Tema 4
Construcciones Geométricas Básicas

En este tema repasaremos algunas de las construcciones geométricas básicas. Asumiremos, de momento, que trabajamos con figuras planas (bidimensionales) aunque muchos de los conceptos pueden aplicarse o extrapolarse a tres dimensiones.

4.1 – Operaciones con Segmentos y Ángulos

Antes de estudiar formas geométricas cerradas como las circunferencias y los polígonos, vamos a revisar algunos conceptos útiles sobre segmentos y ángulos.

4.1.1 – Teoremas de Tales

4.1.1.1 – Primer Teorema de Tales

El enunciado del primer teorema de Tales es el siguiente:

Si dos rectas concurrentes, r y s, son cortadas por un haz de rectas paralelas, los segmentos resultantes sobre la recta r son proporcionales a los segmentos determinados sobre la recta s.

Matemáticamente:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

Es decir, los segmentos resultantes son directamente proporcionales entre sí.

Otro enunciado equivalente de este teorema es el siguiente:

Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.

El primer teorema de Tales tiene algunas aplicaciones geométricas interesantes. Una de ellas es que nos permite dividir en n partes iguales cualquier segmento, de forma geométrica (no analítica) y de manera completamente exacta.

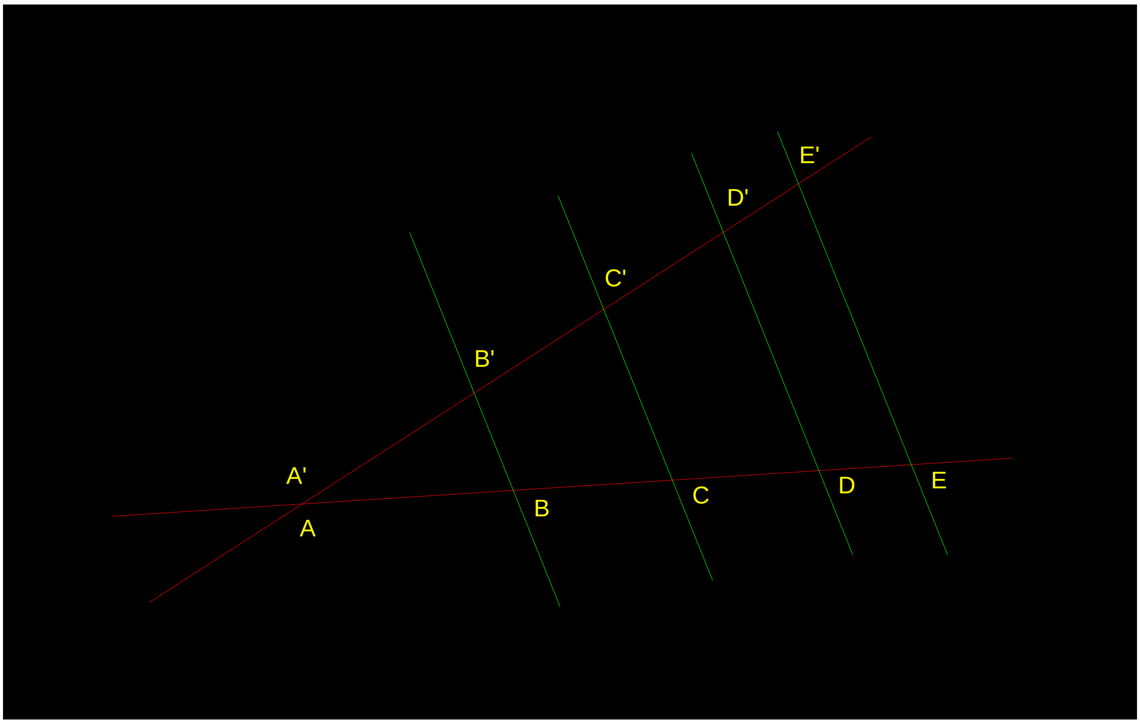

Figura 4.1 – Primer teorema de Tales.

Por ejemplo, dado un segmento AB que quisiéramos subdividir en 5 partes iguales (por tanto n = 5 en este caso), el procedimiento para poder realizar este proceso de forma geométrica sería el siguiente:

Dibujemos una recta oblicua al segmento AB, que parta del extremo A con un ángulo cualquiera con respecto al segmento (lógicamente diferente de 0°). Tomando una distancia cualquiera fija, y partiendo de A, tracemos sobre esta recta segmentos contiguos (A1, 12, 23, 34, 45) hasta contar 5 (podemos hacer esto realizando arcos sucesivos de un mismo radio). Trazamos a continuación un segmento que una el final del último segmento con el extremo B. Trazando paralelas a este segmento (5B) que pasen por puntos 1, 2, 3 y 4, conoceremos los cortes sobre AB que subdividen AB en 5 partes iguales.

El procedimiento, aquí ejemplificado para n = 5, es generalizable a cualquier número de divisiones. Además, no importa ni el ángulo que escojamos, ni la distancia que trasportemos sobre la recta oblicua (siempre y cuando tengamos espacio suficiente para realizar este proceso).

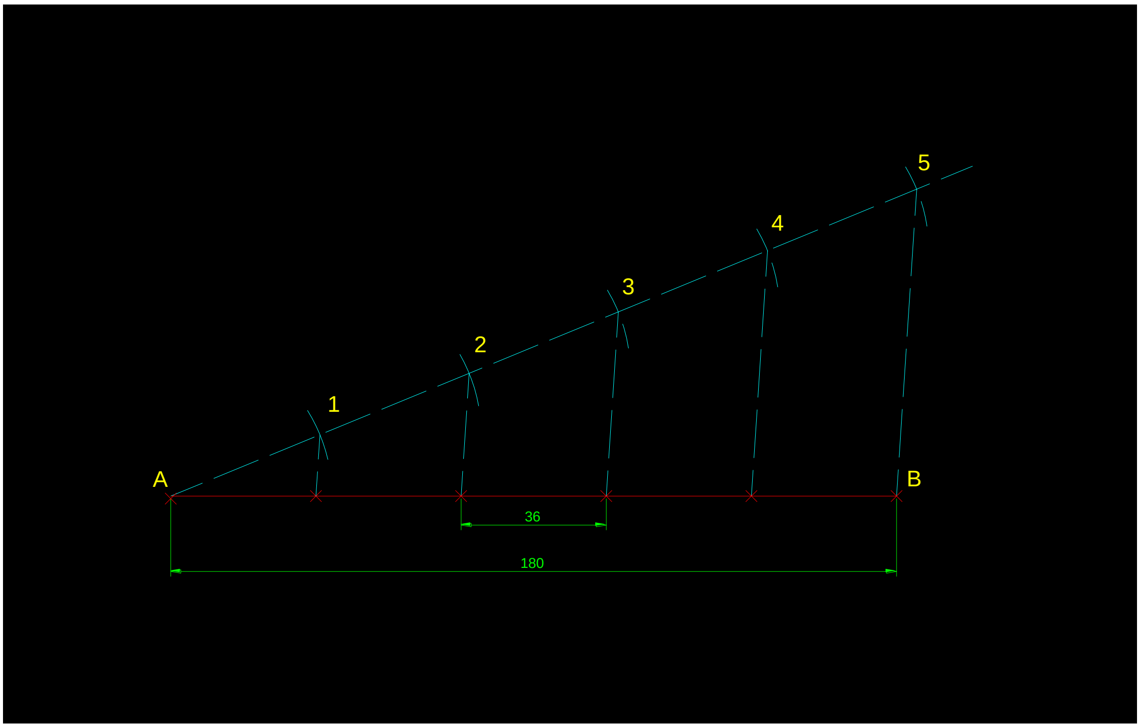

Figura 4.2 – Aplicación del primer teorema de Tales para dividir segmentos.

4.1.1.2 - Segundo Teorema de Tales

El enunciado del segundo teorema de Tales es el siguiente:

La circunferencia que tiene por diámetro la hipotenusa de un triángulo rectángulo pasa por el vértice del ángulo recto.

Otro enunciado alternativo es:

Sea C un punto de la circunferencia de diámetro AB, distinto de A y de B. Entonces el triángulo ABC, es un triángulo rectángulo.

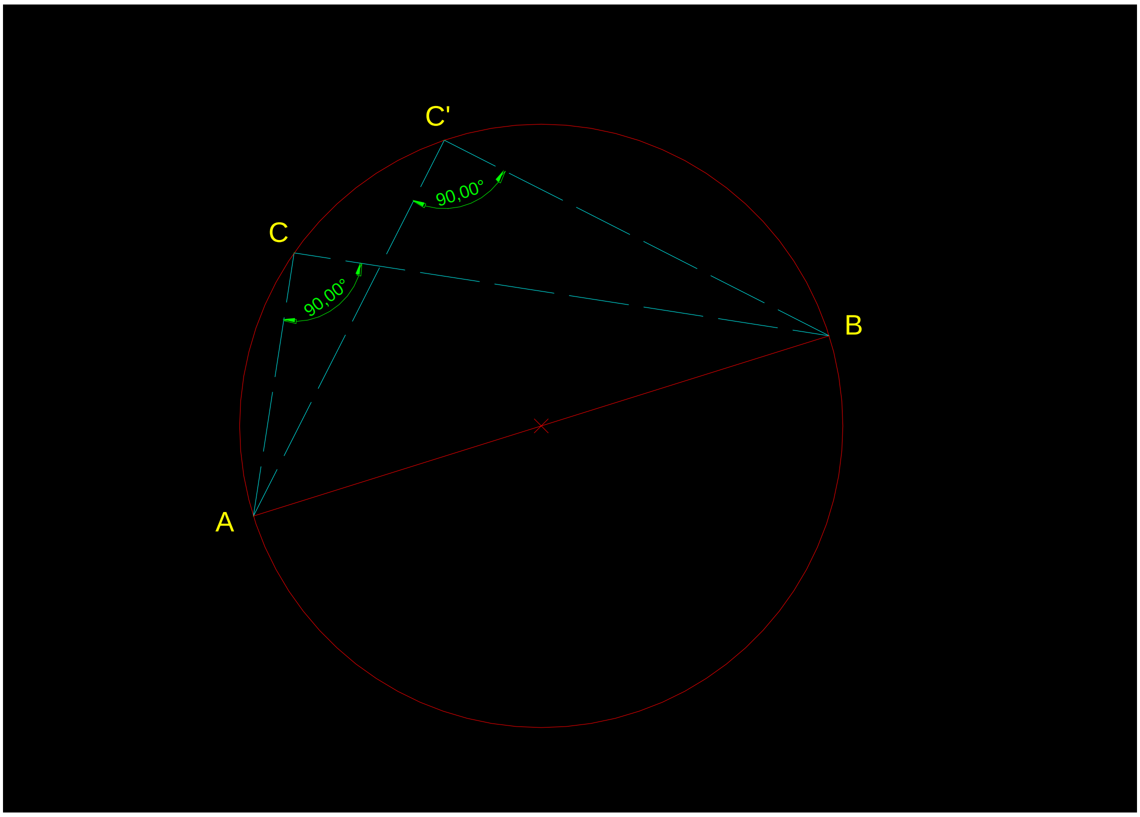

Figura 4.3 – Segundo teorema de Tales.

El segundo teorema de Tales relaciona, por tanto, el triángulo inscrito en una circunferencia y sus ángulos. Otra manera de verlo es, que si cogemos un diámetro y un punto cualquiera de la circunferencia y formamos con ello un triángulo, cojamos el punto que cojamos siempre obtenemos un triángulo rectángulo (el vértice A define un ángulo de 90°) y el ángulo de B a C siempre es el doble (180°)).

4.1.2 – Cuarta, Tercera y Media Proporcional

4.1.2.1 - Cuarta Proporcional

Dados tres segmentos a, b y c, se denomina **cuarta proporcional** a un cuarto segmento d, si éste cumple que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

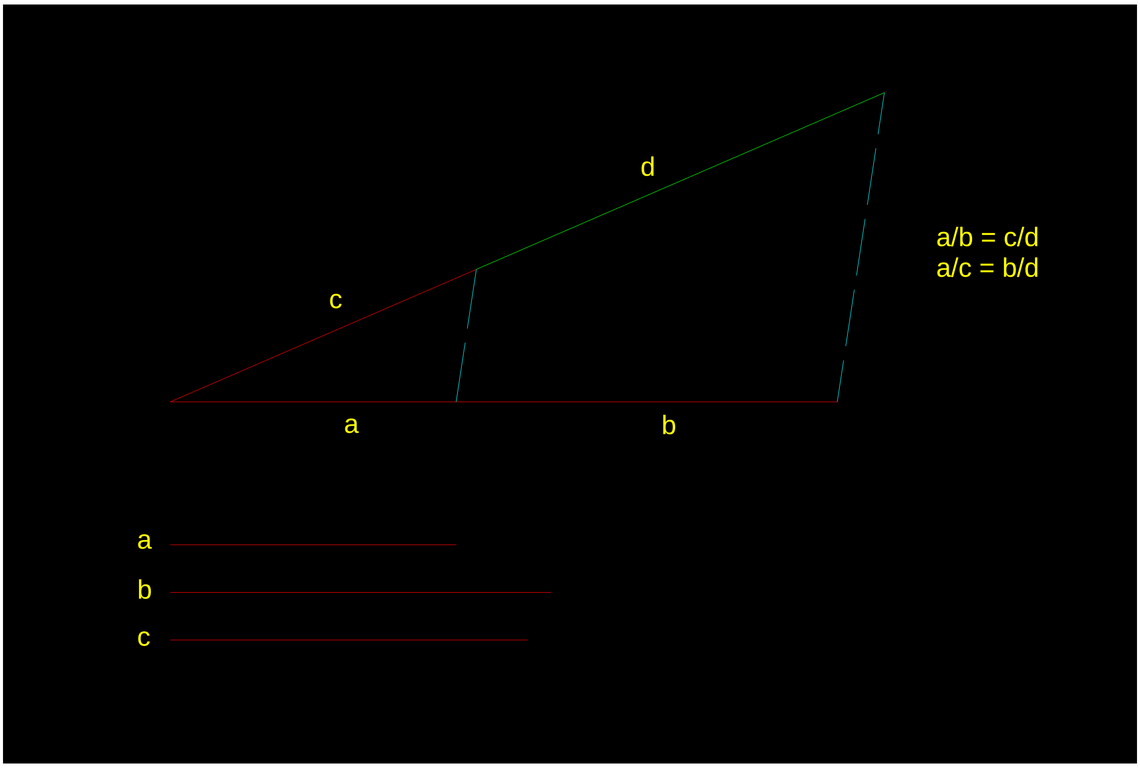

Figura 4.4 – Construcción geométrica de la cuarta proporcional.

4.1.2.2 - Tercera Proporcional

De similar modo, dados dos segmentos a y b, se denomina **tercera proporcional** a un tercer segmento c, si este cumple que:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

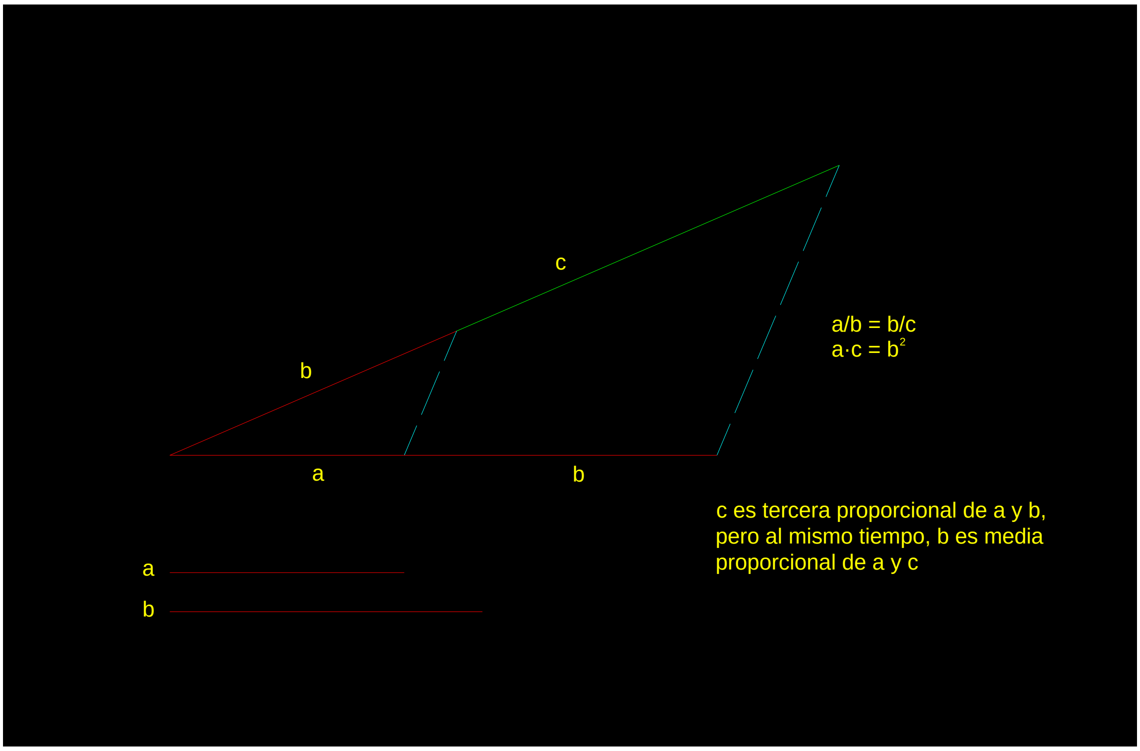

Figura 4.5 – Construcción geométrica de la tercera proporcional.

4.1.2.3 - Media Proporcional

Si intercambiamos los términos b y c, y tomamos esta expresión de esta manera:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$$

entonces tenemos:

$$ab = c^2$$

Dados los segmentos a y b, se denomina **media proporcional** al segmento c que cumpla la expresión anterior.

Podemos comprobar fácilmente manipulando algebraicamente la expresión que, si c es media proporcional entre a y b, ello implica que b será tercera proporcional de a y c.

La media proporcional se puede construir de manera geométrica, realizando el siguiente procedimiento: se colocan los segmentos a y b uno a continuación del otro. Se busca el punto medio del segmento (a + b) y se traza una circunferencia que tenga precisamente por diámetro (a + b). Trazando ahora la perpendicular por la unión entre a y b se obtiene el punto de corte con la circunferencia. Este segmento es c.

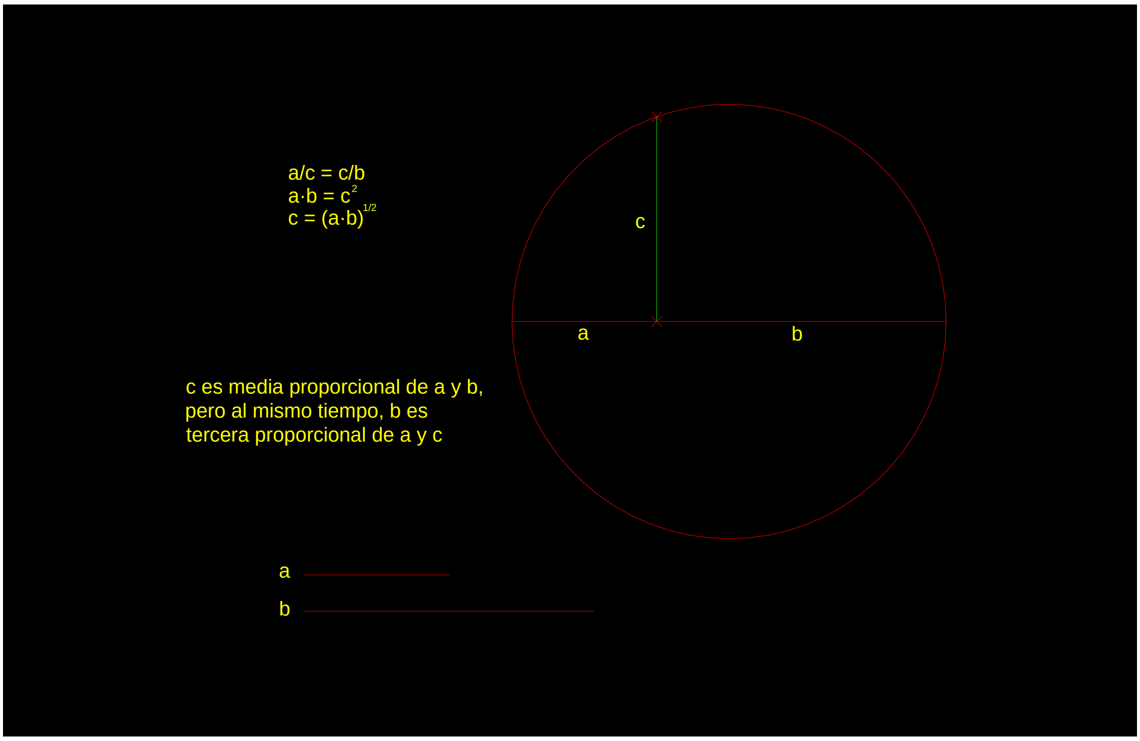

Figura 4.6 – Construcción geométrica de la media proporcional.

4.1.2.4 - Cálculo Geométrico de la Raíz Cuadrada

Dado que

$$ab = c^2$$

es evidente que se cumple:

$$c = \sqrt{ab}$$

Por tanto, si fijamos b = 1, obtenemos la expresión:

$$c = \sqrt{a}$$

Con lo que, si repetimos el procedimiento de construcción geométrica, fijando b = 1 (en realidad también podríamos fijar a = 1) podemos calcular gráficamente la raíz cuadrada de un número.

4.1.3 – Construcción de Mediatrices y Bisectrices

4.1.3.1 - Mediatriz

La construcción de la **mediatriz** de un segmento AB es relativamente sencilla. Para ello, se debe trazar primero un arco con centro en A y radio arbitrario pero mayor que la mitad de la longitud del segmento. Después, trazaremos otro arco con centro en B y el mismo radio que el anterior. Ambos arcos deben cruzarse en un punto M (si los hemos trazado al mismo lado del segmento). Repitiendo el proceso pero trazando arcos al lado contrario del segmento, obtenemos el punto N. Uniendo los puntos M y N obtendremos la mediatriz del segmento AB.

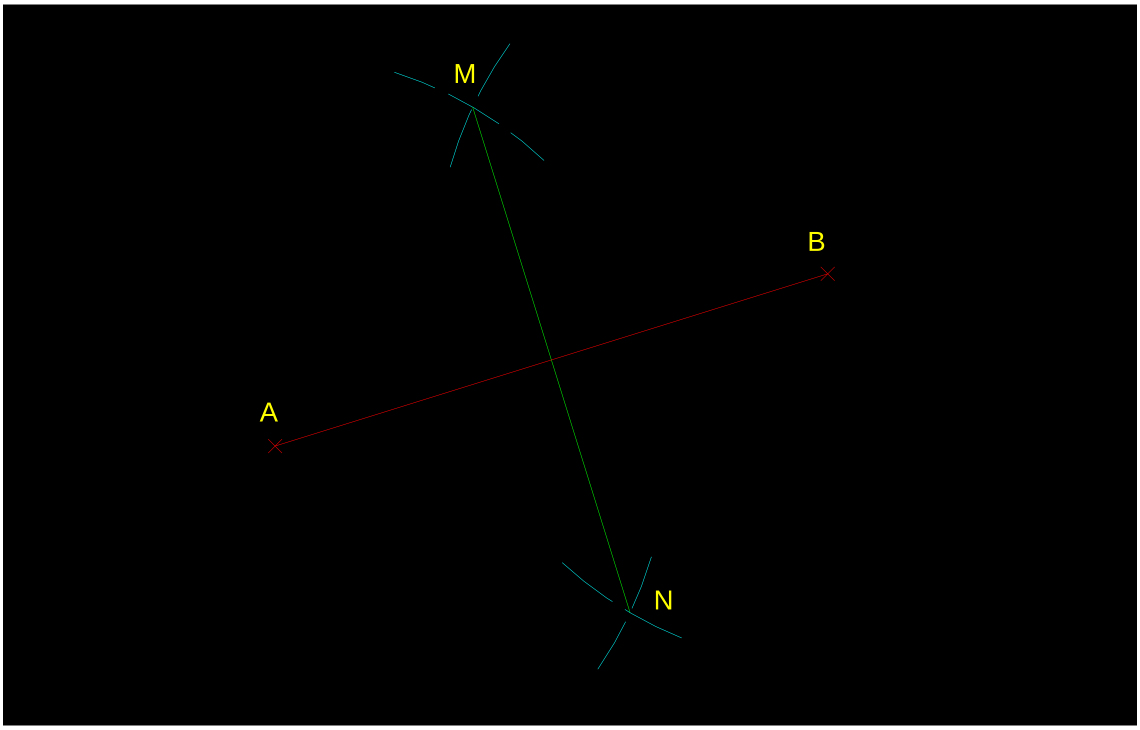

Figura 4.7 – Construcción geométrica de la mediatriz de un segmento.

