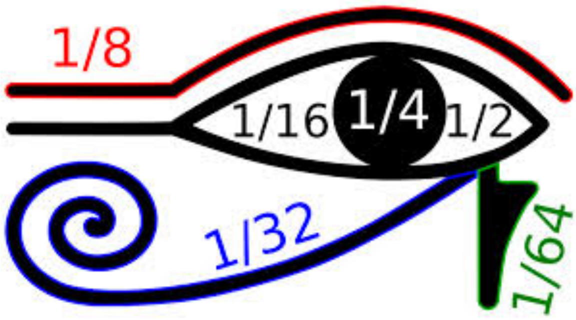
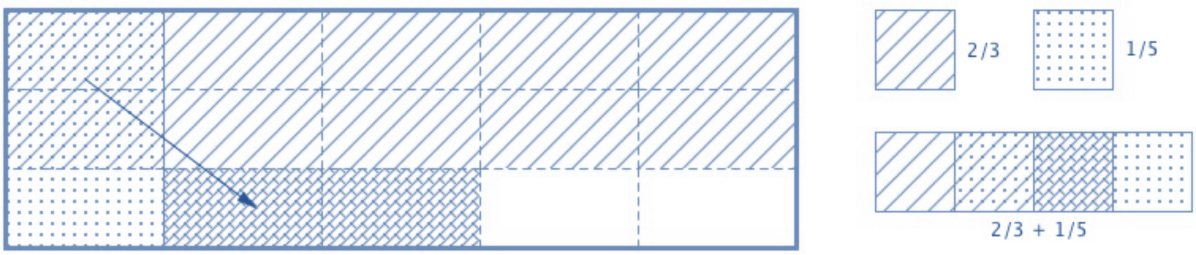
Tema 4. Fracciones y Decimales

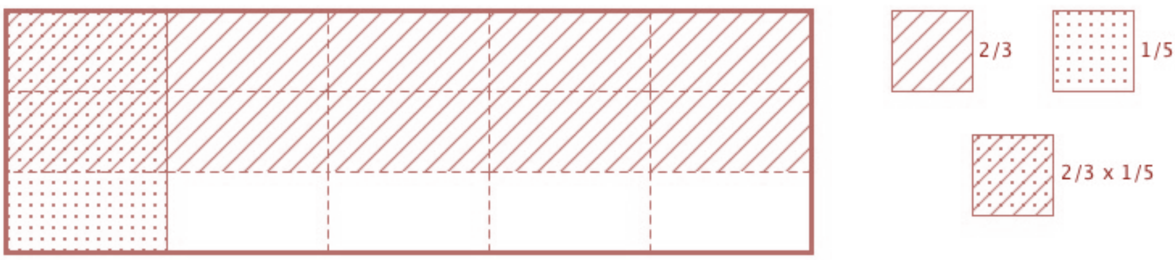


El ojo de Horus
Imagen tomada de https://ztfnews.wordpress.com/2013/02/24/

s



Operaciones con fracciones



1. Introducción

A lo largo de vuestra formación académica os habéis encontrado ante diferentes conjuntos numéricos:

$\mathbb{N}$ (conjunto de números naturales): 0, 1, 2, 3, 4,…

$\mathbb{Z}$ (conjunto de los números enteros): …, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …

$\mathbb{Q}$ (conjunto de los números racionales): todos los que se pueden expresar de la forma

$$\frac{a}{b}$$

con a y b números enteros y $b \neq 0$.

$\mathbb{Q}$ contiene a $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$:

$$3 = \frac{3}{1} \qquad -4 = \frac{-4}{1}$$

Históricamente, respondiendo a necesidades en los problemas tanto de medida como de reparto, el paso corresponde de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}^+$.

Las fracciones 1 / 2, 2 / 4, 3 / 6, -4/-8,… representan al mismo número racional. Hay infinitas fracciones equivalentes representando al mismo número racional, la única fracción que verifica que numerador y denominador son números primos entre si y denominador positivo se llama **fracción irreducible.** Sobre estos aspectos volveremos más adelante.

