Tema 4

Ecuaciones diferenciales ordinarias.

Muchos problemas básicos de las ciencias experimentales pueden ser modelados usando ecuaciones donde aparecen involucradas una función junto con sus derivadas. En este capítulo nos centraremos en el estudio de este tipo de ecuaciones y veremos cómo pueden ser resueltas utilizando lo ya estudiado en los temas anteriores.

Comenzaremos definiendo lo que entenderemos por ecuación diferencial ordinaria y dando varios ejemplos clásicos de su uso en las ciencias experimentales. Posteriormente estudiaremos cómo resolver algunos tipos de éstas ecuaciones.

4.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias.

Dada una función $y = f(x)$ vamos a estudiar ecuaciones donde aparecen mezcladas la variable x, la función y y algunas de sus derivadas $y'(x), y''(x)$... Ejemplos de este tipo de ecuaciones son

$$xy'(x) = y(x), \quad y''(x) = y(x)y'(x), \quad y'''(x)^2 = \frac{x + y'(x)}{1 + x^2}.$$

Definición 46 (Ecuación diferencial ordinaria)
Llamaremos ecuación diferencial ordinaria (abreviado EDO) a una ecuación que involucra a una variable independiente x, una función $y(x)$ y una o varias derivadas de $y(x)$.

Llamaremos *orden* de una EDO al orden de la mayor derivada en la ecuación. Así, por ejemplo, las EDOs

$$2x + yy' = 0, \quad x^2 \frac{d^3y}{dx^3} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 1, \quad \frac{d^2y}{dx^2}\cos x + \cos y = 0,$$

tienen órdenes respectivos 1, 3 y 2.

Además, una EDO de orden n diremos que es *lineal* si se puede escribir de la forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x),$$

donde las a_i, b son funciones que solo dependen de x.

Ejemplos de EDOs lineales son las siguientes

$$\operatorname{sen} x\, y'' + y = e^x, \quad \frac{1}{1+x^2}\frac{d^3y}{dx^3} + (x^4 - 1)\frac{dy}{dx} = 0, \quad x\frac{d^4y}{dx^4} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x^4y = x.$$

Obsérvese, sin embargo, que las siguientes EDOs no son lineales

$$yy' = 1, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0, \quad \cos x \,\frac{dy}{dx} + \cos y = x.$$

Por otro lado, necesitamos saber qué entenderemos como solución de una EDO.

Definición 47 (Solución de una EDO)
Dada una EDO de orden n, llamaremos solución de esta EDO a una función $y = f(x)$ definida en un intervalo I y que tiene al menos n derivadas continuas en el intervalo I, de forma que cuando sustituimos $y = f(x)$ y sus derivadas en la EDO se cumple la ecuación en todo el intervalo.

Consideremos la EDO $y' + xy = x$, entonces es fácil comprobar que la función $y = 1 + e^{-\frac{x^2}{2}}$ es solución en todo $\mathbb{R}$. De hecho, para cualquier constante $c \in \mathbb{R}$ la función $y = 1 + ce^{-\frac{x^2}{2}}$ es una solución de la EDO en todo $\mathbb{R}$. Es decir, esta EDO tiene infinitas soluciones en $\mathbb{R}$.

Para la EDO $y'' + y = 0$ las funciones $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$ son soluciones de la ecuación en todo $\mathbb{R}$. Y, en general, dadas constantes reales c_1, c_2 cualesquiera, la función $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$ es solución en todo $\mathbb{R}$ de la EDO.

Observemos que la función $y = 1/x$ es solución de la EDO $y' + y^2 = 0$, pero no está definida en todo $\mathbb{R}$, por lo que podremos decir que es una solución en el intervalo $(-\infty, 0)$ y que es solución en el intervalo $(0, \infty)$.

Como hemos visto, el conjunto de soluciones de una EDO puede ser infinito. A veces nos interesa conocer solamente alguna solución de la EDO y no todas, por lo que se prefijan algunas condiciones previas sobre la solución o soluciones buscadas. Un caso especialmente interesante es el siguiente

Definición 48 (Problema de valores iniciales)
Dada una EDO de orden n, un intervalo I y un punto $x_0 \in I$, llamaremos problema de valores iniciales (abreviado PVI) al problema de encontrar las funciones que cumplen la EDO de orden n anterior en el intervalo I y que además satisfacen las condiciones *iniciales*

$$y(x_0) = c_0, \; y'(x_0) = c_1, \ldots, \; y^{(n-1)}(x) = c_{n-1},$$

donde los c_i son números prefijados.

El PVI en $\mathbb{R}$ dado por

$$\begin{cases} 2yy' = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

tiene como solución a la función $y = e^{x/2}$. De hecho puede comprobarse que es la única solución al PVI.

De manera análoga el PVI en $\mathbb{R}$ que tiene la misma EDO anterior pero diferente condición inicial

$$\begin{cases} 2yy' = e^x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

tiene como única solución a la función $y = -e^{x/2}$.

La EDO de segundo orden $y'' - y = x$ tiene por soluciones a las funciones $y = -x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ para cualesquiera constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Así, el PVI en $\mathbb{R}$ dado por

$$\begin{cases} y'' - y = x \\ y(1) = 0, \; y'(1) = 0 \end{cases}$$

tiene como única solución $y = -x + e^{x-1}$.

