TEMA 2. Geometría elemental y analítica

En el presente tema nos ocuparemos de la geometría desde dos puntos de vista: geometría elemental y geometría analítica. Empezaremos viendo los conceptos básicos de trigonometría, para luego pasar al estudio de figuras planas y cuerpos en el espacio, con el cálculo de las correspondientes longitudes, áreas y volúmenes. Finalmente, estudiaremos la geometría analítica plana, considerando las rectas, la circunferencia y las cónicas (elipse, hipérbola y parábola).

2.1. Trigonometría. Razones trigonométricas

Un ángulo viene determinado por dos semirrectas, llamadas *lados*, con un mismo origen llamado *vértice*. Hay diversas maneras de medir la amplitud de un ángulo: en el sistema sexagesimal se toma como unidad el ángulo recto. Un ángulo recto se divide en 90 partes llamadas *grados sexagesimales*. En el sistema circular la unidad de medida es el *radián*. Un ángulo mide un radián cuando la longitud del arco es igual al radio. Tenemos que

$$360^{\text{o}} = 2\pi \text{ radianes}.$$

Por tanto, mediante una regla de tres simple obtenemos que, si la medida de un ángulo es de g grados sexagesimales, su equivalencia en radianes viene dada por:

$$r = \frac{\pi}{180}\, g.$$

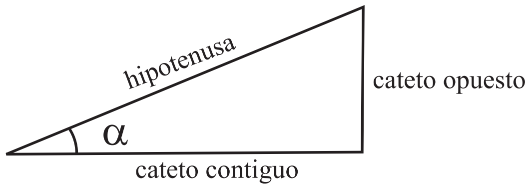
En general, en el contexto de la trigonometría se suelen usar los grados sexagesimales, pero hay que tener en cuenta que en el Análisis se deben usar radianes. En lo que sigue utilizaremos principalmente grados sexagesimales.

Definamos a continuación las llamadas *razones trigonométricas* para los ángulos del intervalo $(0, 90)$. Dado un ángulo α, definimos (véase la figura):

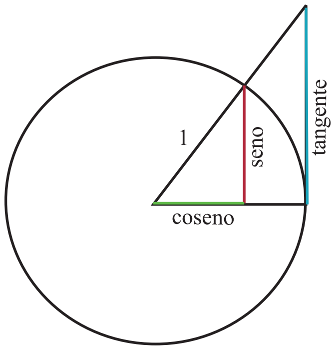
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$



Las razones trigonométricas se suelen representar en la llamada *circunferencia trigonométrica*, que no es más que una circunferencia de radio 1, en la que los ángulos se representan inscritos, es decir, con el vértice en el centro.



Una aplicación del teorema de Pitágoras en la figura anterior nos proporciona la llamada *identidad fundamental de la trigonometría*:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Extendemos la definición anterior de razones trigonométricas a los ángulos en el intervalo $(0, 360)$ con los convenios habituales: las longitudes horizontales hacia la derecha y verticales hacia arriba son positivas, mientras que las longitudes horizontales hacia la izquierda y verticales hacia abajo son negativas.

A continuación mencionamos las razones trigonométricas de los ángulos más usuales:

	0º	30º	45º	60º	90º
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no definida

Además del seno, coseno y tangente de un ángulo, se definen otras razones relacionadas, que son la secante (sec), cosecante (cosec) y cotangente (cotg), de la siguiente forma:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \ .$$

Hay muchas fórmulas que son útiles a la hora de calcular senos y cosenos de unos ángulos, conocidos otros. Por ejemplo, las fórmulas de adición y sustracción

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) &= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \operatorname{sen}\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \\
\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}
\end{aligned}$$

donde α, β son ángulos arbitrarios, o las fórmulas del ángulo doble:

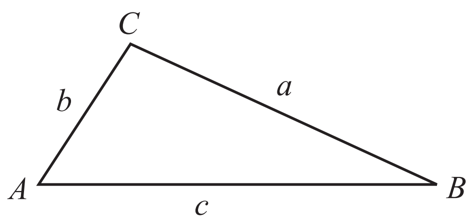
$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 2\alpha &= 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \\
\operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}
\end{aligned}$$

siendo α arbitrario. A partir de las fórmulas anteriores se pueden deducir otras, por ejemplo, obteniendo las razones trigonométricas de $90 - \alpha$ ó $180 - \alpha$ en términos de las de α, o también las propiedades de simetría del seno, coseno y tangente:

$$\begin{aligned}
\cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\
\operatorname{sen}(-\alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha \\
\operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha.
\end{aligned}$$

2.2. Resolución de triángulos

Uno de los objetivos principales de la trigonometría es la resolución de triángulos. Es decir, dados ciertos ángulos y lados de un triángulo, calcular los restantes. Para facilitar esta tarea, adoptamos el siguiente convenio: un triángulo con vértices en los puntos A, B y C se denota por ABC. Además, llamamos a, b y c a los lados enfrentados a los vértices A, B y C, respectivamente. Los ángulos correspondientes a cada vértice se suelen denotar como los vértices.