2. Fracciones

La representación más común que hacemos de una fracción es a/b, con b diferente de 0. Pero el uso que se hace de esta relación es muy variado. Observa las siguientes situaciones:

- Me he comido la cuarta parte de la tarta
- En esta clase hay la quinta parte de niños que de niñas
- Repartieron tres tabletas de chocolate entre cinco niños
- Este plano está a escala 1:100.000
- Si 15 caramelos valen 2€ ¿cuánto valen tres caramelos?
- Si un litro de leche cuesta 0.70€, ¿cuánto valen 3/5 de litro de leche?
- Hay que pagar el 16% de IVA…
- …

En todas ellas aparece la idea de fracción pero con distintos significados. Vemos que en ocasiones se utiliza la fracción para indicar la relación entre una parte y el todo (*la cuarta parte de*), o como una división indicada (*reparto 3 entre 5*) o como una relación entre cantidades (*escala 1:100000; si 15 es a 2, 3 es a …*) o como un operador (*3/5 de 0.70*) o expresando un porcentaje (*16%),* etc.

Todos estos significados han de introducirse en distintas situaciones de enseñanza, ya que no se puede esperar que el conocimiento de las fracciones en uno de sus usos se transfiera a otros usos.

En la etapa Primaria se trabajan fundamentalmente dos contextos de uso de las fracciones que engloban a los significados anteriores:

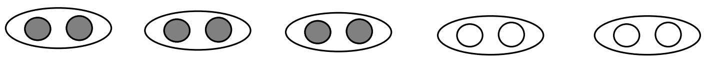
- La fracción como parte-todo
- La fracción como razón (o proporción)

3. La fracción como parte-todo

Un “todo” se divide en partes iguales entre sí (igual longitud, igual superficie, igual número de objetos…). La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes. El todo recibe el nombre de **unidad**. Se suele desarrollar en contextos discretos y continuos. Estos últimos suelen ser diagramas circulares, rectangulares.. (para lo cual es necesario la idea de superficie y de igualdad de superficies independientemente de las formas de las figuras) o la recta numérica.

Modelos continuos

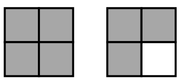
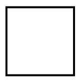
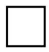
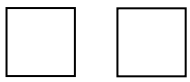
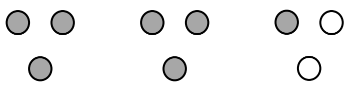
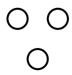
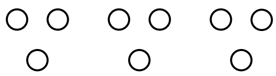
3/5 es la parte sombreada



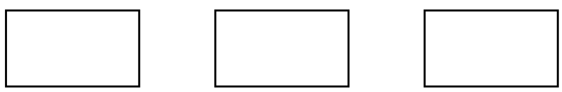
Modelo discreto

La importancia de la unidad:

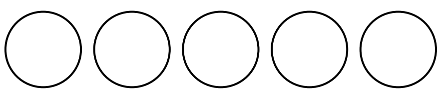
1.1. En los ejemplos siguientes te damos distintas unidades. Indica en cada caso qué fracción representa la parte sombreada.

CANTIDAD	UNIDAD	FRACCION
		
		
		
		
		
		

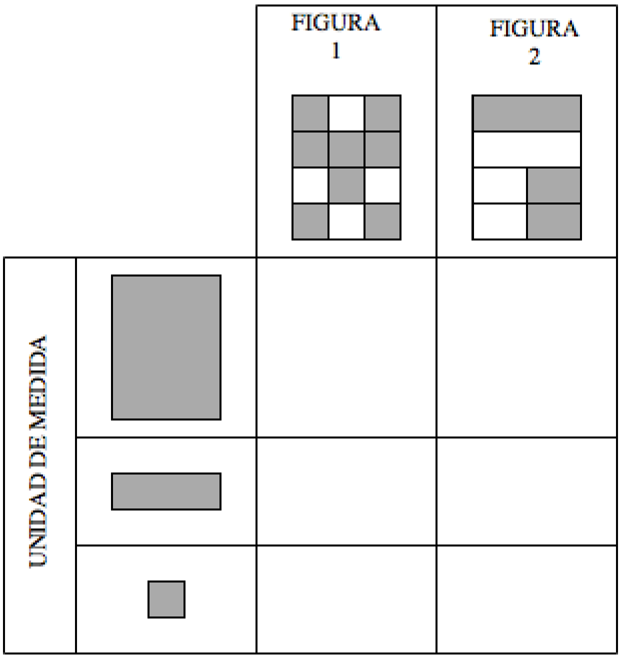
1.2. Sombrea 2/5 de ‘3 tabletas de chocolate’.