4.1.3.2 -Bisectriz

La construcción de la **bisectriz** de un ángulo con vértice se realiza también por medio de intersecciones de arcos. Si el vértice del ángulo es A, trazaremos una circunferencia de radio arbitrario con centro en A. Dicha circunferencia cortará a los lados del ángulo en los puntos M y N. Ahora, debemos trazar sendos arcos, con centro en M y N y de radio arbitrario (pero igual en ambos casos). Ambos arcos se cruzarán en un punto O. Uniendo O y A obtendremos la bisectriz.

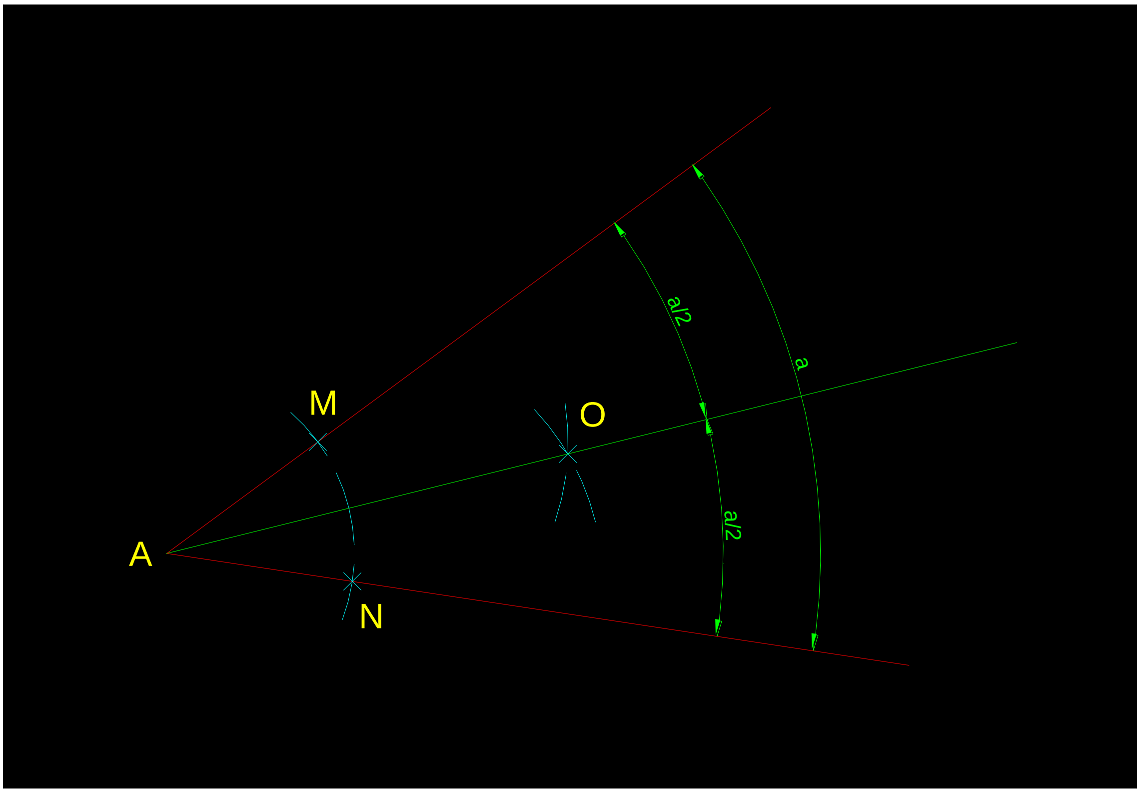

Figura 4.8 – Construcción geométrica de la bisectriz de un ángulo.

4.1.4 – Construcción de Perpendiculares

A continuación presentamos métodos geométricos para construir **perpendiculares a un segmento**.

Se presentan dos casos: que queramos construir una perpendicular a un segmento AB que pase por un **punto** P (conocido) que es **exterior al segmento**, o que queramos construir una perpendicular a un segmento AB que pase por un **punto** P (conocido) **que pertenece al segmento**.

En ambos casos, la construcción se realiza dibujando un arco de circunferencia desde el punto P. Los puntos de corte de este arco con el segmento AB determinarán dos puntos

M y N, a partir de los cuales, calculando la mediatriz de MN, podemos obtener la perpendicular que buscamos.

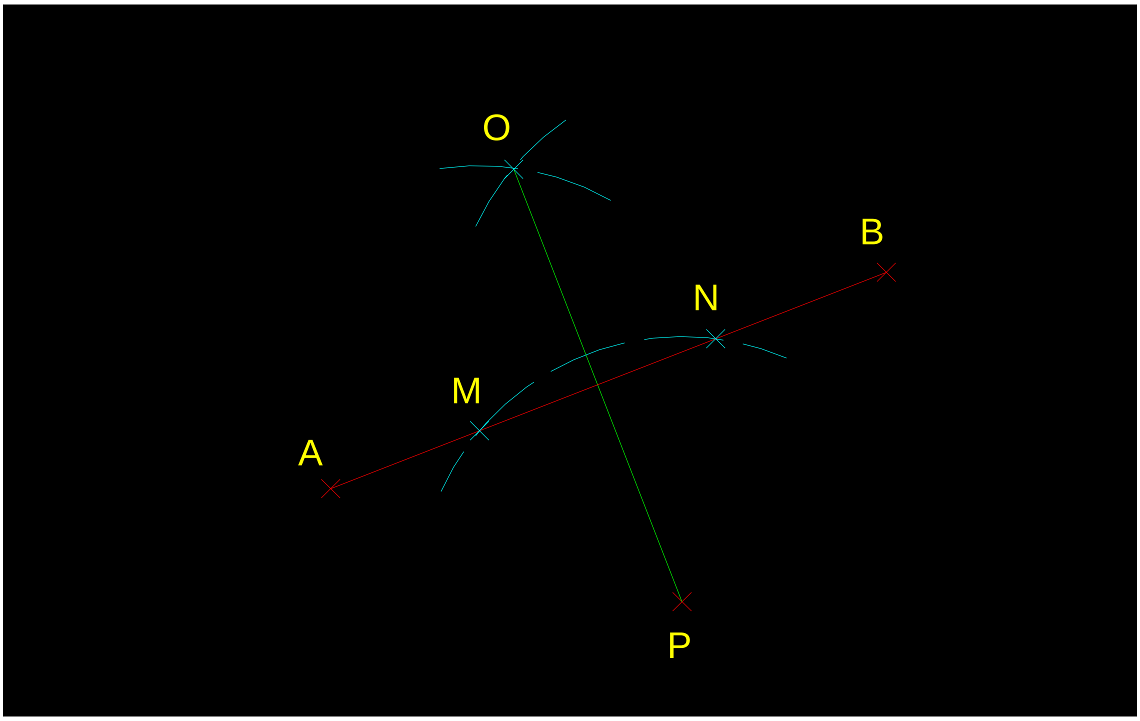

Figura 4.9 – Construcción geométrica de la perpendicular a un segmento que pasa por un punto exterior.

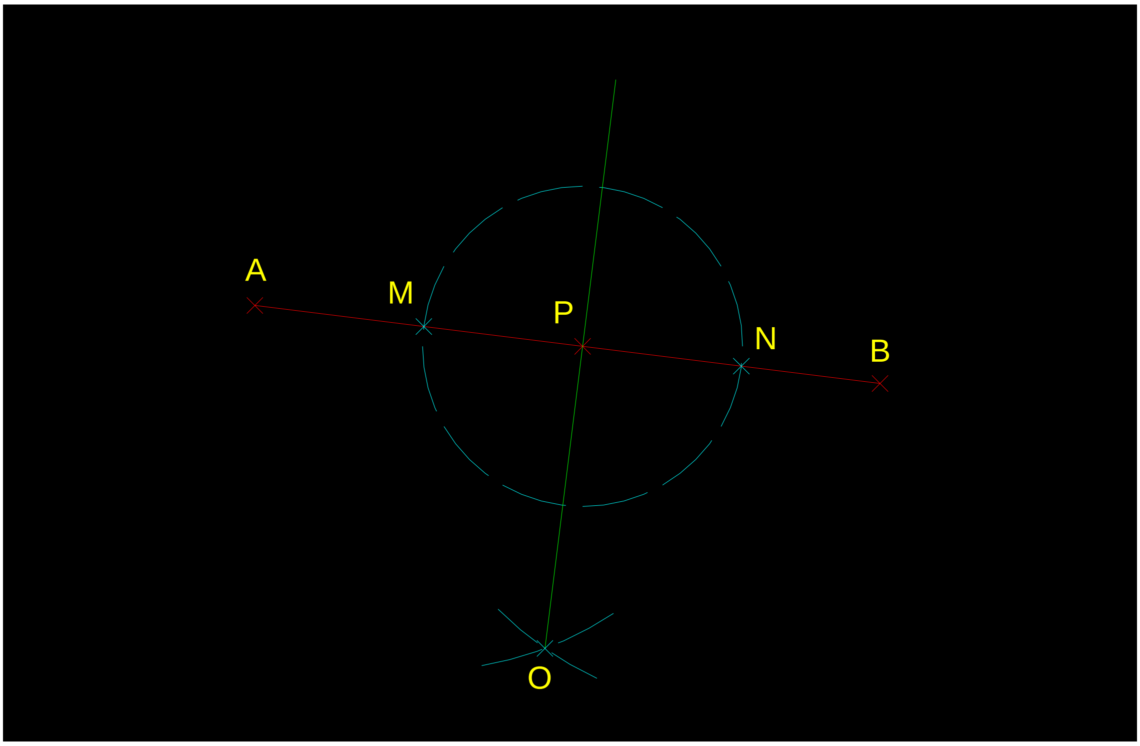

Figura 4.10 – Construcción geométrica de la perpendicular a un segmento

que pasa por un punto del propio segmento.

4.2 – Circunferencia y Arcos

La circunferencia es una de las formas geométricas más importantes. Estudiada desde la antigüedad, se define como una curva plana y cerrada donde todos sus puntos están a la misma distancia de otro punto denominado centro.

4.2.1 – Definiciones

4.2.1.1 – Elementos

En (o relacionados con) la circunferencia podemos encontrar los siguientes elementos:

Centro: es el punto que define la circunferencia, ya que es el punto del que equidistan los puntos que forman la circunferencia.

Cuerda: es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia (por ejemplo D y E).

Radio: es el segmento que une el centro (O) de la circunferencia y un punto cualquiera de ella (OA).

Diámetro: son las cuerdas de mayor dimensión posible. Corresponde con todos aquellos segmentos que pasan por el centro de la circunferencia y la cortan en dos puntos (BC). Por ello, el diámetro tiene una longitud igual al doble de la del radio.

Arco: es el fragmento de circunferencia comprendido entre dos puntos de la misma; por ejemplo, la distancia FG (pero sobre la circunferencia, no en línea recta).

Flecha: es el segmento de la mediatriz de una cuerda que queda entre la circunferencia y la cuerda (FG).

Recta secante: es la recta que corta a la circunferencia en dos puntos (S y R)

Recta tangente: es la recta que corta a la circunferencia en un solo punto (T), llamado punto de tangencia. Es el caso límite de la recta secante cuando ambos puntos (S y R) coinciden.

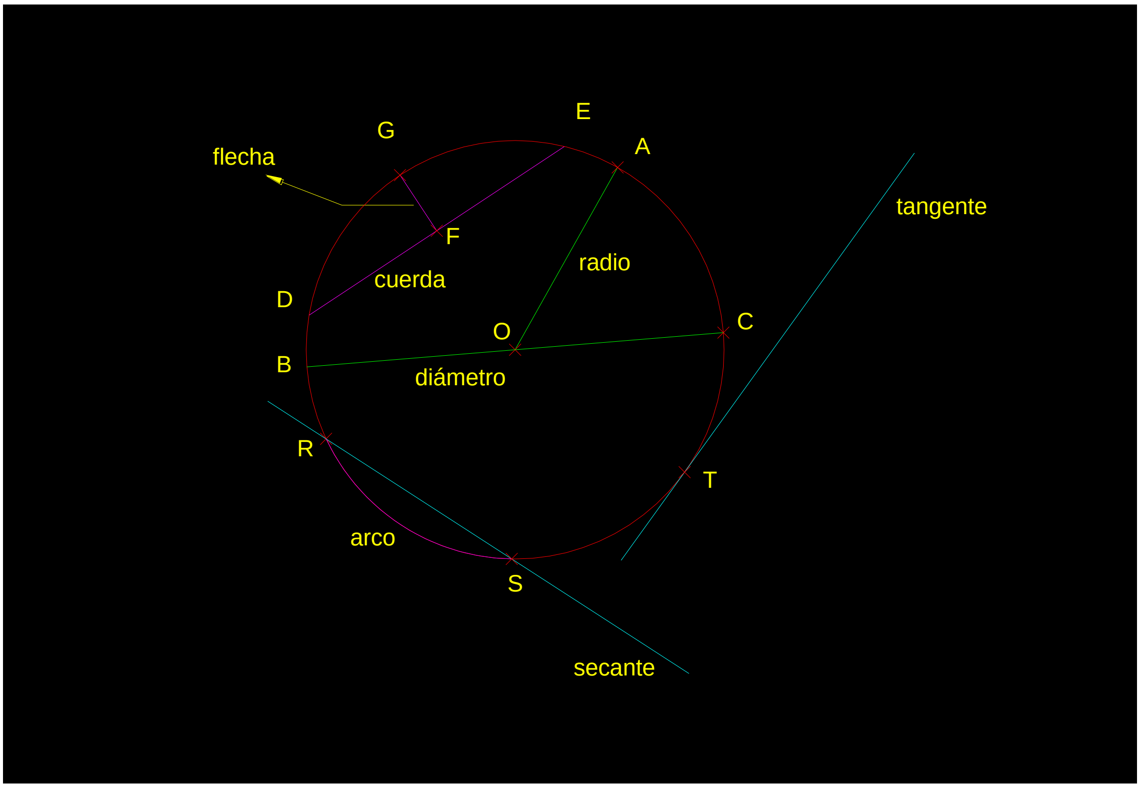

Figura 4.11 – Elementos de una circunferencia.

4.2.1.2 – Medidas y Superficies

La **longitud de una circunferencia** es:

$$l = 2\pi r$$

donde r es la longitud del radio.

De hecho, π (el número pi), es por definición, el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro:

$$\pi = \frac{l}{d} = \frac{l}{2r}$$

donde d es la longitud del diámetro.

La circunferencia, además, define una serie de **superficies**, según el área que encierre la misma o algunos de sus elementos. Las más importantes son:

Círculo: es la superficie plana limitada por una circunferencia. A veces se habla de círculo y circunferencia como sinónimos, aunque estrictamente no lo son. El círculo es el área encerrada por la curva circunferencia.

Sector circular: es la superficie comprendida entre dos radios y el arco que pasa por sus extremos.

Segmento circular: es la superficie comprendida entre un arco y su cuerda. Si en lugar de una cuerda, utilizamos un diámetro, a la superficie que se forma se la denomina **semicírculo**.

Zona circular: es la parte del círculo comprendida entre dos cuerdas paralelas y los arcos comprendidos entre ellas.

Corona circular: es la superficie limitada entre la circunferencia y otra concéntrica.

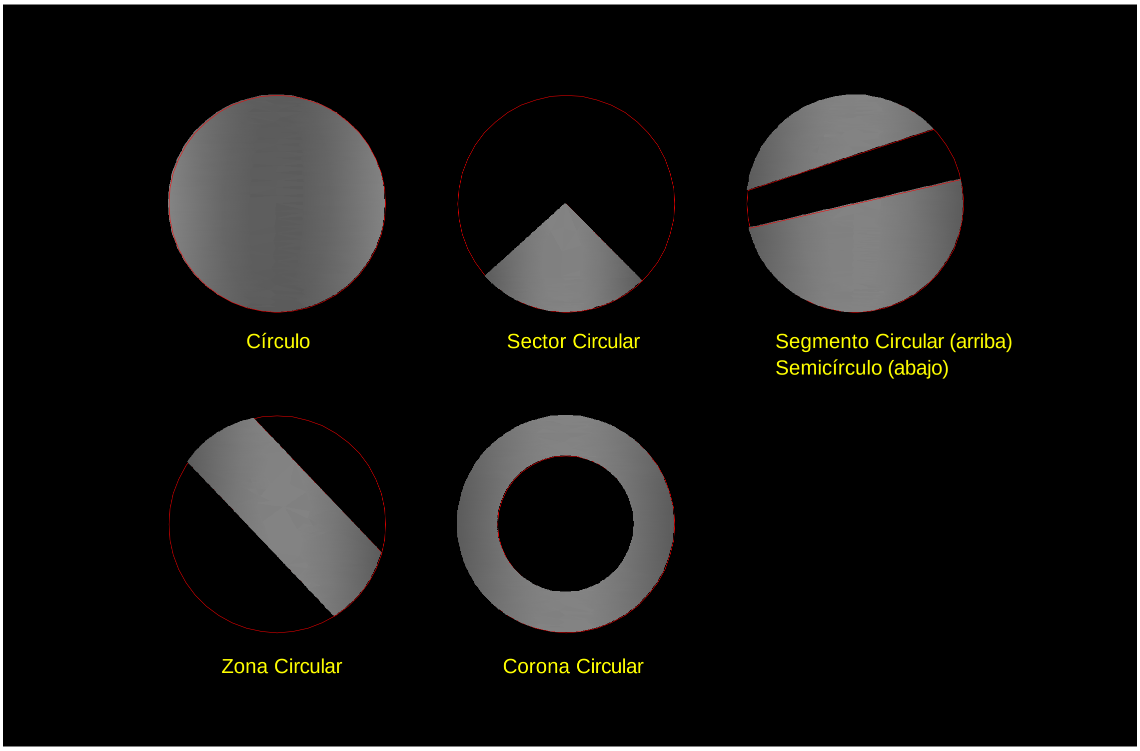

Figura 4.12 – Superficies en una circunferencia.

4.2.2 – Ángulos con Respecto a la Circunferencia

Podemos encontrar distintos tipos de ángulos en una circunferencia en función de la posición del vértice y sus lados con respecto a la circunferencia.

Ángulo central: es el ángulo tal que su vértice está situado en el centro de la circunferencia y sus lados son radios de la misma.

Es el ángulo más importante, ya que, como vamos a ver a continuación, el resto de ángulos se pueden calcular en base a uno o varios de este tipo de ángulos.

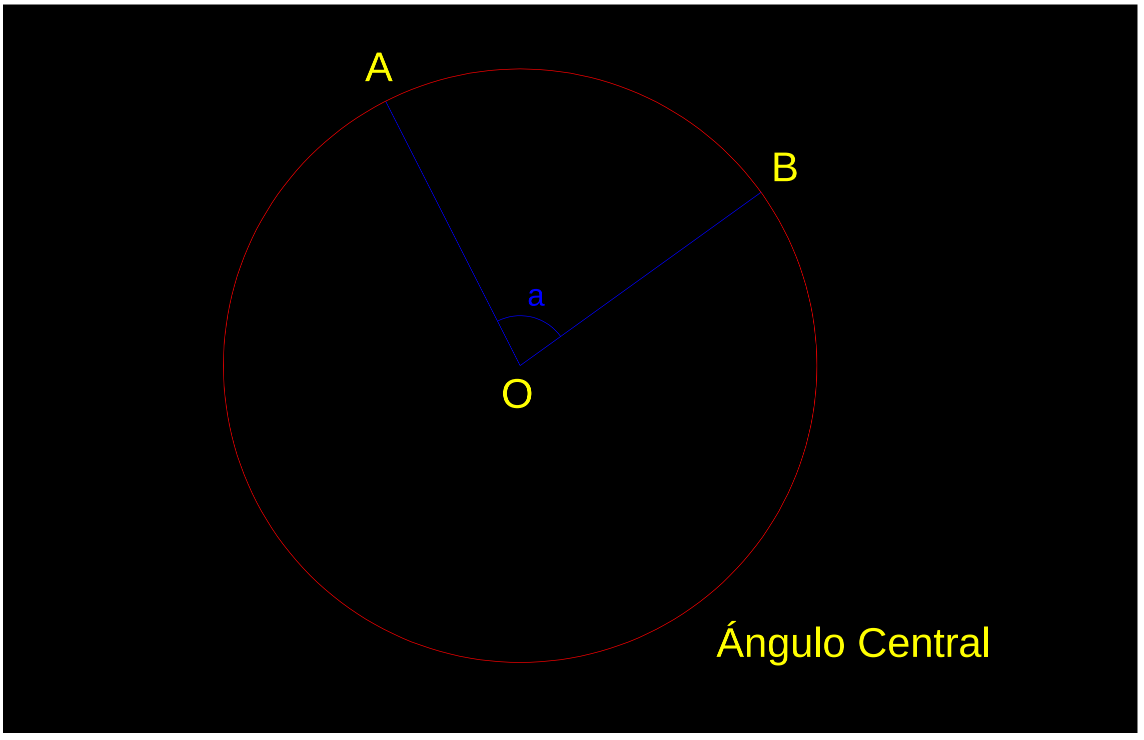

Figura 4.13 – Ángulo central de una circunferencia.

Ángulo inscrito: es el ángulo convexo cuyo vértice es un punto de la circunferencia y cuyos lados son interiores (y por tanto secantes) a ésta. Su valor es la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.

En la figura, el ángulo inscrito es el ángulo $\widehat{APB}$ (los segmentos AP y PB son interiores a la circunferencia y el vértice P pertenece a la circunferencia), y el ángulo central que abarca el mismo arco que $\widehat{APB}$ es el ángulo $\widehat{AOB}$.

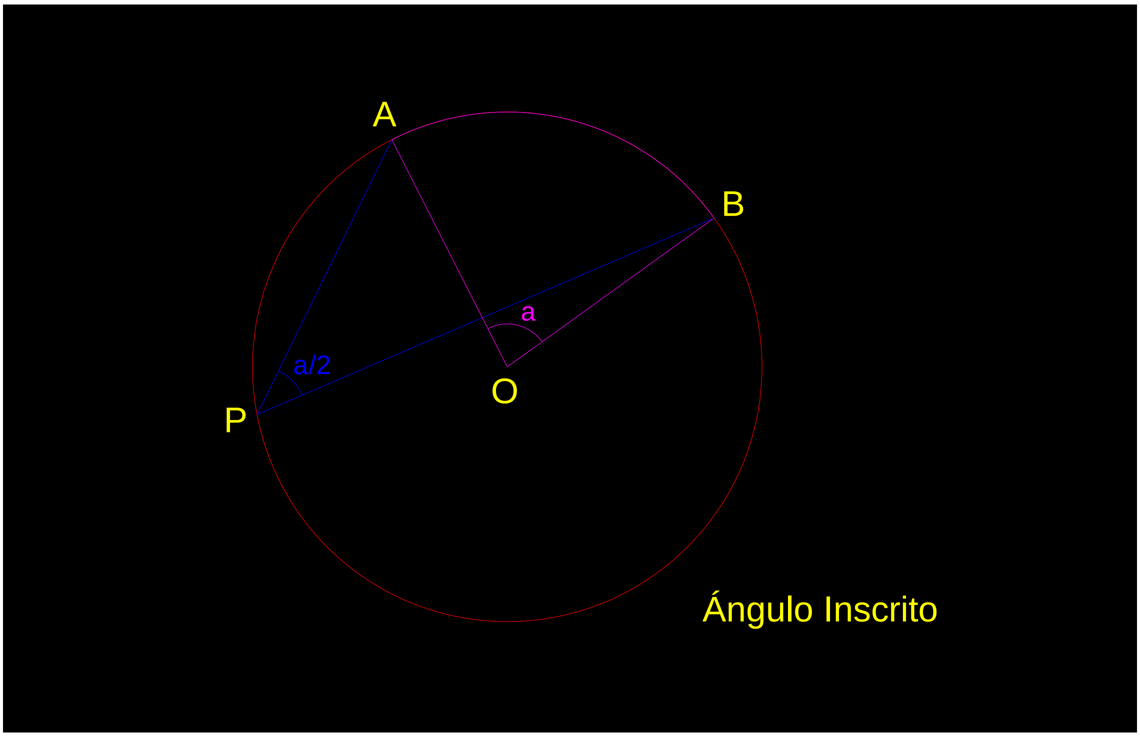

Figura 4.14 – Ángulo inscrito en una circunferencia.