Hay que tener en cuenta que aunque en los ejemplos anteriores los PVIs solo tienen una solución, podría ocurrir en otros casos que haya más de una.

4.2 Modelos matemáticos inspirados en problemas de las ciencias experimentales.

En muchas ocasiones es deseable describir en términos matemáticos el comportamiento de algunos sistemas o fenómenos de la vida real, tanto de tipo físico, químico, sociológico, económico... La descripción matemática de un sistema de fenómenos se llama *modelo matemático* y se construye con ciertos objetivos, como el de entender qué ocurrirá en el futuro o qué pasó en el pasado. Por ejemplo, podemos desear entender los mecanismos de cierto ecosistema al estudiar el crecimiento de la población animal en ese sistema, o podemos desear datar fósiles y analizar el decaimiento de una sustancia radiactiva ya sea en el fósil o en el estrato en que éste fue descubierto.

Para la realización de un modelo matemático sobre un sistema, primero hay que identificar todas las variables que ocasionan que el sistema cambie y posteriormente establecer de qué manera estas variables afectan al sistema.

Es claro que cuantas más variables que afectan al sistema se añadan mejor resolución tendrá el modelo que se obtenga. Sin embargo, el modelo será cada vez más complejo cuantas más variables entren en juego. Por ello, a veces un modelo de baja resolución (es decir, con pocas variables) es suficiente para determinar de forma aproximada la solución de nuestro problema.

A continuación estudiaremos algunos modelos matemáticos clásicos en diferentes áreas de las Ciencias Experimentales.

4.2.1 Dinámica poblacional.

El economista Thomas Malthus hizo uno de los primeros intentos para modelar el crecimiento de una población. Así, supuso que la razón de la población en un cierto tiempo t es proporcional a la población total en ese tiempo. Es decir, si llamamos $P(t)$ a la población en el tiempo t entonces se obtiene que

$$\frac{dP}{dt} = k\,P,$$

donde k es una constante que depende de la población estudiada.

Aunque este modelo es de baja resolución, aún así sigue siendo útil para el estudio de algunas poblaciones a tiempo corto, como, por ejemplo, poblaciones de cultivos de bacterias.

4.2.2 Decaimiento radiactivo.

El núcleo de algunos átomos están formados por combinaciones de protones y neutrones inestables, es decir, los átomos se desintegran o se convierten en átomos de otras sustancias. En estos casos se dice que los núcleos son radiactivos. Por ejemplo, el radio Ra-226 intensamente radiactivo se transforma en gas radón Rn-222.

Para modelar el fenómeno de decaimiento radiactivo, dada una cantidad $A(t)$ de una sustancia en el tiempo t, se supone que la razón con la que los núcleos se desintegran es proporcional a la cantidad existente, esto es,

$$\frac{dA}{dt} = k\,A,$$

donde k es una constante que depende de la sustancia estudiada.

4.2.3 Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton.

La ley empírica de enfriamiento/calentamiento de Newton establece que la rapidez con la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea (la temperatura ambiente).

Si denotamos por $T(t)$ a la temperatura del cuerpo en el tiempo t y T_a a la temperatura del ambiente, entonces, la ley de enfriamiento/calentamiento de Newton determina que

$$\frac{dT}{dt} = k\ (T(t) - T_a),$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

4.2.4 Reacciones químicas.

En algunas reacciones químicas la rapidez con la que las moléculas de una sustancia A se descomponen es proporcional a la cantidad de sustancia que queda sin reaccionar. Así, si llamamos $c(t)$ a la cantidad de la sustancia A en el tiempo t entonces $dA/dt = kA$, donde k es una constante (dependiente de la sustancia A).

Un ejemplo de este tipo, llamada reacción de primer orden, está dada por la conversión del cloruro de terbutilo $(CH_3)_3CCl$ en alcohol t-butílico $(CH_3)_3COH$:

$$(CH_3)_3CCl + NaOH \longrightarrow (CH_3)_3COH + NaCl.$$

Solo la concentración de cloruro de terbutilo controla la rapidez de la reacción.

Sin embargo, en la reacción

$$CH_3Cl + NaOH \longrightarrow CH_3OH + NaCl,$$

la razón con la que avanza la reacción es proporcional al producto de las concentraciones de cloruro de metilo CH_3Cl y de hidróxido de sodio $NaOH$ que quedan.

Para describir en general una reacción de este tipo, conocida como reacción de segundo orden, supongamos que se combina una molécula de una sustancia A con una molécula de una sustancia B para formar una molécula de una sustancia C (más otras sustancias). Si $c(t)$ denota la cantidad de la sustancia C que se ha formado en el tiempo t y si a_0, b_0 son, respectivamente, las cantidades de las sustancias A y B en el momento inicial $t = 0$, entonces las cantidades de A y B en tiempo t son $a_0 - c(t)$ y $b_0 - c(t)$, respectivamente. Así, la razón de formación de C está dada por

$$\frac{dc}{dt} = k(a_0 - c)(b_0 - c),$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

4.2.5 Mezclas.

Supongamos que en un tanque mezclador tenemos 300 litros de agua con sal. Por otro lado, un grifo de entrada introduce 3 litros de agua por minuto, que tiene una concentración de 2 gramos por litro. La solución bien mezclada sale del tanque con la misma rapidez de 3 litros por minuto.

