Tema 5

Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

El objetivo final de este primer tema es aprender a discutir y resolver *sistemas de ecuaciones lineales* (con coeficientes en el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$). Éstos pueden ser planteados por infinidad de problemas, sencillos o no. Sin ir más lejos, un simple ajuste de datos, problema que ocurre con gran frecuencia en las ciencias experimentales, puede originar un sistema lineal con decenas de ecuaciones. Este problema puede llegar a ser de gran dificultad si no contamos con las herramientas adecuadas para tratarlo. Éstas son las *matrices* y los *determinantes*. Matrices y determinantes son objetos matemáticos que tienen gran utilidad en muchas áreas de matemáticas y en otras áreas del saber.

El tema está formado por tres secciones. En la primera de ellas introducimos el concepto de matriz, exponemos los diferentes tipos de matrices existentes (según su tamaño, aspecto, elementos,...) y explicamos las operaciones elementales que pueden realizarse con matrices. Por último, tratamos con el concepto de rango de una matriz, el cual será fundamental a la hora de resolver con éxito sistemas de ecuaciones lineales. En la segunda sección estudiamos los determinantes y su relación con el cálculo del rango de una matriz y de matrices inversas. Finalmente, en la tercera sección nos metemos de lleno en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, usando los dos métodos principales: el de Gauss y el de Cramer.

Antes de todo eso, veamos un problema de motivación que nos proporcionará un primer contacto con un sistema de ecuaciones lineales.

EJEMPLO

El aire puro está compuesto esencialmente por un 78 por ciento de nitrógeno, un 21 por ciento de oxígeno y un 1 por ciento de argón. Para poder realizar un experimento en el planeta Marte se dispone de una habitación que queremos llenar con 1000 litros de aire puro para los astronautas. Para ello, la habitación se encuentra alimentada por tres tanques llenos de nitrógeno, oxígeno y argón en la siguiente proporción:

T1. 50 por ciento de nitrógeno y 50 por ciento de oxígeno.

T2. 80 por ciento de nitrógeno y 20 por ciento de oxígeno.

T3. 60 por ciento de nitrógeno, 30 por ciento de oxígeno y 10 por ciento de argón.

Nos proponemos calcular la cantidad de litros necesaria de cada tanque para que la mezcla resultante produzca la cantidad buscada de 1000 litros de aire puro dentro de la habitación.

Para resolver este problema comencemos llamando x a la cantidad de litros necesaria de T1, y a la cantidad necesaria de T2 y z a la cantidad necesaria de T3. Según la composición de los tanques, la cantidad total de cada gas que tenemos en la mezcla es:

- $0{,}5x+0{,}8y+0{,}6z$ de nitrógeno,
- $0{,}5x+0{,}2y+0{,}3z$ de oxígeno,
- $0{,}1z$ de argón.

Por otro lado, las cantidades totales de estos gases que queremos obtener son las correspondientes a 1000 litros de aire puro, es decir, 780 litros de nitrógeno, 210 litros de oxígeno y 10 litros de argón. Por tanto, las cantidades buscadas x, y, z satisfacen las tres siguientes igualdades:

$$\left\{\begin{array}{rr} 0{,}5x+0{,}8y+0{,}6z= & 780 \\ 0{,}5x+0{,}2y+0{,}3z= & 210 \\ 0{,}1z= & 10 \end{array}\right. .$$

El conjunto de ecuaciones anterior es un caso particular de los llamados *sistemas de ecuaciones lineales*, que estudiaremos a lo largo de este tema. La solución de nuestro problema coincide con la solución del sistema anterior. En este caso es fácil de calcular y resulta ser $x=0$, $y=900$, $z=100$. En definitiva, para producir 1000 litros de aire puro debemos llenar la habitación con 900 litros del tanque 2 y 100 litros del tanque 3.

$\square$

Nuestro objetivo principal en este tema consiste en estudiar sistemas de ecuaciones lineales, de acuerdo con la siguiente definición:

Definición 52 (Sistema de Ecuaciones Lineales)
Por un sistema de ecuaciones lineales entendemos un conjunto de ecuaciones del tipo

$$\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & +\ldots+ & a_{1m}x_m & =b_1 \\ & \ldots & & \ldots \\ a_{n1}x_1 & +\ldots+ & a_{nm}x_m & =b_n \end{array}\right. ,$$

donde n y m son números naturales y a_{ij} es un número real $\forall i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m$.
Una solución para este sistema vendrá formada por un valor para cada incógnita x_i de manera que se verifiquen a la vez todas las igualdades.

Nuestra intención es estudiar dichas soluciones. Para ello, tendremos que trabajar con los coeficientes a_{ij} y b_k. Como veremos, será útil escribirlos de la forma:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Este tipo de expresiones se llaman matrices, y serán nuestro próximo objeto de estudio.

5.1 Matrices

Aunque nuestra motivación para estudiar las matrices es su utilidad para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, diremos que las matrices aparecen de forma natural en Geometría, Estadística, Economía, Informática, Física, etc...

Comencemos introduciendo el concepto de matriz y las primeras definiciones relacionadas con él. Nos vamos a centrar en el estudio de matrices cuyos elementos son números reales.

Definición 53 (Matriz)
Una matriz es un conjunto de números reales dispuestos en forma de rectángulo, que usualmente se delimitan por medio de paréntesis.
Si una matriz tiene n filas y m columnas, se dice que es una matriz de orden $n \times m$. Nótese que una tal matriz tiene $n \cdot m$ elementos.
El elemento (o componente) (i, j) de una matriz A es el número a_{ij} que se encuentra en la fila i y en la columna j.

Observación 8
Al decir que una matriz tiene forma de rectángulo, nos referimos a que todas las filas tienen el mismo número de elementos, y lo mismo ocurre con las columnas. En cambio una fila y una columna de una matriz pueden tener distinto número de elementos.

A pesar de que la definición de matriz que acabamos de presentar puede resultar en un primer momento algo extraña, se entiende rápidamente viendo algunos ejemplos.

EJEMPLOS

Ejemplo 1 : La matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

es de orden 2×3, ya que tiene 2 filas y 3 columnas (en consecuencia, tiene $2 \cdot 3 = 6$ elementos) y su elemento $(1,2)$ es el que está situado en la primera fila y en la segunda columna, es decir $a_{12} = 9$.

Ejemplo 2 : La matriz

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

es de orden 3×4, y su elemento $(3,2)$ es $b_{32} = -2$.

$\square$

Para que dos matrices A y B sean iguales tienen que ocurrir dos cosas: que ambas tengan el mismo número de filas y el mismo número de columnas, es decir, que tengan el mismo orden, y además que todos sus elementos (i, j) sean iguales, es decir, $a_{ij} = b_{ij}$ para cualesquiera i, j.

El primer tipo de matrices que queremos resaltar es el de las formadas por una sola fila o una sola columna:

Definición 54 (Matrices Fila y Columna)
Una matriz que esté formada por una sola columna, se llama vector columna. Análogamente, una matriz formada por una única fila se llama vector fila.

En particular, toda matriz puede verse como un conjunto de vectores fila todos de igual longitud, o como un conjunto de vectores columna de igual longitud.

EJEMPLO

Las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

son, respectivamente, un vector columna (es una matriz de orden 3×1) y un vector fila (es de orden 1×3).

□

Una operación elemental que se puede aplicar a una matriz y que nos será de especial utilidad consiste en intercambiar filas por columnas, esto es lo que se conoce como calcular su matriz traspuesta:

Definición 55 (Matriz Traspuesta)
Si A es una matriz $n \times m$, se define su matriz traspuesta, y se representa por A^t, como la matriz $m \times n$ cuyas filas son las columnas de A, es decir, el elemento (i, j) de la matriz A^t es el elemento (j, i) de la matriz A, para cualesquiera i, y j.