Para la resolución de triángulos es útil tener en cuenta tres propiedades básicas. En primer lugar, en todo triángulo se verifica $A + B + C = 180^{\circ}$. En segundo lugar, tenemos el *teorema del seno*

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

y el *teorema del coseno*:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \end{aligned}$$

Cuando los triángulos a tratar son rectángulos, también podemos usar el *teorema de Pitágoras*.

Veamos algunos ejemplos de resolución de triángulos.

Ejemplo 1. (a) Resolver un triángulo con $A = 36^{\text{o}}$, $B = 44^{\text{o}}$ y $c = 7$ cm.

En primer lugar, observamos que $C = 180^{\text{o}} - A - B = 180^{\text{o}} - 36^{\text{o}} - 44^{\text{o}} = 100^{\text{o}}$. Si usamos el teorema del seno, obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} 36}{a} = \frac{\operatorname{sen} 100}{7},$$

de donde

$$a = \frac{7 \operatorname{sen} 36}{\operatorname{sen} 100} = 4'18 \text{ cm}.$$

De la misma forma, usando de nuevo el teorema del seno,

$$b = \frac{7 \operatorname{sen} 44}{\operatorname{sen} 100} = 4'94 \text{ cm}.$$

Por tanto, para el triángulo propuesto tenemos $A = 36^{\text{o}}$, $B = 44^{\text{o}}$, $C = 100^{\text{o}}$, $a = 4'18$ cm, $b = 4'94$ cm, $c = 7$ cm.

(b) Resolver el triángulo que tiene $b = 10$ cm, $c = 23'86$ cm y $A = 55'62^{\text{o}}$. Usamos el teorema del coseno para calcular el lado a:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 100 + 569'2996 - 477'2 \cos(55'62) = 399'83,$$

de donde $a = 19'99$. Para calcular C, podríamos usar el teorema del seno:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}(55'62)}{19'99} = \frac{\operatorname{sen} C}{23'86}$$

y llegamos a $\operatorname{sen} C = 0'985$. De aquí obtendríamos $C = 80'09^{\text{o}}$.

Pero en lugar de calcular C mediante el teorema del seno se nos podría ocurrir usar el teorema del coseno. En tal caso:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad \Longrightarrow \quad 569'2996 = 399'83 + 100 - 399'8 \cos C$$

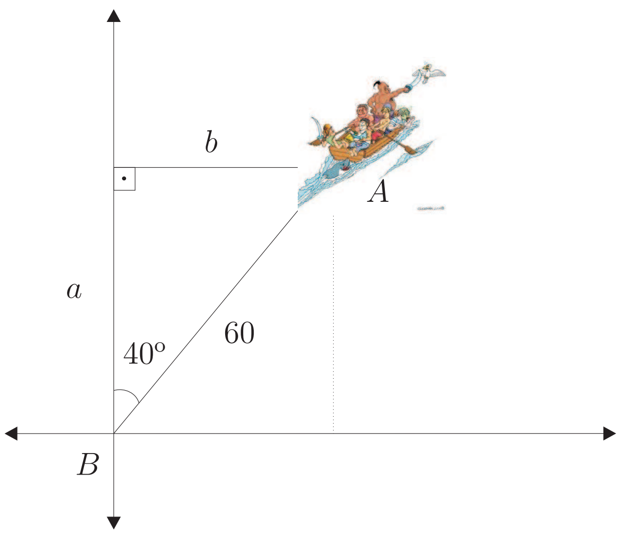
y tenemos $\cos C = -0'17376$, con lo que $C = 100^{\text{o}}$. ¿Por qué nos da un valor diferente? Lo que ocurre es que no es conveniente usar el teorema del seno para calcular ángulos, ya que en el intervalo $(0, 180)$ hay dos ángulos con el mismo seno. Esto no ocurre con el coseno, y por eso para calcular ángulos debe usarse el teorema del coseno en lugar de el del seno. Por tanto el valor correcto en nuestro ejemplo es $C = 100^{\text{o}}$, con lo que $B = 24'38^{\text{o}}$.