De esta manera, si denotamos por $A(t)$ a la cantidad de sal en el tanque al tiempo t, entonces la razón con la que $A(t)$ cambia viene dada por

$$\frac{dA}{dt} = (\text{razón de entrada de sal}) - (\text{razón de salida de sal}).$$

La razón de entrada de sal es de $(2g/l)\ (3l/min) = 6g/min$. Por otra parte, ya que la cantidad de agua en el tanque es constantemente de 300 litros, la razón de salida de sal es de $(\frac{A(t)}{300}\, g/l)(3l/min) = \frac{A(t)}{100}\, g/min$.

De esta manera,

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100}.$$

4.2.6 Cuerpos en caída y resistencia del aire.

Aunque a un cuerpo en caída en el vacío solo le afecta la fuerza de la gravedad, en general, cuando no se encuentra en el vacío, el aire ejerce una resistencia al movimiento en la caída de un cuerpo.

Así, el peso del cuerpo es una fuerza que actúa en la dirección de caída, mientras que la resistencia del aire actúa en dirección opuesta. La fuerza F_r dada por la resistencia del aire se denomina amortiguamiento viscoso y es proporcional a la velocidad del cuerpo, esto es, $F_r = kv$, donde k es una constante que depende del cuerpo y v su velocidad.

Así, la segunda ley del movimiento de Newton determina que la suma de las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo es igual a su masa m por su aceleración $a = \frac{dv}{dt}$, es decir,

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

O equivalentemente, si denotamos por $s(t)$ al espacio recorrido en el tiempo t entonces

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\frac{ds}{dt}.$$

4.3 EDOs de primer orden.

A lo largo de esta sección estudiaremos algunas clases de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y cómo encontrar sus soluciones.

Debemos tener en cuenta que en algunas ocasiones la solución $y(x)$ del problema nos aparecerá de forma implícita, esto es, por ejemplo podemos obtener soluciones del tipo

$$y^2 + 2xy + x^2 = 0, \qquad y + \cos y = x^3 - 1.$$

En el primer caso podremos despejar la función y en términos de x con lo que obtendremos su forma explícita $y = -x$, pero en el segundo caso no se podrá obtener la forma explícita de y.

4.3.1 EDOs separables.

Un caso especial de EDOs de primer orden son aquellas en las que la ecuación diferencial puede reescribirse de manera que un lado de la igualdad solo dependa de la función y y el otro lado solo de la variable x. Más concretamente,

Definición 49 (EDO separable)
Diremos que una EDO de primer orden es separable o que tiene variables separables si se puede escribir de la forma

$$g(y)\frac{dy}{dx} = h(x).$$

Por ejemplo, la ecuación $y' = e^{x-2y}\cos x$ es una EDO separable ya que se puede reescribir como $e^{2y}\frac{dy}{dx} = e^x \cos x$. Sin embargo, la EDO $y' = y^2 - \operatorname{sen} x$ no es separable.

Debe observarse que una ecuación del tipo $y' = f(y)g(x)$ puede reescribirse como una EDO separable de la forma $\frac{1}{f(y)}\,\frac{dy}{dx} = g(x)$, pero en este proceso hay que tener en cuenta que $f(y)$ no puede ser cero porque no podemos dividir por cero. Además, los números c para los cuales $f(c) = 0$ cumplen que la función constante $y(x) = c$ es una solución de la EDO, ya que sustituyendo en la EDO original cumplen la ecuación.

Así, por ejemplo, la EDO $y' = (1-y^2)x^2$ es separable ya que la podemos reescribir de la forma $\frac{1}{1-y^2}\,\frac{dy}{dx} = x^2$. Aquí hay que tener en cuenta que las funciones $y(x) = -1$, $y(x) = 1$ son dos soluciones de la EDO original; éstos son los valores donde $1-y^2 = 0$.

> **¿Cómo se resuelven las EDOs separables?**
>
> Dada la EDO $g(y)\frac{dy}{dx} = h(x)$, basta escribirla como $g(y)dy = h(x)dx$ e integrar a ambos lados de la igualdad, esto es,
>
> $$\int g(y)dy = \int h(x)dx.$$
>
> De esta manera se obtendrán todas las soluciones de la EDO de manera implícita.

EJEMPLOS

Ejemplo 1 : Dada la EDO $y^2y' = x-2$, podemos encontrar sus soluciones reescribiendo la ecuación como $y^2dy = (x-2)dx$ e integrando a ambos lados, con lo que obtenemos

$$y^3 + c_1 = x^2 - 2x + c_2.$$

De esta forma, las soluciones vienen dadas por $y^3 = x^2 - 2x + c$, o equivalentemente, $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x + c}$.

Ejemplo 2 : La EDO $y' = \frac{y}{1+x^2}$ puede resolverse integrando sobre la igualdad $\frac{1}{y}dy = \frac{1}{1+x^2}dx$, salvo cuando $y = 0$. La función $y(x) = 0$ es solución de la EDO y el resto de soluciones pueden calcularse integrando la igualdad anterior que nos dará

$$\ln|y| = \operatorname{arctg} x + c.$$

Tomando exponenciales sobre la igualdad obtenemos $y = c_0 e^{\operatorname{arctg} x}$, donde $c_0 = \pm e^c$. Por tanto, todas las soluciones vienen dadas por $y = c_0 e^{\operatorname{arctg} x}$, para c_0 cualquier número real, incluyendo el caso $c_0 = 0$ que nos dará la solución previa $y(x) = 0$.

