Teoría de Integración en la Recta

Matemáticas II (MA-1112), Univ. Simón Bolívar

Preparado, resuelto y tipeado en LaTeX por Axel Voza

El objetivo de esta guía es que el estudiante conozca todas las herramientas básicas acerca del manejo de integrales (esto es, que se conozcan algunas de sus propiedades y aplicaciones) y la aplicación de los teoremas relativos a ella.

La idea de esta guía es que el estudiante tenga un banco de ejercicios un poco más al estilo de los libros, los cuales suelen ser un poco más abstractos o complicados que los de la guías y exámenes publicados en Internet. Estos provienen, en su mayoría, de la bibliografía citada a continuación:

- **T. Apóstol**: *Calculus*. Editorial Reverté.
- **B. Demidovich**: *Ejercicios de Análisis Matemático*, Editorial Mir.
- **J. Kitchen**: *Cálculo*. Editorial MacGraw & Hill.

En medio de la guía se hace un repaso a las funciones exponenciales y logarítmicas. Aunque éstas ya fueron estudiadas en el curso MA-1111 (realmente sólo se aprendió a graficarlas y derivarlas), la mayoría de las propiedades interesantes de éstas se conocen mejor por medio de su definición como integrales.

Se advierte que esta guía debe usarse sólo cuando el lector considere que ya domina el nivel de los ejercicios del libro de texto. Finalmente, al final de cada sección se incluye una lista de problemas de "selección múltiple", tal como aparecen en algunos libros y en los exámenes de cursos semipresenciales. Tengo la firme convicción de que este tipo de preguntas debe probar a algunos lectores, que en la mayoría de los casos se empeñan en marcar la alternativa que aparenta ser la más lógica, sin insistir en hacer un esfuerzo serio por resolverlo. Espero que no sea este el caso del lector que lee estas lineas.

Se recomienda en todos los ejercicios que el estudiante maneje algunas integrales notables y, por supuesto, todas las reglas de derivación.

1 Sumatorias e Inducción

Antes de comenzar con cálculo Integral, es necesario revisar ciertos conceptos útiles sobre Sumatorias e Inducción Matemática.

1. Expresar las siguientes sumas mediante un símbolo de sumatoria:

   (a) $1 + 4 + 9 + \ldots + 169$.

   (b) $-1/2 + 2/3 - 3/4 + \ldots - 11/12$.

   (c) $a_2 + a_3 + a_5 + a_7 + a_{11} + a_{13} + a_{17} + a_{19} + a_{23} + \ldots$.

   (d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 3\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \ldots + 10\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   (e) $\cos(x+\pi) + \sec(x+\pi/2) + \cos(x+\pi/4) + \sec(x+\pi/8) + \ldots + \cos(x+\pi/256)$

   (f) $1 + \sqrt[3]{a+1} + \sqrt[5]{\dfrac{a^2}{2}} + \sqrt[7]{\dfrac{a^{1/3}-1}{6}} + \sqrt[9]{\dfrac{a^4}{24}} + \sqrt[11]{\dfrac{a^{1/5}+1}{120}} + \sqrt[13]{\dfrac{a^6}{720}} + \ldots + \sqrt[21]{\dfrac{a^{10}}{10!}}$

   (*Sugerencia*: la secuencia $0, 1, 0, -1, \ldots$ puede ser representada con ayuda de la función sen.)

2. Evaluar las siguientes sumatorias:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(2k-3)$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}\frac{\operatorname{sen}(k\pi/2)}{k}$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}(k+1)^2$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$

   (e) $\displaystyle\sum_{k=-60}^{60} k^2 + k$

   (*Sugerencia*: ver la paridad de k^2 y k

   (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(1+2+3+\ldots+k)$

   (*Sugerencia*: simplificar la suma interna).

3. El ejercicio § 2d se puede generalizar como sigue: sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$. Demostrar la fórmula para la *suma telescópica*:

$$\sum_{k=n}^{m}[f(k+1) - f(k)] = f(m+1) - f(n)$$

   y utilizar este resultado (o esta misma idea) para evaluar las siguientes sumatorias:

(a) $\sum_{k=1}^{400}\left[\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right]$ (b) $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k(k+1)}$

(*Sugerencia*: $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$)

(c) $\sum_{k=1}^{100}\left[\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right]$

(d) Para todo $k\geq 1$, supongamos cierta la desigualdad

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

Utilizarla para demostrar la cota

$$2\left(\sqrt{n+1}-1\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}\ ,$$

y dar una cota aproximada para $\sum_{k=2}^{169}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

4. Demostrar la fórmula

$$\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)=\arctan(n+1)-\frac{\pi}{4}\ .$$

♢ *Solución*: Se puede demostrar (porque la fórmula *no* es tan elemental) que

$$\arctan\alpha\pm\arctan\beta=\arctan\left(\frac{\alpha\pm\beta}{1\mp\alpha\beta}\right)\ .$$

Notando entonces que

$$\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)=\arctan\left(\frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)}\right)\ ,$$

vemos que la suma en cuestión es igual a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}[\arctan(k+1)-\arctan(k)] &= \\ &= \arctan 2-\arctan 1\\ &+ \arctan 3-\arctan 2\\ &\ \vdots\\ &+ \arctan(n+1)-\arctan(n)\\ &= \arctan(n+1)-\arctan 1\\ &= \arctan(n+1)-\frac{\pi}{4}\ .\end{aligned}$$

ya que es una suma telescópica. ♢

5. Utilizar el *principio de Inducción Matemática* para demostrar las siguientes fórmulas o proposiciones:

(a) Sumas notables:

i. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ ii. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k}=\frac{n}{n+1}$

iii. $\sum_{k=0}^{n-1}r^k=\begin{cases}\frac{r^n-1}{r-1} & ,\quad 1\neq r>0\\ n & ,\quad r=1\end{cases}$

iv. $\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}k=2^n(n-1)+1$

v. $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

vi. $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$

vii. $\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{(-1)^{j+1}}{j}$

viii. $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=2-\frac{n+2}{2^n}$

ix. $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k-1}{(k+2)!}=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{(n+2)!}$

x. $\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}\operatorname{sen}\frac{x}{3^k}=\frac{1}{4}\left(3^n\operatorname{sen}\frac{x}{3^n}-\operatorname{sen}x\right)$

(b) Productos:

i. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$

ii. $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$

iii. $\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\operatorname{sen}x}{2^n\operatorname{sen}(x/2^n)}$

(c) Desigualdades:

i. $2^n>5n^2+1$ para todo $n\geq 9$.

ii. $\left|\operatorname{sen}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\right|\leq\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}x_k\ ,\ 0\leq x_k\leq\pi.$

iii. $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\geq n^2\quad ,\ a_k>0.$

iv. $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\ldots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$

v. $1+3+5+\ldots+(2n-1)<n^2+4.$

vi. $(1+x)^n\geq 1+nx\quad ,\ x\geq 0$ (*desigualdad de Bernoulli*).

vii. Si $a_k\in\mathbf{R}$ para todo $k=1,\ldots,n$ y

$$b=\max\{a_1,\ldots,a_n\},\ a=\min\{a_1,\ldots,a_n\},$$

entonces $a\leq\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\leq b$, con igualdad si y sólo $a_1=\ldots=a_n$.

(d) Divisibilidad:

i. La expresión n^3-n es siempre divisible por 3 (*Sugerencia*: la expresión $p(n)$ es *divisible* por m si para cualquier n_0, existe un

$k_0 \in \mathbf{N}$ tal que $p(n_0) = k_0 m$; note que esto se manejaba así en Bachillerato: $p(n_0)$ es múltiplo de m).

ii. La expresión $2 \cdot 7^n - 3 \cdot 5^n - 5$ es divisible por 6, para todo $n \in \mathbf{N}$.

iii. La expresión $x^n - y^n$ es siempre divisible por $x - y$.

(e) $\operatorname{sen}(\theta + n\pi) = (-1)^n \operatorname{sen}\theta \quad , \ \forall\, \theta \in \mathbf{R}$.

(f) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ raices}} = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$.

(g) Si $f(x) = ax + b$ y si $a \neq 1$, entonces

$$\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n \text{ veces}}(x) = a^n x + b\frac{a^n - 1}{a - 1} \ .$$

(h) $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{2x+1}\right) = (-1)^n \dfrac{2^n n!}{(2x+1)^{n+1}}$.

(i) La derivada n-ésima de la función $(1+x^2)^{-1/2}$ es una fracción de la forma $\dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1/2}}$, donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n.

(j) Sean $a_k, b_k \in \mathbf{R}$. La famosa desigualdad

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

es una variante de la *desigualdad de Cauchy-Schwartz* y se puede demostrar de dos modos:

i. notando que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k x + b_k)^2 \geq 0, \forall\, x \in \mathbf{R}$. De aquí, desarrollar el miembro izquierdo de la desigualdad y componer un polinomio de 2do. grado en la variable x. ¿Qué debe ocurrir con su discriminante?

ii. por inducción matemática (*Sugerencia*: en cierto momento necesitará usar el hecho de que

$$(a_{n+1}b_k - a_k b_{n+1})^2 \geq 0, \forall\, k = 1, 2, \ldots, n).$$

(k) Supongamos que para cada n se tienen 3^n monedas de las cuales se sabe que todas son verdaderas excepto una que es falsa. Las monedas verdaderas pesan un gramo y la falsa dos gramos. Si se tiene una balanza para determinar cuál es la moneda falsa, demostrar que bastan n pesadas para determinarla.

(l) Demostrar que la suma de todos los números contenidos en una tabla de sumar los enteros desde 0 hasta $n-1$, es decir, una tabla de la forma

$+$	0	1	2	$\cdots$	$n-1$
0	0	1	2	$\cdots$	$n-1$
1	1	2	3	$\cdots$	n
2	2	3	4	$\cdots$	$n+1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
$n-1$	$n-1$	n	$n+1$	$\cdots$	$2n-2$

es igual a $n^2(n-1)$.