Ángulo semi-inscrito: es el ángulo en el que uno de sus lados es tangente a la circunferencia. Corresponde con el caso límite de un ángulo inscrito (cuando el punto A y el P coinciden en un mismo punto); por tanto, su valor es igualmente la mitad del ángulo central correspondiente al mismo arco.

En la figura, el ángulo semi-inscrito está formado por el segmento tangente y el segmento AB. El ángulo central que abarca el mismo arco es el ángulo $\widehat{AOB}$.

Ángulo interior: es el ángulo cuyo vértice está situado en el interior de la circunferencia (lógicamente, exceptuando el centro de la misma, ya que en este caso se llama ángulo central).

El valor de este ángulo es igual al de la semisuma de los arcos centrales interceptados por él, y por su opuesto por el vértice.

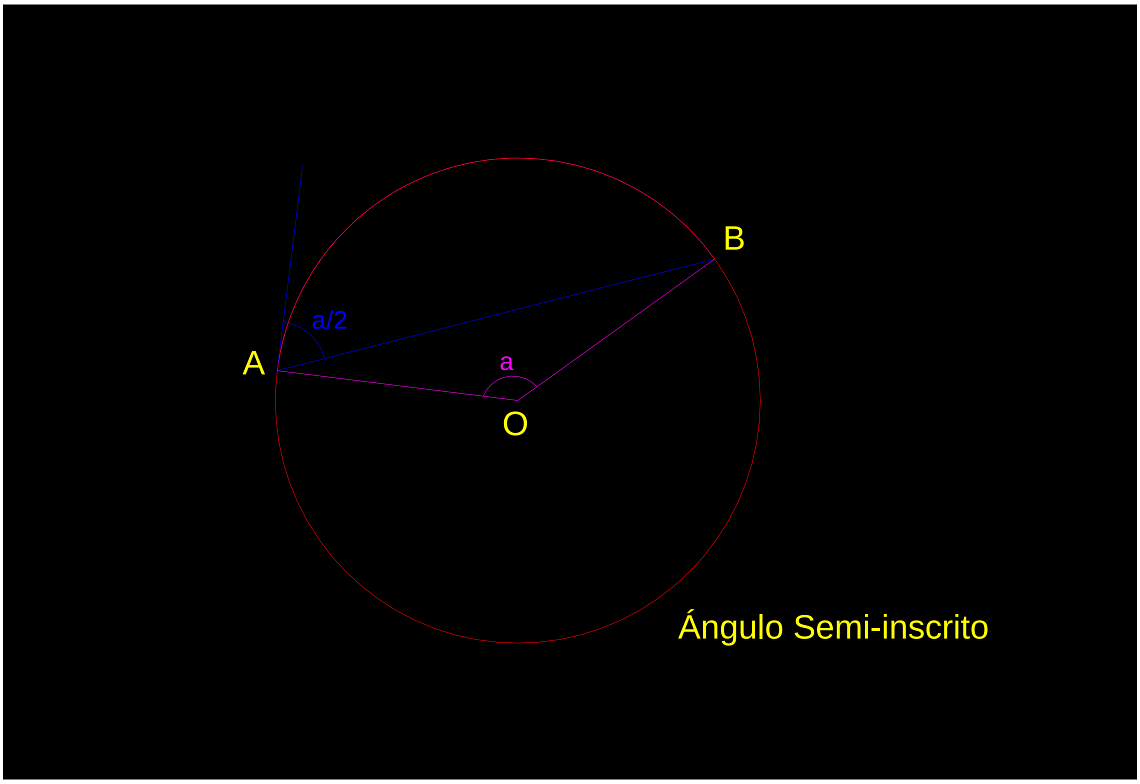

Figura 4.15 – Ángulo semi-inscrito en una circunferencia.

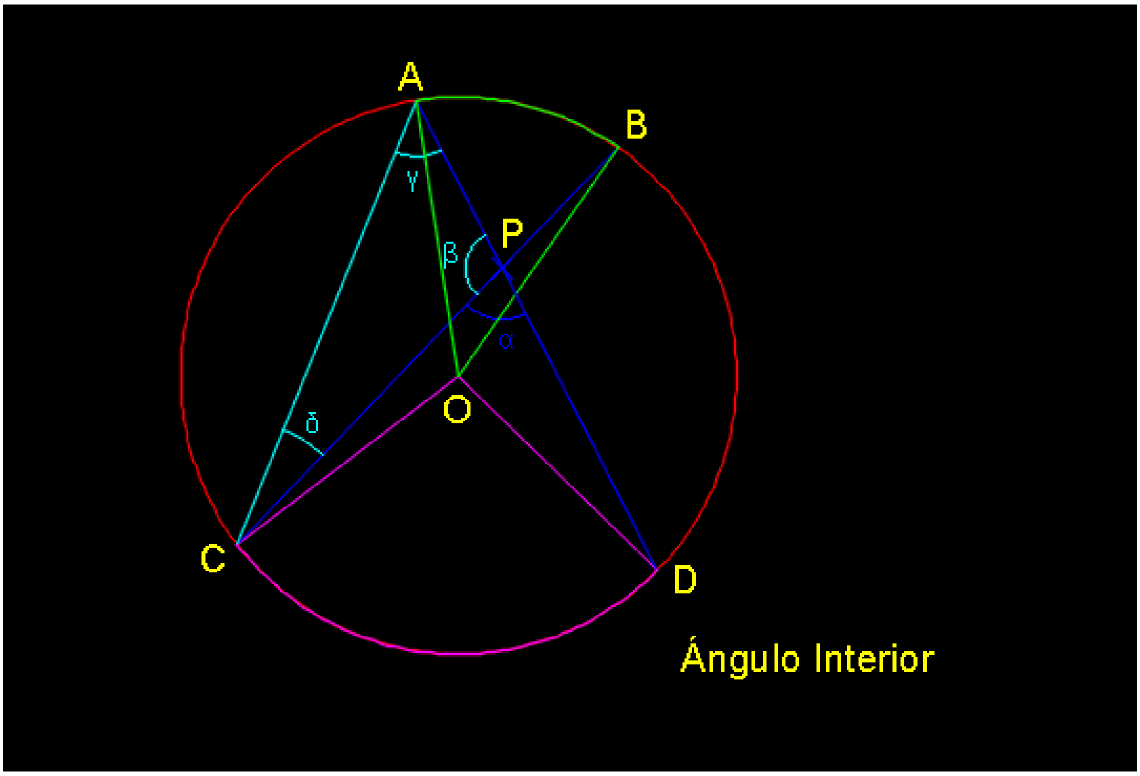

Figura 4.16 – Ángulo interior en una circunferencia.

En la figura, el ángulo interior (α) es el ángulo $\widehat{CPD}$, y los ángulos centrales son el ángulo $\widehat{COD}$ (interceptado por él) y el ángulo $\widehat{AOB}$ (interceptado por el lado opuesto).

Es decir:

$$\alpha = \widehat{COD}/_2 + \widehat{AOB}/_2$$

El razonamiento para obtener esta expresión es el siguiente:

$\gamma + \delta + \beta = 180°$ (por ser un triángulo)
$\alpha + \beta = 180°$ (por ser suplementarios)

Por tanto,

$\gamma + \delta = 180° - \beta$
$\alpha = 180° - \beta$

Por lo que,

$$\alpha = \gamma + \delta$$

El valor del ángulo γ es la mitad de su ángulo central $\widehat{COD}$ (es un ángulo inscrito).
El valor del ángulo δ es la mitad de su ángulo central $\widehat{AOB}$ (por la misma razón).
Por lo que, sustituyendo, se obtiene la fórmula para α:

$$\alpha = \widehat{COD}/_2 + \widehat{AOB}/_2$$

Ángulo exterior: es el ángulo cuyo vértice es exterior a la circunferencia y los lados del ángulo son secantes a la misma. En este caso, el valor de este ángulo es igual al de la semidiferencia de los ángulos centrales correspondientes a los dos arcos que interceptan sus lados. Es decir:

$$\alpha = \widehat{COD}/_2 - \widehat{AOB}/_2$$

El razonamiento es similar al descrito para el ángulo interior. En la figura, el ángulo exterior (α) es el ángulo $\widehat{CPD}$ y los ángulos centrales son $\widehat{COD}$ y $\widehat{AOB}$.

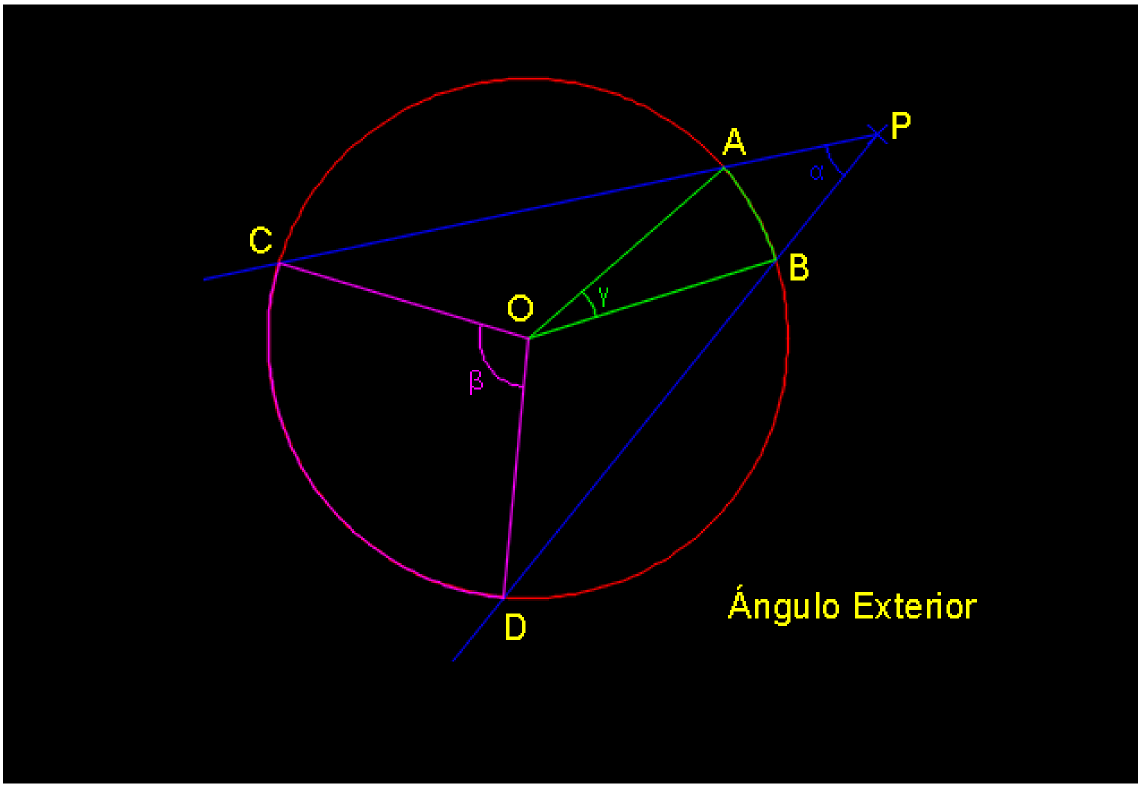

Figura 4.17 – Ángulo exterior a una circunferencia.

Ángulo circunscrito: es el caso límite del ángulo exterior, cuando los dos lados del ángulo circunscrito son tangentes a la circunferencia en vez de secantes. Si sólo uno de los lados es tangente y el otro es secante, hablaríamos de ángulo exterior.

En cualquier caso (haya dos rectas secantes, una tangente y una secante, o dos tangentes), el valor del ángulo es igual al de la semidiferencia de los ángulos centrales correspondientes a los dos arcos que abarcan sus lados.

$$\alpha = \frac{\beta - \gamma}{2}$$

En la figura, el ángulo circunscrito α es el ángulo $\widehat{APB}$, y los ángulos centrales son β y γ.

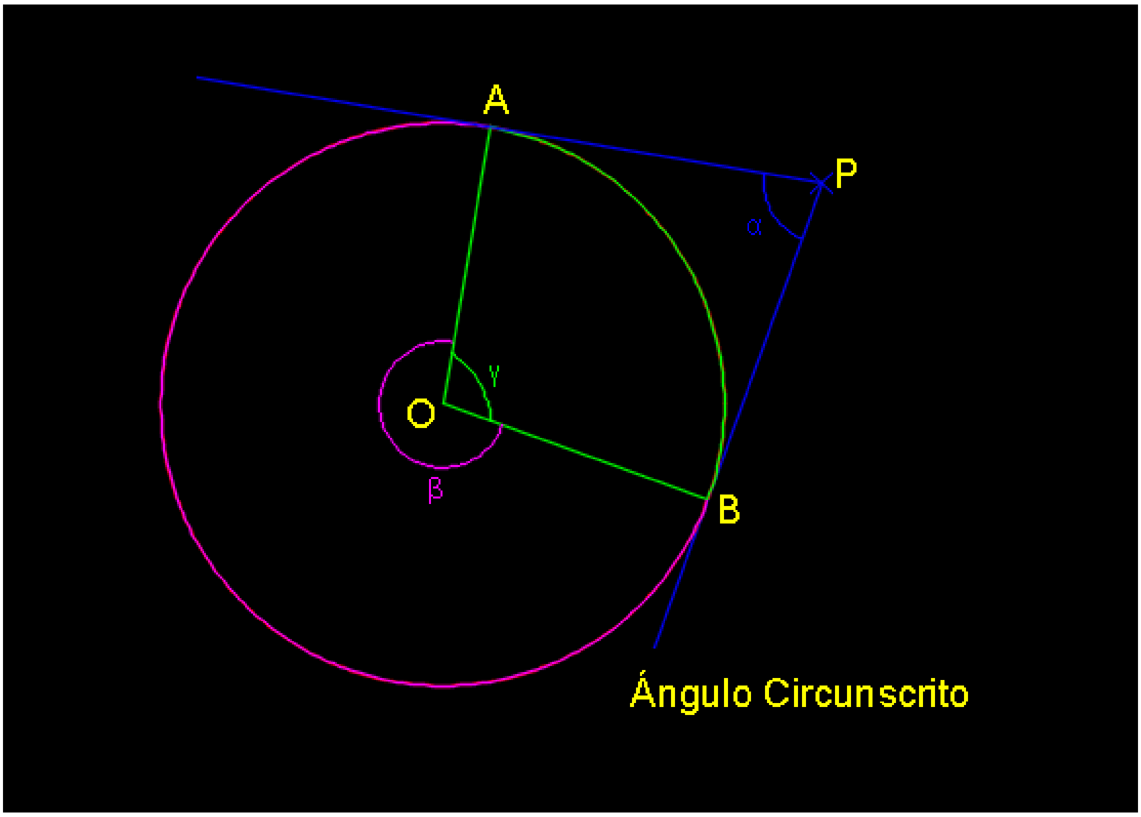

Figura 4.18 – Ángulo circunscrito a una circunferencia.

4.2.3 – Arco Capaz

El **arco capaz** es el lugar geométrico de los puntos sobre los que se observa un segmento dado con un ángulo determinado.

El arco capaz es un arco de circunferencia, por lo que abarcará una porción más o menos extensa de una circunferencia. El número de grados que abarque de dicha circunferencia dependerá del ángulo que se elija para formar el arco capaz.

El arco capaz más conocido es el que se forma al observar un segmento bajo un ángulo de 90°. En este caso, el arco capaz es una semicircunferencia de diámetro igual a la longitud del segmento sobre el que se define el arco capaz. Corresponde con el segundo teorema de Tales y abarcaría 180º (media circunferencia).

Si el ángulo elegido es menor de 90º, el arco capaz abarcará más de 180º, ya que superará la semicircunferencia. Por el contrario, si el ángulo elegido es mayor de 90º, el arco capaz abarcará menos de 180º.

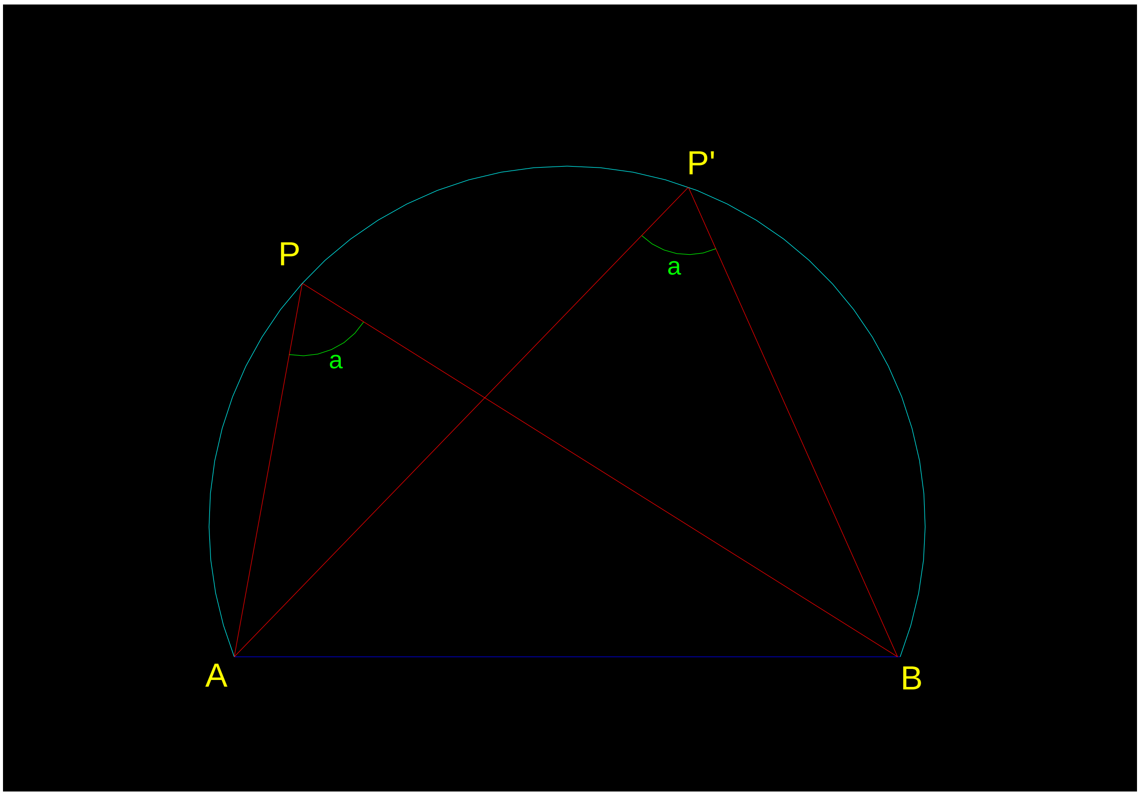

Figura 4.19 – Arco capaz.

Como vemos, el arco capaz de un segmento depende del ángulo sobre el que se quiera observar dicho segmento (y también, evidentemente, de la longitud del segmento). Es decir, para cada segmento hay infinitos arcos capaces, uno por cada ángulo sobre el que se quiera observar.

4.2.4 – Potencia de un Punto con Respecto a una Circunferencia

La potencia de un punto respecto a una circunferencia se define como el producto de las distancias a cualquier par de puntos de la circunferencia que estén alineados con P.

El valor de la potencia es constante para cada pareja (P, c), siendo P un punto y c una circunferencia, independientemente de la elección de los puntos de corte con la circunferencia. Evidentemente, si la posición del punto y el radio o posición de la circunferencia varían, el valor de la potencia cambiará.

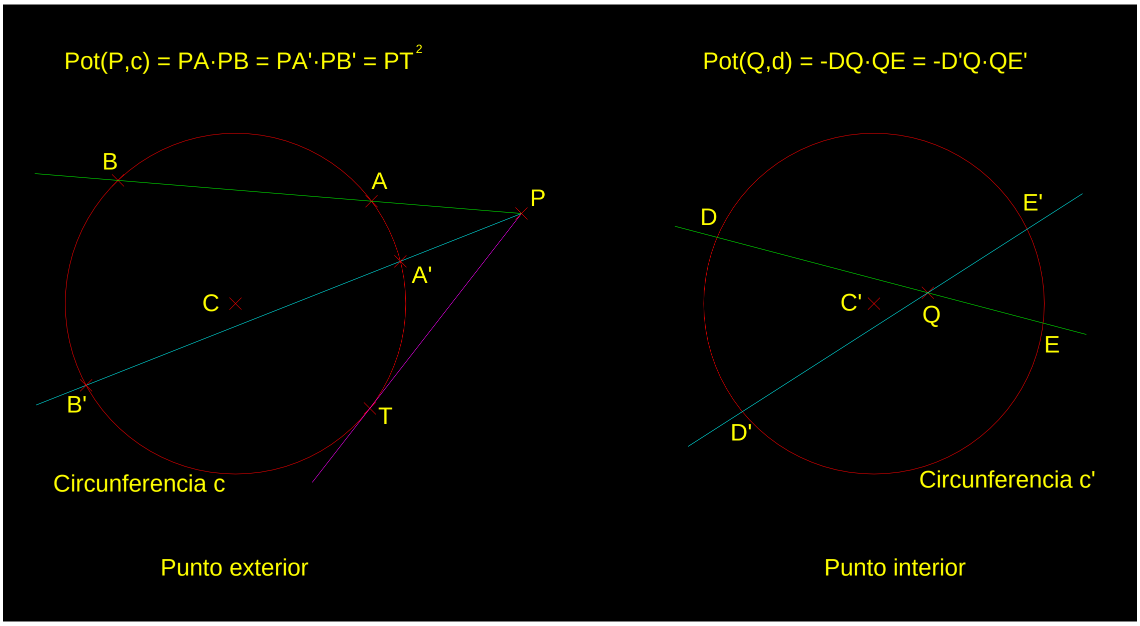

Figura 4.20 – Potencia de un punto con respecto a una circunferencia.

El punto P puede estar dentro, fuera, o sobre la circunferencia, aunque habitualmente la potencia se define con signo negativo cuando el punto P está dentro de la circufnerencia y positiva cuando está fuera de la misma. De su propia definición se puede deducir que su valor es 0 cuando el punto P está sobre la propia circufenrencia.

Si la recta que elegimos para cortar a la circunferencia es tangente a la misma, el valor de la potencia es igualmente válido (evidentemente esto sólo puede suceder si el punto está fuera de la circunferencia). Es un caso límite en el cual los puntos de corte son ambos el mismo, y además nos permite calcular la media proporcional.

En este caso, la expresión es:

$$Pot(P,c) = x^2$$

siendo x la longitud del segmento tangente que une P con la circunferencia c.