EJEMPLO

En el ejemplo anterior, la matriz traspuesta de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{es} \quad A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 9 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nótese que al ser A de rango 2×3, A^t es de rango 3×2.

□

Son de especial interés aquellas matrices que tienen una relación agradable con su matriz traspuesta. Este es el caso de los siguientes tipos de matrices:

Definición 56 (Matriz Simétrica y Antisimétrica)

1. Una matriz se dice que es simétrica si es igual a su traspuesta. Para ello, obviamente, deberá tener el mismo número de filas que de columnas.
2. Una matriz se dice que es antisimétrica si es igual a la matriz que resulta de cambiar de signo todos los elementos de su matriz traspuesta. Nótese que para que una matriz sea antisimétrica sus elementos del tipo (i, i) deben ser todos 0. Además, para que una matriz sea antisimétrica también debe ocurrir que tenga el mismo número de filas que de columnas.

EJEMPLO

Las matrices

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \pi \\ 1 & \pi & -5 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & \pi \\ -2 & -\pi & 0 \end{pmatrix}$$

son simétrica y antisimétrica, respectivamente, mientras que

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & \pi & -1 \\ 1 & \pi & -5 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & \pi \\ 1 & \pi & -5 \end{pmatrix}$$

no responden a ninguno de los dos tipos.

□

Finalmente, destacamos varios tipos de matrices que son interesantes por su orden y por ser cero algunos de sus elementos. Estas matrices juegan un papel fundamental en los métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales que estudiaremos en la tercera sección de este tema.

Definición 57 (Matrices Cuadradas, Diagonales y Triangulares)
Una matriz cuadrada es aquella que tiene igual número de filas que de columnas. En este caso, se llama diagonal principal a la diagonal formada por todos los elementos del tipo (i,i).

1. Una matriz cuadrada se dice diagonal si todos los elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero.
2. Una matriz cuadrada se dice triangular superior si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son iguales a cero.
3. Una matriz cuadrada se dice triangular inferior si todos los elementos por encima de la diagonal principal son iguales a cero.

Como veremos en la próxima sección del tema, las matrices cuadradas tienen dos peculiaridades que las hacen de mayor importancia: tienen determinante y, algunas de ellas, matriz inversa.

EJEMPLO

De las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \underline{2} & 0 & 0 \\ 3 & \underline{1} & 0 \\ 6 & 4 & \underline{7} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

todas son cuadradas, A es triangular inferior, B es diagonal y C triangular superior. Los elementos de la diagonal principal de A vienen subrayados.

□

Observación 9
Nótese que toda matriz diagonal es simétrica pero no al contrario.

5.1.1 Operaciones con matrices

Suma de matrices

La primera operación que se nos plantea hacer cuando tenemos dos matrices es sumarlas. Veamos cuando esto es posible y, en tal caso, como se hace.

Definición 58 (Matriz Suma)
Si A y B son matrices $n \times m$, se define la matriz $A+B$ como una matriz también $n \times m$ cuyas componentes se obtienen sumando las componentes (i,j) de A y B. Es decir, si llamamos $C = A+B$, entonces $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

EJEMPLOS

Ejemplo 1 : En el ejemplo anterior, la suma de A y C es

$$A+C=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 3 & 8 & 0 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2 : $\begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & \pi & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 12 & 1 \\ 0 & 1+\pi & 3 \end{pmatrix}.$

Ejemplo 3 : Las matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 3 & 8 & 0 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

no pueden sumarse puesto que no son del mismo orden.

□

Observación 10
Es importante observar que para que dos matrices se puedan sumar tienen que ser del mismo orden.

En el caso en que se pueda realizar la operación, la suma de matrices verifica las siguientes propiedades, donde A, B y C son matrices:

Propiedades

(I) Asociativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$.

(II) Elemento neutro: Es aquella matriz $n\times m$ cuyas componentes son todas cero. Se denomina matriz 0, y verifica que $A+0=0+A=A$ para toda matriz A de orden $n\times m$.

(III) Elemento opuesto: Dada A una matriz, su matriz opuesta $-A$ se define como aquella cuyas componentes son iguales a las de A, pero cambiadas de signo. Por tanto, se tiene que $A+(-A)=(-A)+A=0$.

(IV) Conmutativa de la suma: $A+B=B+A$.

Producto por números

Ahora que ya sabemos sumar matrices es natural preguntarnos si es posible multiplicar una matriz por un número real. La respuesta es que dicha operación puede realizarse siempre y se hace de acuerdo con la siguiente definición.

Definición 59 (Producto de un número y una matriz)
Dada A una matriz y λ un número real, se define el producto λA como una matriz, con el mismo número de filas y columnas que A, y obtenida multiplicando por λ cada componente. Es decir, si $C=\lambda A$, entonces $c_{ij}=\lambda a_{ij}$.

EJEMPLO

$$2\begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 18 & 12 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

□

A continuación mostramos una lista de propiedades que son satisfechas por el producto de matrices por números, donde A y B son matrices y λ y μ son números reales:

Propiedades

(I) Distributivas:

a) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

b) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

(II) Pseudoasociativa: $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

(III) Modular: $1A = A$.

Producto de matrices

La siguiente operación que se nos plantea es la de multiplicar dos matrices entre sí. A continuación estudiaremos cuando es posible multiplicar una matriz por otra y como hacerlo en caso de que se pueda.

La definición del producto de matrices es más complicada y menos intuitiva. Primero aprenderemos a multiplicar un vector fila con un vector columna cuando ambos tienen el mismo número de elementos.

Definición 60 (Producto de un vector fila y un vector columna)
Sea A una matriz de orden $1 \times m$ y B una matriz de orden $m \times 1$. Definimos el producto de A y B (en ese orden) como el número real siguiente:

$$AB = a_1 b_1 + \cdots + a_m b_m,$$

donde hemos llamado a_i a los elementos de A y b_i a los de B.

EJEMPLO

$$\begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1)\cdot(-1) + 9\cdot 1/3 + 6\cdot(-2) = -8.$$

□

Observación 11
Para poder multiplicar un vector fila por un vector columna, estos deben tener el mismo número de elementos.

Pasemos ahora al caso general. A continuación mostramos cuando dos matrices se pueden multiplicar y usamos el ya conocido producto de una matriz fila por una matriz columna para definir el producto de matrices.

Definición 61 (Producto de dos matrices)
Sea A una matriz $n \times m$ y B una matriz $m \times k$. Se define el producto AB como una matriz C, que tendrá orden $n \times k$, y cuya componente c_{ij} se obtiene al multiplicar la i-ésima fila de A por la j-ésima columna de B, es decir:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots a_{im}b_{mj}.$$

Observación 12
Para que una matriz A se pueda multiplicar por otra matriz B (en ese orden), A debe tener tantas columnas como filas tiene B. Además, en tal caso, la matriz AB tiene tantas filas como A y tantas columnas como B. Es posible que A se pueda multiplicar por B pero B no pueda multiplicarse por A.

Además, si A es de orden $n \times m$ y B es de orden $m \times k$, entonces AB es de orden $n \times k$.