Resumiendo, para nuestro triángulo tenemos $a = 19'99$ cm, $b = 10$ cm, $c = 23'86$ cm, $A = 55'62^{\text{o}}$, $B = 24'38^{\text{o}}$, $C = 100^{\text{o}}$.

2.3. Aplicaciones de la trigonometría

El estudio de situaciones de la vida real conduce muchas veces a la resolución de triángulos. Uno de los ejemplos típicos es el de la doble medición para calcular la altura de un edificio, un árbol, etc., pero también hay otros muchos. Veamos algunas aplicaciones típicas.

Ejemplo 2. (a) Un bote de motor navega durante tres horas a razón de 20 millas por hora en dirección Norte 40º Este. ¿Qué distancia hacia el Norte y qué distancia hacia el Este ha recorrido?



Puesto que el bote ha navegado durante 3 horas a 20 millas/hora, ha recorrido 60 millas. Se trata de calcular los lados a y b en el triángulo de la figura. Tenemos $A = 180º - 90º - 40º = 50º$, y por el teorema del seno:

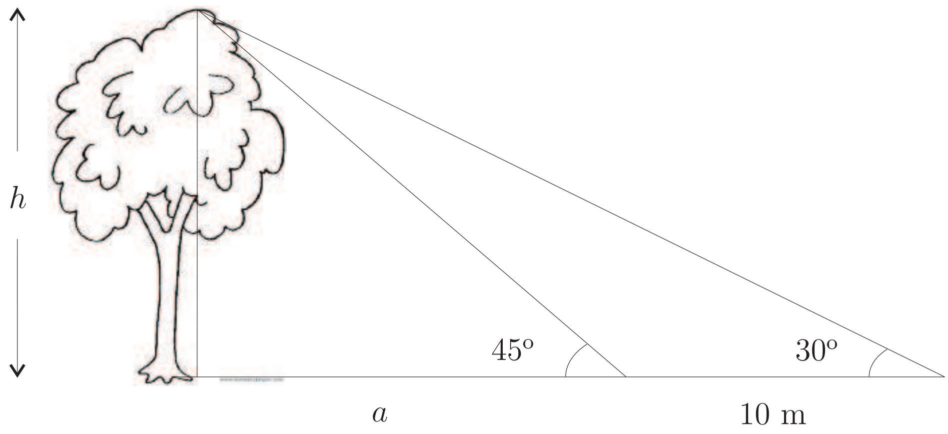
$$\frac{\operatorname{sen} 50}{a} = \frac{\operatorname{sen} 90}{60},$$

es decir, $a = 60 \operatorname{sen} 50 = 45'96$. Usando el teorema de Pitágoras tendremos $60^2 = a^2 + b^2$, de donde $b = \sqrt{60^2 - 45'96^2} = 38'57$. Por tanto el bote ha recorrido $45'96$ millas hacia el Norte y $38'57$ hacia el Este.

(b) Encontrar la altura de un árbol si se sabe que el ángulo de elevación disminuye desde 45º hasta 30º cuando nos alejamos 10 metros.

Vemos en la figura que

$$\operatorname{tg} 45 = \frac{h}{a}$$
$$\operatorname{tg} 30 = \frac{h}{a+10}.$$



Despejando a en ambas ecuaciones e igualando llegamos a que

$$\frac{h}{\operatorname{tg} 45} = \frac{h}{\operatorname{tg} 30} - 10,$$

y despejando h:

$$h = \frac{10 \operatorname{tg} 30 \operatorname{tg} 45}{\operatorname{tg} 45 - \operatorname{tg} 30} = 13'66.$$

Por tanto la altura del árbol es de $13'66$ metros.

2.4. Cálculo de longitudes, áreas y volúmenes

Empecemos recordando la definición de las figuras geométricas más usuales y las fórmulas correspondientes de cálculo de longitudes, áreas y volúmenes.