Ejemplo 3 : Consideremos el PVI dado por la EDO $e^{x+y}\,y' = x$ con condición inicial $y(0) = 0$. La ecuación puede reescribirse como

$$e^y\,dy = x\,e^{-x}\,dx$$

y, así, si integramos se obtiene $e^y = -(1+x)e^{-x} + c$. Ahora, la condición inicial $y(0) = 0$ nos dice que $1 = -1 + c$, de donde $c = 2$. Esto es, la solución del PVI viene dada por $e^y = -(1+x)e^{-x} + 2$, o equivalentemente $y = \ln(2 - (1+x)e^{-x})$.

Ejemplo 4 : El PVI con ecuación $y' = -2xy^2$ y condición inicial $y(3) = \frac{1}{10}$ puede ser resuelto reescribiendo la EDO como

$$\frac{dy}{y^2} = -2x\,dx$$

e integrando. Obsérvese que estamos dividiendo por y^2 y podría ocurrir que $y(x) = 0$, que es solución de la EDO pero no es la solución buscada del PVI ya que no cumple la condición inicial. Así, tenemos que $\frac{1}{y} = x^2 + c$, esto es, $y = \frac{1}{c+x^2}$. Ahora, de la condición inicial obtenemos que $10 = 3^2 + c$, por lo que $y = \frac{1}{1+x^2}$.

□

4.3.2 EDOs lineales de primer orden.

Otras EDOs de primer orden que pueden ser resueltas de una forma sencilla son aquellas de tipo lineal, más concretamente,

Definición 50 (EDO lineal de primer orden)
Una EDO de primer orden es lineal si se escribe de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

donde a_1, a_0, b son funciones que solo dependen de la variable x.

Por ejemplo, las ecuaciones $y' + x^2y = e^x \cos x$, o, $e^x y' + y = x^3$ son EDOs lineales de primer orden. Sin embargo, las ecuaciones $y' + y^2 = \operatorname{sen} x$, $y' + \cos y = 0$, o, $yy' + xy = e^x$ no son EDOs lineales.

Una EDO lineal se dice que es homogénea cuando la función $b(x)$ de la definición anterior es cero. Así, ejemplos de EDOs lineales de primer orden homogéneas son $\operatorname{sen}(x)y' + \cos(x)y = 0$, $e^x y' + y = 0$, o, $(x^2 - 1)y' + xy = 0$.

¿Cómo se resuelven las EDOs lineales de primer orden?

Para resolver la ecuación $a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$, primero hemos de resolver la ecuación homogénea asociada $a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$. Esta última EDO es separable y puede resolverse como se explicó en la sección anterior. La solución de la EDO homogénea es de la forma $y(x) = c_0 y_1(x)$ para una cierta constante c_0.
Si $b(x)$ no es cero, las soluciones de la ecuación $a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$, vendrán dadas de la forma $y(x) = u(x)y_1(x)$, para una cierta función $u(x)$ a determinar. Es decir, se sustituirá la constante c_0 dada en las soluciones de la EDO homogénea por la función $u(x)$.
Entonces se sustituye la función $y(x) = u(x)y_1(x)$ sobre la ecuación $a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ y esto nos dará una ecuación de donde podremos despejar $u'(x)$. Finalmente, integrando la expresión de $u'(x)$ calculamos $u(x)$ y, por tanto, las soluciones de la EDO.

EJEMPLOS

Ejemplo 1 : La EDO $(1+x^2)y' + xy = 0$ es lineal homogénea, por lo que se puede resolver simplemente teniendo en cuenta que es de tipo separable. La ecuación se puede escribir como

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x}{1+x^2},$$

siempre que y no se anule. De hecho, $y(x) = 0$ es solución del problema. Si se integra la ecuación anterior obtenemos $\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$. O equivalentemente $y = \frac{c_0}{\sqrt{1+x^2}}$, para c_0 un número real cualquiera, que incluye la solución $y(x) = 0$ tomando $c_0 = 0$.

Ejemplo 2 : Para resolver la EDO de primer orden lineal $\operatorname{arctg}(x)y' - \frac{2}{1+x^2}\, y = \operatorname{arctg}^3(x)$ primero se debe resolver la EDO homogénea $\operatorname{arctg}(x)y' - \frac{2}{1+x^2}\, y = 0$. Ésta la podemos reescribir (para $y \neq 0$) como

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{\operatorname{arctg}(x)(1+x^2)}.$$

Con lo que integrando obtenemos $y = c_0 \operatorname{arctg}^2(x)$.

Por tanto, las soluciones de la EDO $\operatorname{arctg}(x)y' - \frac{2}{1+x^2}\, y = \operatorname{arctg}^3(x)$ las obtendremos de la forma $y = u(x)\operatorname{arctg}^2(x)$ donde, para calcular $u(x)$, sustituimos en la ecuación, con lo que

$$\operatorname{arctg}^3(x) = \operatorname{arctg}(x)(u(x)\operatorname{arctg}^2(x))' - \frac{2}{1+x^2}(u(x)\operatorname{arctg}^2(x)) = u'(x)\operatorname{arctg}^3(x).$$

Tenemos entonces que $u'(x) = 1$ o bien $u(x) = x + c$, por lo que las soluciones de la EDO inicial son $y = (x+c)\operatorname{arctg}^2(x)$.