1.3. Explica una estrategia para repartir 5 tartas entre 7 personas.



1.4. Observa las Figuras 1 y 2 siguientes. **Rellena** las seis casillas de la tabla indicando, **mediante una fracción**, la cantidad sombreada en cada caso. Ten en cuenta las unidades de medida dadas en la columna izquierda.

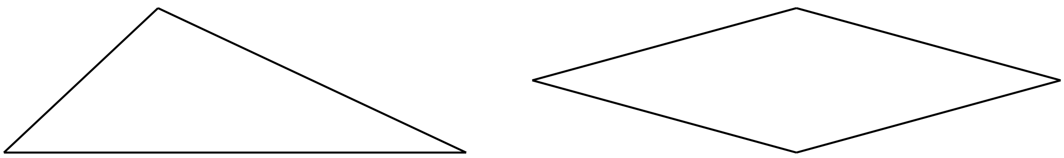


Partiendo una unidad en trozos iguales.

2.1. Responde y justifica tu respuesta: En cada uno de los dos ejemplos (a) y (b) siguientes, ¿es 3/5 la parte sombreada?

(a)
(b)

2.2. Sombrea las 3/5 partes de cada una de las figuras siguientes y explica la estrategia que sigues en cada caso.



Problemas de fracciones en contexto parte-todo

1.-En una fiesta familiar los niños han comido cinco cuartos de tarta, los padres un medio y los demás familiares cinco sextos. ¿Cuántas tartas se han necesitado?

2.-Queremos embotellar cinco octavos de la cerveza de un barril, que tiene 100 l. de capacidad, en botellas de un cuarto de litro. ¿Qué fracción de barril llevará cada botella? ¿Cuántas botellas llenaremos?

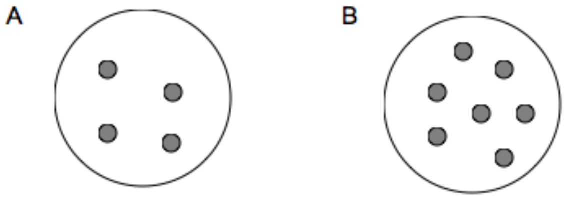
3.-Pablo ha repartido todos sus cromos repetidos entre sus primos pequeños. A Hugo le ha dado la tercera parte de los que tenía, a Luz le ha dado tres cuartas partes de los que le quedaban y a César los 9 últimos. ¿Cuántos cromos repetidos tenía?

4.-Santiago es capaz de comerse una tarta en 6 minutos. Carmelo es capaz de hacerlo en 9 minutos y Evaristo en 15 minutos. ¿Cuánto crees que tardarán en comer una tarta los tres juntos?

4. La fracción como razón

Se da este contexto cuando la fracción simboliza una relación entre dos cantidades. Por ejemplo:

(1)



La relación entre el número de puntos de A y el número de puntos de B es de 4/7. Solemos decir: cuatro a siete.

(2) La escala del plano es de 1:500.