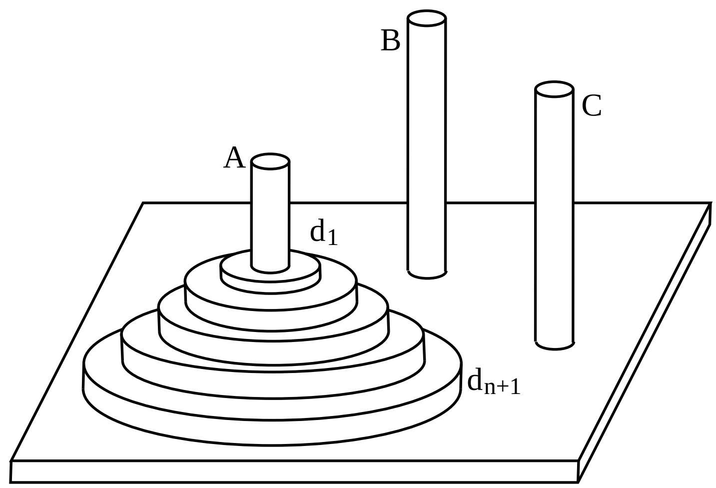


Fig. 1. Esquema de las Torres de Hanoi del ejercicio §6

6. *Las torres de Hanoi*: en un tablero hay 3 estacas clavadas. En una de ellas se encuentra una pila de discos de tamaño graduado, como se indica en la Figura 1, con el más pequeño arriba. El objetivo de este acertijo es trasladar la pila a otra de las restantes estacas moviendo los discos de uno en uno, y de una estaca a otra cualquiera, de modo que nunca se coloque un disco encima de otro menor. Demostrar que, para n discos, este juego se puede completar en $2^n - 1$ movimientos (*Sugerencia*: denote con A, B y C las estacas y use la siguiente notación: sean d_i , $i = 1, \ldots, n$ los discos y note que $\{\ d_1, \ldots, d_n\ \} \subset A$; la hipótesis dice que d_i esta encima de d_j si y sólo si $i < j$; aplique luego la hipótesis de inducción sobre $\{\ d_1, \ldots, d_{n+1}\ \} \subset A$, etc.).

7. Analizar la veracidad de la siguiente demostración por inducción:

"**Proposición:** Para todo entero positivo, se tiene que

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} \ .$$

Demostración: Para $n = 1$, tenemos $3/2 - 1/(1) = 1/2 = 1/(1.2)$. Suponiendo válido el resultado para

n, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)} \\ &\overset{\text{hip}}{=} \frac{3}{2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{3}{2}-\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{3}{2}-\frac{1}{n+1} \text{ ''}\end{aligned}$$

Al parecer, existe algún error en esta demostración, ya que para $n = 6$, el miembro izquierdo de la ecuación dá 5/6, mientras el derecho resulta igual a 4/3. Hallar este error.

2 La Integral de Riemann

Ahora si podemos emprender el estudio del área y sus relaciones con la integral.

8. A continuación, se dá una función $f : I \longmapsto \mathbf{R}$. Determinar cuál de ellas es integrable sobre I.
   (a) $f(x) = x^2$, $I = [0, \infty)$
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $I = [1, 2]$
   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $I = [-1, 1]$
   (d) $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $I = [0, a/\sqrt{2}]$
   (e) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \; x \in \mathbf{Q} \\ 0 & , \; x \in \mathbf{I} \end{cases}$, $I = [a, b]$
   (f) $f(x) = [\![x]\!]$, $I = [n, n+3]$, $n \in \mathbf{N}$

9. Sea f una función tal que $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\, dx$ existe. ¿Se deduce de esto que f es integrable en $[a, b]$? (*Sugerencia*: invente una función parecida a la del ejercicio § 8e).

10. Sea f una función integrable en $[a, b]$ tal que su rango es el intervalo $[A, B]$, y sea g continua en $[A, B]$. Demostrar que la función $g \circ f$ es integrable en $[a, b]$ (*Sugerencia*: construya una partición apropiada con la ayuda de f).

11. Supongamos que $f(x) = 0$, $\forall\, x \in [a, b]$, salvo en un número finito de excepciones (si Ud. lo desea, puede asignarle el valor $f(x) = 1$ para los x excepción, pero este valor no tiene mucha importancia). Demostrar que $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0$.

12. A continuación se hacen ciertas preguntas sobre una función f con la característica de que es continua en $[a, b]$ y además $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0$. Si la afirmación es correcta, justificarla; si no, dar un ejemplo que la contradiga:
   (a) ¿Se deduce necesariamente que
   $$f(x) = 0, \forall\, x \in [a, b] \text{ ?}$$
   (b) ¿Se deduce necesariamente que
   $$\exists\, x \in [a, b] : \; f(x) = 0 \text{ ?}$$
   (c) ¿Se deduce necesariamente que
   $$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| = 0 \text{ ?}$$
   (d) ¿Se deduce necesariamente que
   $$\int_a^b |f(x)\, dx| = 0 \text{ ?}$$

13. Este ejercicio se propone ejemplificar con un caso concreto que las funciones integrables tienen integral de valor único bajo cualquier partición que cubre por completo el área bajo la curva. Para ello, se adoptarán las siguientes nomenclaturas:
   $$f(x) = x^2 \; , \; I = [1, 3]$$
   $$\pi_n = \{ \; 1 = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = 3 \; \} \; ;$$
   $$\sigma_n = \{ \; \overline{x}_k \; : \; x_{k-1} \le \overline{x}_k \le x_k \; , \; x_k \in \pi \; \}$$
   $$I_f(\pi, \sigma) = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)(x_k - x_{k-1})$$
   (a) Si
   $$\pi = \{ \; 1, 1.5, 2.1, 2.6, 3 \; \} \text{ y } \sigma = \{ \; 1, 2, 2.5, 2.7 \; \} \; ,$$
   calcular $I_f(\pi, \sigma)$. Luego, agregar el punto $\overline{x} = 1.8$ a σ y a π, es decir, usar
   $$\sigma' = \{ \; 1, 1.5, 1.8, 2, 2.5, 2.7 \; \} \; ,$$
   $$\pi' = \{ \; 1, 1.5, 1.8, 2.1, 2.6, 3 \; \} \; ,$$
   y calcular $I_f(\pi', \sigma')$. Comparar dichos resultados.

(b) Poner $n \in \mathbf{N}$ *fijo*, y sea

$$\pi_n = \left\{ 1 + \frac{2}{n}, 1 + \frac{4}{n}, \ldots, 1 + \frac{2(n-1)}{n}, 3 \right\}$$

y $\sigma_n = \pi_n \setminus \{ 1 \}$ es decir, el punto muestra de cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ será el extremo derecho del intervalo. Demostrar que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} I_f(\pi_n, \sigma_n) = \int_1^3 x^2 \, dx$$

(nótese que los rectángulos de altura $f(\overline{x})$ y base $x_{k+1} - x_k$ son superiores. ¿Por qué?).

(c) Repetir la pregunta anterior para

$$\pi_n = \{ 1, 3^{1/n}, 3^{3/n}, \ldots, 3^{(n-1)/n}, 3 \}$$

y $\sigma_n = \pi_n \setminus \{ 3 \}$ (nótese que ahora los rectángulos son inferiores. ¿Por qué?).

(d) Usemos ahora una partición mas cómoda, aunque más extraña: repetir el ejercicio anterior con $\pi = \{ x_0, x_1, \ldots, x_n \}$ y

$$\overline{x}_k = \sqrt{\frac{x_k^2 + x_k x_{k-1} + x_{k-1}^2}{3}}$$

(*Sug.*: puede usar el resultado del ejercicio § 2d).

(e) ¿Se sigue *solamente* de los resultados anteriores que $\displaystyle\int_1^3 x^2 \, dx = \frac{26}{3}$?

14. Calcular, usando la definición de sumas de Riemann, la siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^T (v_0 + gt) \; dt$ (b) $\displaystyle\int_0^n [\![x]\!] \, dx$, $n \in \mathbf{N}$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) \, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx$ (*Sugerencia*: usar la identidad

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{sen} k\alpha = \frac{\cos(\alpha/2) - \cos[(n+1/2)\alpha]}{2 \operatorname{sen}(\alpha/2)}$$

(e) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^2}$, $0 < a < b$
(*Sugerencia*: tomar $\overline{x} = \sqrt{x_k x_{k-1}}$).

(f) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $0 < a < b$

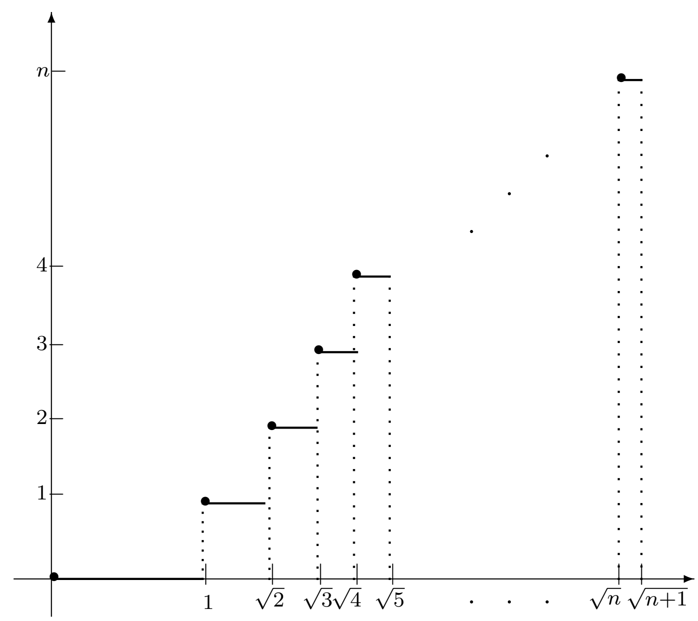
(*Sugerencia*: tomar $\overline{x} = \left(\dfrac{\sqrt{x_{k-1}} + \sqrt{x_k}}{2} \right)^2$)

15. Demostrar (usando un buen dibujo si es necesario) las siguientes igualdades:

(a) $\displaystyle\int_1^{n^2} [\![\sqrt{x}]\!] \, dx = n^3 - \sum_{k=1}^n k^2$

(b) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} [\![x^2]\!] \, dx = n\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$