Ejemplo 3 : Resolvamos ahora el PVI dado por la EDO $x\,y' - x^2\,y = e^{\frac{x^2}{2}}$ con condición inicial $y(1) = -1$.

Primero resolvemos la EDO homogénea asociada $x\,y' - x^2\,y = 0$ que puede ser escrita como

$$\frac{dy}{y} = x\,dx$$

para $y \neq 0$. Si integramos y simplificamos, las soluciones vienen dadas por $y = c_0 e^{\frac{x^2}{2}}$.

Así, las soluciones de la EDO $x\,y' - x^2\,y = e^{\frac{x^2}{2}}$ serán del tipo $y = u(x)e^{\frac{x^2}{2}}$, para una cierta función $u(x)$ a determinar. Sustituyendo en la ecuación se tiene:

$$e^{\frac{x^2}{2}} = x\,y' - x^2\,y = x(u(x)e^{\frac{x^2}{2}})' - x^2(u(x)e^{\frac{x^2}{2}}) = x\,u'(x)e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Por tanto, $u'(x) = 1/x$, es decir, $u = \ln|x| + c$. De esta manera, todas las soluciones son $y = (c + \ln|x|)e^{\frac{x^2}{2}}$.

La condición inicial $y(1) = -1$ nos da $-1 = (c + \ln 1)e^{\frac{1}{2}}$. Por tanto, $c = -\frac{1}{\sqrt{e}}$, es decir, la función que resuelve el PVI es $y = \left(-\frac{1}{\sqrt{e}} + \ln x\right)e^{\frac{x^2}{2}}$.

Ejemplo 4 : Para resolver el PVI con ecuación $xy' - y = \frac{x^2}{1+x^2}$ y condición inicial $y(-1) = \frac{\pi}{4}$ primero resolvemos la EDO lineal homogénea $xy' - y = 0$. Esta ecuación la escribimos como

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

para $y \neq 0$. Si integramos y simplificamos, las soluciones vienen dadas por $y = c_0\,x$.

Buscamos entonces las soluciones de la ecuación $xy' - y = \frac{x^2}{1+x^2}$ de la forma $y = u(x)x$. Sustituyendo obtenemos

$$\frac{x^2}{1+x^2} = xy' - y = x(u(x)x)' - u(x)x = u'(x)x^2.$$

Por tanto, $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, y así $u(x) = c + \operatorname{arctg} x$.

Entonces las soluciones de la EDO lineal $xy' - y = \frac{x^2}{1+x^2}$ son $y = (c + \operatorname{arctg} x)x$. Finalmente, la condición inicial $y(-1) = \frac{\pi}{4}$ nos da $\frac{\pi}{4} = (c + \operatorname{arctg}(-1))(-1) = -(c - \frac{\pi}{4})$. Así, $c = 0$ y la solución del PVI está dada por la función $y = x \operatorname{arctg} x$.

$\square$

4.3.3 EDOs exactas.

Consideremos una función $F(s,t)$ que depende de dos variables. Llamaremos derivada parcial de F respecto de s a la derivada, si existe, de la función F respecto de la variable s cuando se considera a t como una constante, y la denotaremos $\frac{\partial F}{\partial s}$. Análogamente se define la derivada parcial de F respecto de t, $\frac{\partial F}{\partial t}$.

Por ejemplo, dada la función $F(s,t) = s^2 + \cos(s+t) + \operatorname{arctg} t$ sus derivadas parciales vienen dadas por

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 2s - \operatorname{sen}(s+t), \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = -\operatorname{sen}(s+t) + \frac{1}{1+t^2}.$$

Definición 51 (EDO exacta)
Diremos que una EDO de primer orden es exacta si se escribe de la forma

$$f(x,y)\frac{dy}{dx} + g(x,y) = 0,$$

y se cumple que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$.

Así, por ejemplo, las ecuaciones $\frac{2y}{x+y^2}\, y' + \frac{1}{x+y^2} = 0$, $x e^{xy} y' + y e^{xy} + 2x = 0$ son exactas ya que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x+y^2}\right) = \frac{-2y}{(x+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y^2}\right), \qquad \frac{\partial (x e^{xy})}{\partial x} = (1+xy)e^{xy} = \frac{\partial (y e^{xy} + 2x)}{\partial y}.$$

Las ecuaciones $3x^2 y y' + \operatorname{sen}(x+y) = 0$, $e^x y^2 y' - x^3 + 2xy = 0$ no son EDOs exactas ya que no cumplen la igualdad necesaria de las derivadas parciales.

¿Cómo se resuelven las EDOs exactas?