Podemos ver este proceso mediante la siguiente construcción geométrica:

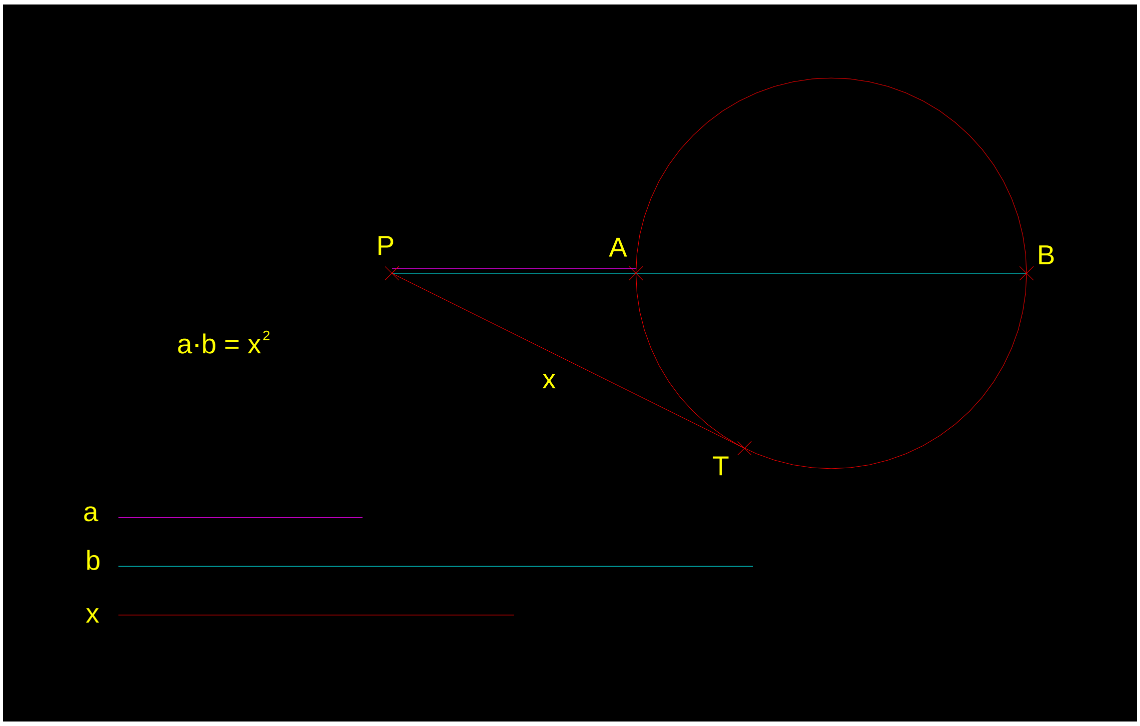

Figura 4.21 – Cálculo geométrico de la media proporcional haciendo uso de la potencia de un punto con respecto a una circunferencia.

Algebraicamente, el valor de la potencia se puede calcular como

$$Pot(P, c) = d^2 - r^2$$

siendo d la distancia entre P y el centro de la circunferencia c, y r el radio de la misma.

4.2.5 – Rectificación de la Circunferencia

La rectificación de la circunferencia es el procedimiento geométrico por el cual se determina sobre una recta un segmento de longitud igual al de una circunferencia. Dado que la longitud de la circunferencia depende del número π y éste es una constante de infinitas cifras decimales, es imposible acotar con precisión exacta la longitud de una circunferencia.

Existen diversos métodos en la literatura para rectificar una circunferencia. Los más conocidos rectifican submúltiplos de la longitud de la circunferencia, como la semicircunferencia (método de Kochanksi) o el cuadrante (método de Mascheroni).

4.2.5.1 – Rectificación de Kochanski

Este sencillo método, desarrollado por el jesuita polaco Adam Kochanski, permite rectificar (de manera aproximada) una semicircunferencia, es decir una longitud igual a la mitad de una circunferencia.

Para ello, dada una circunferencia de centro O y de radio r, debemos trazar un diámetro AB, y una recta r perpendicular a éste, que pase por el punto A. Posteriormente debemos trazar una recta que forme 30° con el radio OA. Esta recta se puede realizar midiendo los 30°, o realizando la mediatriz del segmento AC, siendo C, el punto de intersección de la circunferencia con otra de mismo radio y centro en A.

Esta recta que forma 30° con OA cruzará a la recta r en el punto D. Si transportamos sobre la recta r el radio de la circunferencia tres veces, obtendremos un punto E, tal que, al unirlo con B, obtendremos una distancia aproximadamente igual a la mitad de la longitud de la circunferencia dibujada.

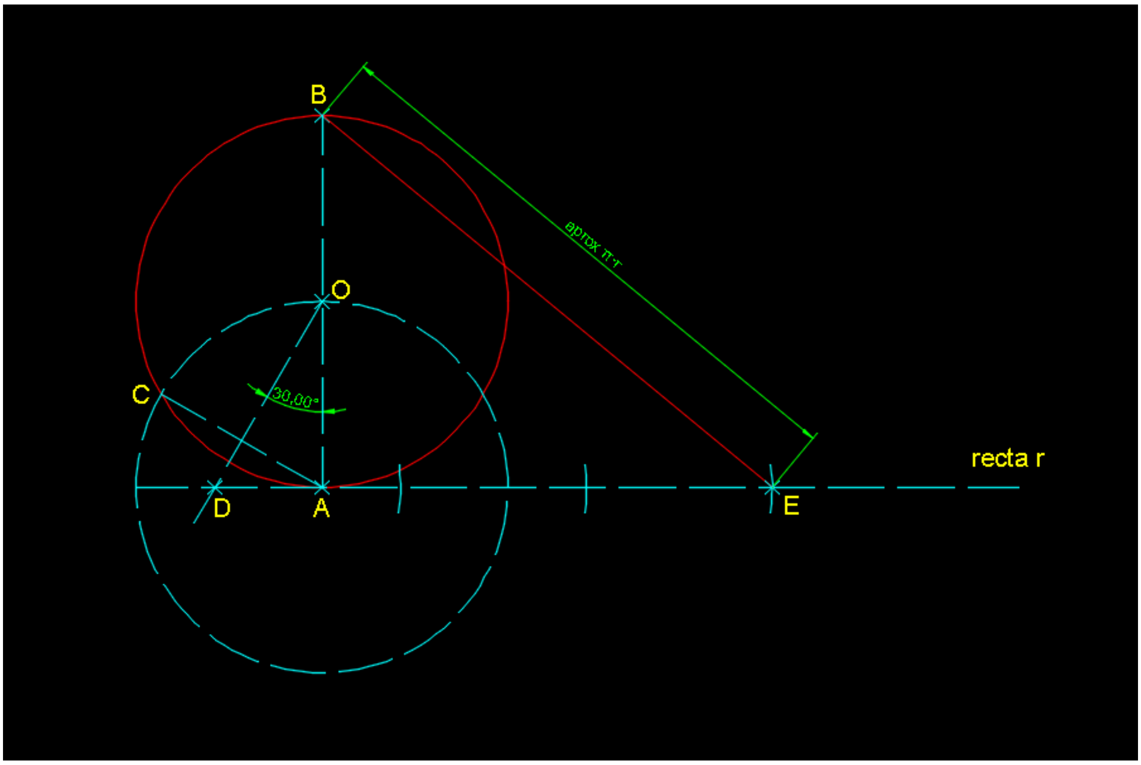

Figura 4.22 – Rectificación de la semicircunferencia mediante el método de Kochanksi.

4.2.5.2 – Rectificación de Mascheroni

Este método, desarrollado por el matemático italiano Lorenzo Mascheroni, es algo más elaborado que el anterior, y permite obtener una longitud igual a la de la cuarta parte de una circunferencia. Es decir, permite rectificar un cuadrante.

Para ello, se dibuja la circunferencia de centro O y radio r, y se traza un diámetro AB cualquiera. Con centro en A y en B se trazan arcos de radio r que determinan los puntos C y D sobre la circunferencia.

Haciendo centro nuevamente en A y en B, pero esta vez con radio AD (o BC), se trazan dos arcos, cuya intersección determinan el punto E.

Finalmente, con centro en C y radio CE se traza un arco que cortará a la circunferencia en el punto F. Si se une F con A, se obtiene el segmento AF, cuya longitud es aproximadamente igual a la de un cuadrante (un cuarto) de la circunferencia elegida.

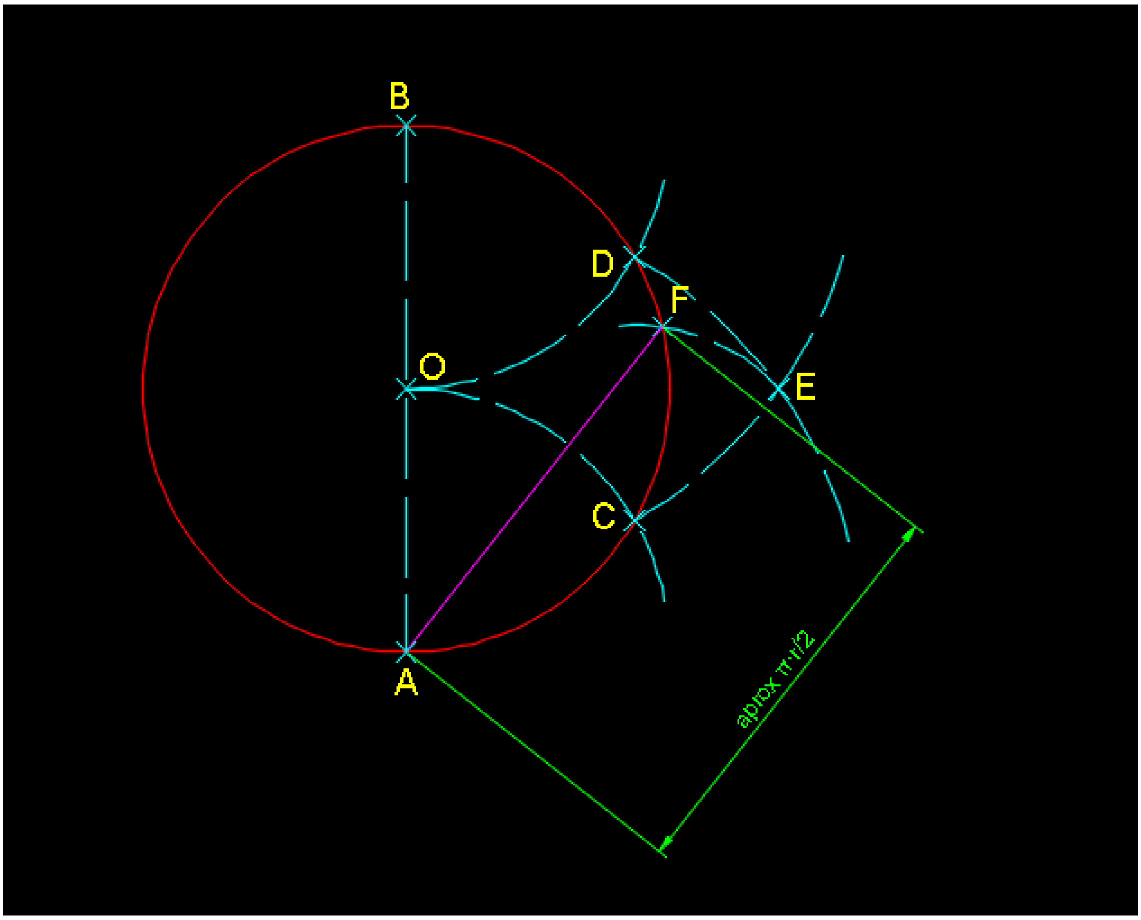

Figura 4.23 – Rectificación de un cuadrante de circunferencia
mediante el método de Mascheroni.

4.3 – Triángulos

El triángulo es un polígono de tres segmentos que vienen dados por el corte de tres rectas no paralelas. Es una figura plana y cerrada limitada por tres vértices (puntos de corte de las rectas) y tres lados (segmentos que se forman al producirse dichos cortes).

Habitualmente, los vértices y ángulos se representan con una letra mayúscula, mientras que los lados se representan con letras minúsculas (a menudo se hace coincidir la letra del vértice con la correspondiente letra del lado opuesto, sólo que ésta en minúscula).

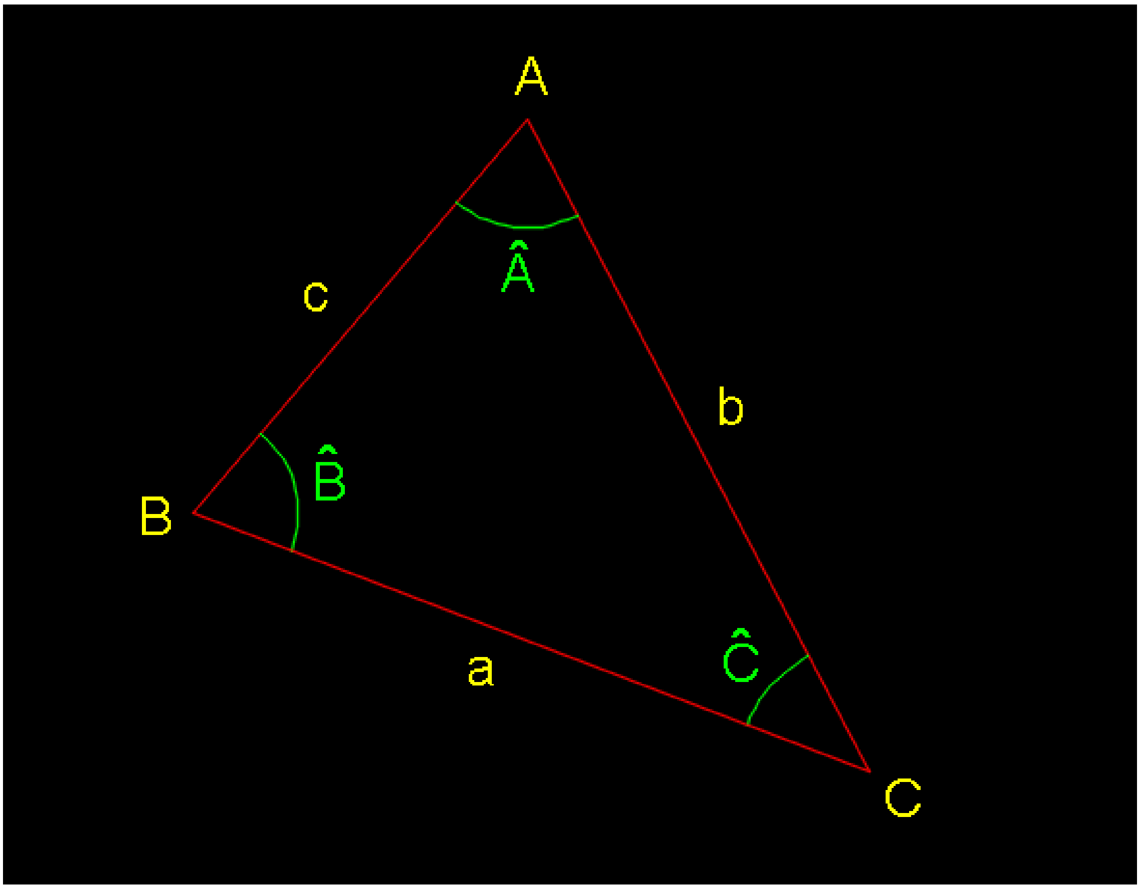

Figura 4.24 – Nomenclatura habitual en un triángulo.

4.3.1 – Clasificación

Los triángulos pueden clasificarse por varios criterios.

Según sus lados:

Atendiendo a la longitud de sus lados, podemos clasificarlos en:

Triángulo equilátero: cuando los tres lados son iguales.

Triángulo isósceles: dos lados son iguales, y el otro no.

Triángulo escaleno: todos los lados son diferentes.

Según sus ángulos:

Atendiendo a los diferentes ángulos del triángulo, podemos clasificarlos en:

Triángulo equiángulo: cuando los tres ángulos son iguales. Si es equiángulo, será también equilátero, y viceversa. Para que todos sean iguales, los ángulos han de ser de 60º.

Triángulo acutángulo: cuando los tres ángulos son agudos (menores de 90º).

Triángulo rectángulo: cuando uno de los ángulos es recto, y el resto, agudos. En un triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se denominan catetos, y el lado opuesto, hipotenusa (cuya longitud siempre es mayor que la de cada uno de los catetos).

Triángulo obtusángulo: cuando uno de los ángulos es obtuso (mayor de 90º), y el resto, agudos.

Los diversos criterios no son excluyentes, salvo en algunos casos. Por ejemplo: un triángulo equilátero siempre es equiángulo (y viceversa) y por tanto no puede ser ni rectángulo ni obtusángulo ni acutángulo; un triángulo rectángulo puede ser isósceles o escaleno, pero no equilátero; un triángulo isósceles puede ser acutángulo, rectángulo o acutángulo.

4.3.2 – Cevianas y Puntos Notables

Llamamos a ceviana a toda aquella recta que pasa por alguno de los vértices de un triángulo. De las infinitas cevianas que se pueden trazar sobre un triángulo, hay tres cevianas que podemos destacar:

Medianas: son las tres rectas que unen los vértices del triángulo con el punto medio del lado opuesto.

Bisectrices: son las tres rectas que dividen a los ángulos de un triángulo en dos partes iguales.

Alturas: son las tres rectas perpendiculares a cada lado del triángulo que además pasan por el vértice opuesto a ese lado. El punto por el que corta la altura a ese lado se denomina pie.

A partir de estas cevianas y de otras rectas o lugares geométricos, podemos definir una serie de puntos notables en el triángulo.

Baricentro: es el punto de intersección de las tres medianas de un triángulo. Es además el centro geométrico o de gravedad del triángulo, por lo que es el punto que representaría toda la masa de un triángulo si éste fuese un objeto físico (suponiendo densidad constante).

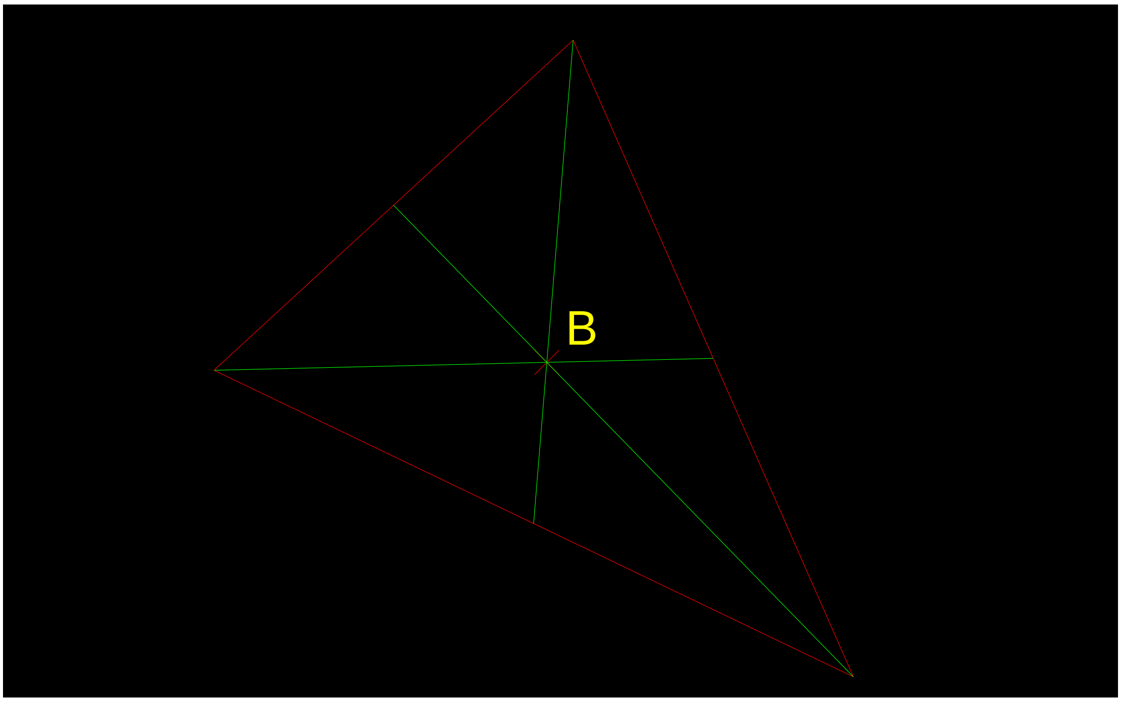

Figura 4.25 – Medianas y baricentro.

Incentro: es el punto de intersección de las tres bisectrices de un triángulo. Recibe este nombre porque es, además, el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo (que está dentro del triángulo y es tangente a sus lados).

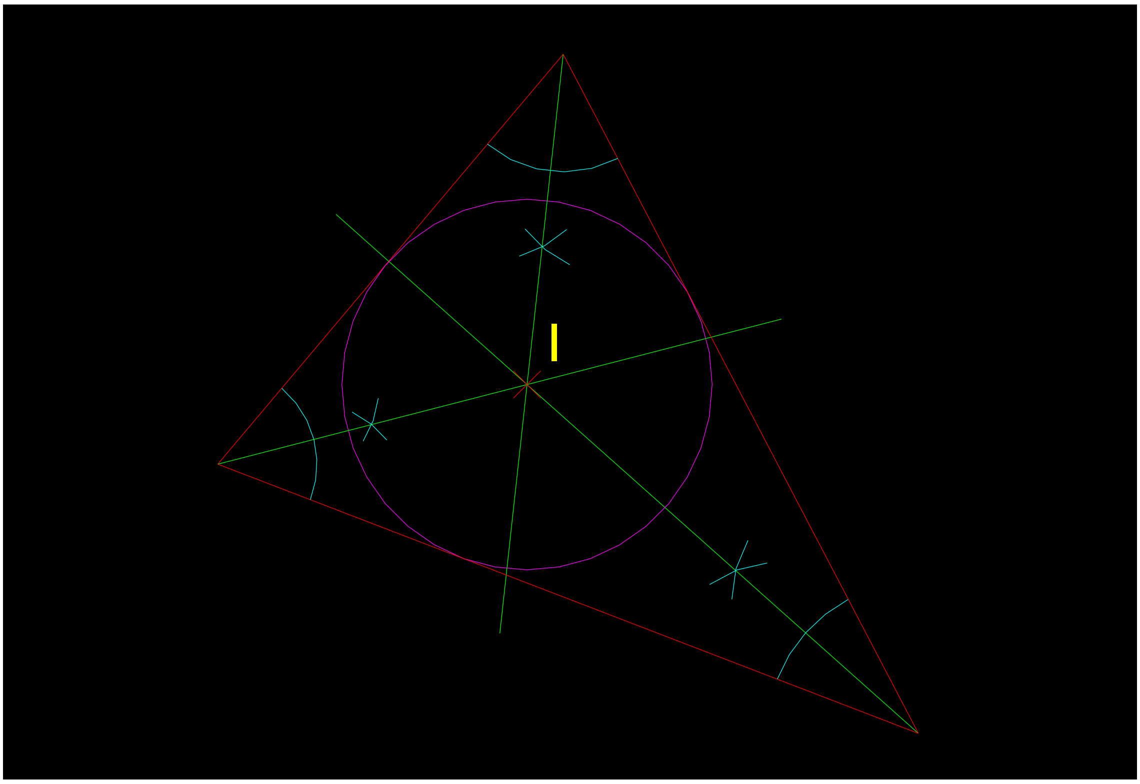

Figura 4.26 – Bisectrices e incentro.

Ortocentro: es el punto de intersección de las tres alturas de un triángulo.

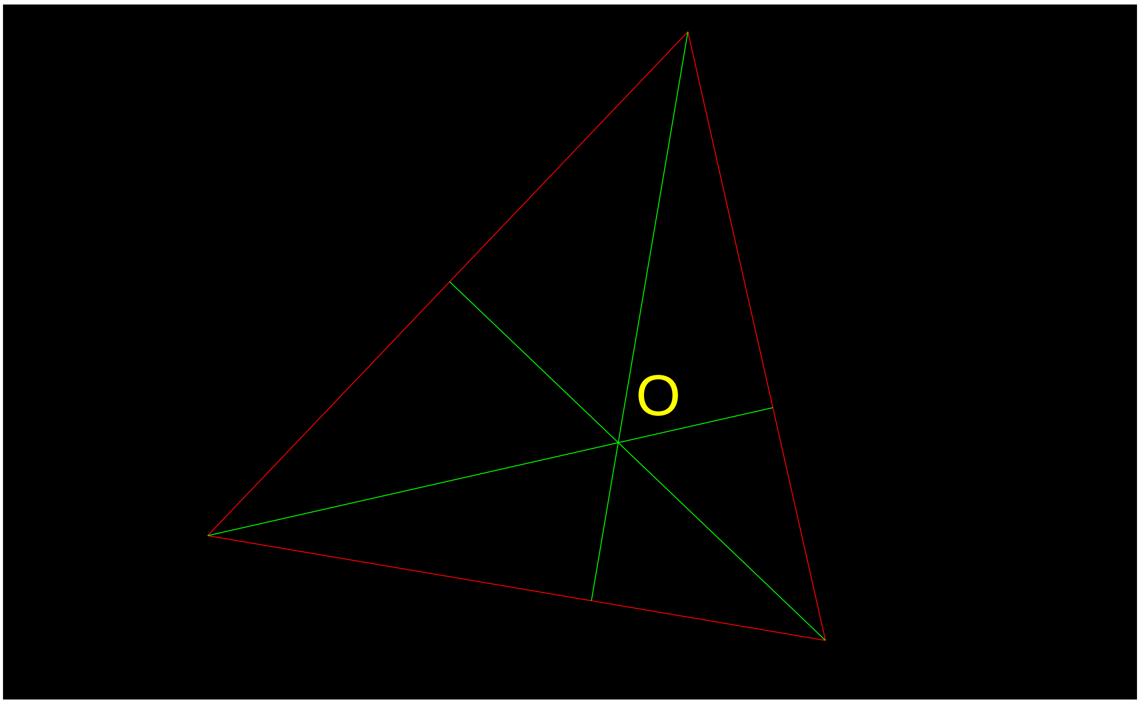

Figura 4.27 – Alturas y ortocentro.