♢ *Solución*: Miremos la solución del (b). Para ello, es conveniente mirar un "bosquejo" del gráfico de $f(x) = [\![x^2]\!]$. Como es de suponer, f es escalonada, como



casi cualquier función que depende de la parte entera. Trataremos ahora de *inducir* su valor mirando la gráfica de la figura anterior. Es claro que esta integral representa una suma de rectángulos cuya altura es, para cada $k = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}$, igual al valor $f(k) = [\![(\sqrt{k})^2]\!] = [\![k]\!] = k$. El problema es que las longitudes de las bases varían en un factor no constante; de hecho, para cada una de estas alturas, le corresponde un valor de la base igual a $(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$. Sumando todas estas áreas, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{n}} [\![x^2]\!] \; dx &= 1 \cdot (\sqrt{2} - 1) & (1) \\ &+ 2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) & (2) \\ &+ 3 \cdot (\sqrt{4} - \sqrt{3}) & (3) \\ &+ 4 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{4}) & (4) \\ &\vdots \\ &+ (n-1) \cdot (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) & (5) \end{aligned}$$

Ahora bien, en la línea (1) no hay nada que observar. Pero si miramos con detenimiento las siguientes, haciendo la suma de parcial de cada línea con la que le sigue, son claras las siguientes observaciones, las cuales se enumeran por número de línea:

(2) aparece 2 veces el factor $\sqrt{3}$ y aparecen restando 1 y $\sqrt{2}$;

(3) aparece 3 veces el factor $\sqrt{4}$ y aparecen restando 1, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$;

(4) aparece 4 veces el factor $\sqrt{5}$ y aparecen restando 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{4}$;

(5) aparece $n-1$ veces el factor $\sqrt{n}$ y aparecen restando 1, $\sqrt{2}$, ... y $\sqrt{n-1}$ (?),

donde la última línea aparece con un signo de interrogación, ya que este resultado fué conjeturado con ayuda de nuestra "intuición" ("inducción" sería la palabra más correcta), y este resultado, aparentemente, es igual a

$$(n-1)\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} = n\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \ .$$

Como el ejercicio resultaba una deducción a partir del gráfico de f, dejamos al lector la comprobación (por inducción, claro está) de esta fórmula. $\diamondsuit$

16. Calcular los siguientes límites, reconociéndolos como una suma de Riemann:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} \right)$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \ldots + \operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n} \right)$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{2} \right)$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$.

(f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{n}\right)^2 \frac{2}{n}$ (g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{5}{n+5k}$

17. Se dice que una función es *periódica* si $f(x+T) = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbf{R}$ (y el valor T es el *período* de la función). Demostrar que si f es periódica de período T, entonces

$$\int_0^T f(t)\ dt = \int_a^{a+T} f(t)\ dt \ ,$$

y usar este resultado para calcular $\displaystyle\int_{\pi-1}^{201\pi-1} \operatorname{sen} x\, dx$.

18. Sea f continua y estrictamente creciente en el intervalo $[0,c]$. Supongamos además que $f(0)=0$, $a \in [0,c]$ y $b \in [0, f(c)]$. Demostrar la *desigualdad de Young*:

$$\int_0^a f(x)\, dx + \int_0^b f^{-1}(y)\ dy \geq ab$$

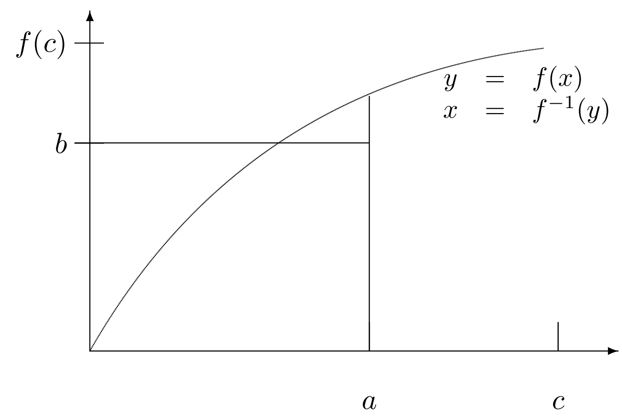


Fig. 2 Gráfico del ejercicio §18

(nótese que esta suma de integrales es un poco más grande que el área de cierto rectángulo en la figura 2). ¿Cúando ocurre la igualdad?

19. Sean f y g dos funciones integrables en $[-a,a]$, tales que f es par y g es impar. Comprobar los resultados

$$\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx \quad , \quad \int_{-a}^a g(x)\, dx = 0$$

20. Con miras a desarrollar otras interesantes propiedades de la integral como las de la pregunta anterior, a continuación se dan una serie de resultados de este tipo, las cuales hay que demostrar, suponiendo claro esta, que f es integrable en el intervalo de integración. Luego, usar dicha propiedad para calcular la(s) integral(es) dada(s) en cada una (mas vale que se usen las propiedades en cada integral, porque algunas **no** se pueden calcular con las pocas herramientas que tenemos hasta ahora):

(a) $\displaystyle\int_0^a x^3 f(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x f(x)\, dx$;

$$I_1 = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^8}} \quad I_2 = \int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \operatorname{sen} x^2\, dx$$

(*Sugerencia*: derive $\operatorname{sen} t - t\cos t$).

(b) $\displaystyle\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx$;

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^3 x\, dx}{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x},\ I_2 = \int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x\, dx}{1+\cos^2 x} \ .$$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\, dx$;

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx \ .$$

(d) $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m$;

$$I = \int_0^1 x^2(1-x)^{98}\,dx\ .$$

(e) $\int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$;

$$I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx \text{ y } J = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$$

(*Sugerencia*: calcule el valor de $I+J$).

21. Usar el T.F.C. para calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_1^{a^{12}} \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_2^{4\sqrt{2}} \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{4+x^4}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(2+\frac{x}{2x^2+1}\right)\frac{dx}{2x^2+1}$

(h) $\displaystyle\int_2^5 \frac{2x-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-x}}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+2}{x^3+3x^2+3x+1}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$

(k) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/6} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x}\,dx$

(l) $\displaystyle\int_0^{a\pi/4} \cos\frac{x}{a}\operatorname{sen}\frac{x}{a}\,dx$ (m) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\csc x - \operatorname{sen} x}$

(n) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{2x-\sqrt{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(o) $\displaystyle\int_{1/3}^{1/\sqrt{3}} \frac{\arctan 3x + x\sqrt{1+9x^2}}{1+9x^2}\,dx$

(p) Si $f(x)=\dfrac{x-5}{\sqrt{x+1}}$, hallar $\displaystyle\int_2^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx$.

(q) Hallar $\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)\,dx$, sabiendo que

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & , \quad |x|\le 1 \\ 1-|x| & , \quad |x|>1 \end{cases}$$

(r) Demostrar que $\displaystyle\int_0^x (t+|t|)^2\ dt = \frac{2x^2}{3}(x+|x|)$.

22. Demostrar, usando la propiedad de acotamiento, las siguientes cotas:

(a) $\displaystyle\frac{2}{9} \le \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3+8} \le \frac{2}{7}$

(b) $\displaystyle 3 \le \int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx \le 5$

(c) $\displaystyle \pi \le \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (1+\operatorname{sen}^2 x)\,dx \le 2\pi$

(d) $\displaystyle 2 \le \int_0^1 \sqrt{x^2+4}\,dx \le \sqrt{5}$

(e) $\displaystyle \frac{1}{2} \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

(f) $\displaystyle \frac{2\pi}{13} \le \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x} \le \frac{2\pi}{7}$

$\diamondsuit$ *Solución*: Resolvamos el (e). Para $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, necesitamos hallar $m = \{\ \min(f(x)) \mid x\in[\pi/4,\pi/2]\}$ y $M = \{\ \max(f(x)) \mid x\in[\pi/4,\pi/2]\}$. Para ello, calcularemos su derivada (ya que no resulta nada obvio hallar "a ojo" los máximos o mínimos del cociente de dos funciones crecientes):

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}\,(x - tanx)\ ,$$

y resulta claro entonces que, por ser $\cos x$ y x^2 positivos en el intervalo que nos interesa, el signo de f' depende solo del paréntesis $x-\tan x$. Si el lector traza con cuidado tanto $\tan x$ como x en un mismo plano de coordenadas, se dará cuenta que la tangente es mayoy que la bisectriz en $x\in[\pi/4,\pi/2)$ (en $x=\pi/2$ dejamos abierto solo por precaución; realmente esto no molesta, ya que f' existe en su forma no factorizada en ese extremo), de modo que $f'(x)<0$ para el intervalo $x\in[\pi/4,\pi/2]$. Así, f es decreciente, y por lo tanto

$$\begin{aligned} M &= f(\pi/4) = \frac{\operatorname{sen}(\pi/4)}{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}/2}{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \text{ y} \\ m &= f(\pi/2) = \frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\ . \end{aligned}$$

Aplicando ahora la propiedad de acotamiento para integrales, tenemos

$$\begin{aligned} & m \le f(x) \le M \\ \Longrightarrow\ & \frac{2}{\pi} \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \\ \Longrightarrow\ & \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \le \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\ \Longrightarrow\ & \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \le \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

la cual es la solución pedida. Es de hacer notar que usar la técnica de la derivada podría considerarse el ultimo recurso, ya que lo engorroso que puede llegar a ser una derivada y la identificación de su signo **no es mejor** que notar cosas como

$$-1 \le \cos x \le 1 \ , \quad \text{o tambien} \quad 0 < \frac{1}{1+x^2} \le 1 \ ,$$

y otras desigualdades sencillas que son fácilmente identificables a ojo, si el ejercicio lo permite, claro está. ♢

23. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

(a) $I(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \operatorname{sen} u \, du$

(b) $I(x) = \displaystyle\int_0^{\int_0^x dt/\operatorname{arcsen} t} \frac{du}{1+\operatorname{sen}^2 u}$

(c) $I(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{\tan^2 x} \sqrt{t} \operatorname{sen} t \; dt$

(d) $\displaystyle\int_0^y \operatorname{sen} t \; dt + \int_0^x \cos t \; dt - \int_x^y \; dt = xy$ (*Sugerencia*: hay que hallar y' por derivación implícita).

(e) $I(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} x \cos t \; dt$ (*Sugerencia*: la x dentro de la integral estorba!)

(f) Si f es una función continua tal que $f(7) = 3$ y $f(8) = 1$, evaluar $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_{x+5}^{x^3} f(t) \; dt\right)\bigg|_{x=2}$.

