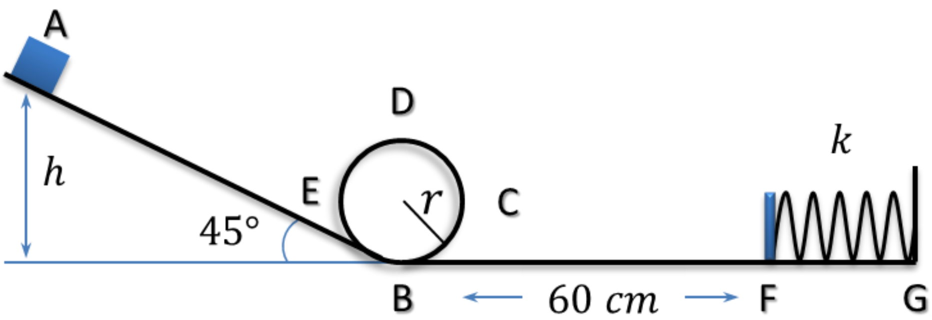


62. En el sistema representado en la figura las masas de los cables y las poleas son despreciables. Si el coeficiente de rozamiento entre la superficie inclinada y el cuerpo m_2 es μ: Determinar las condiciones de movimiento en uno y otro sentido. En el caso en el que el sistema se mueva con aceleración, calcular ésta.



63. Un bloque de 600 g se suelta en la posición A, desliza a lo largo del plano inclinado de 45° de inclinación hasta B. A continuación describe el bucle BCDEB, desliza a lo largo del plano horizontal BF y finalmente comprime un muelle de constante k=500 N/m cuyo extremo libre dista 60 cm de B.

a. Calcular la máxima deformación del muelle, sabiendo que la altura h de A es de 2.5 m, el radio del bucle r = 0.5 m, y el coeficiente dinámico de rozamiento en el plano horizontal BG y en el inclinado AB es de 0.3. Suponer que no hay rozamiento en el bucle. Sol: 0.19 m.
b. Hallar la fuerza normal en la posición D. (Tomar g = 9.8 m/s^2). Sol: N=11.74 N.

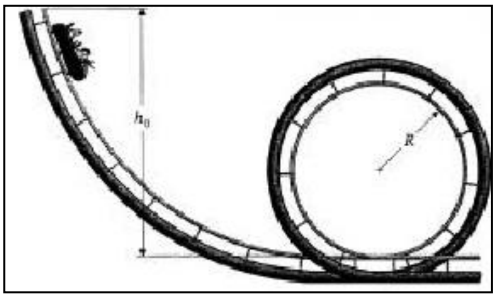


64. En una pista de rizar el rizo (loop) de 2.00 m de radio.

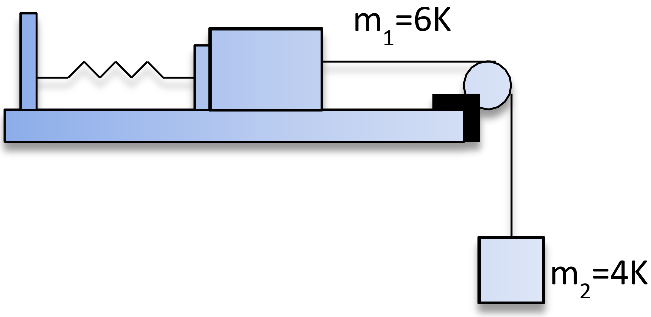
a. ¿Cuál ha de ser como mínimo la velocidad que lleve en el punto más bajo de la pista un cuerpo de 4.00 kg que pretende rizar el rizo? Sol: v = 9.90 m/s.

b. ¿Cuál será la fuerza que el cuerpo ejerce sobre la pista cuando está en el punto más alto de su trayectoria? ¿Y en el punto más bajo? Sol N~0; N = 235 N.

65. Un carrito de montaña rusa se suelta desde una altura h_0 sobre la parte inferior de una vía sobre la que desliza sin rozamiento. a) ¿Cuál es el valor mínimo de h_0 para hacer el rizo de radio R sin caerse? b) Si h_0 es el doble del valor mínimo, calcularla velocidad y la fuerza de reacción normal de la vía en el punto más alto del rizo. Considérese el carrito con masa m. Sol:$h_0 = \frac{5}{2}R; v_A = \sqrt{6Rg}; N = 5mg$



66. Un bloque de 4 kg cuelga de una cuerda ligera que a través de una polea sin rozamiento está conectada a un bloque de 6 kg que descansa sobre una plataforma rugosa. El coeficiente de rozamiento μ = 0,2. El bloque de 6 kg se empuja contra un muelle, al cual no está sujeto. El muelle tiene una constante elástica de 189 N/m y se comprime 30 cm. Determinar la velocidad de los bloques cuando el muelle se libera y el bloque de 4 kg cae una distancia de 40 cm. Admitamos que la cuerda se mantiene en todo momento tensa.