Si la EDO $f(x,y)\frac{dy}{dx} + g(x,y) = 0$ (o equivalentemente $f(x,y)dy + g(x,y)dx = 0$) es exacta entonces las soluciones vendrán dadas de manera implícita de la forma $F(x,y) = 0$, donde la función de dos variables $F(x,y)$ se puede calcular de una cualquiera de las dos siguientes formas:

1. Se toma
$$F(x,y) = F_1(x) + \int f(x,y)dy,$$
donde para calcular $F_1(x)$ se debe tener en cuenta que $\frac{\partial F}{\partial x} = g(x,y)$.

2. Se toma
$$F(x,y) = F_2(y) + \int g(x,y)dx,$$
donde para calcular $F_2(y)$ se debe tener en cuenta que $\frac{\partial F}{\partial y} = f(x,y)$.

EJEMPLOS

Ejemplo 1 : Es fácil ver que la EDO $(x-2y)y' + 2x + y = 0$ es exacta ya que

$$\frac{\partial (x-2y)}{\partial x} = 1 = \frac{\partial (2x+y)}{\partial y}.$$

Las soluciones vendrán dadas por $F(x,y) = 0$, donde tomamos por ejemplo

$$F(x,y) = F_1(x) + \int (x-2y)dy = F_1(x) + xy - y^2.$$

Y la función $F_1(x)$ se calcula si se tiene en cuenta que

$$2x+y=\frac{\partial F}{\partial x}=F_1'(x)+y.$$

Por tanto, $F_1'(x)=2x$ o lo que es lo mismo $F_1(x)=x^2+c$.

Como conclusión, las soluciones de nuestra EDO vienen dadas de forma implícita como $x^2+xy-y^2+c=0$. Despejando la función y en la igualdad anterior se obtiene

$$y=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{4c+5x^2}\right), \qquad y=\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{4c+5x^2}\right).$$

Ejemplo 2 : La EDO $2x^2yy'+2xy^2+\frac{1}{x}=0$ es exacta ya que

$$\frac{\partial(2x^2y)}{\partial x}=4xy=\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^2+\frac{1}{x}\right).$$

Sus soluciones son de la forma $F(x,y)=0$, donde tomamos por ejemplo

$$F(x,y)=F_2(y)+\int\left(2xy^2+\frac{1}{x}\right)dx=F_2(y)+x^2y^2+\ln|x|.$$

Aquí la función $F_2(y)$ se calcula tomando

$$2x^2y=\frac{\partial F}{\partial y}=F_2'(y)+2x^2y.$$

Por tanto, $F_2'(y)=0$, con lo que $F_2(y)=c$.

De esta manera las soluciones de nuestra EDO vienen dadas de forma implícita como $x^2y^2+\ln|x|+c=0$.

Ejemplo 3 : Consideremos el PVI con ecuación $(1-x^2)y'+3x^2-2xy-1=0$ y condición inicial $y(0)=1$. Ya que la EDO es exacta porque

$$\frac{\partial(1-x^2)}{\partial x}=-2x=\frac{\partial(3x^2-2xy-1)}{\partial y},$$

podemos resolverla tomando

$$F(x,y)=F_1(x)+\int(1-x^2)dy=F_1(x)+(1-x^2)y.$$

Y la función $F_1(x)$ se calcula teniendo en cuenta que

$$3x^2-2xy-1=\frac{\partial F}{\partial x}=F_1'(x)-2xy.$$

Por tanto, $F_1'(x)=3x^2-1$ o lo que es lo mismo $F_1(x)=x^3-x+c$. Y las soluciones de la EDO son las dadas por $x^3-x+c+(1-x^2)y=0$.

Usando la condición inicial $y(0)=1$ se tiene que $c+1=0$, por lo que la solución del PVI es $y=x+\frac{1}{1-x^2}$.

Ejemplo 4 : El PVI, con ecuación $3(1+x^2)y^2y'+2xy^3-\frac{2x}{1+x^4}=0$ y condición inicial $y(0)=2$, tiene una EDO exacta ya que

$$\frac{\partial(3(1+x^2)y^2)}{\partial x}=6xy^2=\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^3-\frac{2x}{1+x^4}\right).$$

Así, la ecuación se puede resolver tomando

$$F(x,y)=F_2(y)+\int\left(2xy^3-\frac{2x}{1+x^4}\right)dx=F_2(y)+x^2y^3-\operatorname{arctg}(x^2),$$

donde $F_2(y)$ se calcula tomando

$$3(1+x^2)y^2=\frac{\partial F}{\partial y}=F_2'(y)+3x^2y^2.$$

Por tanto, $F_2'(y)=3y^2$, con lo que $F_2(y)=y^3+c$. Y las soluciones de la EDO están dadas por las funciones $y^3+c+x^2y^3-\operatorname{arctg}(x^2)=0$.

Si usamos la condición inicial $y(0)=2$ obtenemos $8+c=0$, por lo que la solución del PVI es $y=\sqrt[3]{\frac{8+\operatorname{arctg}(x^2)}{1+x^2}}$.

□

4.4 EDOs lineales de segundo orden.

En esta sección trataremos las ecuaciones lineales de segundo orden que son de la forma

$$a_2y''+a_1y'+a_0y=b(x),$$

donde a_0,a_1,a_2 son constantes reales, con $a_2\neq 0$, y $b(x)$ es una función que depende de la variable x.

Comenzaremos con las ecuaciones lineales de segundo orden homogéneas, esto es, con aquellas en las que $b(x)=0$.

¿Cómo se resuelven las EDOs lineales de segundo orden homogéneas?