EJEMPLO

La matriz 2×3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

no se puede multiplicar por la matriz 4×2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & \pi \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

pero B si puede multiplicarse por A. Además BA es la matriz 4×3

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 1 & -9+\pi & -6+4\pi \\ -2 & 18 & 12 \\ -1 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, el elemento (1,2) de la matriz BA lo hemos obtenido haciendo el cálculo siguiente:

$$b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} = 1 \cdot 9 + (-3) \cdot 1 = 6.$$

□

La siguiente definición alude a un tipo muy particular de matrices que son muy importantes ya que juegan el papel de elemento neutro para el producto de matrices.

Definición 62 (Matriz Identidad)
Para cualquier número natural n, se define la matriz identidad de orden n, que representamos por I_n, como la matriz $n \times n$ diagonal cuya diagonal principal está formada por unos. A veces se escribirá simplemente I.

EJEMPLO

La matriz identidad de orden 3 es

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Enunciamos ahora las propiedades básicas para el producto de matrices, siendo A, B y C matrices de órdenes convenientes para que se pueda realizar la operación en cada caso:

Propiedades

(I) Asociativa $(AB)C = A(BC)$.

(II) Elemento neutro: Si A es una matriz $n \times m$, entonces $AI_m = A$, $I_nA = A$.

(III) Distributivas: $A(B+C) = AB+AC$; $(A+B)C = AC+BC$.

Observación 13
En el producto de matrices hay un par de propiedades a las que estamos acostumbrados con los números que no se cumplen. La primera de ellas es la propiedad conmutativa. De hecho, como ya hemos comentado anteriormente, puede ocurrir que dos matrices A y B se puedan multiplicar así, AB, pero no de la forma BA. Más aún, incluso en los casos en que se puedan multiplicar por ambos lados, el resultado puede ser distinto: $AB \neq BA$.

Del mismo modo no es cierto que si el producto de dos matrices es la matriz cero, entonces alguna de las dos sea la matriz cero.

Por último, dada una matriz cuadrada A y un número natural n, se denota por A^n al producto de la matriz A consigo misma n veces $A^n = A \cdots A$.

5.1.2 Transformaciones elementales. Rango de una matriz

Cuanto más sencilla sea la estructura de una matriz más fácil va a ser el estudio de determinadas propiedades de dicha matriz. La idea que se persigue con las transformaciones elementales es convertir una matriz concreta en otra matriz más fácil de estudiar. En concreto, siempre será posible conseguir una matriz escalonada, en el sentido que definimos a continuación.

Definición 63 (Matriz Escalonada)
Sea A una matriz y F una fila de A. Diremos que F es nula si todos los números de F coinciden con el cero. Si F es no nula, llamamos pivote de F al primer número distinto de cero de F contando de izquierda a derecha.
Una matriz escalonada es aquella que verifica las siguientes propiedades:

1. Todas las filas nulas (en caso de existir alguna) se encuentran en la parte inferior de la matriz.
2. El pivote de cada fila no nula se encuentra estrictamente más a la derecha que el pivote de la fila de encima.

EJEMPLO

Entre las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

A no es escalonada, mientras que B y C sí lo son.

□

Un concepto que será fundamental a la hora de resolver sistemas de ecuaciones lineales es saber calcular el rango de una matriz. Esto es particularmente sencillo en el caso de matrices escalonadas y lo haremos atendiendo a la siguiente definición.

Definición 64 (Rango de una Matriz Escalonada)
Dada una matriz escalonada E se define el rango de E, que representamos por $\mathrm{rg}(E)$, como el número de filas no nulas de E.

Observación 14
El rango de una matriz es un número natural.

EJEMPLOS

Ejemplo 1 : En los ejemplos B y C de arriba se tiene $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(C) = 2$, sin embargo no podemos decir que $\mathrm{rg}(A) = 3$ ya que A no está escalonada.

Ejemplo 2 : Las matrices nulas tienen rango cero y la matriz identidad de orden n cumple $\mathrm{rg}(I_n) = n$.

□

La siguiente cuestión que abordaremos es la definición de rango para una matriz cualquiera que no esté escalonada. La idea será la de transformar la matriz dada en otra que sea escalonada mediante las llamadas transformaciones elementales por filas que describimos a continuación.

Definición 65 (Transformaciones Elementales por Filas de una Matriz)
Dada una matriz A cualquiera, las transformaciones elementales por filas de A son tres:

1. Intercambiar la posición de dos filas.
2. Multiplicar una fila por un número real distinto de cero.
3. Sustituir una fila por el resultado de sumarle a dicha fila otra fila que ha sido previamente multiplicada por un número cualquiera.

Análogamente podríamos hacerlo todo por columnas; sin embargo, son las transformaciones por filas las que son importantes en los sistemas de ecuaciones lineales que estudiaremos después.

El siguiente resultado nos garantiza que siempre podemos transformar una matriz cualquiera en otra escalonada. Este hecho nos guiará a la definición del rango de una matriz en general.

Teorema
A partir de cualquier matriz A se puede llegar, mediante una cantidad finita de transformaciones elementales, a una matriz escalonada E.

Veamos en un ejemplo cómo se hace.

EJEMPLO

Transformemos la matriz

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

en una escalonada. Obsérvese que, primero, hacemos que la componente $(1,1)$ de la matriz de partida sea igual a uno. Luego, se hace que el resto de componentes de la primera columna sean cero. Después se pasa a la componente $(2,2)$, y así sucesivamente:

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo primero que hemos hecho ha sido intercambiar la primera y la tercera fila. A continuación sustituimos la segunda fila por ella misma menos la primera, y luego sustituimos la tercera por ella más 6 por la primera.

$$\underset{F_2'=F_2-F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ -6 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3'=F_3+6F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

Finalmente cambiamos la tercera fila por ella más 4 veces la segunda, y luego la cambiamos de signo.

$$\underset{F_3'=F_3+4F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \underset{F_3'=-F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

□

Como anticipamos, el teorema anterior nos permite hacer una definición importante:

Definición 66 (Rango de una Matriz)
Dada una matriz A cualquiera se define el rango de A y lo denotamos $\mathrm{rg}(A)$ como el rango de cualquier matriz escalonada E equivalente con A (se demuestra que este número no depende de la matriz escalonada E a la que se llegue).

Observación 15
El rango de una matriz siempre es un número menor o igual que su número de filas y su número de columnas. Además, la única matriz que tiene rango cero es la matriz nula.

EJEMPLO

Siguiendo con el ejemplo anterior, el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es 3, ya que es equivalente por transformaciones elementales por filas a la matriz escalonada de rango 3

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

□

EJEMPLO

Calculemos el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para ello haremos transformaciones elementales por filas en la matriz hasta convertirla en una escalonada. Obsérvese que, primero, hacemos que la componente $(1,1)$ de la matriz de inicial sea igual a uno. Luego, se hace que el resto de componentes de la primera columna sean cero. Después pasamos a la segunda fila, y así sucesivamente:

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo primero que hemos hecho ha sido intercambiar la primera y la tercera fila. A continuación sustituimos la segunda fila por ella misma más la primera multiplicada por 5, y luego sustituimos la tercera por ella más 6 por la primera.

$$\underset{F_2'=F_2+5F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 13 \\ -6 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3'=F_3+6F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 13 \\ 0 & -4 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

El siguiente paso es hacer 1 el elemento $(2,2)$, para ello dividimos la segunda ecuación por -4. Finalmente cambiamos la tercera fila por ella más 4 veces la segunda, con lo que obtenemos

$$\underset{F_2'=-\frac{1}{4}F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3/4 & -13/4 \\ 0 & -4 & 3 & 13 \end{pmatrix} \underset{F_3'=F_3+4F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3/4 & -13/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que es una matriz escalonada, equivalente a la matriz inicial del problema y de rango dos. De este modo concluimos que el rango de la matriz de inicio es 2.