Circuncentro: es el punto de intersección de las mediatrices de un triángulo. Las mediatrices son las rectas perpendiculares a cada uno de los lados trazadas en su punto medio. Las mediatrices (que no son necesariamente cevianas aunque pueden serlo en algún caso) se cortan en el circuncentro, que recibe este nombre porque es, además, el centro de la circunferencia circunscrita (que pasa por los vértices) al triángulo.

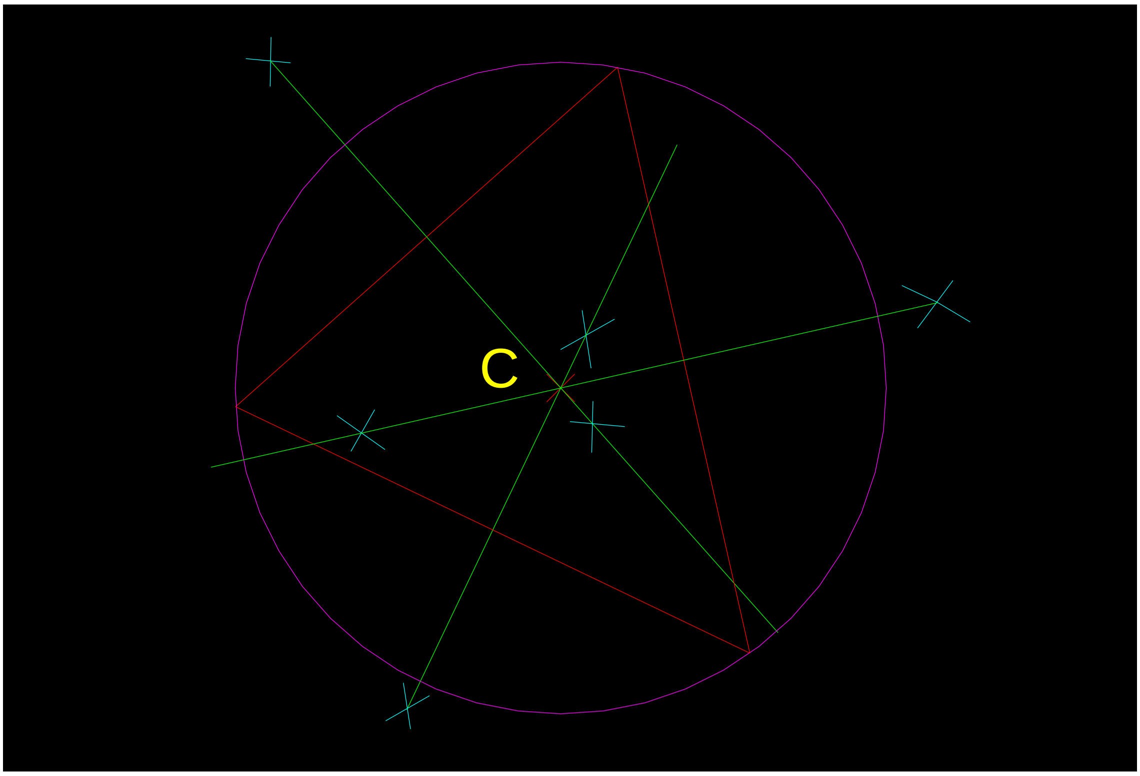

Figura 4.28 – Mediatrices y circuncentro.

Exincentros: son los centros de las circunferencias exinscritas a los triángulos. Las circunferencias exinscritas son las circunferencias tangentes a cada uno de los lados de un triángulo y a las prolongaciones de los otros dos. A sus centros se les denominan exincentros.

Se puede comprobar que uniendo los exincentros se obtiene un nuevo triángulo, tal que, el ortocentro de este nuevo triángulo es el mismo punto que el incentro del triángulo original.

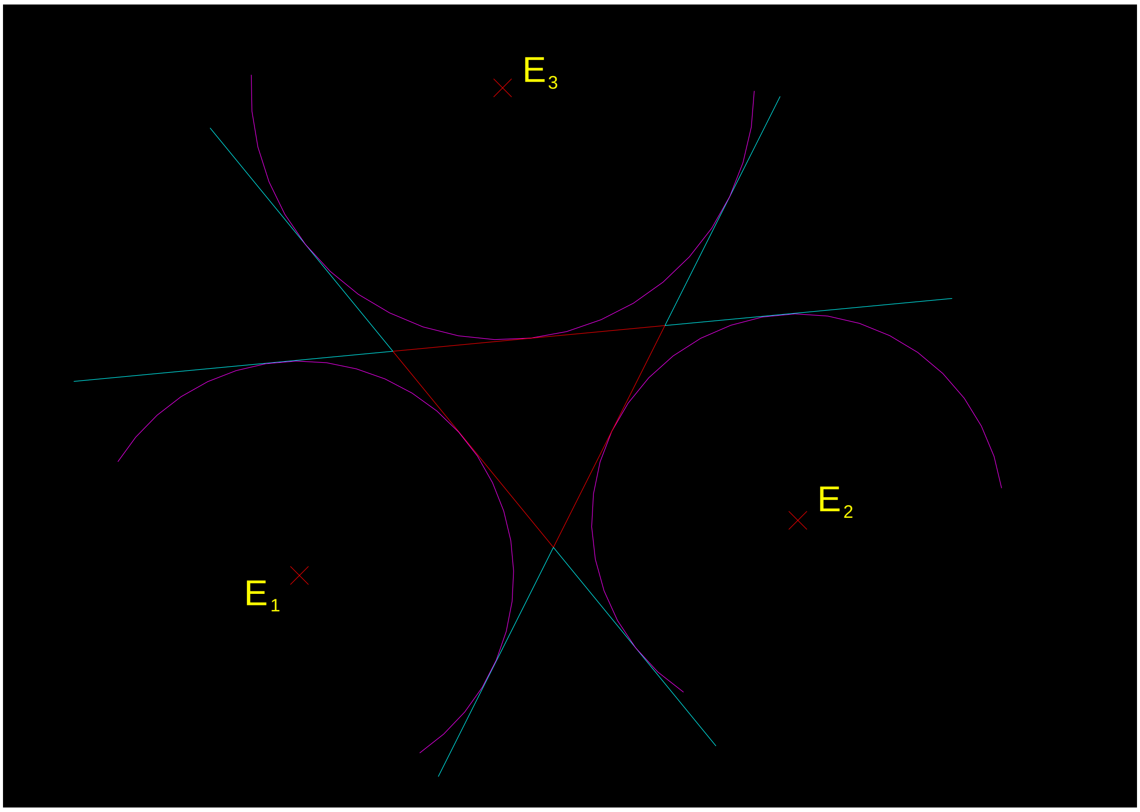

Figura 4.29 – Circunferencias exinscritas y exicentros.

4.3.3 – Otras Definiciones

Triángulo órtico (o pedal): es el triángulo formado al unir los pies de las alturas entre sí.

Se puede comprobar que el ortocentro de un triángulo coincide con el incentro del triángulo órtico, y que las alturas de un triángulo coinciden con las bisectrices de su triángulo órtico.

En el caso particular del triángulo rectángulo, el ortocentro está situado en el vértice del ángulo recto, y por tanto no se puede formar el triángulo órtico.

Teorema de Nagel: las rectas que unen los vértices de un triángulo con el circuncentro son perpendiculares a los lados del correspondiente triángulo órtico.

Recta de Euler: en cualquier triángulo, el baricentro, el ortocentro y el circuncentro están alineados. A la recta que une estos tres puntos se le denomina recta de Euler.

4.3.4 – Propiedades

Los ángulos exteriores de un triángulo siempre suman 360°. El ángulo exterior se define como el ángulo formado entre un lado y la prolongación del otro. En cada vértice existen dos ángulos exteriores con el mismo valor.

Todo ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes.

Los ángulos interiores de un triángulo siempre suman 180°. Como consecuencia de este hecho, un triángulo no puede tener más de un ángulo obtuso o un ángulo recto. Por la misma razón, en un triángulo rectángulo los dos ángulos agudos son complementarios, ya que deben sumar 90º.

Cualquiera de los lados de un triángulo es menor que la suma de los dos restantes, pero mayor que su diferencia:

$$a < b + c$$
$$a > b - c$$

Siendo a, b y c cualquiera de los lados del triángulo.

4.3.5 – Teoremas Básicos sobre Triángulos Rectángulos

Los triángulos rectángulos han sido estudiados desde la antigüedad dado que cumplen una serie de propiedades interesantes y se dan en muchas construcciones geométricas en diversas disciplinas de la ciencia. A continuación, vamos a listar varios teoremas básicos que se cumplen sobre cualquier triángulo rectángulo.

4.3.5.1 -Teorema de Pitágoras:

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos. Este es probablemente el teorema más conocido de toda la geometría.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

siendo c la longitud de la hipotenusa, a, la de un cateto, y b, la del otro.

La longitud de la hipotenusa es siempre mayor que la de cualquiera de los catetos.

4.3.5.2 - Teorema de la Altura:

Este teorema permite relacionar el concepto de media proporcional con el de triángulo rectángulo. En realidad, se corresponde con la misma construcción geométrica que vimos para construir la media proporcional. Su enunciado es el siguiente:

La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es la media proporcional entre los segmentos en que esta altura divide a la hipotenusa.

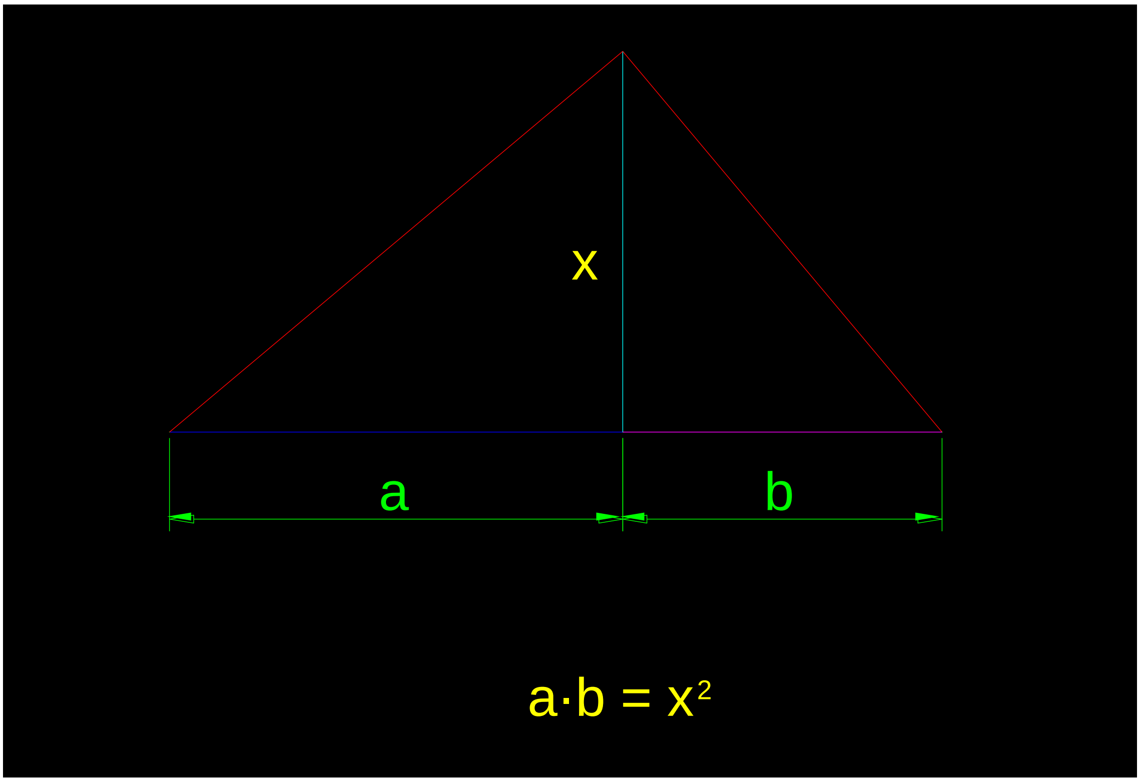

Figura 4.30 – Teorema de la altura.

4.3.5.3 - Teorema del Cateto:

Este teorema también permite construir la media proporcional a partir de un triángulo rectángulo, pero empleando alguno de sus catetos. Su enunciado es el siguiente:

Cada cateto de un triángulo rectángulo es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella. En la figura vemos ‘x’ que es el cateto, ‘a’ que es la hipotenusa y ‘b’ que es la proyección del cateto sobre la hipotenusa.

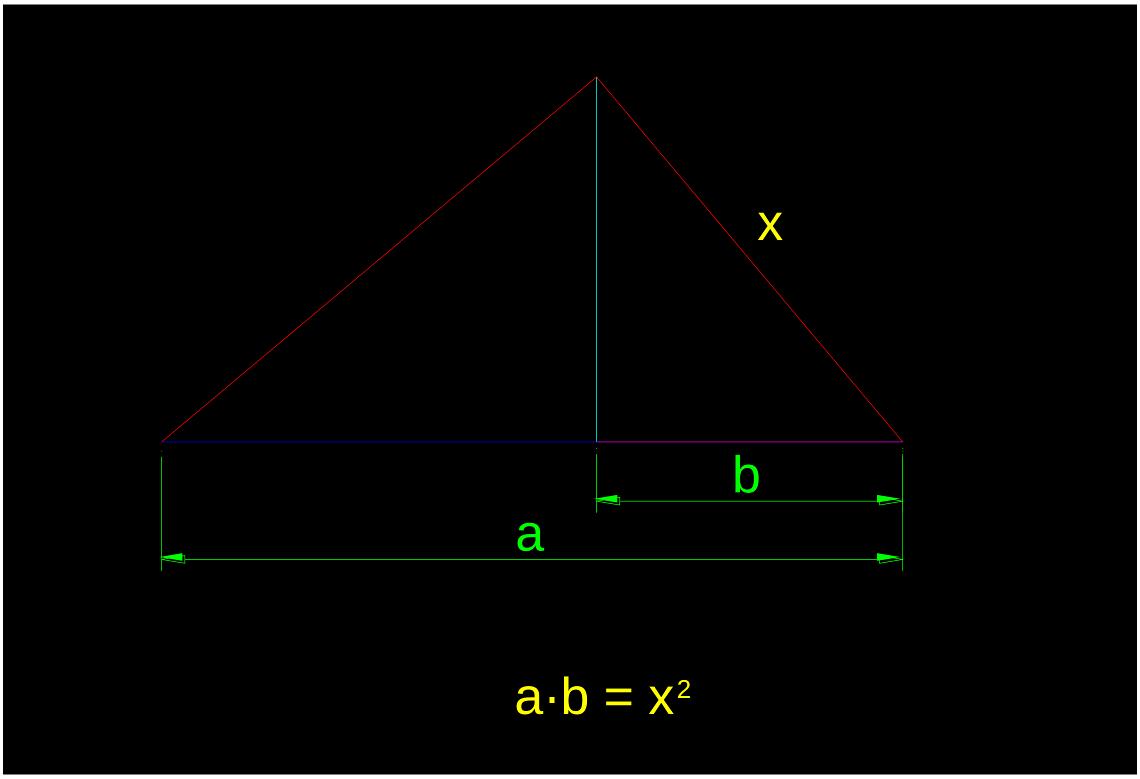

Figura 4.31 – Teorema del cateto.

4.4 – Cuadriláteros

El triángulo es un polígono cerrado delimitado por cuatro segmentos que vienen dados por el corte de cuatro rectas dos a dos. Un cuadrilátero es siempre una figura plana y cerrada limitada por cuatro puntos denominados vértices, que se corresponden con los puntos de intersección de las rectas. Al igual que sucede en los triángulos, los segmentos que unen los vértices se denominan lados. Por tanto, se trata de polígonos que constan de cuatro lados y cuatro vértices.

De igual modo que en el triángulo, sus vértices se designan con letras mayúsculas y sus lados con letras minúsculas.

A diferencia de lo que sucede con el triángulo, en un cuadrilátero podemos trazar un dos segmentos entres vértices no consecutivos. A dichos segmentos se les conoce como diagonal. Los cuadriláteros siempre poseen dos diagonales que los dividen en dos triángulos.

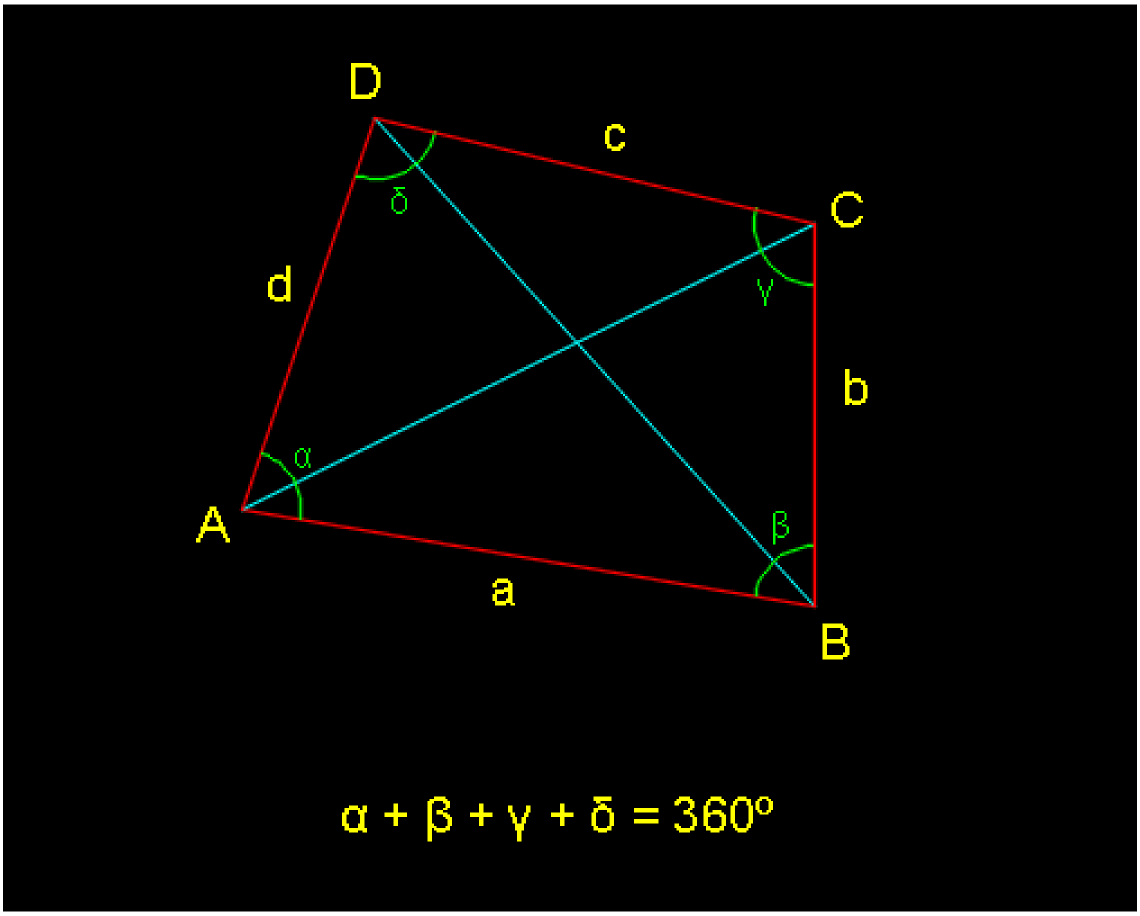

Figura 4.32 – El cuadrilatero.

4.4.1 – Clasificación

La primera clasificación que se puede establecer a la hora de categorizar los distintos tipos de cuadriláteros, distinguimos entre **cuadriláteros cóncavos** y los **cuadriláteros convexos**.

El concepto de convexidad es aplicable a cualquier polígono. Un polígono se dice convexo cuando todos sus ángulos interiores son menores o iguales que 180°. Por el contrario, un polígono es cóncavo, cuando tiene algún ángulo interior superior a 180°.

Esta propiedad se puede comprobar también trazando segmentos entre puntos cualesquiera del contorno del polígono. Un polígono es convexo sólo si cualquier segmento entre dos puntos que estén dentro del mismo está enteramente dentro del propio polígono, es decir, el segmento no corta a los lados.

En el caso de los triángulos no es posible trazar triángulos cóncavos, ya que por definición, todos los ángulos han de ser menores que 180°.

En el caso de los cuadriláteros si que podemos encontrar cuadriláteros cóncavos cuando un ángulo sea mayor de 180° (sólo puede haber uno que supere este umbral, nunca dos). Los cuadriláteros cóncavos tienen poca utilidad, ya que poseen pocas propiedades interesantes.

También podemos, estrictamente formar un cuadrilátero cruzando un par de lados y obtendríamos un **cuadrilátero cruzado**. Estrictamente sería un cuadrilátero convexo porque no hay ángulos interiores mayores de 180°, aunque sí es posible trazar un segmento exterior al cuadrilátero que pase por fuera del mismo, por lo que sería cóncavo…

Además, si nos fijamos, este tipo de figuras genera un quinto vértice, por lo que, en realidad, sería una figura cóncava de cinco vértices o dos triángulos (convexos) que comparten un mismo vértice. En la práctica este tipo de figuras tiene poco interés.

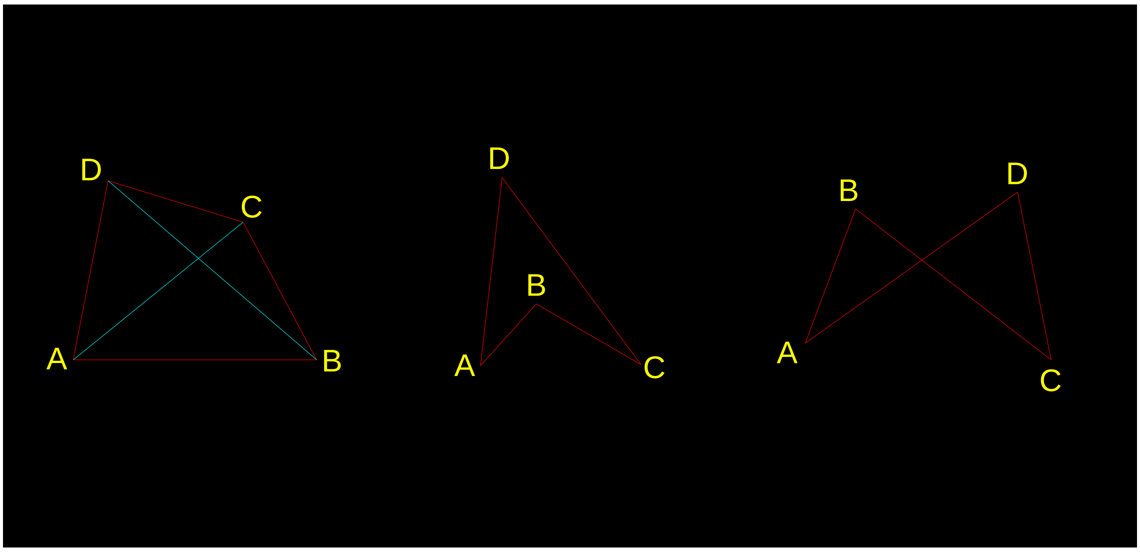

Figura 4.33 – Cuadrilatero convexo (izquierda), cóncavo (centro) y cruzado (derecha).