2.4.1. Figuras planas

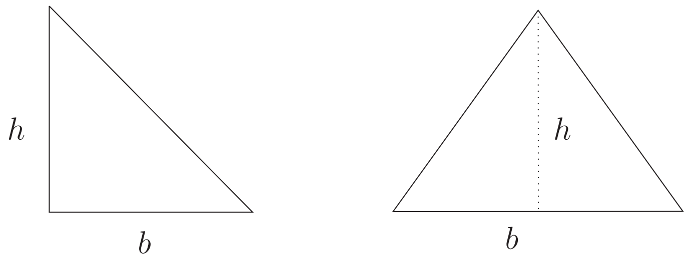
Las figuras planas que consideraremos son: el triángulo, el paralelogramo (sus casos particulares, el rectángulo y el cuadrado), el trapecio, el polígono regular de n lados y la circunferencia.

Triángulo

Un triángulo es un polígono de tres lados. Si la base tiene longitud b y la altura longitud h, su área es

$$A = \frac{bh}{2}.$$

Observemos que todo triángulo se puede descomponer en dos triángulos rectángulos mediante la altura trazada desde uno de sus vértices. Así, muchas veces podemos usar el teorema de Pitágoras para calcular la altura.



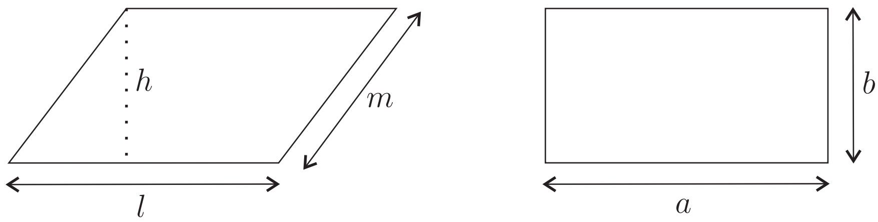
Paralelogramo

Un paralelogramo es un polígono de cuatro lados paralelos dos a dos. Si las longitudes de la base y altura son l y h, respectivamente, y P y A denotan el perímetro y el área, tendremos (véase la figura):

$$P = 2l + 2m, \qquad A = lh.$$

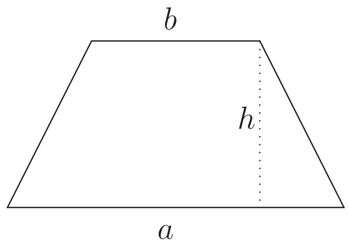
En el caso particular del rectángulo de lados a y b:

$$P = 2a + 2b, \qquad A = ab.$$



Trapecio

Un trapecio es un polígono de cuatro lados, formado por dos lados paralelos (denominados bases) y otros dos no paralelos.

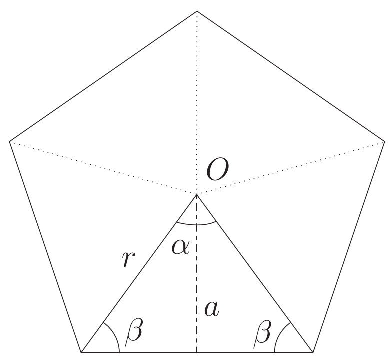


Si las bases del trapecio miden a y b y h es su altura, el área del mismo viene dada por

$$A = \frac{h}{2}(a + b).$$

Polígono regular de n lados

Un polígono es regular cuando tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales. Ejemplos de esto son el triángulo equilátero y el cuadrado. En la figura vemos un pentágono regular:



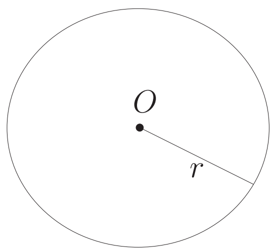
Se denomina radio del polígono r a cualquiera de los segmentos que une el centro O del mismo con uno de sus vértices. El triángulo formado por un lado y los dos radios correspondientes a los dos vértices de ese lado es siempre isósceles (un caso muy particular es el del hexágono, donde se obtienen triángulos equiláteros). El ángulo central α es de $\dfrac{2\pi}{n}$ radianes, por lo que los otros dos ángulos son de $\beta = \frac{\pi - \frac{2\pi}{n}}{2}$ radianes.

La altura, desde el centro del polígono, de cada uno de estos triángulos, recibe el nombre de *apotema* (se suele denotar por a). Si denominanos p al perímetro del polígono, el área del mismo viene dada por

$$A = \frac{p \cdot a}{2}.$$

Circunferencia y círculo

La circunferencia es el conjunto de puntos del plano que equidistan de uno dado, llamado *centro*. La distancia común de cada uno de sus puntos al centro se llama *radio*. La zona del plano comprendida en el interior de una circunferencia se llama *círculo*.