(3) Los porcentajes son un caso particular de razón, donde la relación se establece siempre con el 100:

26 es el 40% de 65 significa que

26 es a 65 como 40 es a 100, es decir,

26/65 = 40/100

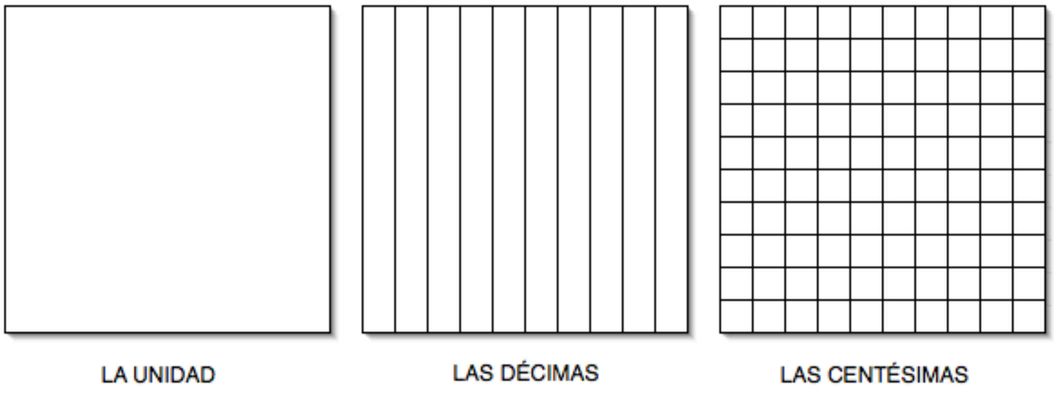
Problemas de fracciones en contexto de razón

1.- Dos ganaderos alquilan un terreno para pasto de sus dos manadas por 2100 euros. La manada del primero la componen 40 vacas y la del segundo 300 ovejas. ¿Cuánto ha de pagar cada uno si una vaca come como 10 ovejas?

2.- En una tienda nos hacen siempre el 10% de descuento porque el dueño es amigo nuestro. Hoy, además, es el quinto aniversario de la inauguración, y hacen, a todos los clientes, el 5% de descuento. ¿Qué nos conviene más: que nos hagan primero el 10% de descuento y después el 5%, o al revés?

3.- En cierta ciudad, la mitad de la población está entre los 20 y los 50 años, y por cada tres habitantes mayores de 50 años hay cinco menores de 20. ¿Cuál es el porcentaje de personas de cada grupo?

5. Números decimales y expresiones decimales



Un **número decimal** es un número escrito en un sistema de base 10 en que cada dígito, según su posición, señala la cantidad de unidades, decenas, miles, décimas, centésimas, milésimas, etc., que contiene. Con una coma se separa la parte entera de la parte no entera del número. Por ejemplo:

45,831 = 4 decenas + 5 unidades + 8 décimas + 3 centésimas + una milésima

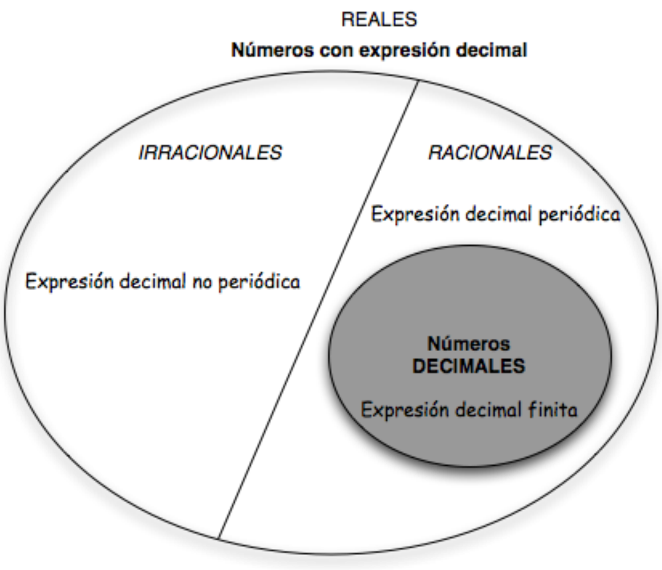
Un número decimal se puede escribir en la forma:

$$\frac{a}{10^k}$$

donde a y k son números enteros.