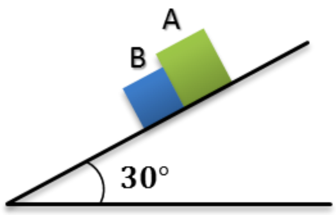


67. Sobre un tablero inclinado un ángulo de 30° se colocan dos cuerpos A y B de masa 4 y 3 kg respectivamente. Los coeficientes de rozamiento entre el bloque A y el plano inclinado es 0.1, y entre el bloque B y dicho plano 0.2.

a. ¿Cómo se deslizarán los cuerpos, juntos o separados?

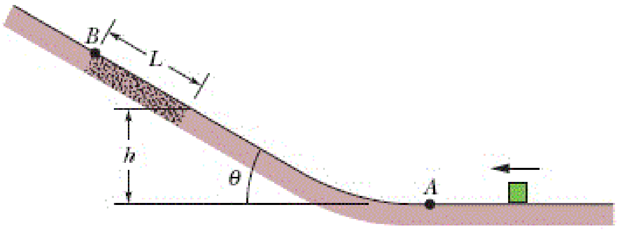
b. Hállese la aceleración de cada cuerpo y la fuerza de reacción que ejerce uno sobre el otro (si la hubiere)

c. Hallar la velocidad común, o de cada cuerpo, después de haberse desplazado 5 m a lo largo del plano inclinado, partiendo del reposo. (Resolver este apartado mediante dos procedimientos de cálculo: cinemática y balance energético)



Sol: Juntos; 3.68 m/s^2, 1.45 N; 6.08 m/s.

68. En la figura de abajo, un bloque resbala sin rozamiento hasta que llega a una sección de longitud L=0,75m, que está a una altura de 2 m en una rampa de θ=30°. Es esta sección el coeficiente de rozamiento es de 0,4. El bloque pasa por el punto A con una velocidad de 8 m/s. Si el bloque alcanza el punto B (que es donde se acaba el rozamiento), ¿cuál es su velocidad? Si no lo alcanza, ¿cuál es la altura con respecto a A máxima?



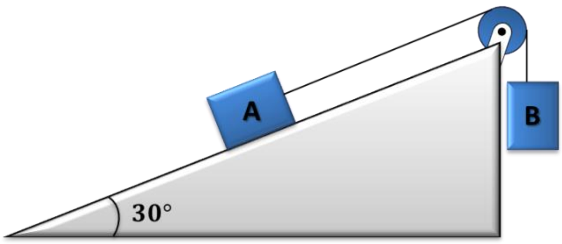
69. Partiendo del reposo, se deja caer un cuerpo por un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Después de recorrer dos metros deslizándose, llega al final del plano inclinado con una velocidad de 4 m/s y sigue su recorrido por un plano horizontal hasta que se detiene. El tiempo transcurrido desde que el cuerpo empieza a caer hasta que se detiene es de 3 s. Determinar:
    i. El coeficiente de rozamiento del plano inclinado. Sol: 0.106.
    ii. El coeficiente de rozamiento del plano horizontal. Sol: 0.204.

70. Una polea de peso insignificante está sujeta en el vértice de un plano, inclinado 30° con respecto a la horizontal, en el que hay rozamiento (μ=0.1). Mediante un hilo ideal que pasa por la polea, se unen dos bloques de 1 kg. Hallar:

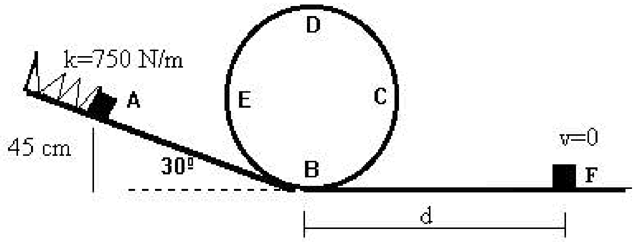
    a. La aceleración de los bloques

    b. La tensión del hilo

    Sol: 2.03 m/s^2; 7.8 N.