Una EDO del tipo $a_2y''+a_1y'+a_0y=0$ tiene por soluciones aquellas del tipo $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, para constantes c_1,c_2, donde las funciones y_1,y_2 se pueden encontrar de la siguiente manera:

Se considera la ecuación de segundo grado $a_2m^2+a_1m+a_0=0$ y tomamos las dos soluciones m_1,m_2 de esta ecuación. Ahora se distinguen casos según los valores de estas soluciones:

1. Si m_1,m_2 son dos números reales diferentes (esto ocurre cuando $a_1^2-4a_2a_0>0$) entonces

$$y_1(x)=e^{m_1x},\qquad y_2(x)=e^{m_2x}.$$

2. Si $m_1=m_2$ (esto ocurre cuando $a_1^2-4a_2a_0=0$) entonces

$$y_1(x)=e^{m_1x},\qquad y_2(x)=xe^{m_1x}.$$

3. Si $m_1=\alpha+i\beta,m_2=\alpha-i\beta$ son dos números complejos (esto ocurre cuando $a_1^2-4a_2a_0<0$) con α,β reales, entonces

$$y_1(x)=e^{\alpha x}\cos(\beta x),\qquad y_2(x)=e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x).$$

EJEMPLOS

Ejemplo 1 : Para resolver la EDO $y'' - 3y' + 2y = 0$ consideramos la ecuación de segundo grado

$$m^2 - 3m + 2 = 0.$$

Sus soluciones son

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2},$$

es decir, $m_1 = 1, m_2 = 2$. Ya que las soluciones son dos números reales diferentes, entonces las soluciones de la EDO son

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x},$$

para cualesquiera constantes c_1, c_2.

Ejemplo 2 : La EDO $4y'' - 4y' + y = 0$ tiene por ecuación de segundo grado asociada

$$4m^2 - 4m + 1 = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4},$$

es decir, las dos soluciones $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$. Ya que las dos raíces del polinomio de segundo grado son iguales, entonces las soluciones de la EDO son

$$y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{\frac{1}{2}x},$$

para cualesquiera constantes c_1, c_2.

Ejemplo 3 : La EDO de segundo orden $y'' - 4y' + 13y = 0$ tiene por ecuación de segundo grado asociada

$$m^2 - 4m + 13 = 0.$$

Sus soluciones son

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 13}}{2} = 2 \pm \sqrt{-9},$$

es decir, las dos soluciones son los números complejos conjugados $m_1 = 2 + 3i, m_2 = 2 - 3i$. Por tanto, las soluciones de la EDO son

$$y = c_1 e^{2x} \cos(3x) + c_2 e^{2x} \operatorname{sen}(3x),$$

para cualesquiera constantes c_1, c_2.

Ejemplo 4 : Resolvamos el PVI

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Primero resolvemos la EDO que tiene asociado el polinomio $m^2 - 4m + 5 = 0$. Las soluciones de esta igualdad son los números complejos conjugados $m_1 = 2 + i, m_2 = 2 - i$.

Por tanto, las soluciones de la EDO son $y = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \operatorname{sen} x$.

Si ahora usamos las condiciones iniciales obtenemos $3 = y(0) = c_1$ y, además, ya que $y' = e^{2x}((2c_1 + c_2)\cos x - (c_1 - 2c_2)\operatorname{sen} x)$ entonces $1 = y'(0) = 2c_1 + c_2$, es decir, $c_2 = -5$. Así, la solución del PVI es $y = e^{2x}(3\cos x - 5\operatorname{sen} x)$.

□

Cuando la EDO es del tipo

$$a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = b(x),$$

donde $b(x)$ no es cero, su solución se calcula de forma diferente. En esta caso se utiliza un método parecido al que se usaba para las EDOs lineales de primer orden.

¿Cómo se resuelven las EDOs lineales de segundo orden generales?

Para resolver una EDO del tipo $a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = b(x)$ primero se resuelve la ecuación homogénea asociada, esto es, $a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$. Se toman las soluciones de la ecuación homogénea que son del tipo $y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$, para constantes c_1, c_2, como se explicó anteriormente.
Y las soluciones de la EDO original serán de la forma $y(x) = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)$ donde las funciones $u_i(x)$ se calculan al despejar del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1'(x)\, y_1(x) + u_2'(x)\, y_2(x) = 0 \\ u_1'(x)\, y_1'(x) + u_2'(x)\, y_2'(x) = \frac{b(x)}{a_2} \end{array} \right.$$

las derivadas $u_i'(x)$ e integrar.

EJEMPLOS

Ejemplo 1 : Resolvamos la EDO $y'' + y' - 2y = 3e^x$. Para ello, primero consideramos la EDO homogénea asociada $y'' + y' - 2y = 0$.

Su polinomio de segundo grado asociado es

$$m^2 + m - 2 = 0,$$

que tiene por raíces $m_1 = 1, m_2 = -2$. Así, las soluciones de la EDO homogénea son $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$.