24. Si $x \in [0, \pi/2]$ demostrar que

$$\int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arcsen} \sqrt{t} \, dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} \, dt = \frac{\pi}{4}$$

(*Sugerencia*: llame $f(x)$ a la suma de las integrales y observe con cuidado $f'(x)$; deduzca que f es constante y evalúe $f(\pi/4)$).

25. Hallar una función $f(x)$ continua y no idénticamente cero que satisfaga la fórmula

$$f^2(x) = \int_0^x f(t) \frac{\cos t}{1+\operatorname{sen}^2 t} \; dt \ .$$

26. Una función f está definida $\forall\, x \in \mathbf{R}$ por medio de la fórmula

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1+\operatorname{sen} t}{2+t^2} \, dt \ .$$

Sin calcular la integral, hallar un polinomio cuadrático $p(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$ y $p''(0) = f''(0)$.

27. Sea $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$.

(a) Sin calcular la integral (ya que dicha integral no se puede resolver en términos de funciones elementales), demostrar que f es estrictamente creciente en $[0, \infty)$.

(b) Sea g la inversa de f, que existe por la parte anterior. Demostrar que g'' es proporcional a g^2, es decir, $g''(x) = kg^2(x)$. Hallar esta constante de proporcionalidad.

28. Sea f una función estrictamente positiva y continua. Demostrar que la función ϕ definida como

$$\phi(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x t f(t) \; dt}{\displaystyle\int_0^x f(t) \; dt} \quad \text{si} \quad x \ne 0 \quad ; \quad \phi(0) = 0$$

es continua en $x = 0$ y es creciente para $x > 0$.
♢ *Solución*: La regla de L'Hôpital nos asegura la continuidad en 0. Además, resulta que

$$\phi'(x) = \frac{\int_0^x (x-t) f(t) \; dt}{\left(\int_0^x f(t) \; dt\right)^2} \ .$$

Como $0 \le t \le x$, la expresión $(x-t)f(t)$ es positiva, por lo que su integral en dicho intervalo también lo es, y por ende, $\phi'(x)$. ♢

29. Sea f una función positiva y continua en $[0, \infty)$, tal que posee una asíntota horizontal en $y = A \ne 0$ y $f(0) = B$. Hallar los límites

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \; dt \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \; dt$$

(*Sugerencia*: para el segundo límite, haga un gráfico de f y convénzase de que esta gráfica tiene área infinita.

30. En los siguientes casos, hallar una función f y un valor de la constante c tales que

(a) $\displaystyle\int_c^x f(t) \, dt = \cos x - \frac{1}{2}$

(b) $\displaystyle\int_c^{x^2} f(t) \, dt = x^6 + 9$

(c) $\displaystyle\int_c^x t f(t) \, dt = \operatorname{sen} x - x \cos x - \frac{1}{2} x^2$

(d) $\displaystyle\int_0^x f(t) \, dt = \int_x^1 t^2 f(t) \, dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c$

31. Sabiendo que f es integrable en todo $\mathbf{R}$, hallar $f(2)$ si f satisface

(a) $\displaystyle\int_0^x f(t) \; dt = x^2(1+x)$

(b) $\displaystyle\int_0^{f(x)} t^2\ dt = x^2(1+x)$

(c) $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\ dt = x^2(1+x)$

(d) $\displaystyle\int_0^{x^2(1+x)} f(t)\ dt = x$

32. Sea g continua en $\mathbf{R}$, tal que $\displaystyle\int_0^1 g(t)\ dt = 2$ y $g(1) = 5$. Si definimos

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{2}(x-t)^2 g(t)\ dt \quad ,$$

demostrar que

$$f'(x) = \int_0^x (x-t)g(t)\ dt \quad ,$$

y hallar $f''(1)$ y $f'''(1)$.

33. Sea f una función integrable y cóncava hacia abajo en el intervalo $[a,b]$. Demostrar la acotación

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

34. La desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales establece que si f y g son integrables en $[a,b]$, entonces

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$$

(a) Probarla, imitando la demostración versión sumas, dada en el ejercicio § 5(j)i.

(b) Supuestas f y g continuas, demostrar que la igualdad se produce si y sólo si $f(x) = kg(x)$, para alguna constante k.

(c) Mediante la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtener una estimación por exceso de la integral

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{x \operatorname{sen} x}\,dx \quad .$$

35. Algunas desigualdades importantes se pueden interpretar como consecuencia de Cauchy-Schwarz.

(a) Si f es integrable, demostrar que

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx$$

y que la igualdad se dá si y sólo si f es constante. (*Sugerencia*: Analizar la función auxiliar $p(t) = \displaystyle\int_a^b (f(x)+t)^2\,dx$).

(b) Con ayuda de la desigualdad anterior, hallar una estimación para el área entre el eje x y la curva $y = 1/\sqrt{1+x^2}$ en el intervalo $[0,1]$.

(c) Sea f una función derivable en $[a,b]$, tal que $f(a) = 0$. Si $m = \min\{\ f(x) \mid x \in [a,b]\ \}$, usar la desigualdad de la parte (a) para demostrar la acotación

$$\frac{m^2}{b-a} \leq \int_a^b (f'(x))^2\,dx \ .$$

36. *Teorema de Rolle para integrales*: Sea f continua en $[a,b]$, tal que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$. Demostrar que $\exists\ c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$ (el ejercicio § 12b sirvió como ilustración de la veracidad de este hecho).

♢ *Solución*: Definamos $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$. Es claro que F es diferenciable (por ser f continua) y también que $F(a) = F(b) = 0$, por lo que el Teorema de Rolle para funciones diferenciables (si, el que Ud. vió en MA-1111) asegura que $\exists\, c \in (a,b)$ tal que $F'(c) = f(c) = 0$. ♢

37. Sea f continua en $[a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \neq 0$. Demostrar que para cualquier $k \in (0,1)$, existe $c \in [a,b]$ tal que

$$k\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt \quad .$$

♢ *Solución*: Al aplicarle el Teorema del Valor Intermedio a la función definida como

$$F(x) = \frac{\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt}{\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt}$$

(el lector debe verificar que esta F satisface las hipótesis de dicho teorema), tenemos que $F(a) = 0$, $F(b) = 1$, por lo que para cada $0 < k < 1$ existe $c \in [a,b]$ tal que $k = F(c)$. ♢

38. Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funciones integrables en $[a,b]$. Usar el principio de inducción para demostrar que

$$\left|\int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(x)\,dx\right| \leq \sum_{k=1}^n \int_a^b |f_k(x)|\,dx \ .$$

39. Marcar una y sólo una alternativa correcta en las siguientes preguntas:

(I) Si $x^3 + 2x^2 = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ y si f es continua, entonces $f(1) - f(-1)$ vale

a. 8 b. 4 c. 0 d. 1/8 e. 1/2

(II) $\int \left(\operatorname{sen} x + \frac{x^2}{2} - 3\right) dx$ es igual a

a. $-\cos x + \frac{x^3}{6} - 3x + C$
b. $\cos x + \frac{x^3}{6} - 3x + C$
c. $\cos x - \frac{x^3}{6} + 3x$
d. $-\cos x - \frac{x^3}{6} + 3x + C$
e. $-\cos x + \frac{x^3}{6} - 3x$

(III) Sea f acotada y continua a trozos en el intervalo $a < x < b$ y sea $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Entonces podemos asegurar que

a. G es una función continua y en todo punto x donde f es continua se cumple que $G'(x) = f(a)$.
b. G es discontinua para todo x.
c. G es una función no negativa pero continua.
d. G es una función continua y en todo punto x donde f es continua se cumple que $G'(x) = f(x)$.
e. G es una función continua y en todo punto x donde f es continua se cumple que $G'(x) = f(t)$.

(IV) Sea F una función continua definida para $a \leq x \leq b$. De las siguientes proposiciones

1. Sea f una función continua a trozos tal que $F'(x) = f(x)$ excepto en finitos puntos. Entonces $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$;
2. Sea f acotada tal que $F'(x) = f(x)$. Entonces $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$;
3. Si $f(x) = F'(x)$ salvo en finitos puntos. Entonces $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$;

son verdaderas:

a. Sólo 1. y 3.
b. Sólo 2. y 3.
c. Sólo 3.
d. Todas.
e. Ninguna.

(V) Si $f(z) = \int_0^z t^3\,dt$ y $g(z) = \int_0^1 zt\,dt$, entonces $\int_0^1 (f(z) + g(z))\,dz$ vale:

a. 1/2
b. 3/10
c. 1/5
d. 1/10
e. 1/20

(VI) Sean f, g funciones definidas como

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3x+2}\,, \qquad x \in [-1/3, 2/3] \\ g(x) &= \begin{cases} x &, \; x \leq 0 \\ x-1 &, \; x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces $\int_{-1/3}^{2/3} (9f(x) - 18g(x))\,dx$ vale:

a. -3 b. 0 c. 7 d. 19 e. 23

(VII) Sea f continua en $[a, b]$ y sea $c \in (a, b)$. Si se tienen las integrales

$$I_1 = \int_a^b f(x)\,dx\,,\; I_2 = \int_a^c f(x)\,dx\,,$$

$$I_3 = \int_c^b f(x)\,dx\,,\; I_4 = \int_b^a f(x)\,dx\,,$$

entonces una relación verdadera entre ellas es:

a. $I_1 = I_4$
b. $I_2 + I_3 = I_4$
c. $I_4 = I_2 + I_3 - 2I_1$
d. $I_1 + I_2 + I_3 = I_4$
e. $I_1 + I_4 = I_2 + I_3$

(VIII) Sea $f(x) = \begin{cases} x^3 &, \; 0 \leq x < 1 \\ 2-x &, \; x \geq 1 \end{cases}$ y sea

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

Entonces se cumple que:

a. $F'(x) = \begin{cases} 3x^2 &, \; 0 \leq x < 1 \\ -1 &, \; x \geq 1 \end{cases}$
b. $F'(x) = \begin{cases} x^4/4 &, \; 0 \leq x < 1 \\ 2x - x^2/2 &, \; x \geq 1 \end{cases}$
c. $F'(x) = \begin{cases} x^3 &, \; 0 \leq x < 1 \\ 2-x &, \; x \geq 1 \end{cases}$
d. $F'(2) = 8$
e. $F'(-4) = -2$