La longitud de una circunferencia de radio r y el área del círculo correspondiente vienen dados por:

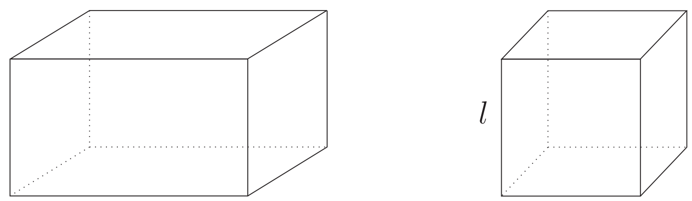
$$L = 2\pi r, \qquad A = \pi r^2.$$

2.4.2. Sólidos en el espacio

Veamos cómo calcular volúmenes de los cuerpos más habituales en el espacio: los paralelepípedos (el cubo como caso particular), el cilindro y el cono circulares rectos y la esfera.

<u>Paralelepípedo</u>

Un paralelepípedo es un sólido formado por seis caras planas paralelas dos a dos. El volumen de un paralelepípedo viene dado por el producto del área de la base por la altura. Puede tomarse como base cualquiera de sus caras y la altura será la distancia de ésta a la cara paralela.

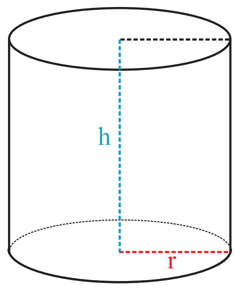


El paralelepípedo más importante es el cubo, donde todas las caras son cuadrados. Si la arista del cubo es de longitud l, tenemos para el volumen y el área:

$$V = l^3, \qquad A = 6l^2.$$

<u>Cilindro circular recto</u>

Un cilindro circular recto es el sólido generado al hacer girar un rectángulo sobre uno de sus lados. Queda caracterizado completamente al conocer el radio de la base r y la altura h.

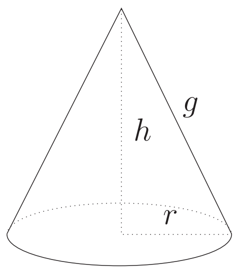


Las áreas lateral y total del cilindro y su volumen vienen dados por:

$$A_L = 2\pi rh, \qquad A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2, \qquad V = \pi r^2 h.$$

<u>Cono circular recto</u>

Un cono circular recto es el sólido que se obtiene al hacer girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos. Se llama *generatriz* a la hipotenusa del triángulo.



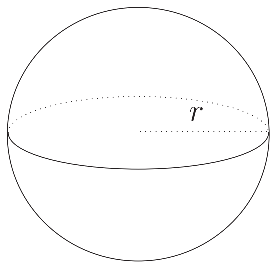
El cono queda completamente determinado si conocemos el radio de la base r y la altura h. Con estos datos, es inmediato calcular la longitud g de la generatriz. Usando el teorema de Pitágoras: $g = \sqrt{r^2 + h^2}$. Para las áreas lateral y total y el volumen del cono tenemos:

$$A_L = \pi r g, \qquad A_T = \pi r g + \pi r^2, \qquad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Observemos que el volumen de un cono circular recto es la tercera parte del cilindro circular recto de igual base y altura.

<u>Esfera</u>

Una esfera es el sólido que se obtiene al hacer girar una semicircunferencia sobre su diámetro. Queda completamente caracterizada si conocemos su radio r.



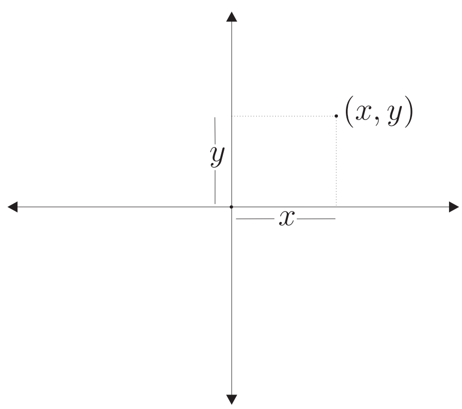
El área de la esfera y su volumen vienen dados por:

$$A = 4\pi r^2, \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

2.5. Geometría analítica

El resto del tema nos ocuparemos de la llamada geometría analítica, en primer lugar plana y luego en el espacio. Se trata de asociar unas coordenadas a cada uno de los puntos del plano o del espacio, y describir las distintas figuras geométricas en términos de estas coordenadas.