□

EJEMPLO

Haciendo transformaciones elementales de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

llegamos a que es equivalente a la matriz escalonada

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que tiene rango dos. En consecuencia el rango de la matriz A es $\mathrm{rg}(A) = 2$.

□

5.2 Determinantes

Una de las operaciones más importantes asociadas a las matrices es el determinante. Es importante porque, entre otras cosas, nos permite saber si la matriz es o no invertible (véase la definición 69) y permite calcular las soluciones de algunos sistemas de ecuaciones lineales, como veremos más adelante.

El determinante de una matriz cuadrada es un número real cuya definición exacta es bastante complicada. Por ello, definiremos primero el determinante de matrices pequeñas, y estudiaremos métodos y técnicas para calcular determinantes en general. Ésta no es la definición más elegante desde el punto de vista matemático, pero sí la más operativa. La definición que damos es recursiva y nos permitirá calcular el determinante de una matriz cuadrada de orden n a partir de determinantes de matrices cuadradas de orden $n-1$.

Observación 16
Solamente se puede calcular el determinante a matrices cuadradas.

En cuanto a la notación, a veces el determinante se escribe con la palabra det, y otras veces se indica sustituyendo los paréntesis de la matriz por barras verticales.

Como decíamos, empezaremos calculando el determinante de matrices pequeñas.

1. El determinante de una matriz 1×1 es: $\det(a) = a$.

2. El determinante de una matriz 2×2 es:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3. El determinante de una matriz 3×3 es:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

   La fórmula anterior se conoce como "Regla de Sarrus".

Observación 17
El determinante de una matriz (cuadrada) es un número real.

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLOS

Ejemplo 1 : $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - (-5)\cdot 1 = 11.$

Ejemplo 2 : $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 7 & 6 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot 6\cdot 0 + 7\cdot(-1)\cdot 0 + (-1)\cdot 2\cdot(-1) - (-1)\cdot 6\cdot 0 - 2\cdot(-1)\cdot 3 - (-1)\cdot 7\cdot 0 = 8.$

□

Veamos ahora como calcular el determinante de una matriz cuadrada cualquiera. Para ello, necesitamos antes el concepto de menor adjunto de una matriz.

Definición 67 (Menor Adjunto de una Matriz)
Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada. Dado un par de índices (i, j) representamos por A_{ij} a la matriz que resulta al eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna de A. El menor adjunto δ_{ij} de A es el número real dado por:
$$\delta_{ij} = (-1)^{i+j}\,|A_{ij}|.$$

El signo $(-1)^{i+j}$ en la definición anterior se suele recordar mediante la regla:
$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

EJEMPLO

Para la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
A_{23} es la matriz
$$A_{23} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$
luego, el menor adjunto δ_{23} de la matriz A es
$$\delta_{23} = (-1)^{2+3} \cdot |A_{23}| = -\begin{vmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 9 = -9.$$

□

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n. Entonces su determinante se puede calcular mediante el desarrollo de Laplace por una fila cualquiera (o columna), de la siguiente forma:

1. Si elegimos la i-ésima fila, $|A| = a_{i1}\,\delta_{i1} + \ldots + a_{in}\,\delta_{in}$.
2. Si elegimos la j-ésima columna, $|A| = a_{1j}\,\delta_{1j} + \ldots + a_{nj}\,\delta_{nj}$.

EJEMPLO

Un modo de calcular el determinante de la matriz A del ejemplo anterior es hacer el desarrollo de Laplace por la cuarta fila, del siguiente modo:
$$|A| = a_{41}\,\delta_{41} + a_{42}\,\delta_{42} + a_{43}\,\delta_{43} + a_{44}\,\delta_{44}$$
$$= 0 + 1\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 + (-1)\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6.$$

Hemos elegido la cuarta fila porque es la que tiene mayor número de ceros. Así, al ser $a_{41} = a_{43} = 0$ los sumandos correspondientes en el desarrollo de Laplace son cero y, por tanto, no tenemos que calcular δ_{41} y δ_{43}, simplificándose de este modo el problema.

□

Observación 18
Nótese que para hacer el desarrollo del determinante por una fila o por una columna, es interesante elegir aquella fila o columna que tenga más ceros, ya que eso nos permitirá ahorrarnos cálculos. En cualquier caso, el cálculo del determinante usando el desarrollo de Laplace es práctico sólo cuando trabajamos con matrices de tamaño pequeño. Cuando el orden de la matrices crece, el número de operaciones necesarias para calcular su determinante crece rápidamente y el cálculo resulta impracticable.

A continuación, recogemos algunas de las propiedades más importantes de los determinantes. Supongamos que A es una matriz cuadrada y que λ es un número real.

Propiedades

(I) Si B se obtiene al intercambiar dos filas de A, entonces $|B| = -|A|$.

(II) Si B se obtiene al multiplicar una única fila de A por λ, entonces $|B| = \lambda\,|A|$.

(III) Si B se obtiene al sustituir una fila por el resultado de sumarle a dicha fila otra fila que ha sido previamente multiplicada por un número cualquiera, entonces $|B| = |A|$.

(IV) Si A tiene una fila de ceros entonces $|A| = 0$.

(V) Si dos filas de A son iguales o proporcionales entonces $|A| = 0$.

(VI) Si A es triangular (superior o inferior), entonces $|A|$ se puede calcular como el producto de los números de la diagonal principal.

(VII) El determinante de una matriz cuadrada coincide con el de su traspuesta, es decir, $|A| = |A^t|$.

(VIII) El determinante del producto de dos matrices coincide con el producto de los determinantes, es decir, $\det(AB) = \det A \det B$.

Puesto que $|A| = |A^t|$ deducimos que todas las propiedades anteriores se verifican igualmente si en lugar de filas hablamos de columnas.

EJEMPLOS

Ejemplo 1 : El determinante de la matriz nula es cero.

Ejemplo 2 : El determinante de la matriz identidad es uno.

□

Para calcular ejemplos más complicados de orden mayor o igual que 4 necesitamos usar las propiedades de los determinantes. Concretamente, las tres primeras propiedades reflejan el comportamiento de los determinantes frente a transformaciones elementales y nos permiten calcular un determinante pasando de la matriz dada a otra que sea más fácil mediante transformaciones elementales (por filas o por columnas). En general, resultará interesante conseguir una fila o columna en que casi todos los elementos sean cero, y desarrollar por esa fila o columna para reducir el determinante a otro de menor orden.

5.2.1 Rango de una matriz y determinantes

Aprenderemos ahora una nueva forma de calcular el rango de una matriz mediante el uso de los determinantes.

Definición 68 (Submatriz)
Si A es cualquier matriz, entonces una submatriz de A es cualquier matriz S obtenida al eliminar de A algunas de sus filas y columnas.

EJEMPLOS

Ejemplo 1 : La matriz A_{ij} obtenida al suprimir la i-ésima fila y la j-ésima columna es una submatriz de A.

Ejemplo 2 : La matriz

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

es una submatriz de

$$\begin{pmatrix} -\underline{6} & 2 & 3 & \underline{1} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \underline{1} & -1 & 0 & \underline{2} \end{pmatrix}.$$

□

Nótese que aunque A no sea cuadrada contiene gran cantidad de submatrices que sí lo son y a las que tiene por tanto sentido calcularles su determinante. Este hecho enlaza con el siguiente resultado que nos muestra un modo alternativo de calcular el rango de una matriz.

Teorema
El rango de una matriz cualquiera A coincide con el orden más grande que tengan las submatrices cuadradas de A con determinante no nulo.