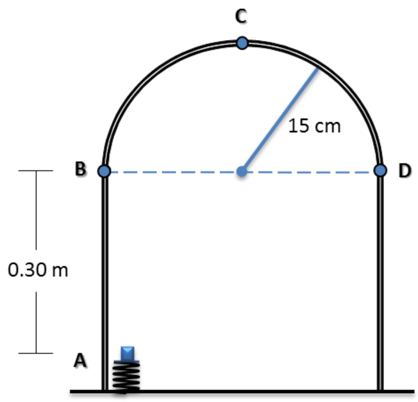
71. Se lanza un bloque de 400 g que descansa sobre un plano inclinado 30° mediante un muelle de constante k=750 N/m. Se comprime el muelle 15 cm y se suelta el bloque. El bloque se encuentra a 45 cm de altura sobre el suelo, cuando el muelle está comprimido tal como se muestra en la figura. El boque describe el bucle ABCDEF. El radio de la trayectoria circular BCDEB es de 50 cm.
    a) Determinar la velocidad del bloque en las posiciones B (parte más baja de la trayectoria circular), y D (parte más alta de la trayectoria circular). Sol: $v_B = 6{,}92 m/s$; $v_D = 5{,}32 m/s$
    b) La máxima distancia d que recorre hasta que se para en F. Sol: d= 12,21m
    c) La fuerza normal en las posiciones A, B, D y F. Sol: $N_B = 42{,}2N$; $N_D = 18{,}7N$
    El coeficiente de rozamiento en los planos horizontal BF e inclinado AB es 0.2. No hay rozamiento en la trayectoria circular.



72. Un bloque de 200 g permanece en reposo en A cuando el muelle de constante 500 N/m está comprimido 7.5 cm. Se suelta el dispositivo de sujeción y el muelle recorre el camino ABCD. Calcular:

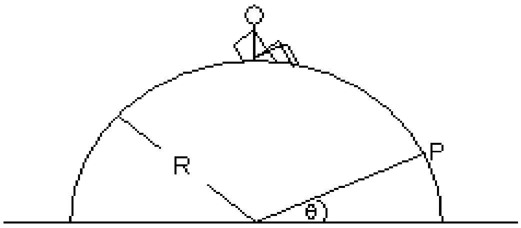
    a. La velocidad del bloque cuando pasa por B, C, D.

    b. La fuerza normal que ejerce el raíl en el punto más alto



Sol: v_A=0; v_B=2.86 m/s; v_C=2.29 m/s; v_D= v_B; F_N=5.03 N.

73. Un muchacho de masa m está sentado sobre un montículo semiesférico de nieve, como se muestra en la figura. Si empieza a resbalar desde el reposo (suponiendo el hielo perfectamente liso), ¿en qué punto *P* deja el muchacho de tener contacto con el hielo? Sol: $\theta = 41.8^o$

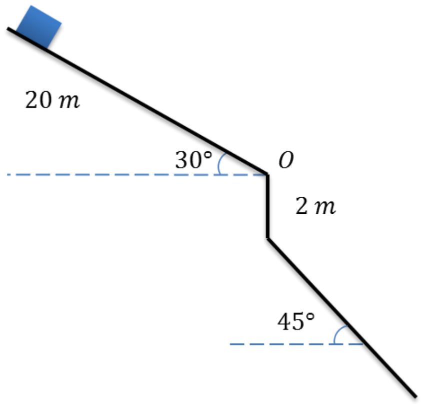


74. Un bloque de 0.5 kg de masa comienza a descender por una pendiente inclinada 30° respecto de la horizontal hasta el vértice O, en el que deja de tener contacto con el plano (véase figura adjunta). La distancia recorrida ha sido de 20 metros. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano inclinado es 0.2.

a. Determinar la velocidad del bloque en dicha posición. (Hacerlo por energías). Sol: 11.3 m/s.

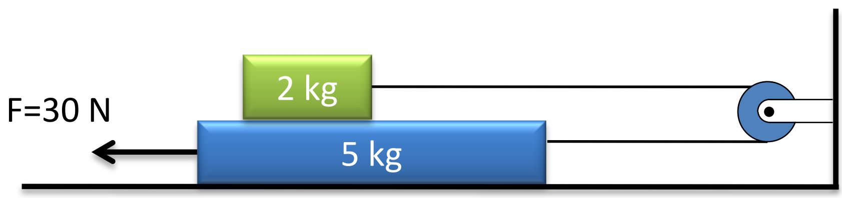
b. Hallar el punto de impacto del bloque en el plano inclinado 45°, situado 2 m por debajo de *O*, tal como se indica en la figura. Sol: 16.7 m.

c. Hallar el tiempo de vuelo t del bloque (desde que abandona el plano inclinado hasta el punto de impacto). Sol: 1.2 s.



75. Un cohete de fuegos artificiales (m=300 g), lanzado durante las Hogueras de San Juan, realiza un vuelo errático. En el proceso, el combustible propulsor ha generado una fuerza no conservativa que produce un trabajo de 425 J sobre el cohete hasta la altura de 30 m. Ignorando la resistencia del aire, y la pérdida de masa debida al consumo de combustible, encontrar la velocidad con la que prosigue su movimiento el cohete. Sol: 47.4 m/s.