Un punto P en el plano se representa por el par (x, y), donde x e y son números reales y se llaman coordenadas del punto P. El significado de cada uno de estos números viene descrito en la siguiente figura:



2.6. Rectas en el plano

Una recta queda definida cuando conocemos uno de sus puntos y su vector director. Si estos son $P(x_0, y_0)$ y $v = (v_1, v_2)$, entonces un punto (x, y) pertenece a la recta cuando se cumple $(x, y) = (x_0, y_0) + t(v_1, v_2)$ para algún número real t, que se puede escribir como

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ésta es la llamada *ecuación paramétrica de la recta.* La presencia del parámetro t es muchas veces inconveniente, así que podemos simplificar estas expresiones eliminándolo para obtener

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2},$$

llamada *ecuación continua.* Despejando y en función de x que es la forma habitual de presentar las funciones, se puede poner

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

donde $m = \frac{v_2}{v_1}$ es la *pendiente* de la recta (se asignará el valor $m = \infty$ cuando $v_1 = 0$, es decir, cuando la recta es vertical). Esta última ecuación es la llamada ecuación *punto-pendiente* de la recta y es muy útil a la hora de resolver problemas geométricos.

Finalmente, observemos que una recta también se puede expresar en la llamada *forma general*:

$$Ax + By + C = 0.$$

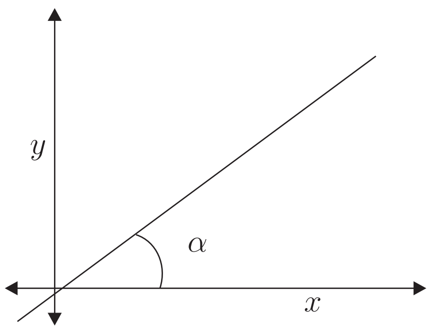
En este caso, el vector director de la recta es $(-B, A)$, pero el inconveniente es que hay infinitas ecuaciones generales.

Ejemplo 3. Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(1, 2)$ y tiene vector director $(-1, 1)$ son:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Eliminando el parámetro y despejando y en función de x, tenemos $y = -x + 3$. También podíamos haber llegado directamente a esta expresión teniendo en cuenta que la pendiente de la recta es $m = -1$ y usando la ecuación punto-pendiente.

Dada una recta en el plano, el ángulo que la recta forma con el semieje positivo de las x se llama inclinación. La tangente de este ángulo coincide con la pendiente de la recta.



Si el vector director de la recta es (v_1, v_2), tendremos que $\tan\alpha = v_2/v_1$, con lo que

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_2}{v_1}\right),$$

entendiendo que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ si $v_1 = 0$.

El concepto de pendiente es importante, pues ayuda a caracterizar el paralelismo y la perpendicularidad de rectas. Así,

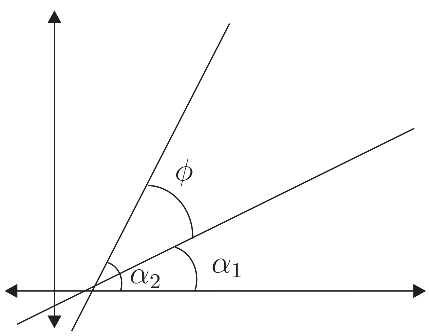
- Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente.
- Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1.

Ejemplo 4. Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $y = x - 2$ que pasa por el punto $(2, 0)$.

Puesto que la pendiente de la recta dada es $m = 1$, la pendiente de la recta perpendicular ha de ser $m' = -1$. Usando la ecuación punto-pendiente:

$$y - 0 = -1(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = 2 - x.$$

El concepto de pendiente es útil también para calcular el ángulo entre dos rectas. Para ello, convenimos en que vamos a medir el ángulo desde la recta con pendiente m_1 hasta la de pendiente m_2, en sentido contrario a las agujas del reloj:



En tal caso, el ángulo ϕ viene dado por:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

Esta fórmula se deduce teniendo en cuenta que (véase la Figura) $\phi = \alpha_2 - \alpha_1$ y usando la expresión para la tangente de una diferencia de ángulos.

Ejemplo 5. Hallar la ecuación de la recta que forma un ángulo de 45º con $y = \frac{1}{2}x$ y pasa por el punto $(1, 2)$.

Si $m_1 = \frac{1}{2}$ y $\phi = 45^{\circ}$, tendremos

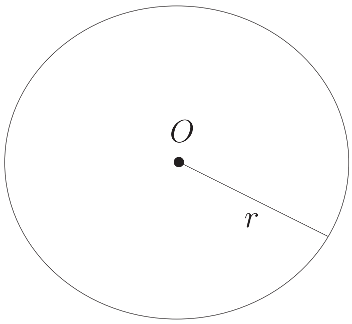
$$1 = \frac{m_2 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m_2},$$

de donde $m_2 = 3$. Por tanto, la recta pedida es $y = 3x - 1$.