Concretamente, el resultado anterior nos dice que $\mathrm{rg}(A) = k$ si y sólo si:

1. Existe S submatriz cuadrada de A de orden k con $|S| \neq 0$,
2. Si S' es cualquier submatriz cuadrada de A de orden mayor que k, entonces $|S'| = 0$.

Así, cuando queramos calcular el rango de una matriz cualquiera, una opción será aplicar el resultado anterior de la siguiente manera.

Cálculo del rango de una matriz
Sea A una matriz de orden $n \times m$. Por una propiedad conocida del rango sabemos que $\mathrm{rg}(A) \leq \min\{n,m\}$, lo que nos proporciona una estimación de lo grande que puede ser el rango de A. Supongamos que $n = \min\{n,m\}$. Para ver si el rango de A es n buscamos submatrices cuadradas de A de orden n y que tengan determinante no nulo. Si encontramos alguna entonces $\mathrm{rg}(A) = n$. De lo contrario $\mathrm{rg}(A) \leq n-1$. Para ver si el rango de A es $n-1$ buscamos submatrices cuadradas de A de orden $n-1$ y que tengan determinante no nulo. Si encontramos alguna entonces $\mathrm{rg}(A) = n-1$. De lo contrario $\mathrm{rg}(A) \leq n-2$. Así seguiríamos hasta calcular el rango de A.

Esta forma de calcular el rango será especialmente útil para matrices con parámetros.

EJEMPLO

Calculemos el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primero observamos que A es de orden 3×4, luego su rango será como máximo 3. Así, calculamos el determinante de todas las submatrices cuadradas de orden 3 de A, a saber

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En consecuencia el rango de A no es tres y, por tanto, será como máximo 2. Así, comprobamos si existe alguna submatriz cuadrada de orden 2 de A con determinante no cero. En efecto:

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

luego, por el teorema anterior, tenemos $\mathrm{rg}(A) = 2$.

□

EJEMPLO

Calculemos el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Igual que antes, primero observamos que A es de orden 3×4, luego su rango será como máximo 3. Así, comprobamos si existe alguna submatriz cuadrada de orden 3 de A con determinante no cero. En efecto:

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

luego, por el teorema anterior, tenemos $\mathrm{rg}(A) = 3$.

□

5.2.2 Inversa de una matriz y determinantes

Una de las operaciones más importantes que atañen a las matrices es el cálculo de la matriz inversa de una matriz dada, que ahora introducimos. Es fundamental observar que una condición necesaria (pero no suficiente) para que exista la matriz inversa de una matriz es que ésta tiene que ser cuadrada.

Definición 69 (Inversa de una Matriz)
Dada una matriz cuadrada A de orden n, se dice que A es invertible (o que tiene inversa) si existe una matriz cuadrada B del mismo orden que A y de forma que $AB = BA = I_n$. En tal caso, B se llama la matriz inversa de A y la representamos por A^{-1}.

EJEMPLO

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es invertible y su matriz inversa es

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -3 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

Observación 19
Como hemos dicho antes, una condición necesaria para que una matriz tenga inversa es que sea cuadrada. Por otro lado, a diferencia de lo que ocurre con los números reales, no todas las matrices cuadradas no nulas tienen inversa.

En general es complicado probar si una matriz tiene inversa y, en caso afirmativo, calcularla. No obstante, todo se simplifica mucho si hacemos uso de los determinantes y del concepto de matriz adjunta que introducimos a continuación. Antes de hacerlo, recordemos que si A es una matriz cuadrada entonces δ_{ij} representa el menor adjunto de A obtenido al suprimir la i-ésima fila y la j-ésima columna de A.

Definición 70 (Matriz Adjunta)
Definimos la matriz adjunta de A como la matriz del mismo orden que A y cuyo elemento en la posición (i, j) es δ_{ij}. La representaremos por $\mathrm{Adj}(A)$.

EJEMPLO

En el ejemplo anterior,

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Su elemento, por ejemplo, $(1,1)$ no es más que

$$\delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

El elemento $(2,3)$ lo hemos calculado mediante el cómputo

$$\delta_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

□

Con los conocimientos que acabamos de adquirir es sencillo calcular la matriz inversa de una matriz invertible. El siguiente resultado nos dice cuando una matriz cuadrada tiene inversa y, en caso de tenerla, nos da una regla de fácil aplicación para calcularla.

Teorema
Una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$. Además en tal caso tenemos:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\mathrm{Adj}(A))^t.$$

EJEMPLO

Usando el teorema, la matriz A del ejemplo anterior tiene inversa puesto que $|A| = 1$, y

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -3 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

5.3 Sistemas de ecuaciones lineales

En esta sección usaremos lo que conocemos sobre matrices y determinantes para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Antes de eso formalicemos mediante las dos siguientes definiciones el concepto de sistema de ecuaciones lineales.

Definición 71 (Ecuación Lineal)
Una ecuación lineal con m incógnitas es una ecuación del tipo $a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m = b$ en la que a_i, $i = 1, \ldots, m$, y b son números reales cualesquiera. Los números a_i se llaman coeficientes, el número b se llama término independiente y las variables x_i son las incógnitas.
Una solución de la ecuación estará formada por m números reales de forma que al sustituir su valor concreto en las incógnitas se cumple la ecuación.

EJEMPLOS

Ejemplo 1 : La ecuación

$$2x - y = 0$$

es lineal y una solución de ella es $x = 1$, $y = 2$. Otra solución es $x = 0$, $y = 0$.

Ejemplo 2 : La ecuación

$$x + y + z + 2t = 8$$

es lineal. Una solución de dicha ecuación es $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$, $t = 4$. Otra solución es $x = 8$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$.

Ejemplo 3 : La ecuación

$$3x = -6$$

es lineal y la única solución que tiene es $x = -2$.

Ejemplo 4 : Las ecuaciones

$$x^2 + y = 1, \quad x \cdot y - 2z = 0, \quad \text{y} \quad \log(x) + y = 2$$

no son lineales.

□

Nótese que en una ecuación lineal no pueden aparecer términos tales como el producto de dos incógnitas, una incógnita elevada al cuadrado (al cubo,...), raíces cuadradas de incógnitas, el inverso de una incógnita, funciones trigonométricas o exponenciales de una incógnita,...

Definición 72 (Sistema de Ecuaciones Lineales)
Se llama sistema de ecuaciones lineales (abreviado, SEL) a un conjunto de n ecuaciones lineales todas ellas con las mismas m incógnitas.

Por tanto, un SEL tiene el siguiente aspecto:

$$\left\{\begin{array}{llll} a_{11}x_1 & +\ldots+ & a_{1m}x_m & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +\ldots+ & a_{nm}x_m & = b_n \end{array}\right. .$$

Este sistema se suele reescribir en forma matricial de la forma $AX = b$, donde estamos llamando:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \text{ y } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

La matriz A se llama matriz de coeficientes, el vector columna X se llama vector de incógnitas y el vector columna b se llama vector de términos independientes.

La matriz ampliada del SEL es la matriz que se obtiene cuando añadimos al final de la matriz de coeficientes la columna b de términos independientes. La representaremos por A^* o por $(A\,|\,b)$. En este caso,

$$(A\,|\,b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO

Un ejemplo de SEL es

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2x & +y & = 0 \\ x & -y & = 3 \end{array}\right. .$$

Su matriz de coeficientes, vector de términos independientes y matriz ampliada son, respectivamente,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

La siguiente definición describe lo que entendemos por una solución de un sistemas de ecuaciones lineales.