(IX) Sea $\frac{d}{dx} g(x) = f(x)$, con f continua. Entonces $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ vale:

a. 0
b. $f(b) - f(a)$
c. $g(b) - g(a)$
d. $\frac{f(b)g(b) - f(a)g(a)}{2}$
e. $\frac{g^2(b) - g^2(a)}{2}$

(X) Los valores de f y g que satisfacen las relaciones $d(f+g) = 3x^2\,dx$, $d(f-g) = (2x^2-1)\,dx$ y $f(0) = g(0) = 1$ son:

a. $f(x) = 5x^2 - 1 \quad , \quad g(x) = x^2 + 1$

b. $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{x}{3} + 1 \quad , \quad g(x) = \dfrac{3x^3}{4} + \dfrac{x}{3} - 1$

c. $f(x) = \dfrac{5x^3}{6} - \dfrac{x}{2} + 1 \quad , \quad g(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x}{2} + 1$

d. $f(x) = \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{x}{2} + 1 \quad , \quad g(x) = -x^3 + \dfrac{x}{2} + 1$

e. $f(x) = 2x^3 + \dfrac{x}{2} + 1 \quad , \quad g(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x}{2} + 1$

3 Cálculo de Areas y Volumenes

Las aplicaciones de la integral definida son muy amplias, y se pueden clasificar en geométricas (áreas, volumenes), mecánicas (trabajo, fuerza) y físicas (centros de masa, centroides). En esta guía nos ocuparemos de las primeras, ya que los cursos de Física se encargarán de las demás.

Empezemos con algunas áreas.

40. A continuación, se da una región $A \subset \mathbf{R}^2$ limitada por ciertas curvas. Hallar el área de A:

(a) $A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} y & = & 4x - x^2 \\ y & = & 0 \end{array} \right\}$

(b) $A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} y & = & x(x-1)(x-2) \\ y & = & 0 \end{array} \right\}$

(c) $A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} y & = & x^3 \\ y & = & 8 \\ x & = & 0 \end{array} \right\}$

(d) $A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} y & = & x^2 + 2x \\ 3y & = & 10 - x \\ x & = & 2y \end{array} \right\}$

(e) $A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} y & = & x^2 + 8 \\ y & = & (x-4)^2 \\ y & = & x - 2 \\ x & = & 0 \end{array} \right\}$

(f) $A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} y & = & \operatorname{sen} x \\ y & = & \operatorname{sen} 2x \\ x & = & 0 \\ x & = & \pi \end{array} \right\}$

(g) $A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} y & = & x^3 \\ y & = & x + \operatorname{sen} \pi x \end{array} \right\}$

(h) $A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} 3y & = & 3x - x^2 \\ x & = & 2y \end{array} \right\}$

(i) $A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} y & = & x^2 - 3x \\ y & = & x^3 - 3x^2 \end{array} \right\}$

(j) $A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} y & = & \operatorname{sen}(x/2) \\ y & = & \cos x \\ x & = & 0 \\ x & = & \pi \end{array} \right\}$

(k) $A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} 144 & = & 9x^2 + 16y^2 \\ x & > & 2 \end{array} \right\}$

(l) $A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} y & = & 4 - x^2 \\ y & = & x^2 \\ y & < & 2 - x \end{array} \right\}$

(m) $A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{1}{1+x^2} \\ y & = & x^2/2 \end{array} \right\}$

(n) $A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; a^2y^2 \;=\; x^2(a^2 - x^2) \right\}$

(o) $A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} y & = & (x+1)^2 \\ x & = & \operatorname{sen} \pi y \\ y & = & 0 \\ y & = & 1 \end{array} \right\}$

(p) $A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x & = & y^3 - y \\ x & = & y - y^2 \end{array} \right\}$

41. El área limitada por la curva $y = x^2$ y por la recta $y = 4$ está dividida en dos porciones iguales por la recta $y = c$. Determinar el valor de c.

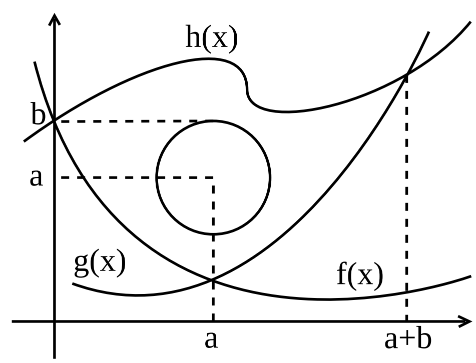


Fig. 3. Gráfico del ejercicio §42

42. Si en la figura 3 la función que describe la curva h es la semisuma de f y g, calcular el área de la zona acotada por estas tres funciones y exterior a la circunferencia dada en términos de a, b y las integrales de f y g solamente (*Sugerencia*: no es necesario calcular el área de la circunferencia en términos de integrales, ya que se puede usar la fórmula $A = \pi r^2$).

43. Resolver las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen} x + \cos x|\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (|1+x| - |1-x|)\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\sqrt[3]{\pi}}^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \operatorname{sen} |7x^3|\, dx$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{4} |3x^2 - 27|\, dx$

44. De un círculo de radio a se corta una elipse cuyo eje mayor coincide con uno de los diámetros del círculo y cuyo eje menor es igual a $2b$. Demostrar que el área de la parte restante es igual al área de la elipse cuyos semiejes son a y $a-b$.

45. Sean $f(x) = [\![x]\!]^2$ y $g(x) = [\![x^2]\!]$. Graficar estas funciones para calcular las integrales

(a) $\displaystyle\int_1^{3/2} |f(x)-g(x)|\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^2 |f(x)-g(x)|\,dx$

Finalmente, los ejercicios restantes se refieren al cálculo de volúmenes por los tres distintos métodos; discos, cascarones y secciones transversales (recuerde que el método de arandelas es un caso especial del método de discos).

46. A continuación se dá una superficie generada por la rotación de una región A alrededor de un eje. Hallar el volumen de dicha superficie:

(a) $A = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{rcl} y &=& 2\sqrt{x} \\ y &=& x \end{array} \right\}$, eje $y=0$.

(b) $A = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{rcl} x &=& y^2 \\ y &=& x-2 \end{array} \right\}$, eje $x=0$.

(c) $A = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{rcl} y &=& 4x^2 \\ y &=& 8-4x \end{array} \right\}$, eje $x=1$.

(d) $A = \left\{ (x,y) \,\middle|\, 1 = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \right\}$, eje $x=0$.

(e) $A = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{rcl} 16y &=& 3x^2+48 \\ 16y &=& x^2+80 \end{array} \right\}$, eje $y=2$.

(f) $A = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{rcl} y &=& x^2+2 \\ 2y &=& x+2 \\ x &=& 0 \\ x &=& 1 \end{array} \right\}$, eje $y=0$.

(g) $A = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{rcl} y &=& x^2+2 \\ 2y &=& x+2 \\ x &=& 0 \\ x &=& 1 \end{array} \right\}$, eje $x=0$.

(h) $A = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{rcl} y &=& \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \\ y &=& 0 \\ x &=& 0 \\ x &=& \pi/2 \end{array} \right\}$, eje $x=0$.

47. En la figura 4 se muestra la región comprendida entre las gráficas de la función $f(x)$ y $y=(x-a)^2$. *Escribir* (es decir, dejando las cuentas indicadas) las integrales que calculan el volúmen del sólido generado cuando se rota la región;

(a) respecto a la recta $x=95$, y

(b) respecto a la recta $y=-5$.

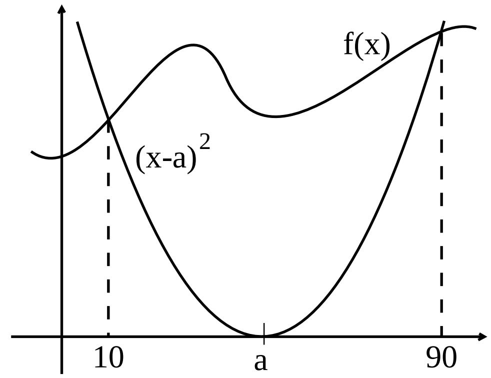


Fig. 4. Gráfico del ejercicio §47

48. Un sólido se genera haciendo rotar la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $0 \le x \le 1$ alrededor del eje x. Determinar f, sabiendo que dicho volumen vale a^2+a, $\forall\, a$.

49. El *toroide* se genera de la siguiente forma: se rota una circunferencia de radio a alrededor de un eje que está a una distancia b del centro de la circunferencia, con $b>a$. Hallar el volumen del toroide (*Sugerencia*: la integral $\displaystyle\int_0^k \sqrt{k^2-x^2}\,dx$ –que ya ha aparecido antes– se puede interpretar como un área notable).

50. Una esfera de radio a es atravesada por un cilindro de radio a $(b<a)$, de modo que un diámetro de la esfera y el eje de simetría del cilindro coincidan. Hallar el volumen del sólido obtenido.

51. Un bloque cilíndrico de radio R se corta mediante dos planos que pasan por el centro del cilindro. El primero es perpendicular al eje, y el segundo forma ángulo, de modo que la máxima altura que se forma con el borde del cilindro vale H, como se muestra en la figura 5. Calcular el volumen de la cuña así formada.

52. Deducir la fórmula para el volumen de una pirámide de base cuadrada, de arista b y altura h.

53. Repetir la pregunta anterior para un elipsoide de semiejes a, b y c.

54. La base de un sólido regular está limitado por la circunferencia $x^2+y^2=4$. Las secciones transversales del mismo, perpendiculares al eje y, son triángulos, cuya hipotenusa está contenida en el plano xy. Hallar el volumen del sólido resultante.

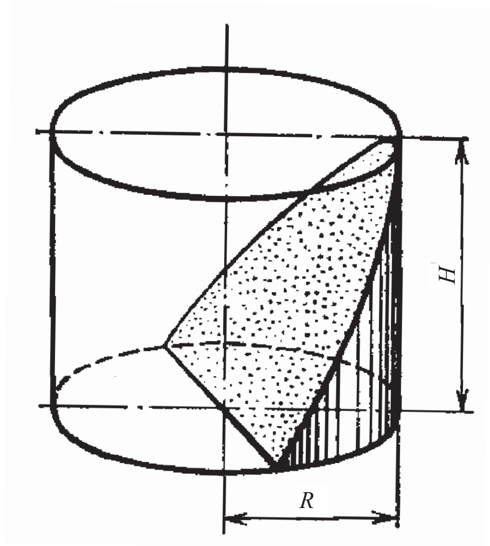


Fig. 5. Gráfico del ejercicio §51.