4.4.1.1 - Cuadriláteros Convexos

Los cuadriláteros convexos son de mucha mayor utilidad y su estudio es más profundo ya que muchos de ellos poseen propiedades interesantes.

Teniendo en cuenta el paralelismo de los lados de un cuadrilátero convexo, éstos pueden clasificarse en tres categorías: paralelogramos, trapecios y trapezoides.

Paralelogramos

Los paralelogramos son cuadriláteros convexos que tienen sus lados paralelos dos a dos.

Se clasifican, a su vez, en:

Cuadrado: sus lados son iguales y paralelos dos a dos. Todos sus ángulos son rectos. Sus diagonales son iguales, perpendiculares, y se bisecan (es decir, se cortan en el punto medio).

Rectángulo: sus lados paralelos son iguales entre sí (dos a dos). Todos sus ángulos son rectos. Sus diagonales son iguales, y se bisecan, pero no perpendicularmente.

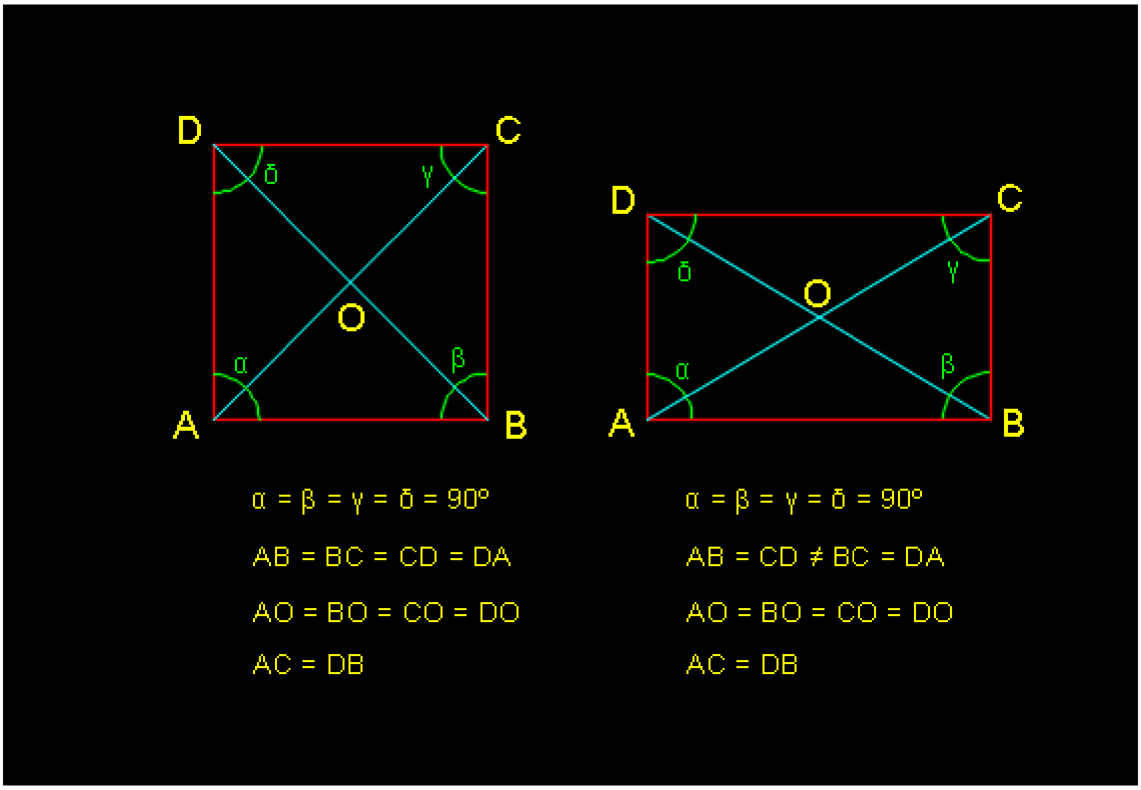

Figura 4.34 – Cuadrado (izquierda) y rectángulo (derecha).

Rombo: los lados son iguales y paralelos dos a dos, pero a diferencia del cuadrado, sus ángulos no son rectos. Los ángulos opuestos son iguales entre sí. Sus diagonales son desiguales, perpendiculares, y se bisecan.

Romboide: los lados paralelos son iguales entre sí (dos a dos como en el rectángulo), pero sus ángulos no son rectos. Los ángulos opuestos son iguales entre sí, como en el rombo. Sus diagonales son desiguales, oblicuas y se bisecan.

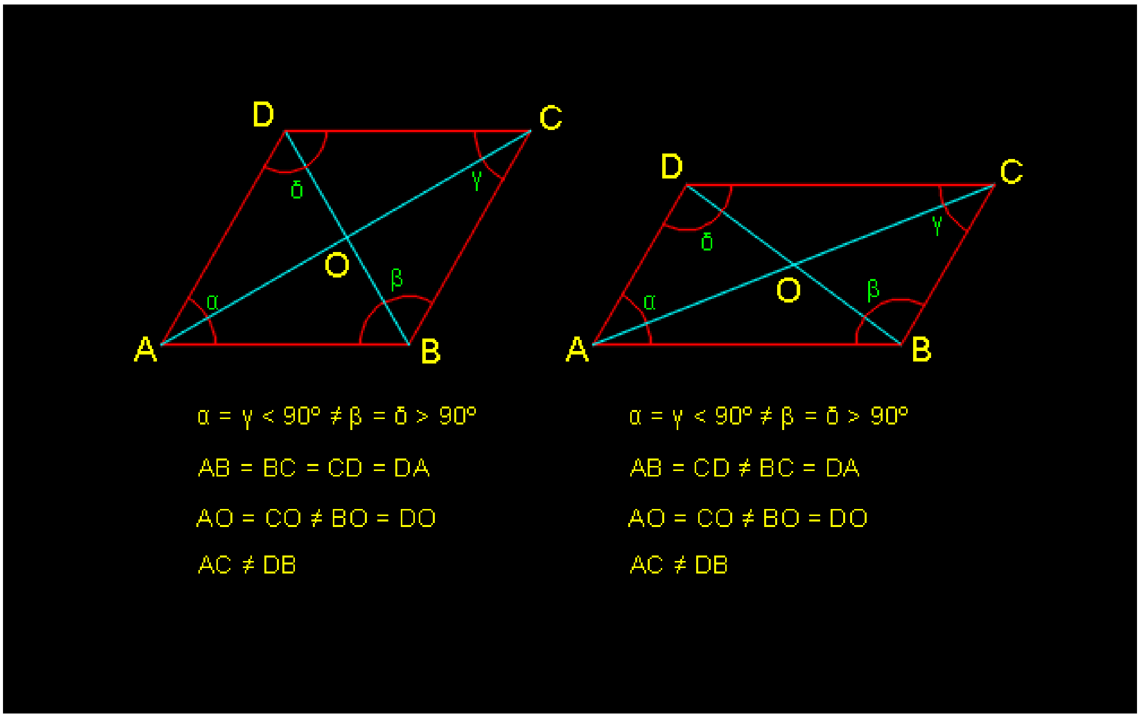

Figura 4.35 – Rombo (izquierda) y romboide (derecha).

Trapecios

Los trapecios son cuadriláteros convexos que tienen sólo dos lados paralelos, a los que se les denomina bases del trapecio. Se clasifican en:

Trapecio isósceles: dos de sus lados son paralelos y sus ángulos son iguales dos a dos. Las diagonales son iguales, oblicuas y no se bisecan.

Trapecio rectángulo: dos de sus lados son paralelos y además posee dos ángulos rectos. Las diagonales son desiguales, oblicuas y no se bisecan.

Trapecio escaleno: dos de sus lados son paralelos pero todos sus ángulos son diferentes. Las diagonales son desiguales, oblicuas y no se bisecan.

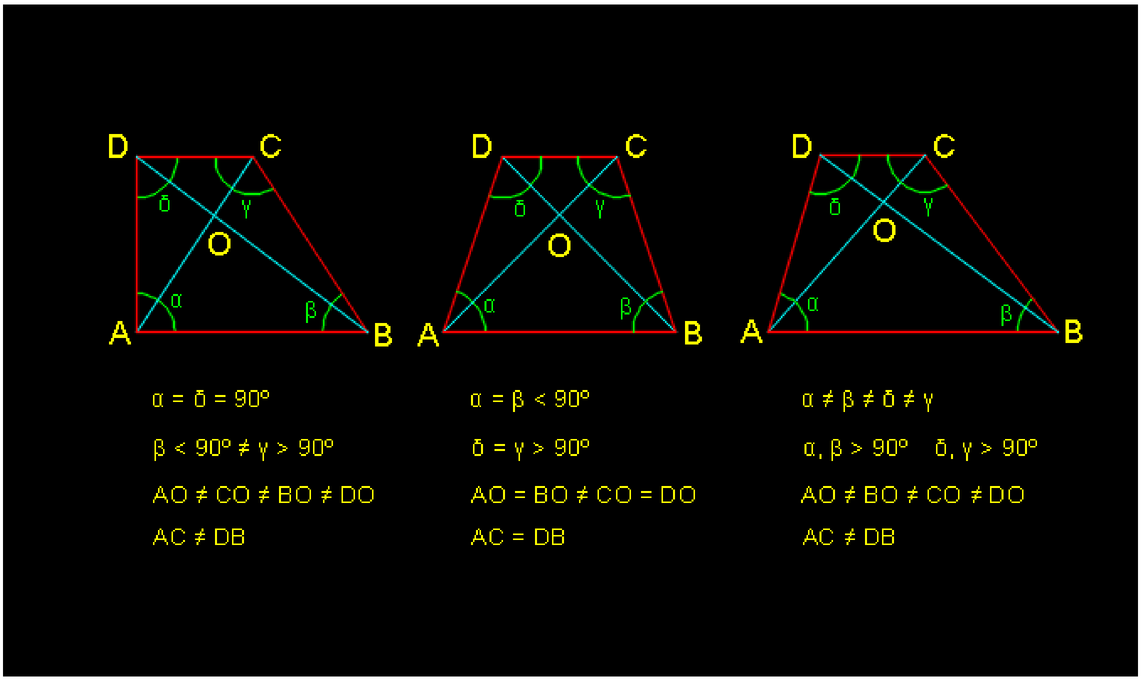

Figura 4.36 – Trapecio rectángulo (izquierda), trapecio isósceles (centro) y trapecio escaleno (derecha).

Trapezoides

Los trapezoides son cuadriláteros convexos que no tienen lados paralelos, y tanto sus lados como sus ángulos son desiguales. Los trapezoides no tienen ninguna propiedad especial además de las propias de los cuadriláteros convexos, por lo que a veces se les llama erróneamente cuadriláteros sin más.

Los trapezoides reciben tal nombre por poseer una forma similar a los trapecios. Sin embargo, algunos autores hablan de traopezoides para referirse a los cuadriláteros (sean cónvexos o cóncavos) que no posean ninguna propiedad especial. Estos autores hablan por tanto de trapezoides convexos y cóncavos. Nosotros hablaremos de trapezoides sólo para referirnos a los cuadriláteros convexos.

Existe un caso especial de trapezoide, cuyas diagonales se cruzan con ángulos rectos y cuyos lados contiguos son iguales dos a dos. A esta figura, con forma de cometa, se le denomina **deltoide** o **trapezoide simétrico**.

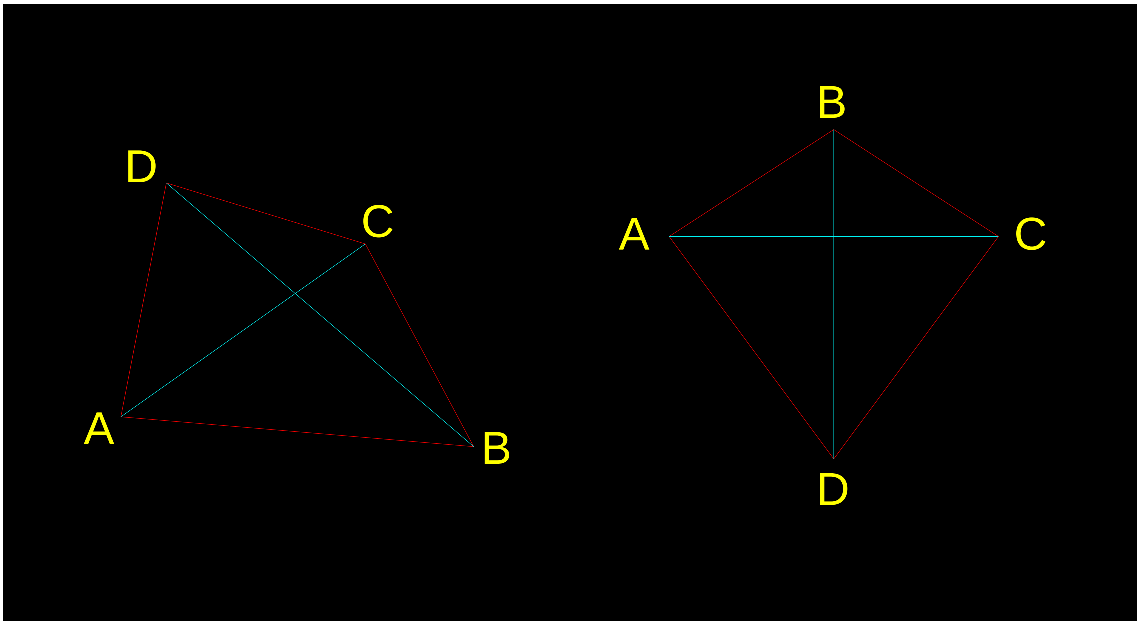

Figura 4.37 – Trapezoide (izquierda) y deltoide (derecha).

4.4.2 – Propiedades

Los cuadriláteros cumplen varias propiedades interesantes:

1) Los ángulos interiores de un cuadrilátero siempre suman 360°. Este hecho se deriva de que las diagonales dividen al cuadrilátero en dos triángulos cuyos ángulos interiores suman 180°.

2) Cuando las sumas de los lados opuestos de un cuadrilátero coinciden, este puede circunscribir a una circunferencia. Se dice entonces que el cuadrilárero es **circunscriptible**. Para que sea circunscriptible, el cuadrilátero ha de ser necesariamente convexo.

3) Cuando los ángulos opuestos de un cuadrilátero son suplementarios, éste se puede inscribir en una circunferencia. Se dice entonces que el cuadrilárero es **inscriptible o cíclico**. Para que sea inscriptible, el cuadrilátero ha de ser necesariamente convexo.

4) Si se unen los puntos medios de los lados de un cuadrilátero (sea convexo o cóncavo), se obtiene siempre un cuadrilátero convexo en forma de paralelogramo.

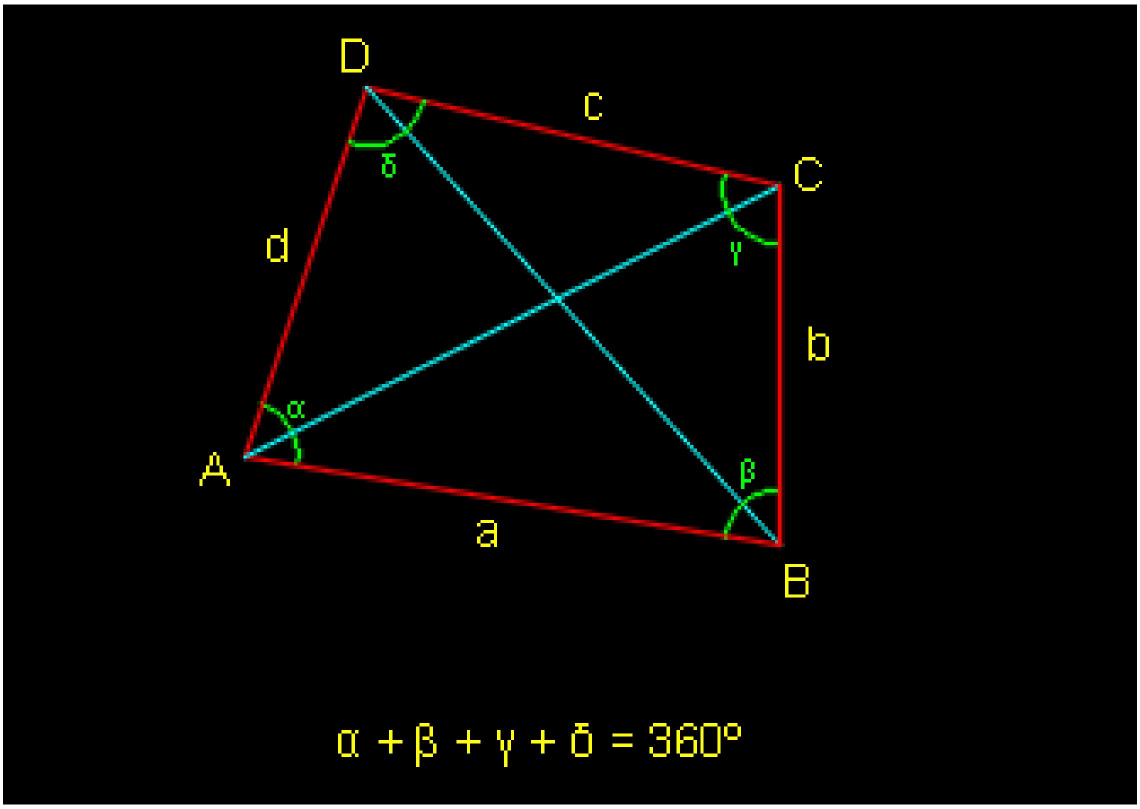

Figura 4.38 – Diagonales y ángulos interiores de un cuadrilátero.

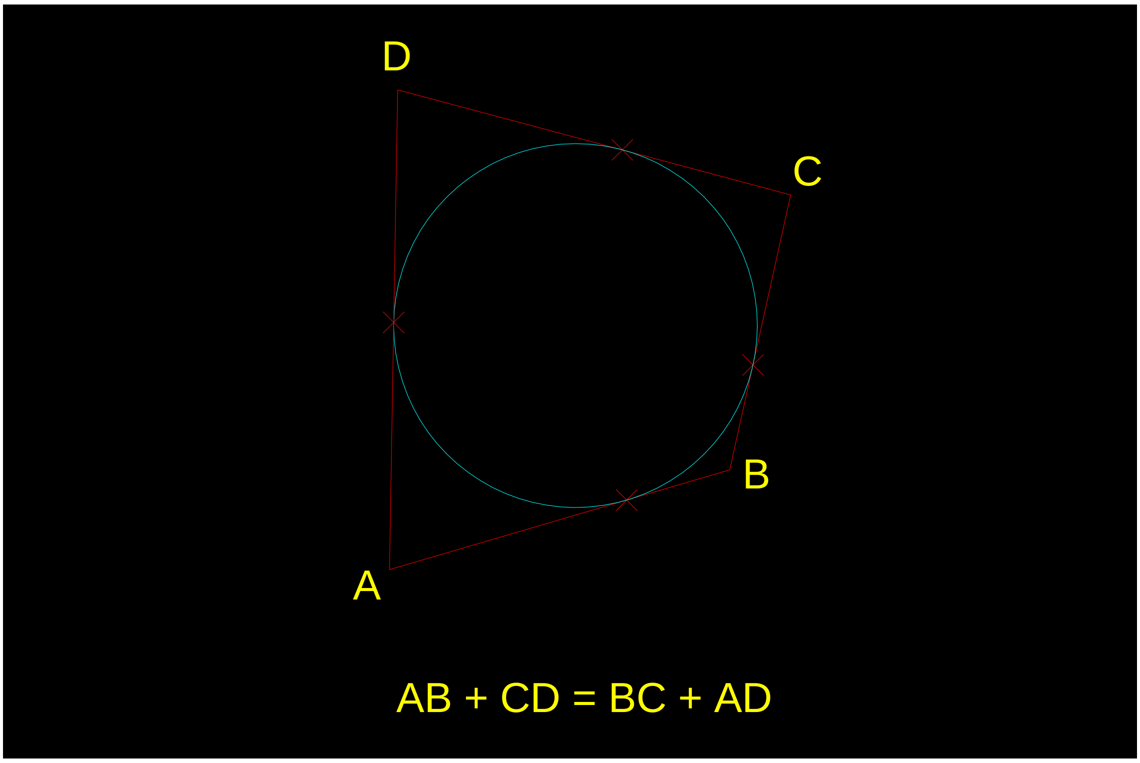

Figura 4.39 – Cuadrilátero circunscriptible.

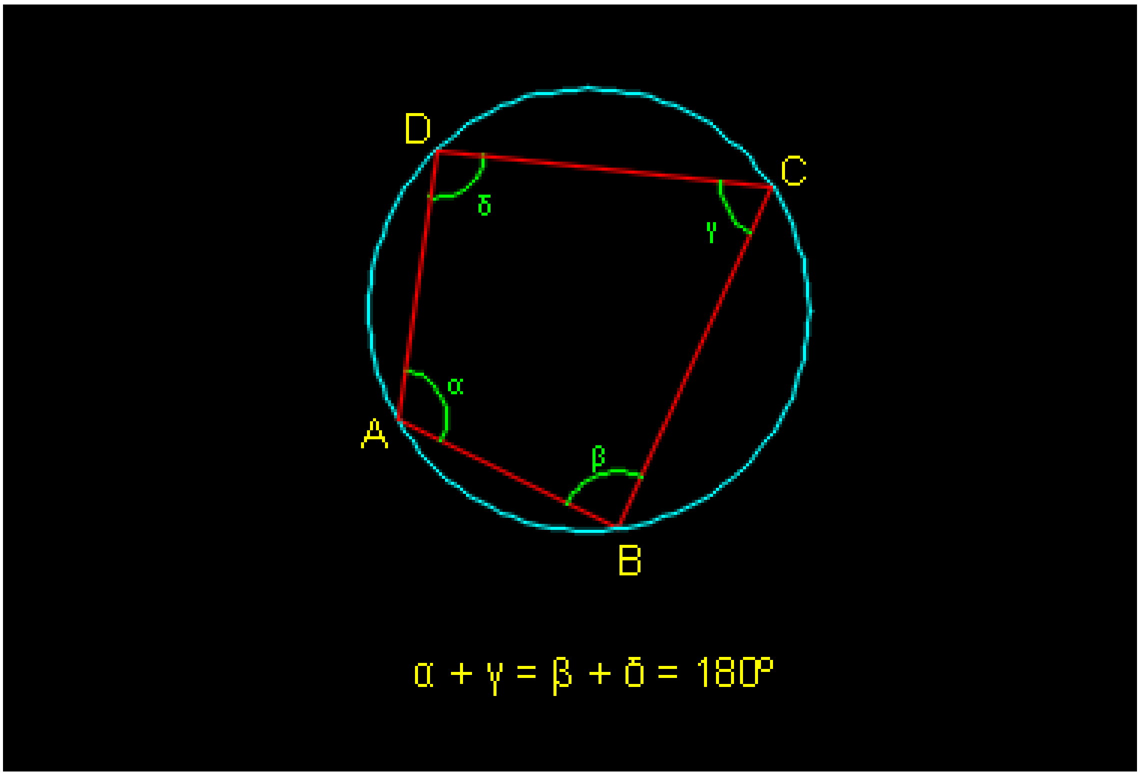

Figura 4.40 – Cuadrilátero inscriptible.