Definición 73 (Solución de un SEL)
Una solución de un SEL estará formada por m números reales que sean solución a la vez de todas las ecuaciones del SEL. Diremos que dos SEL son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

EJEMPLO

Una solución del SEL del ejemplo anterior es $x = 1$, $y = -2$. De hecho, es fácil comprobar que ésta es la única solución que admite.

$\square$

Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican en tres grupos atendiendo a la cantidad de soluciones que tienen:

Definición 74 (Carácter de un SEL)
Un SEL se dice incompatible (abreviado, SI) si no admite ninguna solución. Si admite soluciones se dice compatible (SC). Un sistema compatible puede ser:

1. Sistema Compatible Determinado (SCD) si admite una única solución.
2. Sistema Compatible Indeterminado (SCI) si admite más de una solución.

EJEMPLOS

Ejemplo 1 : El sistema

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2x & +y & = 0 \\ x & -y & = 3 \end{array}\right.$$

es compatible determinado. Como notamos en el ejemplo anterior, su única solución es $x = 1$, $y = -2$.

Ejemplo 2 : El sistema

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2x & +y & = 1 \\ -4x & -2y & = -2 \end{array}\right.$$

es compatible indeterminado. Algunas de sus soluciones son $x = 0$, $y = 1$, y $x = 1$, $y = -1$.

Ejemplo 3 : El sistema

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2x & +y & = 0 \\ 4x & +2y & = 3 \end{array}\right.$$

es incompatible ya que no admite ninguna solución.

$\square$

Definición 75 (Discutir y resolver un SEL)
Discutir un SEL consiste en decidir de qué tipo es según la clasificación anterior. Resolver un SEL consiste en calcular todas las soluciones del SEL si las hay.

Un caso particular de SEL que aparece en muchas ocasiones es aquel en el que el término independiente de todas sus ecuaciones es cero. Es evidente que un SEL de este tipo siempre será compatible ya que una solución es elegir todas las incógnitas iguales a 0.

Definición 76 (SEL Homogéneo)
Diremos que un SEL es homogéneo si todos sus términos independientes son iguales a cero.

EJEMPLO

Un ejemplo de SEL homogéneo es

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x & +y & -z & =0 \\ x & & +2z & =0 \end{array}\right. .$$

□

Antes de meternos a resolver un SEL debemos plantearnos si éste tiene o no solución, y en caso de tenerla, averiguar cuantas soluciones tiene. Así, lo primero que debemos hacer es discutir el sistema. La principal herramienta que usaremos para discutir un SEL sin necesidad de resolverlo es el siguiente resultado:

Teorema de Rouché-Frobenius

Supongamos que tenemos un SEL con matriz de coeficientes A y matriz ampliada A^*.

1. *Si* $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A^*)$*, entonces tenemos un sistema incompatible.*
2. *Si* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*)$ *y es igual al número de incógnitas, entonces tenemos un sistema compatible determinado.*
3. *Si* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*)$ *y es menor que el número de incógnitas, entonces tenemos un sistema compatible indeterminado. Además, en este caso, si n es el número de incógnitas y* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) < n$*, entonces las soluciones del sistema dependen de un número de parámetros igual a* $n - \mathrm{rg}(A)$.

Apliquemos el teorema para comprobar el carácter de los sistemas de los ejemplos anteriores.

EJEMPLOS

Ejemplo 1 : Consideremos el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2x & +y & =0 \\ x & -y & =3 \end{array}\right. .$$

Entonces $rg(A) = 2 = rg(A^*)$ y coincide con el número de incógnitas, luego, es un SCD.

Ejemplo 2 : Para el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2x & +y & =1 \\ -4x & -2y & =-2 \end{array}\right.$$

tenemos $rg(A) = 1 = rg(A^*)$ y el número de incógnitas es 2, luego, según el teorema, el sistema es compatible indeterminado.

Ejemplo 3 : El sistema

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2x & +y & =0 \\ 4x & +2y & =3 \end{array}\right.$$

es incompatible por ser $rg(A) = 1 \neq 2 = rg(A^*)$.

□

Los siguientes ejemplos son un poco más complicados. En ellos estudiamos sistemas de ecuaciones lineales que dependen de parámetros reales.

EJEMPLO

Consideremos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrl} 2x & +ay & =0 \\ x & -y & =3 \end{array} \right. ,$$

siendo $a \in \mathbb{R}$. Su matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

que tiene rango uno si $a = -2$, y rango dos si $a \neq -2$. Por otro lado, el rango de la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

es siempre dos. De este modo el sistema tendrá distinto carácter para los casos $a = -2$ y $a \neq -2$. Para $a = -2$ tenemos $rg(A) = 1 \neq 2 = rg(A^*)$, luego el sistema es incompatible. Para $a \neq -2$, ocurre $rg(A) = 2 = rg(A^*)$, que coincide con el número de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

□

EJEMPLO

Consideremos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x & +ay & -z & =0 \\ x & -ay & & =3 \\ 2ax & +y & -z & =1 \end{array} \right. ,$$

siendo $a \in \mathbb{R}$.

Su matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ 1 & -a & 0 \\ 2a & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para calcular el rango de A, primero observamos que contiene una submatriz cuadrada de orden dos con determinante no nulo, en efecto

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

luego el $rg(A)$ es al menos 2 (y como máximo 3 pues es una matriz de orden 3×3.) Ahora el determinante de A es $|A| = -2a^2 + 3a - 1$ que es cero si, y solamente si, $a = 1/2$ ó $a = 1$. Así, la matriz A tiene rango dos si $a = 1$ ó $a = 1/2$ y rango tres en otro caso. Por otro lado, para calcular el rango de la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 & 0 \\ 1 & -a & 0 & 3 \\ 2a & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

observamos que

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2a & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 6a, \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ -a & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2a - 3.$$

Al no poder anularse ambos determinantes simultáneamente, concluimos que la matriz A^* siempre contiene una submatriz de orden 3 con determinante distinto de 0, independientemente del valor de a. En conclusión, $rg(A^*) = 3$. De este modo el sistema tendrá distinto carácter para los casos $a = 1$, $a = 1/2$ y $a \neq 1, 1/2$. Para a distinto de 1 y de $1/2$ tenemos $rg(A) = 3 = rg(A^*)$, que coincide con el número de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado. Para $a = 1$, se tiene $rg(A) = 2 \neq 3 = rg(A^*)$, luego el sistema es incompatible. Lo mismo ocurre para $a = 1/2$.

□

En las próximas subsecciones nos preocuparemos de resolver un SEL. Estudiaremos dos herramientas distintas: el método de Gauss y la regla de Cramer.

5.3.1 Método de Gauss para resolver un sistema de ecuaciones lineales

En esta subsección emplearemos el método de Gauss para resolver de una forma sistemática cualquier sistema de ecuaciones lineales. En comparación con otros procedimientos que también se pueden aplicar para la resolución de sistemas lineales, el método de Gauss es muy eficiente.

Este método está basado en la misma idea que seguimos para calcular el rango de una matriz cualquiera: primero realizamos transformaciones sobre la matriz original para convertirla en otra más sencilla y segundo calculamos el rango de la matriz sencilla. Necesitamos entonces definir los que serán los SEL más sencillos de resolver.

Definición 77 (SEL Escalonado)
Diremos que un SEL es escalonado si su matriz ampliada es una matriz escalonada.