Hablamos de **expresión decimal** de un número cualquiera para referirnos a una forma de escribirlo con una coma. Son expresiones decimales:

0,33333333333…
4,56777777777…
0,12121212121…
0,110100100010000…
3,14159…



Escribe en forma decimal:

- 4567 milésimas
- 462 centésimas
- 6 décimas
- 1300 centésimas
- 100 décimas

Los números racionales tienen expresiones decimales que se obtienen al dividir el numerador entre el denominador:

Si dividimos a entre b pueden aparecer como restos $0, 1, \dots, b-1$. Si una vez realizada la división entera no obtenemos resto cero, continuamos dividiendo décimas, centésimas, milésimas… con el objetivo de obtener una expresión decimal. Podemos asegurar que siempre habrá un resto que se repita por 1ª vez y a partir de éste se repetirán los siguientes restos y por tanto las cifras decimales del cociente.

Si aparece un resto cero, obtenemos una expresión decimal finita. En caso contrario obtenemos una expresión decimal infinita:

- **Expresión decimal finita**: tienen un número finito de cifras. Los números decimales tienen este tipo de expresión.

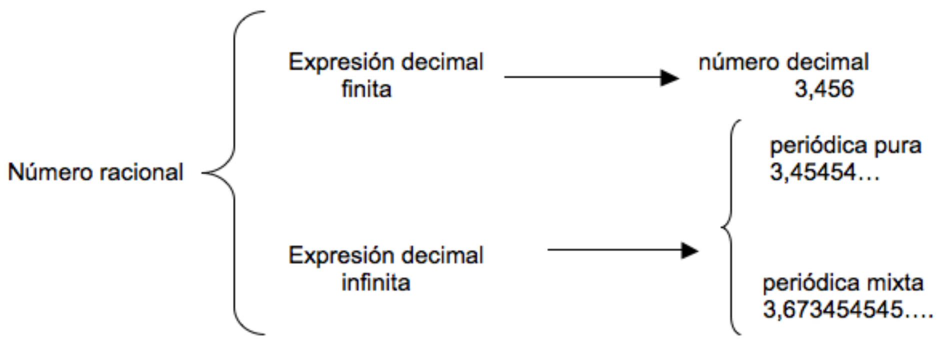
$$5{,}3$$

- **Expresión decimal periódica pura**: la parte decimal, llamada periodo, se repite infinitas veces.

$$5{,}2323232323\ldots$$

- **Expresión decimal periódica mixta**: su parte decimal se compone de una parte no periódica y otra parte periódica. En este caso las cifras decimales que no se repiten se *llama anteperiodo*.

$$5{,}41623232323\ldots$$



Hay expresiones decimales infinitas no periódicas, dichas expresiones no corresponden a los números racionales. El conjunto de expresiones decimales no periódicas constituyen el conjunto de los números irracionales:

$$I: \quad \pi,\ \sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 1+\sqrt{2}, \ldots\ldots..$$

Los números reales $\mathbb{R}$ están constituidos por los números racionales y por los números irracionales: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$. Este conjunto resuelve el problema de la medida.

p = 3,14159…

$\sqrt{2}$ = 1,414213562…

0,110100100010000…

6. Fracciones generatrices de expresiones decimales finitas o periódicas

- **Expresión decimal finita**: escribimos el número sin la coma en el numerador, y en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número.

0,054 = 54/1000

- **Expresión decimal periódica pura**:

1. multiplicamos el número por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el periodo.

2. a este número le restamos el número decimal original.

3. la fracción que represente el número tendrá como numerador el número obtenido en el paso 2, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el periodo menos 1.

$$\boldsymbol{n = 5,171717171717} \ldots$$

$$100n = 517{,}17171717 \ldots$$
$$100n - n = 512$$
$$\boldsymbol{n = 512/99}$$

- **Expresión decimal periódica mixta**:

1. multiplicamos el número por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales no periódicas tenga el número (así tendremos un número decimal periódico puro).

2. escribimos en forma de fracción el decimal periódico puro obtenido en el paso 1.