76. Determinar la aceleración de los bloques y la tensión de la cuerda. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es μ_1=0.2 y entre los dos cuerpos μ_2=0.1. La polea tiene masa despreciable. ¿Cuál sería la fuerza mínima F que hay que hacer para que el sistema se ponga en movimiento? Tómese g=9.8 m/s^2. Sol: T = 5.5 N; a = 1.8 m/s^2; $F_{mín}$ = 17.64 N.

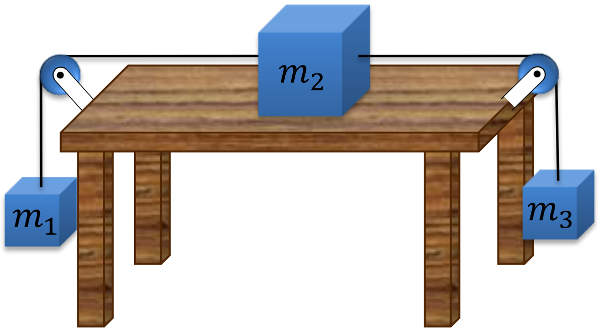


77. En una pista horizontal completamente lisa, se encuentra un muelle de 30 cm de longitud y de constante elástica 100 N/m. Se comprime 20 cm y se sitúa una masa de 500 g frente a él. Al soltarse el muelle, y separase del mismo, la masa recorre 90 cm por una superficie horizontal y rugosa. Se pide:

a. Dibujar las fuerzas que actúan sobre la masa cuando está junto al muelle y cuando se separa de él.

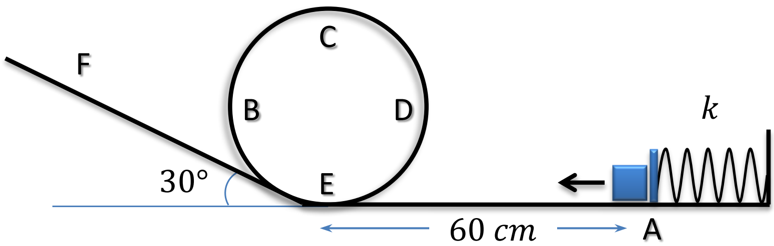
b. Velocidad con la que sale lanzada y características de la superficie rugosa. Sol: v=2.83 m/s; μ=0.45.
c. ¿Qué ocurriría si la superficie fuera completamente lisa? Sol: No se pararía.

78. Un bloque de masa m_2 = 1 kg descansa sobre una mesa y está conectado mediante cuerdas a dos bloques de masas m_1 = 4 kg y m_3 = 2 kg, como se muestra en la figura. Considerando la masa de las poleas despreciable y un coeficiente de rozamiento entre la mesa y el bloque 2 de 0.35, calcular: a) la aceleración de cada bloque, y b) la tensión de las dos cuerdas. Sol: 2.31 m/s^2; 30 N; 24.2 N.



79. Un bloque de 600 g se suelta cuando un muelle, de constante 500 N/m está comprimido 150 mm. Luego se traslada a lo largo del bucle de 50 cm de diámetro siguiendo la trayectoria ABCDEF. Sabiendo que la distancia entre el bloque y la base del bucle en el momento en que se suelta el bloque es de 60 cm, que solamente existe rozamiento en las superficies planas, cuyo coeficiente dinámico vale 0.3. Calcular:

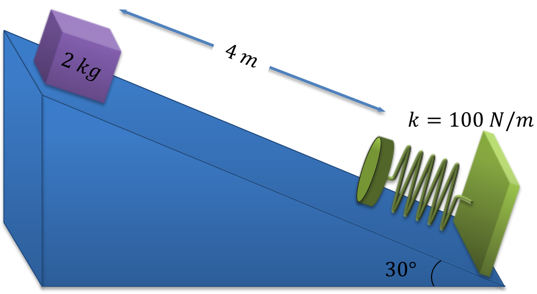
a. La fuerza normal en las posiciones A, C, E y F.
b. La distancia que recorrerá la partícula a lo largo del plano inclinado hasta pararse, una vez que haya salido del bucle.



Sol: 5.88 N, 7.03 N, 42.4 N, 5.1 N; 1.02 m.

80. En el extremo superior de un plano inclinado de 4 m de longitud y 30° de inclinación hay una masa de 2 kg. En el extremo inferior hay un muelle fijo de constante elástica k=100 N/m y masa despreciable. El cuerpo empieza a caer, partiendo del reposo. Se pide:

a) hallar la compresión máxima del muelle, despreciando el rozamiento.
b) ¿cuál será la compresión máxima si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es μ = 0.2?
c) en este último caso, ¿hasta qué punto subirá el bloque por el plano después de abandonar el muelle?



Sol: 0.989 m; 0.783 m; 1.54 m respecto del muelle comprimido.