EJEMPLO

El sistema

$$\left\{\begin{array}{lllr} 2x & +y & & = 0 \\ & -y & +2z & = 1 \\ & & 3z & = -1 \end{array}\right.$$

es escalonado puesto que su matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Los sistemas escalonados son muy fáciles de resolver si lo hacemos con orden. Lo más sencillo es ir resolviendo las ecuaciones de abajo hacia arriba. Para resolver un SEL escalonado procedemos como sigue:

Resolución de un SEL escalonado

1. *Si el SEL contiene una ecuación del tipo* $0 = b$ *con* $b \neq 0$ *entonces el sistema es incompatible. De lo contrario el SEL es compatible y pasamos al paso 2.*

2. *Encontramos las incógnitas principales y las incógnitas secundarias del SEL. Las principales son las que están asociadas a los pivotes de cada fila no nula de la matriz de coeficientes. Las secundarias son las restantes. Si todas las incógnitas son principales entonces el SEL es compatible determinado. De lo contrario se trata de un SEL compatible indeterminado.*

3. *Para resolver el SEL, se asigna a cada incógnita secundaria un parámetro real y se despejan las incógnitas principales en función de estos parámetros de abajo hacia arriba.*

En particular, se deduce del procedimiento anterior que todo SEL escalonado compatible tiene una única solución o infinitas.

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO

El sistema escalonado

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & -y & -z & = 1 \\ & -y & +z & = 0 \\ & & 3z & = -6 \end{array}\right.$$

es compatible determinado puesto que todas las incógnitas son principales. Para resolverlo iremos despejando las ecuaciones de abajo a arriba: de la tercera ecuación tenemos $z = -2$ y sustituyendo este valor de z en las dos primeras ecuaciones deducimos

$$\left\{\begin{array}{rrl} x & -y & = -1 \\ & -y & = 2 \end{array}\right. .$$

Ahora despejamos el valor de y en la segunda ecuación y obtenemos $y = -2$. Este valor lo sustituimos en la primera ecuación para concluir $x = -3$. Así la solución del sistema es $x = -3$, $y = -2$, $z = -2$.

□

EJEMPLO

El sistema escalonado

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & -y & -z & = 1 \\ & -y & +z & = 0 \\ & & 0 & = 6 \end{array}\right.$$

es incompatible por tener una ecuación del tipo $0 = b$, con $b \neq 0$.

□

EJEMPLO

El sistema escalonado

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & -y & -z & = 1 \\ & -y & +z & = 0 \end{array}\right.$$

es compatible indeterminado por tener incógnitas secundarias. Para resolverlo asignamos un parámetro real a cada una de las incógnitas secundarias, en este caso sólo hay una $z = \alpha$, y despejamos en las ecuaciones de abajo a arriba, con lo que nos queda

$$\left\{ \begin{array}{llll} x & -y & = 1+\alpha \\ & -y & = -\alpha \end{array} \right. .$$

Ahora despejamos el valor de y en la segunda ecuación y obtenemos $y = \alpha$. Este valor lo sustituimos en la primera ecuación para concluir $x = 1+2\alpha$. De este modo, todas las soluciones del sistema son de la forma $x = 1+2\alpha$, $y = \alpha$, $z = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

□

EJEMPLO

El sistema escalonado

$$\left\{ \begin{array}{lllll} x & -y & -z & +2t & = 1 \\ & -y & +z & -t & = 0 \end{array} \right.$$

es compatible indeterminado por tener incógnitas secundarias. Para resolverlo asignamos un parámetro real a cada una de las incógnitas secundarias, en este caso hay dos: $t = \alpha$, $z = \beta$, y despejamos en las ecuaciones de abajo a arriba, con lo que nos queda

$$\left\{ \begin{array}{lll} x & -y & = 1-2\alpha+\beta \\ & -y & = \alpha-\beta \end{array} \right. .$$

Ahora despejamos el valor de y en la segunda ecuación y obtenemos $y = -\alpha+\beta$. Este valor lo sustituimos en la primera ecuación para concluir $x = 1-3\alpha+2\beta$. De este modo, todas las soluciones del sistema son de la forma $x = 1-3\alpha+2\beta$, $y = -\alpha+\beta$, $z = \beta$, $t = \alpha$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

□

Una vez que sabemos resolver los SEL escalonados pasamos al caso general. Dado un SEL cualquiera, el método de Gauss para resolver el SEL responde a los siguientes pasos:

Método de Gauss

1. Se escribe la matriz ampliada A^* del SEL.
2. Se realizan transformaciones elementales por filas hasta convertir A^* en una matriz escalonada.
3. Se escribe y se resuelve el SEL escalonado equivalente al original al que hemos llegado. Como este SEL es equivalente al original, sus soluciones coinciden con las del SEL original.

Observación 20
En particular, como consecuencia del método de Gauss, concluimos que si un SEL es compatible entonces tiene una única solución o infinitas.

EJEMPLO

Resolvamos el SEL siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +3y & +2z & = & -5 \\ 3x & +y & -2z & = & 1 \\ 2x & +y & -z & = & 0 \end{array}\right. .$$

Escribimos la matriz ampliada del SEL:

$$A^* = (A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Aplicamos transformaciones elementales para escalonar la matriz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2'=F_2-3F_1 \\ F_3'=F_3-2F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -8 & -8 & 16 \\ 0 & -5 & -5 & 10 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2'=-\frac{1}{8}F_2 \\ F_3'=-\frac{1}{5}F_3}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{F_3'=F_3-F_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En este punto escribimos el SEL escalonado al que hemos llegado y lo resolvemos. La variable z es secundaria mientras que x e y son principales. Por tanto ponemos $z = \alpha$ donde α es un parámetro real, y despejamos de abajo hacia arriba las incógnitas x e y en función de α. Se obtiene:

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 3y & = & -5-2\alpha \\ & & y & = & -2-\alpha \end{array} .$$

Sustituyendo el valor de y de la segunda ecuación en la primera, obtenemos:

$$x = -3y - 5 - 2\alpha = 6 + 3\alpha - 5 - 2\alpha = 1 + \alpha.$$

Deducimos que estamos ante un SCI con soluciones $x = 1+\alpha$, $y = -2-\alpha$, $z = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

□

EJEMPLO

Estudiemos ahora el siguiente SEL:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +3y & +2z & = & -5 \\ 3x & +y & -2z & = & 1 \\ 2x & +y & -z & = & 1 \end{array}\right. .$$

Escribimos la matriz ampliada del SEL y la escalonamos usando transformaciones elementales:

$$A^* = (A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/5 \end{array}\right).$$

Ahora observamos que la tercera ecuación del sistema que queda es $0 = -1/5$, luego el sistema es incompatible.

□

EJEMPLO

Resolvamos ahora el SEL siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +3y & +2z & = & -5 \\ 3x & +y & -2z & = & 1 \\ 2x & +y & & = & 0 \end{array}\right. .$$

Escribimos la matriz ampliada del SEL y aplicamos transformaciones elementales para escalonar la matriz:

$$A^* = (A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

En este punto escribimos el SEL escalonado al que hemos llegado y lo resolvemos. Todas las variables son principales así que el sistema es compatible determinado y lo resolveremos despejando de abajo hacia arriba las incógnitas. Se obtiene:

$$\begin{array}{rrrrcr} x & + & 3y & +2z & = & -5 \\ & & y & +z & = & -2 \\ & & & z & = & 0 \end{array} .$$

Sustituyendo el valor de z de la tercera ecuación en la primera y la segunda, obtenemos:

$$\begin{array}{rrrcr} x & + & 3y & = & -5 \\ & & y & = & -2 \\ & & z & = & 0 \end{array} .$$

Ahora sustituimos el valor de y de la segunda ecuación en la primera y concluimos que la única solución del sistema es $x = 1$, $y = -2$, $z = 0$.