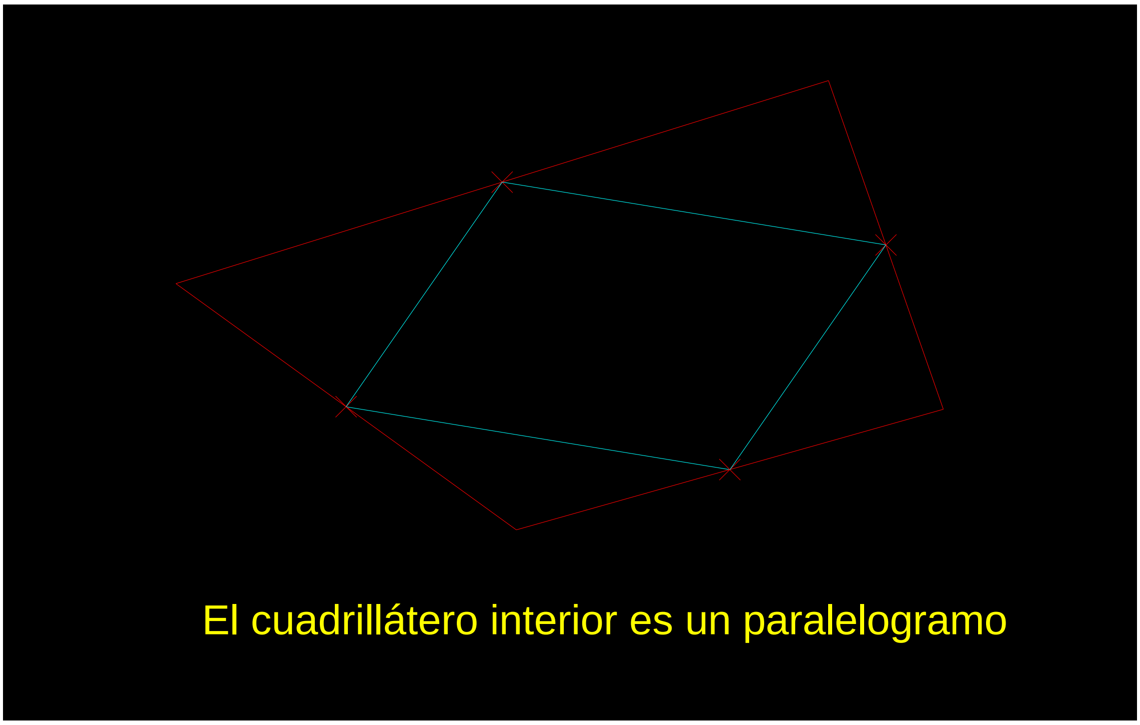

Figura 4.41 – Paralelogramo formado por la unión de

los puntos medios de un cuadrilátero.

4.5 – Polígonos Regulares

Un polígono regular es una figura plana convexa delimitada por una serie de lados, de forma que éstos son todos son iguales, y además todos los ángulos que definen son iguales.

Según el número de lados (n) se denominan:

Triángulo equilátero (n = 3), cuadrado (n = 4), pentágono regular (n = 5), hexágono regular (n = 6), heptágono regular (n = 7), octógono regular (n = 8), eneágono regular (n = 9), decágono regular (n = 10), endecágono regular (n = 12), dodecágono regular (n = 13), etc.

La notación habitual es similar a la de los cuadriláteros. Los vértices se denotan con letras mayúsculas, y lados con las dos letras de los vértices que el lado une. Los ángulos se denotan con la letra correspondiente al vértice.

En un polígono podemos encontrar, además, los siguientes elementos:

Diagonales: son los segmentos que unen dos vértices no consecutivos entre sí. Como puede comprobarse, el triángulo equilátero no posee ninguna diagonal, mientras que el cuadrado y el pentágono regular son los dos únicos polígonos regulares en los que se cumple que sus diagonales son todas iguales. En los demás polígonos, no todas sus diagonales son iguales.

Centro del polígono: es el punto interior (O) del polígono que equidista de todos sus vértices. Por tanto, el segmento que une el centro del polígono con cualquiera de los vértices coincidirá con el radio de la circunferencia circunscrita a él.

Apotemas: son los segmentos que unen el centro del polígono con el punto medio de cualquier lado. Por tanto, la apotema coincide siempre con el radio de la circunferencia inscrita a dicho polígono.

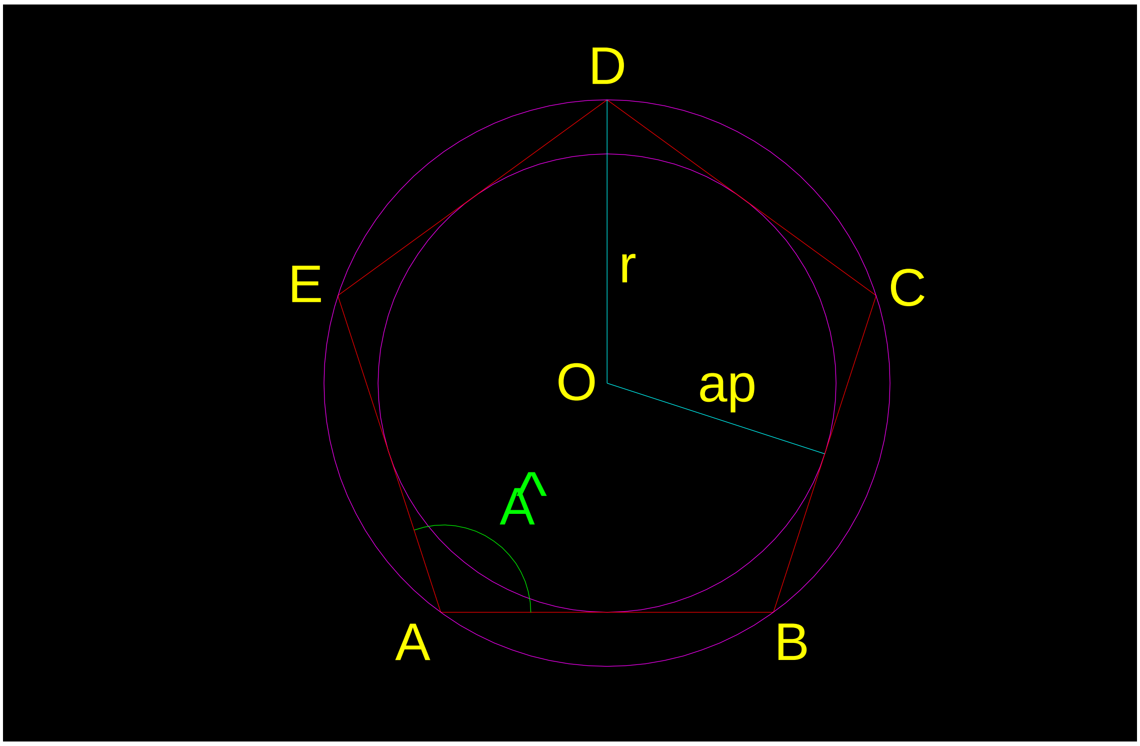

Figura 4.42 – Elementos de un polígono regular.

Los polígonos regulares son interesantes porque cumplen una serie de propiedades interesantes. Entre ellas, podemos citar las siguientes:

1) El ángulo central de un polígono regular se obtiene al dividir 360° entre el número de lados que lo componen.

2) La suma de los ángulos interiores de un polígono es igual al producto de 180° por el número de lados menos dos.

3) La suma de los ángulos exteriores de un polígono es de 360°.

4) Un polígono se puede descomponer en tantos triángulos como lados tiene menos dos.

5) El número de diagonales (N_d) de un polígono viene dado por la siguiente fórmula:

$$N_d = (n-3) \cdot {}^{n}/_{2}$$

siendo n el número de lados del polígono.

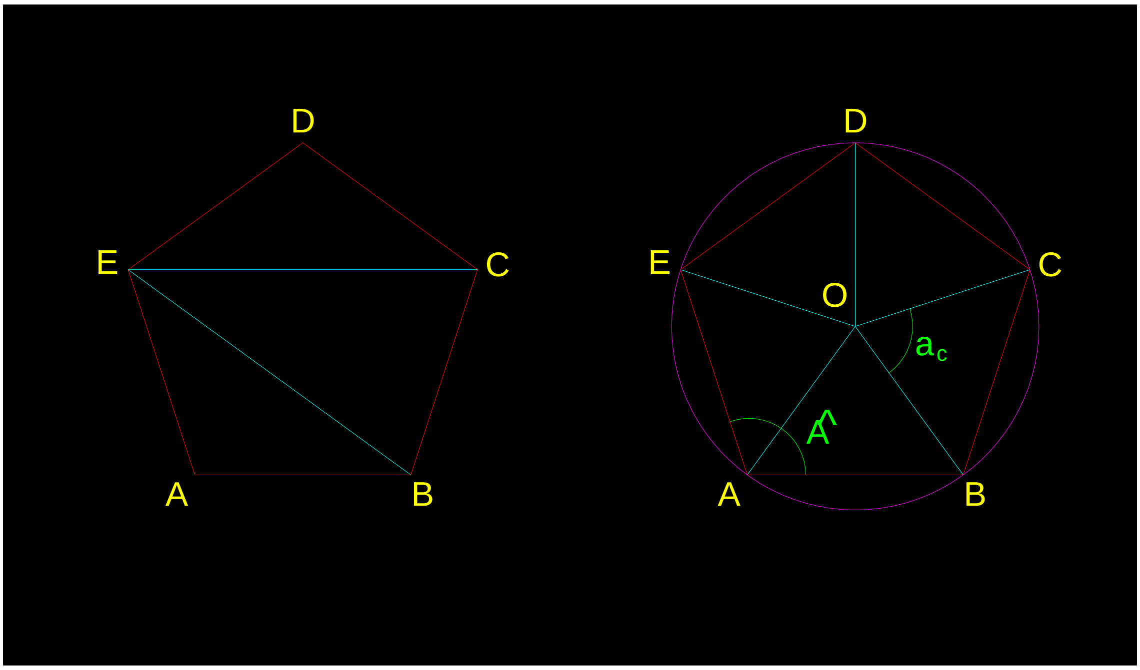

Figura 4.43 – Algunas propiedades de los polígonos regulares.

En cuanto a la construcción geométrica de polígonos regulares, éstos pueden construirse de varias maneras. La primera es inscribirlos en una circunferencia de radio conocido. La segunda es construirlos a partir de la medida de su lado. La última forma sería constuirlos a partir de la circunferencia inscrita en el polígno, es decir, realizar el polígono regular que circunscribe a una determinada circunferencia de radio conocido.

El primer método es el más habitual, y suele ser la forma más sencilla de hacerlo. El segundo método también puede ser de utilidad, mientras que es bastante menos habitual construirlos por el tercer y último método.

A continuación veremos algunos pocos ejemplos que ilustran como construir determinados tipos de polígonos con el primer (inscritos en una circunferencia) y el segundo método (dado el lado). En realidad, dada la ubicuidad de las herramientas CAD que permiten construir polígonos de cualquiera de las tres formas de manera casi inmediata, no suele ser habitual tener que recurrir a estas técnicas, a menudo tediosas, para construir polígonos regulares, por lo que su utilidad práctica es cada vez menor.

4.5.1 – Polígonos Regulares Inscritos en Una Circunferencia

4.5.1.1 – Hexágono Regular y Triángulo Equilátero

El hexágono regular es el único polígono regular en el que se cumple que su lado es igual al radio de la circunferencia circunscrita a él. Esto provoca que su construcción, conocido el lado o el radio de la circunferencia que lo circunscribe, sea la misma.

Para realizar un hexágono regular debemos simplemente trazar la circunferencia de radio deseado para la inscribir en ella el hexágono (o de radio igual al lado deseado), y dibujar sobre ella un diámetro cualquiera AD. Trazando dos arcos de radio igual al de la circunferencia pero centrados en A y en D, obtendremos cuatro puntos de corte B, C, E, y F, que junto con A y D se corresponderán con los vértices del hexágono.

Si en lugar de unir todos los puntos del hexágono, unimos puntos de manera alterna, obtendremos el triángulo equilátero inscrito en la circunferencia.

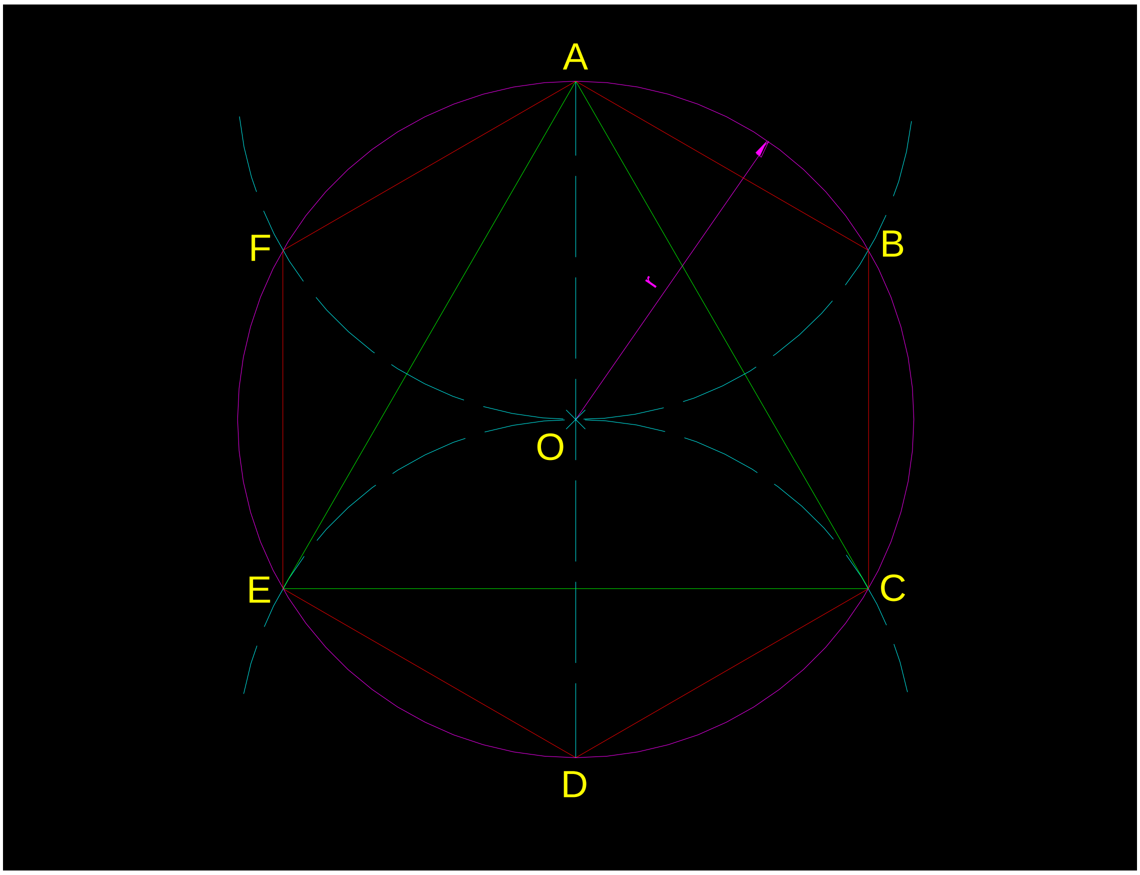

Figura 4.44 – Construcción del hexágono regular y el triángulo equilátero inscritos en una circunferencia de radio conocido.

4.5.1.2 – Cuadrado y Octógono Regular

El cuadrado es aún más sencillo de dibujar. Sólo debemos trazar dos diámetros perpendiculares entre sí en la circunferencia de radio deseado. Uniendo los puntos de corte de dichos diámetros con la circunferencia, obtenemos el cuadrado.

Podemos, además, construir el octógono regular a partir del cuadrado, simplemente trazando las mediatrices de los lados del cuadrado, y buscando los puntos de corte de éstas con la circunferencia. Esos puntos de corte junto con los vértices del cuadrado, formarán el octógono regular inscrito en dicha circunferencia.

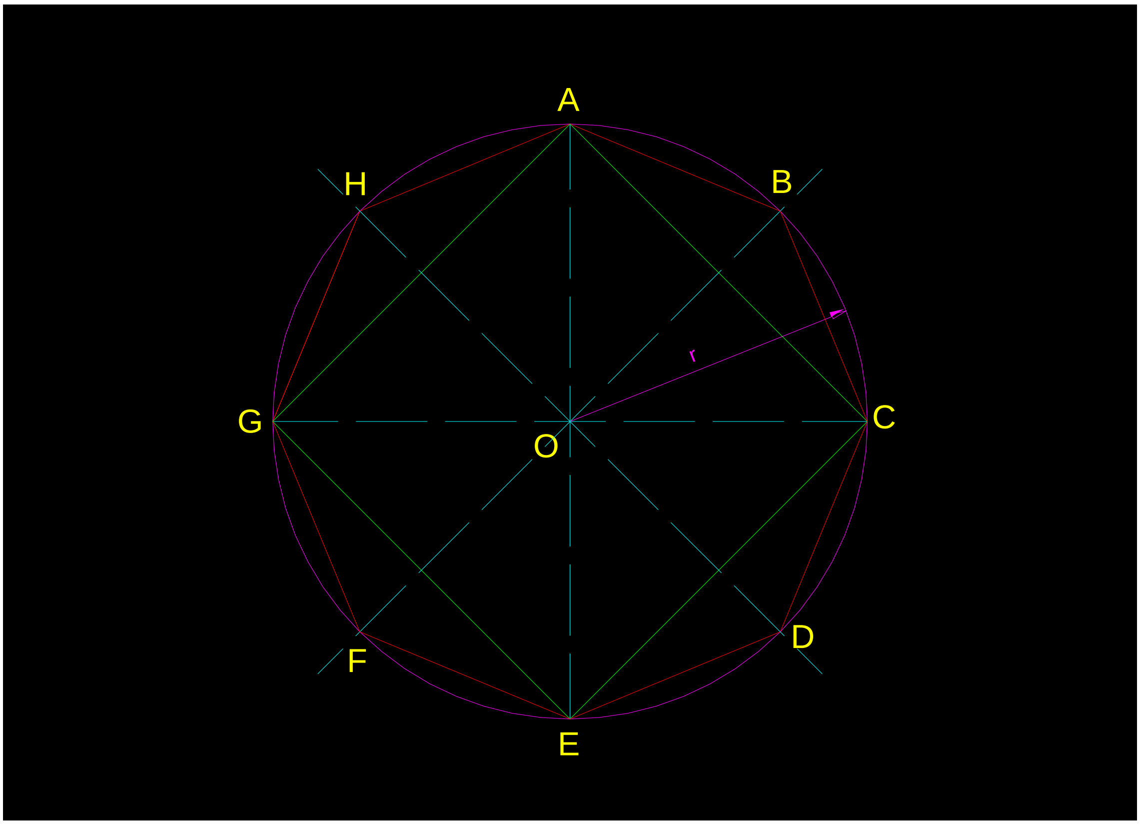

Figura 4.45 – Construcción del cuadrado y el octógono regular inscritos en una circunferencia de radio conocido.

4.5.1.3 – Construcción de un Polígono Regular de 2n Lados

La situación que se da en el octógono (n = 8) con respecto al cuadrado (n = 4) es generalizable para construir polígonos de 2n lados a partir de un polígono de n lados.

Siempre que tengamos un polígono regular de n lados, podremos construir uno de 2n lados trazando las mediatrices de los lados del polígono hasta prolongarlas en un punto que corte a la circunferencia. Dichos puntos de corte, junto con los vértices del polígono de n lados, determinarán el polígono regular de 2n lados.

Por tanto, a partir de un héxagono regular, podríamos construir polígonos de 12, 24, 48, etc. lados. A partir del cuadrado podríamos construir polígonos regulares de 8, 16, 32, etc. lados. Y así sucesivamente.

4.5.1.4 – Pentágono Regular

La construcción de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio conocido es algo más elaborada.

Para ello debemos trazar en la circunferencia de centro O, dos diámetros perpendiculares AF y GH. Haciendo centro en el punto medio del segmento OH (al que llamaremos I), debemos trazar un arco de radio IA. Este arco cortará al segmento HG en el punto J.

El segmento AJ es igual al lado del pentágono. Por tanto, sólo debemos transportar esa distancia, desde A, por la circunferencia, para obtener el pentágono regular ABCDE.

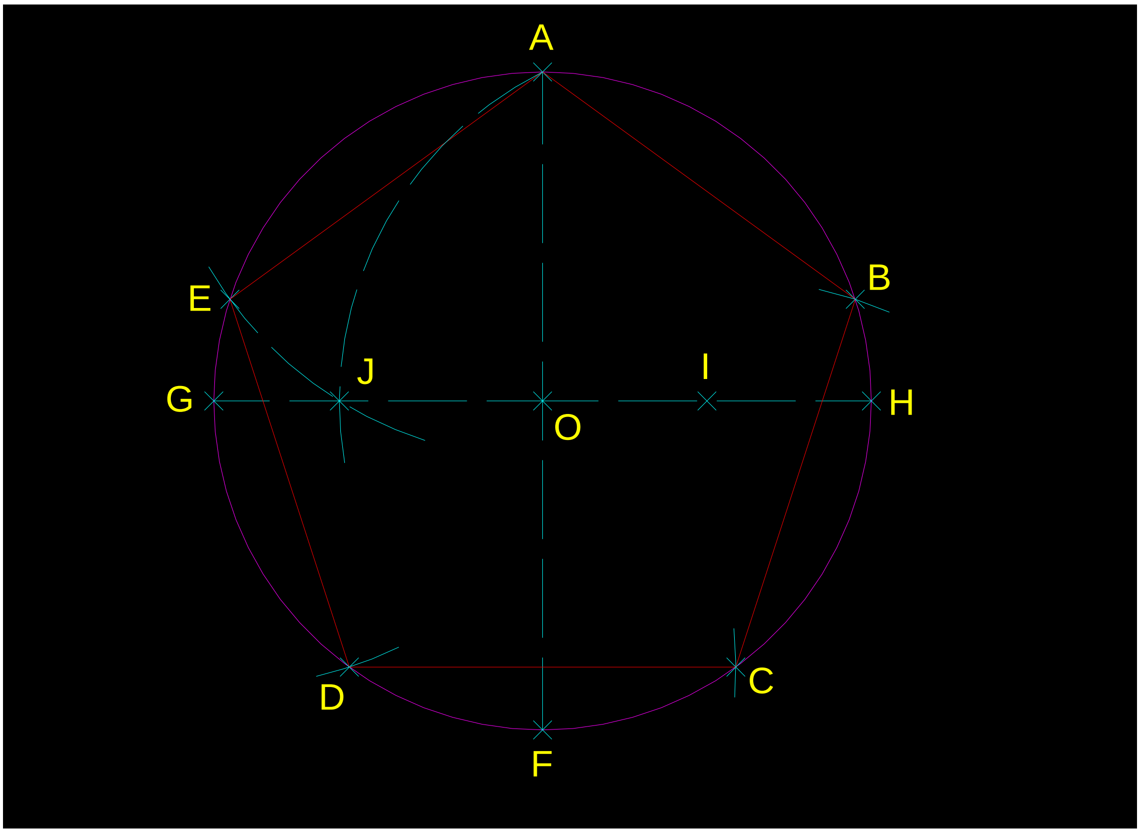

Figura 4.46 – Construcción del pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio conocido.

4.5.1.5 – Método General Aproximado

Como se puede observar, cada tipo de polígono requiere una construcción distinta. Aunque con los métodos vistos (y a partir de la posibilidad de duplicar el número de lados fácilmente) ya podríamos construir polígonos regulares inscritos en una circunferencia con n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 24, 32, 40, 48, etc., sería deseable encontrar una manera de dibujarlos de forma general, ya que es obviamente imposible recordar todos los métodos para construir polígonos regulares.

Existen métodos análiticos para realizar este proceso de forma general, pero son complejos. Sin embargo, también disponemos de métodos geométricos generales para realizar este proceso, aunque desafortunadamente son aproximados. A continuación, podemos ver el método general más utilizado para construir un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio conocido.