3. la fracción que representa al número decimal original será la fracción obtenida en el paso 2, dividida por la unidad seguida de tantos ceros como cifras no periódicas tenga el número decimal.

$$\boldsymbol{n = 5,4171717171717} \ldots$$

$$10n = 54{,}1717171717 \ldots$$
$$1000n = 5417{,}17171717 \ldots$$
$$1000n - 10n = 5\,417 - 54 = 5363$$
$$\boldsymbol{n = 5363/990}$$

La fracción así obtenida se llama **fracción generatriz**.

Halla la fracción generatriz de las siguientes expresiones:

0,222222222…
1,318318318…
0,123333333…
2,114848484…
0,999999999…

Haz las operaciones siguientes:

2,037 + 35,24 =
25,205 – 15,15 =
23,5 – 28,77 =
23,5 x 28,77 =
28,77 : 23,5 =
78 : 0,02 =

7. Identificación del tipo de expresión decimal correspondiente a cada fracción irreducible mediante la descomposición del denominador en factores primos

Sea a / b una fracción irreducible tal que su expresión decimal es periódica pura con un periodo de longitud k. Probar que b divide a $10^k – 1$.

Si a / b = n, $a_1a_2…a_k$ $a_1a_2…a_k$....... , evidentemente 10^k (a / b) y a / b tienen la misma parte decimal. Por tanto su diferencia es un número entero

$$10^k (a / b) - a / b = \text{nº entero}$$

$(10^k – 1)$ a / b es un número entero luego podemos deducir que b divide a $(10^k – 1)$ a.
Como b es primo con a entonces b divide a $10^k – 1$.

Deducimos que **b no puede tener como factores ni al 2 ni al 5**, pues en caso contrario dividiría a 1.

Si al descomponer en factores primos el denominador de la fracción irreducible, los únicos factores primos que obtenemos son 2 y/o 5, podemos obtener una fracción decimal que sea equivalente a la anterior y por tanto estamos ante un número decimal (expresión decimal finita). Por ejemplo

$$\frac{273}{2^3\cdot 5}=\frac{273\cdot 5^2}{2^3\cdot 5^3}=\frac{6825}{1000}=6,825$$

Recíprocamente, si consideramos la fracción irreducible de un número decimal y descomponemos el denominador en factores primos, los únicos factores primos que obtenemos son 2 y/o 5.

Veamos dos ejemplos más:

$$\frac{110}{9}=\frac{2\cdot 5\cdot 11}{3^2}=12,222... \qquad \frac{154}{15}=\frac{2\cdot 7\cdot 11}{3\cdot 5}=10,2666...$$

Si al descomponer en factores primos el denominador de la fracción irreducible:

- los únicos factores primos son 2 y/o 5. Se trata de un **número decimal.**
- aparecen el 2 y/o 5 como factores y algún otro factor primo. Se trata de una **expresión decimal periódica mixta.**
- el 2 y el 5 no son factores primos. Se trata de una **expresión decimal periódica pura.**

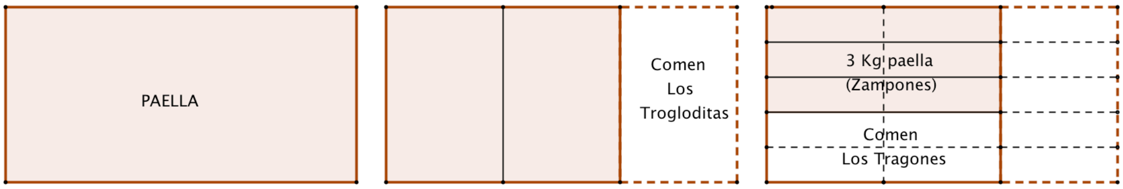
8. Resolución de algunos problemas tipo

8.1. En una romería se celebra una comida multitudinaria donde se reparte una enorme paella. La tercera parte de la misma es consumida por la peña *Los Trogloditas*, la peña *Los Tragones* consumen los 2/5 del resto y los tres kilos de paella restantes se los come la peña *Los Zampones*.