$\square$

EJEMPLO

Consideremos el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrl} x & -y & = 0 \\ 2x & +ay & = 3 \end{array}\right. ,$$

siendo $a \in \mathbb{R}$. Para $a = -2$ tenemos $rg(A) = 1 \neq 2 = rg(A^*)$, luego el sistema es incompatible, mientras que para $a \neq -2$, ocurre $rg(A) = 2 = rg(A^*)$, que coincide con el número de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado. Así, resolvamos el sistema para el caso $a \neq -2$.

Escribimos la matriz ampliada del SEL y aplicamos transformaciones elementales para escalonarla:

$$A^* = (A|b) = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 2 & a & 3 \end{array}\right) \underset{F_2'=F_2-2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a+2 & 3 \end{array}\right),$$

con lo que hemos llegado al sistema escalonado

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & - & y & = & 0 \\ & & (a+2)y & = & 3 \end{array}\right. .$$

Al ser $a \neq -2$ podemos despejar en la segunda ecuación obteniendo

$$y = \frac{3}{a+2}.$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación concluimos

$$x = \frac{3}{a+2}.$$

□

EJEMPLO

Estudiemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} -x & +ay & -z & = & 2 \\ x & +y & -az & = & 3a+1 \\ ax & -y & -z & = & 2 \end{array} \right. ,$$

que depende de un parámetro $a \in \mathbb{R}$. Para discutir el sistema, primero estudiemos el rango de su matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Haciendo transformaciones elementales por filas encontramos

$$\begin{pmatrix} -1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2'=F_2+F_1 \\ F_3'=F_3+aF_1}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & a & -1 \\ 0 & a+1 & -a-1 \\ 0 & (a+1)(a-1) & -a-1 \end{pmatrix}.$$

$$\underset{F_3'=F_3-(a-1)F_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & a & -1 \\ 0 & a+1 & -a-1 \\ 0 & 0 & (a+1)(a-2) \end{pmatrix},$$

que tiene rango uno si $a = -1$, rango dos si $a = 2$ y rango tres en otro caso. Por otro lado, la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -a & 3a+1 \\ a & -1 & -11 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & -1 & 2 \\ 0 & a+1 & -a-1 & 3(a+1) \\ 0 & 0 & (a+1)(a-2) & (5-3a)(a+1) \end{array} \right)$$

tiene rango uno si $a = -1$, y rango tres si $a \neq -1$.

Resumiendo:

1. Para $a = -1$ tenemos $rg(A) = 1 = rg(A^*)$, que es menor que el número de incógnitas, 3, luego el sistema es compatible indeterminado.

2. Para $a = 2$ tenemos $rg(A) = 2 \neq 3 = rg(A^*)$, luego el sistema es incompatible.

3. Para $a \neq -1, 2$, tenemos $rg(A) = 3 = rg(A^*)$, que coincide con el número de incógnitas, por tanto el sistema es compatible determinado.

Para resolver el sistema estudiaremos el SEL escalonado equivalente que hemos obtenido:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & ay & - & z & = & 2 \\ & & (a+1)y & - & (a+1)z & = & 3(a+1) \\ & & & & (a+1)(a-2)z & = & (a+1)(5-3a) \end{array}\right. .$$

Para resolverlo trataremos por separado cada uno de los casos anteriores:

1. Supongamos $a=-1$. En este caso, la segunda y la tercera ecuación se reducen a $0=0$, luego y y z son incógnitas secundarias y les asignamos parámetros $y=\alpha$, $z=\beta$. Sustituyendo estos valores en la primera ecuación obtenemos $x=-2-\alpha-\beta$, siendo $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

2. Supongamos $a\neq -1,2$. El sistema es SCD y lo resolvemos despejando las incógnitas de abajo a arriba. De la tercera ecuación tenemos

$$z=\frac{5-3a}{a-2}.$$

Hemos podido dividir por $a-2$ y por $a+1$ por ser $a\neq -1,2$. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación nos queda

$$y=-\frac{1}{a-2}$$

y sustituyendo los valores de y y z en la primera ecuación concluimos

$$x=-\frac{1}{a-2}.$$

□

5.3.2 Regla de Cramer

Esta regla proporciona un método para resolver ciertos sistemas de ecuaciones compatibles determinados mediante el uso de determinantes. El método de la Regla de Cramer es de mayor utilidad para resolver sistemas pequeños pero es mucho más tedioso que el método de Gauss a la hora de resolver SEL con muchas ecuaciones. Esto se debe a que, como comentamos en su momento, el cálculo del determinante de una matriz de orden grande requiere mucho trabajo.

Definición 78 (SEL de Cramer)
Diremos que un SEL es un sistema de Cramer si su matriz de coeficientes A es cuadrada (lo que equivale a decir que el SEL tienen tantas ecuaciones como incógnitas) y $|A|\neq 0$.

Observación 21
Gracias al teorema de Rouché-Frobenius se comprueba enseguida que un sistema de Cramer es compatible determinado. Sin embargo, no es cierto que todo SCD sea de Cramer.

EJEMPLO

El SEL

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +3y & +2z & = & -5 \\ 3x & +y & -2z & = & 1 \\ 2x & +y & & = & 0 \end{array}\right.$$

es de Cramer, luego SCD. En cambio el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +3y & +2z & = & -5 \\ 3x & +y & -2z & = & 1 \\ 2x & +y & & = & 0 \\ 2x & -2y & -4z & = & 6 \end{array}\right.$$

es SCD pero no es de Cramer ya que su matriz de coeficientes no es cuadrada.

$\square$

El siguiente resultado nos muestra una sencilla regla para resolver sistemas de Cramer.

Teorema **Regla de Cramer**

Supongamos que tenemos un sistema de Cramer con incógnitas $x_1,\ldots,x_n$ y matriz ampliada $(A|b)$. Escribamos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Entonces el sistema es compatible determinado y se puede resolver así:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \ldots, \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n-1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn-1} & b_n \end{vmatrix}}{|A|},$$

es decir, para despejar la incógnita x_i, en el numerador se tiene el determinante de la matriz que resulta al cambiar en A la columna i-ésima por la columna b, mientras que en el denominador se tiene siempre el determinante de A.

EJEMPLO

Resolvamos el SEL:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & -1 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & -1 \end{array}\right. .$$

La matriz ampliada del SEL es:

$$A^* = (A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Comprobamos que el determinante de A es distinto de cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8.$$

Las soluciones se pueden calcular por la regla de Cramer del siguiente modo:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-1}{4}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-1}{4}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-8} = 0.$$

□

EJEMPLO

El sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} -x & +ay & -z & = & 2 \\ x & +y & -az & = & 3a+1 \\ ax & -y & -z & = & 2 \end{array} \right. ,$$

que depende de un parámetro $a \in \mathbb{R}$, es un sistema de Cramer cuando a es distinto de -1 y de 2, puesto que el determinante de su matriz de coeficientes,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

es $|A| = -(a+1)^2(a-2)$, que se anula sólo para $a = -1$ y $a = 2$. Así, para el caso $a \neq -1, 2$ podemos calcular las soluciones del sistema por la regla de Cramer del siguiente modo:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a & -1 \\ 3a+1 & 1 & -a \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-(a+1)^2(a-2)} = \frac{-1}{a-2},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3a+1 & -a \\ a & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-(a+1)^2(a-2)} = \frac{-1}{a-2},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 3a+1 \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-(a+1)^2(a-2)} = \frac{5-3a}{a-2}.$$

Notemos que hemos podido dividir por $a+1$ y por $a-2$ ya que estamos suponiendo que $a \neq -1, 2$.

□