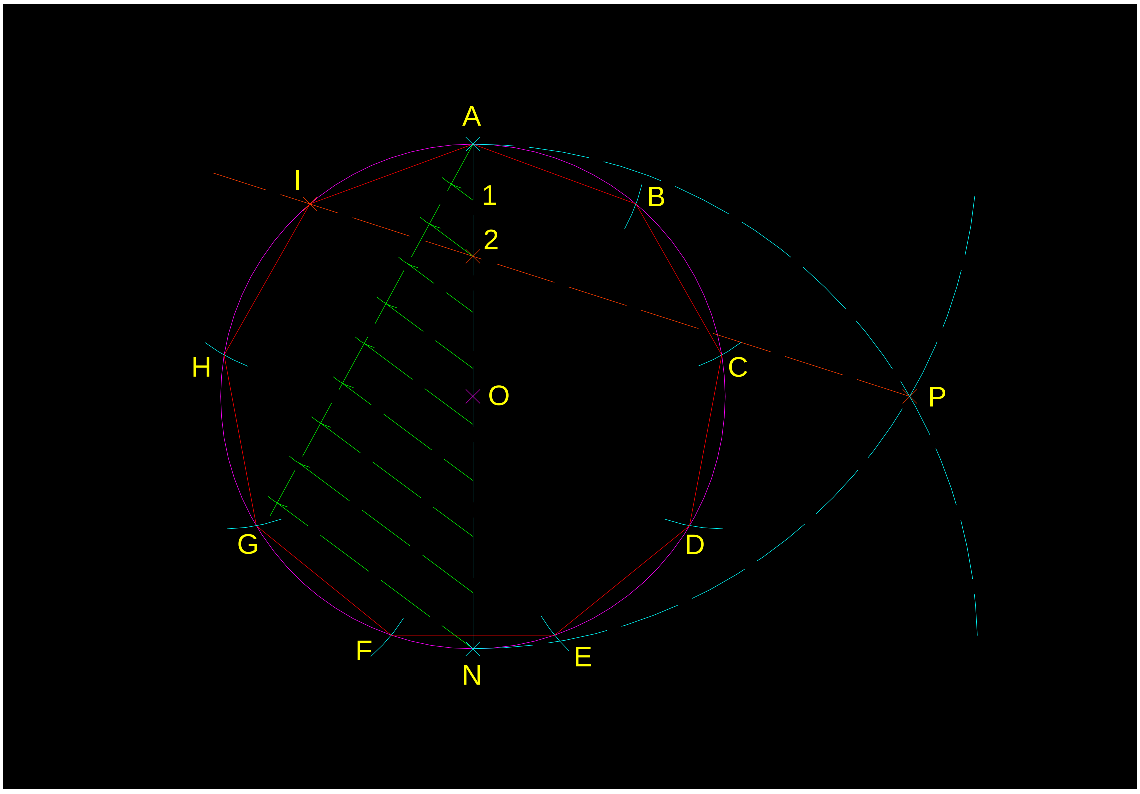

Figura 4.47 – Construcción de un eneágono regular inscrito en una circunferencia de radio conocido, mediante un método general aproximado.

El método consiste en trazar un diámetro AN en la circunferncia y dividirlo en n partes. Posteriormente, trazando dos arcos de radio igual al diámetro AN, y centrados en A y en N, obtendremos el punto de corte de ambos arcos, que llamaremos P.

Uniendo el punto P con el punto 2 (que corresponde a la segunda división del diámetro) y prolongando el segmento P2, obtendremos que dicha recta corta en el punto I con la circunferencia. El segmento AI es aproximadamente el lado del polígono. Ahora sólo debemos transportar esa distancia por la circunferencia.

Independientemente del número de lados, se escoge siempre el punto 2. Lo único que cambia es el número de divisiones del diámetro.

Es importante recalcar que el método es aproximado, por lo que conviene transportar la distancia AI a ambos lados del punto A hasta que sólo nos quede una distancia que transportar. Es última no tendrá la misma medida que las demás, ya que el lado AI obtenido es un valor parecido al del lado del polígono regular, pero no igual.

4.5.2 – Polígonos Regulares Dado el Lado

4.5.2.1 – Triángulo Equilátero, Cuadrado y Hexágono Regular

El hexágono regular se construye de la misma forma dado el lado, que inscrito en una circunferencia, porque el radio (de la circunferencia en la que se inscribe el polígono) y el lado del hexágono coinciden.

El triángulo equilátero se puede realizar fácilmente trazando segmentos de la longitud deseada que formen 60° entre sí.

La construcción de un cuadrado conocido el lado es trivial, dado que sus ángulos son siempre rectos.

4.5.2.2 – Otros Polígonos Regulares

Aunque un polígono de n lados inscrito en una circunferencia se puede obteber a partir del polígono de n/2 lados (inscrito en la misma circunferencia, siempre que n sea par), no es posible aplicar la misma regla cuando lo que se proporciona es el lado y no el radio de la circunferencia.

Sin embargo, al igual que en el caso de los polígonos regulares inscritos, existen métodos para construir polígonos regulares concretos (pentáganos, heptágonos, octógnos, eneágonos, etc.) dado el lado. Sin embargo, creemos que el lector puede consultar estos métodos en los cientos de referencias que existen en la web al respecto.

Pondremos, simplemente como ejemplo, el octógono regular dado el lado. Este polígono se puede construir con el método propuesto en la siguiente figura.

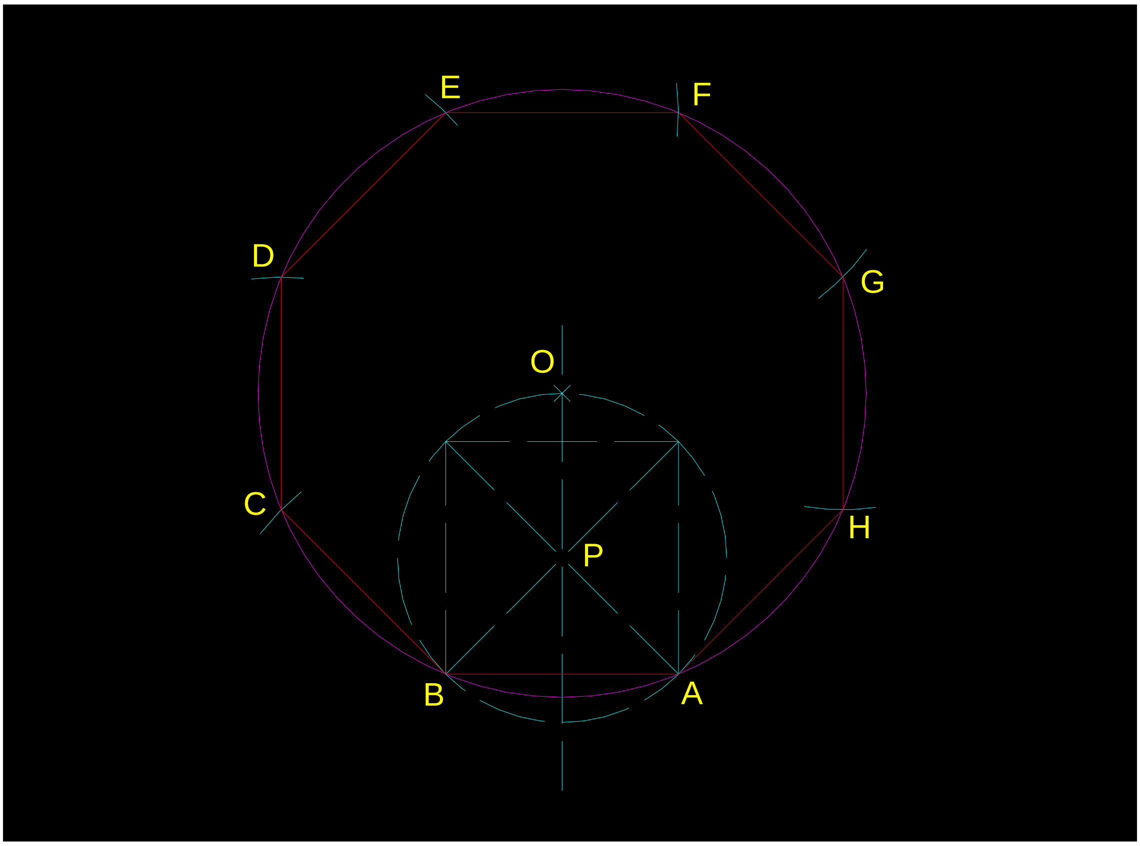

Figura 4.48 – Construcción de un octógo regular dado el lado.

4.5.2.3 – Método General Aproximado

Al igual que en el caso de los polígonos inscritos en una circunferencia, también existe un método general aproximado para construir polígonos regulares dado el lado de los mismos.

Emplearemos el mismo ejemplo (n = 9) que en el caso anterior para ejemplificarlo. Para ello debemos hallar la mediatriz del segmento AB que representa el lado del polígono que queremos construir. Sobre esta mediatriz van a estar situados los centros de las circunferencias circunscritas al polígono que deseamos constuir. Por tanto, lo "único" que debenos hacer es encontrar su centro sobre esta mediatriz.

Si trazamos un arco con centro en B y radio AB, encotraremos un punto, que llamaremos 6, y que sería exactamente el centro del hexágono regular de lado AB. Si hacemos centro en 6 y trazamos una circunferencia de radio A6, encontraremos el punto 12, que sería exactamente el centro del dodecágono regular de lado AB.

Por tanto, siguiendo este razonamiento, si dividimos el segmento que va del punto 6 al punto 12 en seis partes iguales, deberemos encontrar el punto 9, que es el centro del eneágono que buscamos. Esto en realidad es una aproximación, ya que no es exactamente así, pero la aproximación es bastante buena.

Trazando la circunferencia con centro en 9 y radio A9, sólo debemos trasportar la distancia AB por dicha circunferencia para encontrar los vértices de, en este caso, el polígono de n = 9 lados.

El razonamiento es extensivo para puntos superiores a 12, aunque el error cometido cada vez es mayor, ya que el centro del polígono de 18 lados no es el punto que está al triple de distancia del de 6 lados, ni el centro del de 24 lados está exactamente al cuádruple de distancia que el del hexágono.

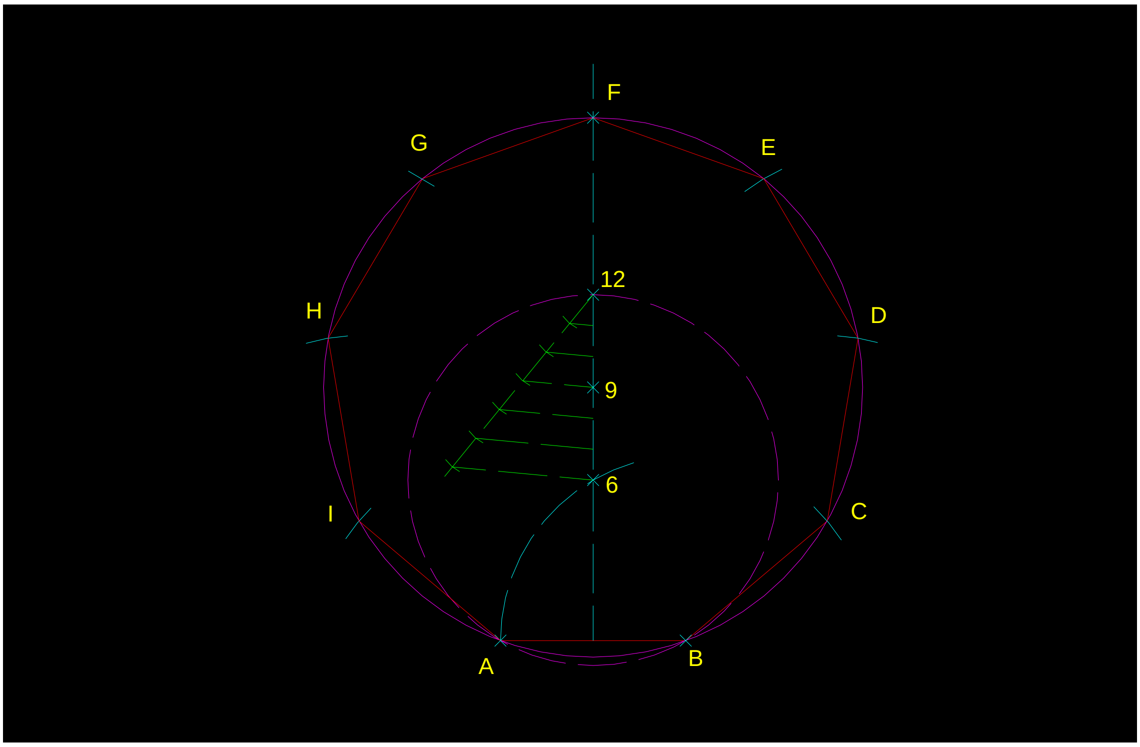

Figura 4.49 – Construcción de un eneágono regular dado el lado, mediante un método general aproximado.

4.5.3 – Polígonos Regulares Estrellados

Además de poder construir polígonos regulares convexos, como los que hemos visto hasta ahora, también podemos formar polígonos regulares con forma de estrella. A estos polígonos se les denomina polígonos regulares estrellados.

Se definen como polígonos cóncavos, con forma de estrella, que resultan de trazar en una circunferencia todas las cuerdas de longitud constante cuyos extremos sean vértices no consecutivos de un polígono regular convexo inscrito en ella.

Para dibujar un polígono cóncavo estrellado que sea regular, lo que debemos realizar primero es un polígono regular convexo inscrito en una circunferencia. Sobre dicha circunferencia, si unimos vértices del polígono que no sean consecutivos, saltando siempre el mismo número de vértices de una cuerda a la otra, obtendremos un polígono regular estrellado.

Si tomamos como ejemplo el pentágono, partiendo de un vértice cualquiera, por ejemplo el vértice 1, y uniendo el vértice 1 con el 3, el 3 con el 5, el 5 con el 2, el 2 con el 4, y finalmente el 4 con el 1, obtendremos una estrella de cinco puntas. En este caso, hemos realizado cuerdas con un salto de un vértice (ya que unimos cada vértice con el siguiente al siguiente).

Podemos hacer algo similar con un heptágono, realizando cuerdas con un salto de, por ejemplo, 3 vértices, y obtendremos otra estrella diferente.

En general, podemos hacer esto de varias maneras, aunque, como veremos ahora, el número de posibilidades es reducido, ya que el número de saltos ha de ser tal que, en algún momento, la figura acabe donde comenzó. No todos los números de salto permiten tal cosa.

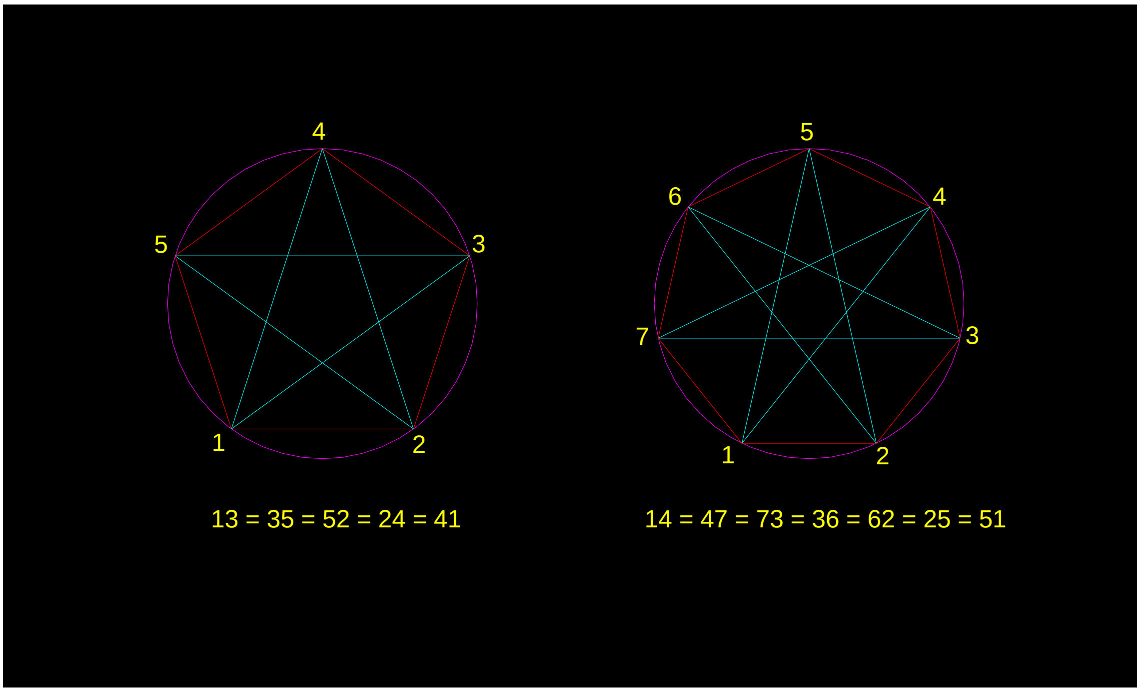

Figura 4.50 – Dos polígones regulares estrellados de 5 y 7 puntas.

4.5.3.1 – Propiedades

En un polígono regular estrellado podemos definir las siguientes propiedades:

Número (n): es la cantidad de puntas (vértices) que tiene el polígono. Suele coincidir con el numero de lados del polígono regular convexo asociado, pero puede no hacerlo si el número de saltos es tal que algunos vértices no son nunca visitados.

Género (g): es el número de cuerdas empleadas para el trazado del polígono. Coincide con el número, ya que por cada punta que se genera en el polígono estrellado es necesaria una cuerda.

Paso (p): es el número de lados que comprende cada cuerda del polígono regular convexo asociado al polígono estrellado. Es decir, es el número de saltos que debemos dar al dibujar cada cuerda para llegar al vértice que forma la siguiente punta.

Especie (e): es el número de vueltas que debemos dar a la circunferencia para completar el polígono. El paso y la especie coinciden en general, excepto en el caso en el que no se utilicen todos los vértices del polígono regular asociado para formar el polígono regular estrellado.

4.5.3.2 – Número Disponible de Polígonos Regulares Estrellados

Con cada polígono regular convexo se puede dibujar un número determinado (y sólo eses) de polígonos estrellados, que pueden coincidir o no con el número de puntas. Es posible calcular ese número de la siguiente forma:

Se divide el número de lados (llamémosle n) del polígono regular convexo entre dos, y los valores menores del resultado, que no sean divisores del número de lados del polígono regular convexo, indicarán el paso de los polígonos estrellados regulares que se pueden construir.

Ejemplo con n = 5:

Si partimos de un pentágono regular convexo, n/2 es 2,5; por tanto, se podrá dibujar un único polígono regular estrellado de paso 2 (puesto que 2 no es divisible entre 5), que es la estrella de 5 puntas de paso 2.

Ejemplo con n = 8:

Si partimos de un octógono regular, y le aplicamos la fórmula anterior, observamos que n/2, en este caso, es 4; por tanto, se podrán dibujar un solo polígono estrellado, ya que sólo el 3 es n divisor de 8 y además menor que 4.

Ejemplo con n = 15:

Si partimos de un polígono regular convexo de quince lados, y le aplicamos lo que acabamos de exponer, observamos que n/2, en este caso, sería 7.5; por tanto, se podrán dibujar cuatro polígonos estrellados, ya que los valores no divisores de 15 menores de 7.5 son: 2, 4, 6 y 7. Así, tendremos una estrella de quince puntas de paso 2 (arriba a la izquierda en la figura), una de quince puntas de paso 4 (arriba a la derecha), otra de sólo 5 puntas de paso 6 (abajo a la izquierda) y una de quince puntas de paso 7 (abajo a la derecha).

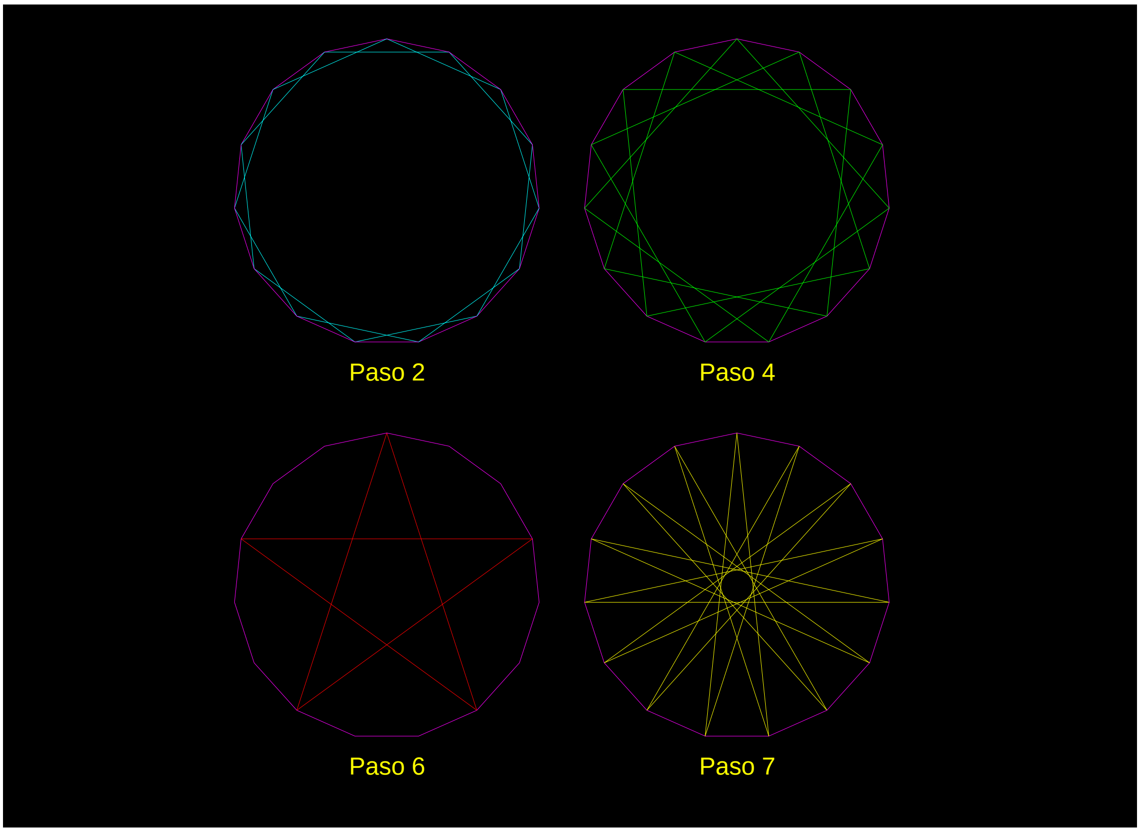

Figura 4.51 – Polígonos regulares estrellados asociados a un pentadecágono regular (n = 15).

Podemos observar que la estrella de 5 puntas de paso 6 asociada al pentadecágono regular, es la misma que la estrelladle 5 puntas de paso 2 asociada a un pentágono regular. En este caso, el paso y la especie coincidirían si consideramos que el polígono estrellado se ha formado a partir del pentágono (paso 2, especie 2), pero no coincidirían si consideramos que viene del pentadecágono (paso 6, pero especie 2). Como vemos, en el caso de que la estrella formada no utilice todos los vértices del polígono regular asociado, el paso y la especie no coincidirán, ya que, el polígono regular estrellado se podría formar con otro polígono regular asociado de menos lados.

La construcción que hemos visto aquí serviría para construir polígonos regulares estrellados inscritos en una circunferencia de radio conocido. Si quisiéramos realizar un polígono regular dada la longitud de la cuerda (y no dado el radio de la circunferencia), tendríamos que realizar una homotecia (concepto que veremos posteriormente).

4.5.4 – Polígonos No Regulares

La construcción de un polígono no regular no sigue ningún procedimiento geométrico dado, puesto que al ser irregular, cada polígono tendrá una forma distinta. Sin embargo, lo que sí se puede afirmar es que, en un polígono de n lados, el número de datos (ángulos o distancias) necesarios para poder construirlo es siempre 2n – 3.

Si aplicamos dicha fórmula al triángulo, los datos necesarios para construir un triángulo serán 3. Si la aplicamos al cuadrilátero, los datos necesarios para poder construir un cuadrilátero serán 5.

Sin embargo, existen casos particulares en los que aparantemente esta regla se infringe. Pensemos en el caso del cuadrado: bastará con saber el valor del lado, o el de la diagonal, para poder construirlo. Por tanto, parece que sólo necesitamos 1 dato, y no 5. Esto es debido a que, al tener lados y ángulos iguales, los datos se repiten y de los 5 necesarios, disponemos de 4 datos implícitos (sabemos que siempre hay 4 ángulos rectos). Por ello, la fórmula sigue siendo válida, y lo es para todo polígono.