1) ¿Cuántos kilos pesaba la paella? Resuélvelo, apoyándote en un gráfico, para los alumnos del tercer ciclo de Primaria.
2) ¿Qué porcentaje de la paella ha comido la peña *Los Tragones*?
3) ¿Cuál es la razón entre los kilos de paella que han comido las peñas *Los Trogloditas* y *Los Zampones*.

Solución

La información dada en el enunciado se puede representar de la siguiente forma:



a) En la representación anterior basamos la respuesta de este primer apartado.
La zona sombreada, que consta de 6 porciones, equivale a 3 Kg de paella, por tanto, cada porción equivale a ½ Kg. Como la paella inicial constaba de 15 de esos trozos, el peso total de la misma es

$$\frac{1}{2}\cdot 15\,Kg = 7{,}5\,Kg$$

b) Los Tragones consumen 4 de 15 partes, por tanto el valor x a determinar es tal que:

$$\frac{4}{15} = \frac{x}{100}$$

Así,

$$x = \frac{4\cdot 100}{15} = \frac{4\cdot 20}{3} \approx 26{,}67$$

La respuesta a este apartado es $26{,}67\ \%$

c) La razón entre lo comido por las peñas *Los Trogloditas* y *Los Zampones* es $\frac{5}{6}$ pues de las 15 partes en que se ha dividido la paella los primeros tomaron 5 y los segundos 6.

8.2. María se dedica a confeccionar cortinas y le han realizado un encargo de una cortina de 24 metros. Ella compra la tela a 20 € el metro y posteriormente recarga al cliente el 10% sobre el precio de compra. Antes de confeccionar las cortinas, tiene por costumbre meter la tela a remojo y ésta encoge de largo el 4%. Sabiendo que ella cobra por realizar las cortinas a 12€ el metro ¿ cuánto tiene que cobrar por las cortinas encargadas?

Solución

La primera cuestión a tener en cuenta es la cantidad de tela que Marta ha de adquirir para que después de que la haya lavado queden 24 m. de largo.

Si M representa la cantidad de metros que ha de comprar, el $96\%M = 24$, es decir

$$M = \frac{24\cdot 100}{96} = \frac{100}{4} = 25$$

Por las cortinas encargadas deberá cobrar la suma de las siguientes cantidades:

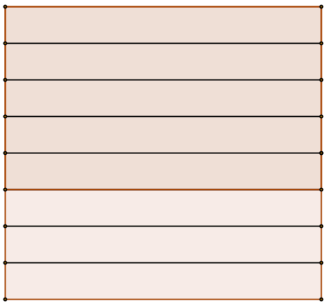
- Coste total de la tela: $25\times 20 = 500$ €
- Un recargo del 10% de la cantidad anterior supone: 50 €
- Coste de la confección: $24\times 12 = 288$ €

Observar que el resultado global de los dos primeros cálculos hubiera podido obtenerse en un solo paso: $25\times 110\%20 = 550$

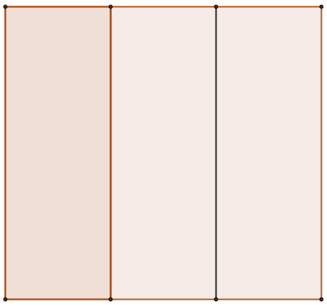
Total: 838 €

8.3. Un hombre ha segado 5/8 de un terreno y su hijo 1/3 de ese terreno. El hombre necesita 2 horas y 24 minutos para segar lo que falta. ¿En qué tiempo hubiera segado él solo todo el terreno?

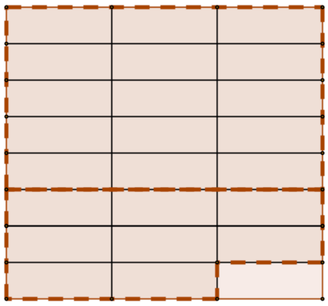
Solución



El sombreado más intenso representa la parte segada por el hombre.



El sombreado más intenso representa la parte sombreada por el hijo.



La doble subdivisión permite representar la parte equivalente segada por cada uno.