2.7. La circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a uno fijo – llamado centro – es constante. Si llamamos r a esta constante (el radio de la circunferencia) y (h, k) son las coordenadas del centro, se deduce fácilmente que la ecuación de la circunferencia es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$



Desarrollando los cuadrados, esta ecuación también se puede escribir en la forma

$$x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0,$$

donde C, D y E son números reales. Recíprocamente, cualquier ecuación de esta forma representa a una circunferencia (aunque en algunos casos puede ser compleja). Para averiguar las coordenadas de su centro y radio se suelen completar cuadrados.

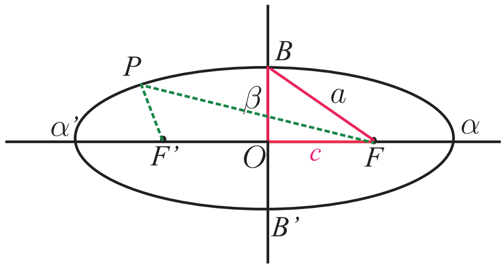
Ejemplo 6. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$, encontrar su centro y su radio.

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 - 2x - 4y - 1 = 0 \\
&x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0 \\
&x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y = 0 \\
&(x - 1)^2 + y^2 - 2y \cdot 2 + 2^2 - 4 = 0 \\
&(x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 4 = 0 \\
&(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4.
\end{aligned}$$

Por tanto el centro es el punto $(1, 2)$ y el radio es 2.

2.8. La elipse

La elipse se define como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Los puntos fijos se llaman *focos* de la elipse.



Cuando los focos son los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ y la suma constante $2a$ (con $a > c$), la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $b^2 = a^2 - c^2$.

El centro de la elipse es el punto medio entre los dos focos, en este caso el $(0, 0)$. La excentricidad se define como el cociente

$$e = \frac{\text{distancia focal}}{\text{eje mayor}} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

La excentricidad de una elipse es siempre menor que 1 y mide el achatamiento de ésta.

Ejemplo 7. Hallar el centro, focos y excentricidad de la elipse

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Se tiene que $a = 6$, $b = 3$, con lo que $c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 9 = 27$, es decir, $c = \sqrt{27}$. Por tanto, el centro es el punto $(0, 0)$, los focos son $(\pm\sqrt{27}, 0)$ y la excentricidad

$$e = \frac{\sqrt{27}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

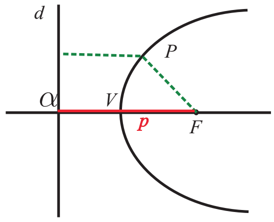
Cuando los focos están en el eje OY y son $(0, c)$, $(0, -c)$, la ecuación de la elipse es la misma, sólo que ahora $b > a$ y por tanto c se calcula mediante $c^2 = b^2 - a^2$. Finalmente, cuando el centro de la elipse es el punto (h, k), su ecuación quedaría

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1.$$

La expresión de los focos cambiaría de acuerdo con esto.

2.9. La parábola

Se llama parábola al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno dado, llamado foco, y de una recta dada, llamada directriz.



Cuando el foco es el punto $(\frac{p}{2}, 0)$ con $p > 0$ y la directriz $x = -\frac{p}{2}$, la ecuación de la parábola es

$$y^2 = 2px.$$

El valor p se llama *parámetro* de la parábola y mide la "apertura" de la misma. Al punto $(0, 0)$ se le llama *vértice* de la parábola y a la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco y el vértice se la llama eje de la parábola. La distancia entre el vértice y la directriz (que coincide con la distancia entre el vértice y el foco) se llama distancia focal y es igual a $\frac{p}{2}$.

Observemos que, cuando se permite que $p < 0$, también obtenemos una parábola con foco en $(\frac{p}{2}, 0)$ y directriz $x = -\frac{p}{2}$, sólo que ahora el foco está a la izquierda del eje OY y la directriz a la derecha. La parábola se abre hacia la izquierda.