55. La sección recta de cierto sólido por un plano perpendicular al eje x es un círculo de diámetro AB. El punto A está sobre la curva $y^2 = 4x$ y el punto B sobre la curva $x^2 = 4y$. Hallar el volumen del sólido así generado.

56. Dos cilindros inclinados tienen la misma altura H, la base superior común de radio R y sus base inferiores (del mismo radio) se tocan, tal como se muestra en la figura 6. Calcular el volumen de la parte común de los cilindros.

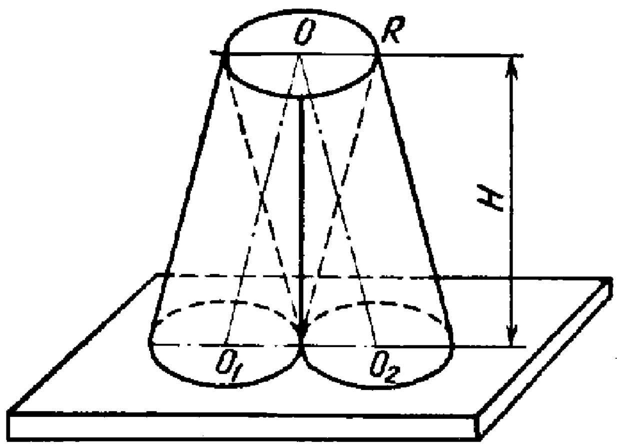


Fig. 6. Gráfico del ejercicio §56

57. Marcar una y sólo una de las alternativas dadas en cada una de las siguientes preguntas:

    (I) Al calcular el área de la figura limitada por la curva $y^2 = 2x + 1$ y la recta $x - y = 1$, se obtiene:

    a. 1 b. 2 c. 10/3 d. 9/2 e. 16/3

    (II) La recta $x = h$ divide en dos partes iguales al área encerrada por la curva $y = x^2$ para $x \geq 0$, el eje x y la recta $x = 2^{1/3}$. Entonces el valor de h es:

    a. $2^{1/3} - 1$ b. $2^{-1/3}$ c. 1 d. $2^{2/3} - 1$ e. $2^{-2/3}$

    (III) El área limitada por $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$ se hace girar en torno al eje x. El volumen del sólido así generado es:

    a. 2π b. $3\pi/2$ c. π d. $\pi/2$ e. $\pi/4$

    (IV) El volumen del sólido generado al rotar alrededor del eje x el área que queda encerrada en el primer cuadrante por los ejes coordenados y la curva $y^2 + 6x = 36$ es:

    a. 27π b. 54π c. 72π d. 108π e. 216π

4 Repaso de Logaritmos y Algebra de Exponentes

En éste capítulo trataremos de concentrarnos en una de las operaciones más útiles de la Matemática. Ésta nos permitiría definir objetos un tanto extraños como $2^{\sqrt{3}}$ ó $\sqrt[\pi]{5}$. Comencemos con algunos ejercicios de calentamiento.

58. Expresar cada una de las siguientes igualdades exponenciales en forma logarítmica o viceversa:

    (a) $5^3 = 125$
    (b) $(1/3)^2 = 1/9$
    (c) $10^{-2} = 0.01$
    (d) $\sqrt[3]{27} = 3$
    (e) $\log 0.001 = -3$
    (f) $\log_{1/3} 9 = -2$
    (g) $\log_3(1/81) = -4$
    (h) $\log_{64} 8 = 1/2$

59. Determinar el valor de x en cada una de las siguientes ecuaciones:

    (a) $\log_3 81 = x$
    (b) $\log_a a^{-4} = x$
    (c) $\log_{b^2} b^6 = x$
    (d) $\log_9 x = -1/2$
    (e) $\log_x 27 = 3/2$
    (f) $\log_x 5 = -2$
    (g) $\log_{x^2} x^{2x} = -\sqrt{2}$
    (h) $\log_8 x^2 = \log_{64} 16$
    (i) $x^{\log_x 2} = x$
    (j) $\log_{x^2} x + \log_{x^2} 2 = 0$
    (k) $\log_{x^2} x + \log_x x^2 = x$
    (l) $\log_{x^a} x + \log_x x^a = \sqrt[a]{x}$

60. Demostrar cada una de las siguientes identidades:

(a) $\log_{1/a} x = -\log_a x$ (d) $\log_{a^n} x^m = \dfrac{m}{n}\log_a x$
(b) $\log_{\sqrt{a}} x = 2\log_a x$
(c) $\log_{a^r} x = \dfrac{1}{r}\log_a x$ (e) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

(f) $\log_a x \log_b x + \log_b x \log_c x + \log_c x \log_a x = \dfrac{\log_a x \log_b x \log_c x}{\log_{abc} x}$

(g) $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$ (h) $\log_a b \log_b c \log_c a = 1$

61. Demostrar que $\dfrac{1 - 3\log_7 5}{4\log_7 5 - 2} = \dfrac{\log_5 7 - 3}{4 - 2\log_5 7}$ (*Sugerencia*: utilizar la fórmula –*ya demostrada en su momento*– dada en el ejercicio § 60e).

62. Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $(\log a)^{(\log a)^{\log a^x}} = 2$
(b) $\sqrt{\log_2 x^4} + 4\log_4 \sqrt{2/x} = 2$
(c) $\log^2 x^3 - 20\log\sqrt{x} + 1 = 0$
(d) $\sqrt{\log_2 x} + \sqrt{\log_x 2} = 5/2$
(e) $\log_{\sqrt[3]{4}}(x+1) - \log_8 2 = 1$
(f) $\log_2 x - 8\log_{x^2} 2 = 3$
(g) $\log_{\sqrt{x}} 2 + 4\log_4 x^2 + 9 = 0$
(h) $\log_x 3\ \log_{x/3} 3 + \log_{x/81} 3 = 0$
(i) $\log_{3x}(3/x) + \log_3^2 x = 1$
(j) $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$
(k) $\sqrt[3]{a^{2x}\sqrt[3]{a^{2x}\sqrt[3]{a^{2x}}}} = a^{26}$
(l) $2\log\log x = \log(7 - 2\log x) - \log 5$
(m) $2^{\log_x(x^2-6x+9)} = 3^{2\log_x\sqrt{x}-1}$
(n) $\log_2^2 x - 9\log_8 x = 4$
(o) $16^{\log_x 2} = 8x$
(p) $(0.4)^{\log^2 x+1} = (6.25)^{2-\log x^3}$
(q) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

63. Determinar cuál de los siguientes pares de números es mayor:

(a) $\log_4 3$ y $\log_3 4$ (c) $(2/3)^{17/15}$ y $(9/4)^{-23/25}$
(b) $\sqrt[3]{0.01}$ y $\sqrt[5]{0.001}$ (d) $\log(\sqrt{7}+\sqrt{3})$ y $\log(\sqrt{21})$
(e) $\pi - \log_2 9$ y $1 + \log(1+\sqrt{2})$

64. Resolver las siguientes inecuaciones:

(a) $(5^x + 1)(3^{2x} - 3)(2^x - 1) \le 0$
(b) $\dfrac{(1-3^x)(2^x-2)}{(2^{-x}-4)(5^x-125)} \le 0$
(c) $4^x + 2^{x+1} - 3 \ge 0$
(d) $\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right]\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^x - 1\right](2^x + 2) > 0$
(e) $5^{x^2-2} - 0.04 \ge 0$ (f) $\sqrt{2^{x^2-1} - 4} \le 2$
(g) $\log x^3 \le \log(7x^2 - x - 6) - \log(x-1)$
(h) $\log_{1/2} x + \log_3 x > 1$
(i) $x^{\log_a x+1} > a^2 x$ (si $a > 1$)
(j) $\log_a x + \log_a(x+1) < \log_a(2x+6)$ (si $a > 1$)
(k) $\log_3(x^2 - 5x + 6) < 0$
(l) $\dfrac{1}{\log_2 x} - \dfrac{1}{\log_2 x - 1} < 1$
(m) $x^{2-\log_2^2 x - \log_2 x^2} > \dfrac{1}{x}$
(n) El hecho de que $a^{1/3} < a^{1/2}$ implica que $a \boxed{}\ 1$.
(o) Si $\log_2(x+2) - \log_2(x-2) > 0$, entonces

$$x \in \boxed{}\,.$$

65. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

(a) $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = 1/2\sqrt{3} \\ (x+y)2^{y-x} = 48 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3^x 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 3 \\ \log_3 x^3 + \log_3 y^2 = 4 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \log_x 27 = \log_y 216 \\ xy = 18 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 512 \\ \log\sqrt{xy} = 1 + \log 2 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x^2 = 1 + 6\log_4 y \\ y^2 = y2^x + 2^{2x+1} \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 2x^y - x^{-y} = 1 \\ \log_2 y = \sqrt{x} \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 5\log^2 x + \log x^4\ \log y + \log^2 y = 2 \\ \log x\ \log y^6 + 7\log^2 y = 1 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} 2x^y - x^{-y} = 1 \\ \log_2 y = \sqrt{x} \end{cases}$

5 La función Logaritmo Natural y su inversa

Prosigamos ahora con Cálculo Diferencial para estas funciones. Se define función *logaritmo natural* como

$$f(x) = \operatorname{lgn} x := \int_1^x \frac{dt}{t} \ .$$

Se define la función *exponencial natural* como la función inversa al logaritmo natural, es decir,

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x := f^{-1}(x) \ .$$

Los resultados más importantes sobre estas funciones se resumen en la siguiente proposición:

Proposición 5.1. Para las funciones $\operatorname{lgn} x$ y e^x se tiene

$$\frac{d}{dx}\operatorname{lgn} x = \frac{1}{x} \ , \quad \frac{d}{dx}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \ ,$$

y estas funciones están relacionadas por las ecuación

$$\operatorname{lgn}(\mathrm{e}^x) = x \ , \quad \forall\, x \in \mathbf{R} \ ; \quad \mathrm{e}^{\operatorname{lgn} x} = x \ , \quad \forall\, x > 0 \ .$$