Las figuras anteriores muestran parte de la información dada en el enunciado, de donde podemos deducir que en segar 1/24 del terreno el padre emplea 2 horas y 24 minutos
De ahí que la respuesta a la pregunta sea

$$(2\times 24\ )\,horas\ más\ (24\times 24)\ minutos$$

Si de la expresión anterior transformamos $(24\times 24)\ minutos$ en $horas$, obtenemos un total de 9 horas y 36 min.

El tiempo pedido es por tanto 57 horas y 36 minutos.

8.4. Santiago es capaz de comerse una tarta en 6 minutos. Carmelo es capaz de hacerlo en 9 minutos y Evaristo en 15 minutos. ¿Cuánto crees que tardarán en comer una tarta los tres juntos?

Solución

Este ejercicio se podría abordar gráficamente, de manera similar a algunos de los anteriores. Sin embargo el hecho de que intervengan tres fracciones y de necesitar dividir la región que representa la tarta en un número grande de trozos dificulta la presentación de esa manera. Así, en las aulas de Primaria, la resolución de problemas de manera gráfica, como en caso de 8.1. y de 8.3., permiten comprender y dar cuerpo a las reglas que rigen las operaciones con fracciones. Una vez automatizadas esas reglas, serán usadas en contextos más generales sin ayuda del soporte gráfico, como pudiera ser en este caso.

Al interpretar la información dada en el enunciado, se puede decir que Santiago come 1/6 de tarta en un minuto, Carmelo en ese tiempo se toma 1/9 de tarta y Evaristo 1/15 de ella.

Por tanto, si los tres la toman simultáneamente y representamos por T la tarta:

$$En\ un\ minuto\ toman\ entre\ los\ tres\ \ \frac{1}{6}T+\frac{1}{9}T+\frac{1}{15}T$$

es decir

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}\right)T=\frac{15+10+6}{90}T=\frac{31}{90}T$$

Al ver el resultado anterior podría decirse que el tiempo para terminar la tarta entre los tres comensales ronda los 3 minutos, pero no llega a ellos. Pero precisando, el tiempo que se tarda es

$$\frac{90}{31}minutos=\left(2+\frac{28}{31}\right)minutos$$

Transformando la parte no entera de los minutos a segundos:

$$\frac{28}{31}minuto\ equivale\ a\ \frac{28\times 60}{31}\ segundos$$

El tiempo empleado es por tanto 2 minutos y 54 segundos.

ANEXO: De este tema hay que saber, al menos,

- Usar adecuadamente toda la terminología propia de las fracciones: numerador, denominador, fracción irreducible, reducir a común denominador, etc.

- Reconocer los diferentes significados del concepto de fracción y usar los más comunes (como parte-todo y razón).

- Valorar la importancia de dar una justificación a las técnicas empleadas en las operaciones con fracciones y demostrar esa valoración resolviendo problemas del currículo de Primaria apoyándose, cuando sea posible, en la representación gráfica.

- Resolver problemas de la vida cotidiana en los que intervengan porcentajes.

- Identificar las diferentes expresiones decimales relativas a fracciones, ligarlas a sus respectivas fracciones irreducibles y resolver situaciones planteadas mediante dichas expresiones decimales.

- Que no se puede ''abusar de la regla de tres''. Se dan situaciones en las que la regla de tres directa, vista muchas veces como panacea, no es aplicable y por ello su uso invalida, como es obvio, el proceso donde se haya utilizado.
  En otras muchas ocasiones se aplica regla de tres a problemas de Tercero de Primaria donde esa terminología no puede ser usada y cuya solución se obtiene, como es lógico, mediante la sucesión de una división y una multiplicación. Tal es el caso del siguiente enunciado*:*
  Si tres teléfonos móviles del mismo modelo han costado 135 €, ¿cuánto habremos de desembolsar por ocho de esos teléfonos?
  En estos casos prevalecerá la solución en la que no se abuse de la regla de tres, en particular, por valorar en el estudiante los recursos que él, como profesional de la enseñanza en Primaria, debe poseer.