Cuando la directriz es horizontal en lugar de vertical, tenemos la ecuación $x^2 = 2py$, donde ahora el foco es $(0, \frac{p}{2})$ y la directriz $y = -\frac{p}{2}$. Y en general, si el vértice es un punto (h, k) distinto del origen, la ecuación de la parábola se transforma en

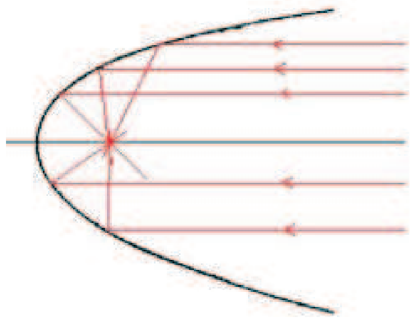
$$(y - k)^2 = 2p(x - h)$$

o en

$$(x - h)^2 = 2p(y - k),$$

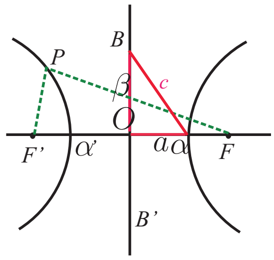
dependiendo de si la directriz es vertical u horizontal, respectivamente.

Observación 1. La parábola tiene la siguiente propiedad importante: las rectas paralelas al eje que se "reflejan" en la parábola pasan todas por el foco.



2.10. La hipérbola

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (llamados *focos*) es constante.



Como en los casos anteriores, tomemos la situación sencilla en que los focos son $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ y supongamos que la diferencia de distancias es $2a$ $(a < c)$.

La ecuación de la hipérbola es entonces

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$.

La hipérbola tiene intersección con el eje OX: los puntos $(\pm a, 0)$, pero no con el eje OY. Por ello, el eje OX se llama eje real y el OY eje imaginario.

El centro de la hipérbola es el punto medio entre los focos, en este caso el $(0, 0)$, y su excentricidad se define como la de la elipse:

$$e = \frac{\text{distancia focal}}{\text{eje mayor}} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},$$

sólo que ahora $e > 1$.

Además, en el estudio de la hipérbola aparece un elemento nuevo: las asíntotas. La hipérbola tiene dos asíntotas, que vienen dadas por

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Cuando el eje real de la hipérbola es el eje OY, la ecuación es

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

En este caso, la excentricidad viene dada por $e = c/b$, pero las asíntotas son las mismas.

Cuando el centro de la hipérbola no es el punto $(0, 0)$, sino el (h, k), su ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

ó

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

dependiendo de que el eje real sea horizontal o vertical. En ambos casos, las asíntotas son

$$y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h).$$

2.11. Cónicas generales

Una cónica es una curva en el plano definida por una ecuación del tipo

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \tag{1}$$

donde a, b, c, d, e, f son coeficientes reales. Esta expresión se puede escribir en forma matricial como

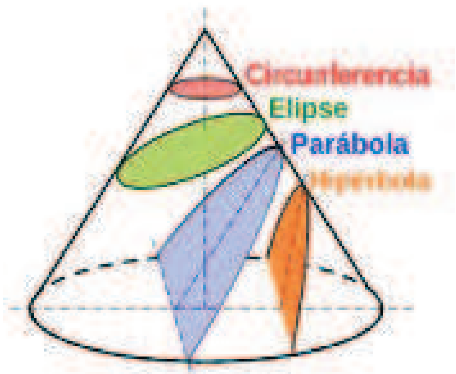
$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

y por eso a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

se la llama *matriz de la cónica.*

Las cónicas reciben este nombre porque se pueden obtener como secciones de un cono mediante un plano:



Se llaman *invariantes* de la cónica a:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \qquad \text{y} \qquad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$$

y en términos de ellos podemos clasificar las cónicas.

Cuando $\Delta = 0$, la cónica se llama degenerada (típicamente se trata de un par de rectas) y no estamos interesados en esta situación. Si $\Delta \neq 0$, la cónica se llama ordinaria y en tal caso:

$$\begin{cases} \delta > 0 & \Rightarrow \quad \text{elipse} \\ \delta = 0 & \Rightarrow \quad \text{parábola} \\ \delta < 0 & \Rightarrow \quad \text{hipérbola.} \end{cases}$$

Ejemplo 8. Dada la cónica $-2x^2 + y^2 + xy + 2x + 2y + 1 = 0$, clasificarla y hallar su centro si es posible.

La matriz de la cónica es

$$A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con lo que sus invariantes son $\Delta = -\frac{1}{4} \neq 0$, $\delta = -\frac{9}{4} < 0$. Se trata por tanto de una hipérbola.