Además, $f(x) = \operatorname{lgn} x$ y $f^{-1}(x) = \mathrm{e}^x$ son funciones crecientes en sus dominios, y los siguientes límites se verifican:

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{lgn} x = -\infty \ , \quad \lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0^+ \ .$$

66. Hallar los dominios de definición de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \operatorname{lgn}(x^2 + 5x + 6)$

(b) $f(x) = \operatorname{arcsen}(1 - x) + \operatorname{lgn}(\operatorname{lgn} x)$

(c) $f(x) = \operatorname{lgn}(1 - 2\cos x)$

(d) $f(x) = \operatorname{lgn}(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(e) $f(x) = \operatorname{lgn}\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|$

(f) $f(x) = \sqrt[4]{\operatorname{lgn}(\tan x)}$

(g) $f(x) = \log_2(\log_3(\log_4 x))$

(h) $f(x) = \arccos(\log(x/10))$

(i) Si se define la función $f(x) = \dfrac{\log_x 2 - 1}{1 - \log_3 x}$, entonces la solución de la ecuación $f(x) = 0$ es $x = \boxed{\quad}$, y el dominio de la función es

$$\mathbf{R}^+ \setminus \{ \boxed{\quad}, \boxed{\quad} \} \ .$$

(j) Sean

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \operatorname{lgn}(x^2 - 4) \ , \\ f_2(x) &= \operatorname{lgn}(x - 2) + \operatorname{lgn}(x + 2) \ . \end{aligned}$$

Aunque es cierto que $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$, $\forall\, x$, ¿son iguales los dominios de f_1 y f_2 ?

67. Usando gráficas notables, dibujar el grafo de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \operatorname{lgn}(|\ x\ | + 1)$

(b) $f(x) = \operatorname{lgn}(\sqrt[3]{x}) + 1$

(c) $f(x) = |\operatorname{lgn} x\ | + \operatorname{lgn} x$

(d) $f(x) = \log(\cos x)$

(e) $f(x) = \mathrm{e}^{x-2} - 2$

(f) $f(x) = \mathrm{e}^{1-|x|}$

(g) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$

(h) $f(x) = 3^x 2^{-x}$

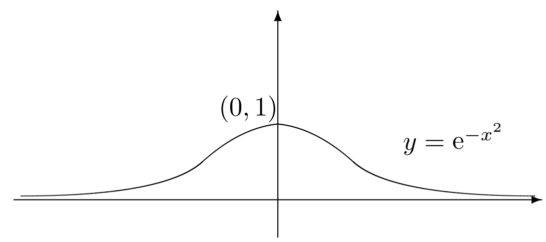


Fig. 7. Gráfico del ejercicio §68.

68. La *campana de Gauss* es una curva notable (mostrada en la figura 7) utilizada en la teoría de Distribución de Probabilidades, cuya ecuación es $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Obsérvese que esta función es par, que tiene al eje x como asíntota horizontal y a $f(0)$ como máximo global. Usar esta información para graficar las funciones $f_1(x) = (\mathrm{e}^x)^{2-x}$, $f_2(x) = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ y $f_3(x) = 1 + \mathrm{e}^{4-x^2}$.

69. Este ejercicio se propone demostrar los límites notables exponenciales y logarítmicos.

(a) Elegir $a > \mathrm{e}$ y usar el hecho de que $m \operatorname{lgn} a > m$ (con $m > 0$) para demostrar que $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{lgn} x = \infty$. ¿Qué implica esto sobre $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{lgn} x$?

(b) Se ha dicho en la definición de logaritmo en base arbitraria que esta no puede ser 1. Así, la función $f(x) = \log_x 2$ tendría una indeterminación en $x = 1$. Usar nuevamente el ejercicio § 60e para deducir que

$$\lim_{x\to 1^\pm} \log_x 2 = \pm\infty \ .$$

(c) Usar la regla de L'Hôpital y la continuidad de la función exponencial para demostrar el siguiente límite notable

$$\lim_{h\to 0}(1 + hx)^{1/h} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x \ .$$

(d) Sea $\epsilon > 0$ e $I = (-\epsilon, \epsilon) \subset (-1, 1)$. Comprobar gráficamente la desigualdad

$$\operatorname{lgn}(1 + x) \le x \ , \quad \forall\, x \in I \ .$$

Además, usando el hecho de que

$$1 - x \leq \frac{1}{1+x} \ , \quad \forall \ x \in I \ ,$$

demostrar que $x - x^2/2 \leq \operatorname{lgn}(1+x)$, $\forall \ x \in I$.

(e) Usando las desigualdades de la parte anterior y el Teorema de Interposición (si quiere llamarlo "del Sandwich", está bien), deducir el límite notable

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{lgn}(1+x)}{x} = 1 \ .$$

¿Que se puede afirmar con respecto al límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} \ ?$$

(nótese que la idea de este ejercicio es deducir dichos límites sin usar la Regla de L'Hôpital).

(f) Usar un cambio de variable exponencial apropiado en la parte anterior para deducir el límite notable

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \ ,$$

y contestar la misma pregunta anterior para $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \operatorname{lgn} a$.

70. Usando cualquiera de los límites notables de la pregunta anterior (es decir, sin usar la Regla de L'Hôpital), calcular los siguientes límites (*Sugerencia*: las siguientes formas indeterminadas se pueden convertir en los límites notables de la pregunta anterior por medio de cambios de variable, ya que las funciones logarítmicas y exponenciales son continuas):

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{\mathrm{e}^{-x^2} - 1}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x} - \mathrm{e}^{\beta x}}{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(bx)}$

(c) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(\operatorname{lgn}(x+1)) - \operatorname{sen}(\operatorname{lgn} x)$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(\pi 2^x)}{\operatorname{lgn}[\cos(\pi 2^x)]}$ (f) $\lim_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x - a}$

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{lgn}[\tan(ax + \pi/4)]}{\operatorname{sen}(bx)}$ (g) $\lim_{x\to \mathrm{e}} \dfrac{\operatorname{lgn} x - 1}{x - \mathrm{e}}$

(h) $\lim_{x\to \pi/4} \tan(2x)\,(\mathrm{e}^{x-\pi/4} - 1)$

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x\,\mathrm{e}^x) - \cos(x\,\mathrm{e}^{-x})}{x^3}$

(j) $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2}$ (k) $\lim_{x\to 0} \left(1 + \tan^2 \sqrt{x}\right)^{1/2x}$

(l) $\lim_{h\to 0} \dfrac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2}$

(m) $\lim_{x\to 1} (1-x) \log_x 2$ (o) $\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1-2x}$

(n) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ (p) $\lim_{x\to a} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} a}\right)^{1/(x-a)}$

(q) $\lim_{x\to\infty} (\operatorname{sen}(1/x) + \cos(1/x))^x$

(r) $\lim_{x\to 0} \left(2\,\mathrm{e}^{x/(x+1)} - 1\right)^{(x^2+1)/x}$

71. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x \operatorname{lgn}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{a^2}{2} \operatorname{lgn}\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$

(c) $f(x) = \operatorname{lgn} \tan(x/2) - \operatorname{ctg} x \operatorname{lgn}(1 + \operatorname{sen} x) - x$

(d) $f(x) = 2 \operatorname{lgn}\left(2x - 3\sqrt{1-4x^2}\right) - 6 \operatorname{arcsen}(2x)$

(e) $f(x) = \operatorname{lgn}\left(\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right) + 2 \arctan \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(f) $f(x) = x \arctan(1+\sqrt{x}) + \operatorname{lgn}(x + 2\sqrt{x} + 2) - \sqrt{x}$

(g) $f(x) = \mathrm{e}^{ax} \dfrac{a \operatorname{sen}(bx) - b\cos(bx)}{a^2+b^2}$

(h) $f(x) = \dfrac{(\operatorname{lgn} 3) \operatorname{sen} x + \cos x}{3^x}$

(i) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{kx}}{k(k^2+4)}(k^2 \cos^2 x + k \operatorname{sen}(2x) + 2)$

(j) $f(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2^2 + 2^{-x}}$

(k) $f(x) = \operatorname{lgn} \cos \arctan \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$

(l) Si $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \operatorname{lgn}\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$, demostrar que y satisface $2y = xy' + \operatorname{lgn} y'$.

72. Usar la *derivada logarítmica* $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{lgn}(f(x))) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ para calcular la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \sqrt[x]{x}$

(b) $f(x) = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$

(c) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x} + (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$

(e) $f(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_n)^{\alpha_n}$

(f) $f(x) = \left[\dfrac{\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right]^{\arctan^2 x}$

(g) Si $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-1.000)$, demostrar que $f'(0) = (1.000)!$

73. Demostrar que la función definida como

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} - \operatorname{lgn}(1 - \mathrm{e}^{-x})$$

es decreciente para $x > 0$.

74. Sabiendo que $\tan\phi = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, demostrar que

(a) $\dfrac{d\phi}{dx} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ (c) $\dfrac{dx}{d\phi} = \sec\phi$

(b) $x = \operatorname{lgn}(\sec\phi + \tan\phi)$

75. Demostrar que la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} 0\,, & x\le 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\exp\left(-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)\right), & 0<x<1 \\ 1\,, & x\ge 1 \end{cases}$$

es continua y derivable en todo $\mathbf{R}$ (de hecho, esta función "conecta" por medio una curva derivable en un intervalo abierto a dos rectas horizontales con discontinuidad de salto, separadas por dicho abierto).

76. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

en $x = 0$. Representar la gráfica de f.