Para las soluciones de la EDO no homogénea tomamos $y = u_1(x) e^x + u_2(x) e^{-2x}$, donde

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1'(x)\, e^x + u_2'(x)\, e^{-2x} = 0 \\ u_1'(x)\, e^x - 2\, u_2'(x)\, e^{-2x} = 3e^x \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema anterior $u_1'(x) = 1, u_2'(x) = -e^{3x}$, con lo que $u_1(x) = x + c_1, u_2(x) = -\frac{1}{3} e^{3x} + c_2$. Por tanto, las soluciones de la EDO son

$$y = (x + c_1) e^x + (-\frac{1}{3} e^{3x} + c_2) e^{-2x} = (x + d_1) e^x + c_2\, e^{-2x},$$

para ciertas constantes d_1, c_2.

Ejemplo 2 : Ahora resolvamos la EDO $9y'' + 6y' + y = \operatorname{sen} x$. Su EDO homogénea asociada es $9y'' + 6y' + y = 0$, que tiene por ecuación de segundo grado

$$9m^2 + 6m + 1 = 0.$$

Las soluciones son $m_1 = m_2 = -\frac{1}{3}$. Por tanto, las soluciones de la EDO homogénea son $y = c_1\, e^{-\frac{1}{3}x} + c_2\, x\, e^{-\frac{1}{3}x}$.

Consideramos entonces las soluciones de la EDO inicial de la forma $y = u_1(x)\,e^{-\frac{1}{3}x} + u_2(x)\,x\,e^{-\frac{1}{3}x}$, donde las funciones $u_i(x)$ se calculan usando que

$$\begin{cases} u_1'(x)\,e^{-\frac{1}{3}x} + u_2'(x)\,x\,e^{-\frac{1}{3}x} = 0 \\ -\frac{1}{3}\,u_1'(x)\,e^{-\frac{1}{3}x} - \frac{1}{3}(x-3)u_2'(x)\,e^{-\frac{1}{3}x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{9} \end{cases}$$

Si resolvemos el sistema anterior obtenemos que $u_1'(x) = -\frac{1}{9}\,x\,e^{\frac{1}{3}x}\operatorname{sen} x, u_2'(x) = \frac{1}{9}\,e^{\frac{1}{3}x}\operatorname{sen} x$, con lo que

$$u_1(x) = c_1 + \frac{1}{150}\,e^{\frac{1}{3}x}\,(3(5x-3)\cos x - (5x+12)\operatorname{sen} x)\,,\; u_2(x) = c_2 - \frac{1}{30}\,e^{\frac{1}{3}x}\,(3\cos x - \operatorname{sen} x)\,.$$

Por tanto, las soluciones de la EDO son

$$y = c_1\,e^{-\frac{1}{3}x} + c_2\,x\,e^{-\frac{1}{3}x} - \frac{1}{50}(3\cos x + 4\operatorname{sen} x).$$

Ejemplo 3 : Consideremos la EDO $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}$. Para resolver la EDO homogénea asociada $y'' + 2y' + 2y = 0$ consideramos la ecuación

$$m^2 + 2m + 2 = 0,$$

que tiene por soluciones los números complejos conjugados $m_1 = -1 + i, m_2 = -1 - i$.

Así, las soluciones de la EDO homogénea son

$$y = c_1\,e^{-x}\cos x + c_2\,e^{-x}\operatorname{sen} x.$$

Las soluciones de la EDO no homogénea son de la forma $y = u_1(x)\,e^{-x}\cos x + u_2(x)\,e^{-x}\operatorname{sen} x$, donde

$$\begin{cases} u_1'(x)\,e^{-x}\cos x + u_2'(x)\,e^{-x}\operatorname{sen} x = 0 \\ -u_1'(x)\,e^{-x}(\cos x + \operatorname{sen} x) + u_2'(x)\,e^{-x}(\cos x - \operatorname{sen} x) = e^{-x} \end{cases}$$

De esta forma, $u_1'(x) = -\operatorname{sen} x, u_2'(x) = \cos x$, con lo que $u_1(x) = c_1 + \cos x, u_2(x) = c_2 + \operatorname{sen} x$.

Las soluciones de la EDO son

$$y = e^{-x}(1 + c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x).$$

Ejemplo 4 : Para resolver el PVI

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2 \end{cases}$$

Primero resolvemos la EDO homogénea $y'' - 6y' + 9y = 0$ que tiene asociado el polinomio $m^2 - 6m + 9 = 0$. Las soluciones de esta igualdad son $m_1 = m_2 = 3$.

Por tanto, las soluciones de la EDO homogénea son $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$.

Para resolver $y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}$ tomamos soluciones de la forma $y = u_1(x)e^{3x} + u_2(x)xe^{3x}$ donde

$$\begin{cases} u_1'(x)\,e^{3x} + u_2'(x)\,x\,e^{3x} = 0 \\ 3\,u_1'(x)\,e^{3x} + (3x+1)u_2'(x)\,e^{3x} = 2e^{3x} \end{cases}$$

Así, $u_1'(x) = -2x, u_2'(x) = 2$, con lo que, $u_1(x) = -x^2 + c_1, u_2(x) = 2x + c_2$.

Con todo esto, las soluciones de la EDO $y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}$ son

$$y = e^{3x}(x^2 + c_2 x + c_1).$$

Finalmente, usando las condiciones iniciales $y(0) = 1, y'(0) = -2$ obtenemos que la solución al PVI viene dada por la función

$$y = e^{3x}(x^2 - 5x + 1).$$

$\square$