77. Sea $n \in \mathbf{Z}^+$. Usar el principio de Inducción Matemática para demostrar las fórmulas

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^x}(x^n \operatorname{lgn} x) &= n!\left(\operatorname{lgn} x + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right), \\ \frac{d^n}{dx^x}\left(\frac{\operatorname{lgn} x}{x}\right) &= (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\left(\operatorname{lgn} x - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

♢ *Solución*: Demostremos la primera, a pesar de ser la más fácil. El caso $n = 1$ es trivial, ya que $(x \operatorname{lgn} x)' = \operatorname{lgn} x + 1$, y es precisamente a 1 a lo que se reduce la sumatoria a la izquierda de la identidad cuando $n = 1$. Si suponemos cierta la fórmula para el n dado y trabajamos con la fórmula en la variable $n+1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^{n+1}\operatorname{lgn} x\right) &= \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{d}{dx}\left(x(x^n \operatorname{lgn} x)\right)\right] \\ &= \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^n \operatorname{lgn} x) + x(nx^{n-1}\operatorname{lgn} x + x^{n-1})\right] \\ &= \frac{d^n}{dx^n}\left((n+1)x^n \operatorname{lgn} x + x^n\right) \\ &\overset{*}{=} (n+1)n!\left(\operatorname{lgn} x + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + n! \\ &= (n+1)!\left(\operatorname{lgn} x + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= (n+1)!\left(\operatorname{lgn} x + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right), \end{aligned}$$

(nótese que en el primer paso tuvimos que escribir $x^{n+1} = x{\cdot}x^n$ y $\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} = \dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{d}{dx}$ para que más adelante apareciera la hipótesis inductiva) y en el paso (*) usamos que la derivada n-ésima de x^n es $n!$, como el lector podrá chequear sin dificultad. ♢

78. Sea $n \in \mathbf{Z}^+$. Se definen los *polinomios de Hermite* por medio de la fórmula

$$H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\ .$$

Demostrar que todo H_n es un polinomio de grado n.

79. Hallar los valores de las constantes a, b y c para que la función definida como

$$\begin{cases} 3x^2 + ax - 5 & , \quad x \le 1 \\ x + b\cos(\pi x) & , \quad 1 < x \le 2 \\ e^{c(x-2)} & , \quad x > 2 \end{cases},$$

sea continua en $x = 1$ y derivable en $x = 2$ (*Sugerencia*: recurde que "derivable" también significa continua de antemano!).

80. Sea $f(x) = 2 + x^2 + \operatorname{lgn}(x^2)$, $x > 0$. Demostrar que $\exists\, x_0 \in [e^{-8}, 3]$ tal que $f(x_0) = 8$.

81. Dada la función

$$\begin{cases} x^2\cos\operatorname{lgn}(x^2) - x & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases},$$

obtener $f'(0)$.

82. Sea f continua, derivable y estrictamente positiva en el intervalo $[a,b]$. Demostrar que $\exists\, c \in [a,b]$ tal que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left[(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}\right].$$

(*Sugerencia*: aplicarle el Teorema del Valor Medio a una composición; no es tan difícil ver que se puede inventar con una función que estrictamente positiva).

83. A continuación se da una desigualdad que se cumple en un intervalo. Con esa desigualdad como hipótesis y una modificación del criterio de la primera derivada (el cual debió ser un ejercicio de ése tema[1]), demostrar la desigualdad implicada en cada caso:

[1]Por si no se ha percatado todavía, tal ejercicio debería decir de la siguiente manera:

Proposición 5.2. Sean f, g continuas en $[x_0, \infty)$ y derivables en (x_0, ∞) tales que $f(x_0) = g(x_0)$ y $f'(x) \le g'(x)$. Entonces $f(x) \le g(x)$ para todo $x \ge x_0$.

(a) Si $\dfrac{1}{t} < \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $\forall\, t > 1$, entonces

$$\operatorname{lgn} x < 2(\sqrt{x} - 1),\ \forall\, x > 1\ .$$

(b) Si $\mathrm{e}^x \geq 1$, $\forall\, x \geq 0$, entonces:

$$\mathrm{e}^x \geq 1 + x,\ \forall\, x \geq 0\ .$$

(c) Si $2 \arctan x \geq 0$, $\forall\, x \geq 0$, entonces:

$$2x \arctan x \geq \operatorname{lgn}(1 + x^2),\ \forall\, x \geq 0\ .$$

♢ *Solución*: Veamos la solución del (c), que parece ser el más difícil. En efecto, si el lector ha intentado ya hacer los dos primeros, el único "truco" en la proposición que se quiere aplicar, es que la desigualdad a demostrar debe constar de las antiderivadas de los dos miembros de la desigualdad que se dá como dato. Pero ni la derivada de $\operatorname{lgn}(1+x^2)$ es 0, ni la derivada de $2x \arctan x$ es $2 \arctan x$, por lo que debemos pensar en modificar previamente la hipótesis para que las funciones que necesitamos salgan naturalmente; si sumamos a ambos miembros de dicha hipótesis el término $\dfrac{2x}{1+x^2}$ (que"pareciera" ser x sin derivar, multiplicada por la derivada de $2 \arctan x$), tenemos:

$$2 \arctan x + \frac{2x}{1+x^2} \geq \frac{2x}{1+x^2},\ \forall\, x \geq 0\ ,$$

de modo que **ahora si** resulta natural definir $f(x) = 2x \arctan x$ y $g(x) = \operatorname{lgn}(1+x^2)$ (habiendo notado, gracias al artificio, que

$$f'(x) = 2 \arctan x + \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{y que} \quad g'(x) = \frac{2x}{1+x^2}\ )\ .$$

Así, y como es cierto que $f(0) = g(0)$ y $f'(x) \geq g'(x)$ para todo $x \geq 0$, la proposición dada en el enunciado nos dice que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \geq 0$, es decir, sale que

$$2x \arctan x \geq \operatorname{lgn}(1 + x^2),\ \forall\, x \geq 0$$

como se pedía (la inversión de la desigualdad usada aquí es lo de menos; se puede interpretar como inversión de las letras f y g). ♢

84. Sea $x_0 > 0$. Supongamos que existe una función f acotada, continua y derivable, $\forall\, x \in (x_0, \infty)$ y que existe $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$. ¿Se deduce de esto que existe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ finito ó infinito? (*Sugerencia*: examinar el caso de la función $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{lgn} x)$).

85. (a) Demostrar la fórmula

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \ldots \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)}\ .$$

(*Sugerencia*: demostrar la fórmula por inducción ó multiplicar arriba y abajo del miembro izquierdo por $2 \operatorname{sen}(x/2^n)$ y simplificar).

(b) Deducir a partir de la parte anterior, una fórmula para la suma

$$\frac{1}{2} \tan\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{4} \tan\left(\frac{x}{4}\right) + \ldots + \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

(*Sugerencia*: note que $(\operatorname{lgn}(\cos x))' = -\tan x$).

86. Si $\arctan \dfrac{x}{y} + \operatorname{lgn}(x^2 + y^2) = 0$, demostrar que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}\ .$$

87. Se define una función f implícitamente por medio de la ecuación $\operatorname{lgn}(x - y) + \mathrm{e}^{x-2y} = 1$,

(a) Demostrar que f' está definida en la región del plano $D = \{\ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y < x\ \}$.

(b) Hallar la ecuación de la recta tangente a ésta gráfica en el punto $P = (2, 1)$.

88. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$ en el punto $P = (\pi/2, 1$.

89. Sean $f(x) = \mathrm{e}^x + 2x - \cos x$ y

$$g(x) = \frac{x^2}{2\pi} - \cos x + x \operatorname{lgn}\left(\frac{x}{\pi}\right) - \frac{\pi}{2}\ .$$

Hallar $(f^{-1})'(0)$ y $(g^{-1})'(1)$.

90. Sea $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Comprobar que f'' es positiva en todas partes y deducir la desigualdad

$$\frac{\mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{-b}}{2} > \mathrm{e}^{-\frac{a+b}{2}},\ a \neq b\ .$$

91. (a) Demostrar que la función definida como

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - a}{b\, \mathrm{e}^x + 1}, \quad b > 0\ ,$$

tiene dos asíntotas horizontales, si $b \neq 1$.

(b) Con ayuda de la parte (a), hallar una función que tenga como asíntotas las rectas $y = 1$ y $y = 2$, y trazar el gráfico de la solución dada (*Sugerencia*: hay muchas soluciones, pero la idea es conseguir por lo menos una de la forma dada en la parte anterior).

92. Haciendo el análisis por medio de derivadas y los criterios de la 1ra. y 2da. derivada, construír las gráficas de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \operatorname{lgn}(x^2 + 6x - 55)$

(b) $f(x) = \operatorname{lgn}(x + \sqrt{1 + x^2})$

(c) $f(x) = x + e^{-x}$
(d) $f(x) = (x+2)\,e^{1/x}$
(e) $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$
(f) $f(x) = x^x$
(g) $f(x) = x^2 - \operatorname{lgn}(x^2)$
(h) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$

93. Calcular, usando la definición de integrales de Riemann, $\int_0^1 e^x\,dx$ (*Sugerencia*: busque en esta suma una progresión geométrica).

94. Demostrar que el área debajo de la curva $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[a,b]$ es la misma que la correspondiente al intervalo $[ka,kb]$, cualquiera que sea $k > 0$. Utilizar este razonamiento para dar otra demostración de que $\operatorname{lgn}(ab) = \operatorname{lgn} a + \operatorname{lgn} b$ (*Sugerencia*: para la última parte de lo que se pide, note que $\operatorname{lgn}(ab) - \operatorname{lgn} a = \int_a^{ab} \frac{dt}{t}$).

95. Este ejercicio pretende demostrar que la definición de la función exponencial por medio de la función inversa al logaritmo cumple las ya conocidas propiedades de una exponencial. Sea f una función **no idénticamente nula** que satisface la ecuación funcional $f(xy) = f(x) + f(y)$, $\forall\, x, y \in (0,\infty)$.

   (a) Demostrar que $f(1) = 0$ (*Sugerencia*: haga $x = y = 1$).

   (b) Demostrar que f se puede escribir como
   $$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \text{ para } x > 0$$
   (*Sugerencia*: derive la ecuación funcional con respecto a x; haga $x = 1$ y luego integre con respecto a y).

   (c) Si f^{-1} denota la función inversa a f, verificar que $Dom_{f^{-1}} = \mathbf{R}$ y que $Rgo_{f^{-1}} = (0,\infty)$.

   (d) Demostrar que $f^{-1}(0) = 1$.

   (e) Demostrar que
   $$f^{-1}(a+b) = f^{-1}(a) f^{-1}(b)\ ,\quad \forall\, a, b \in \mathbf{R}$$
   (*Sugerencia*: use lo demostrado en la pregunta §94).

   (f) Demostrar que $(f^{-1})'(x) = f^{-1}(x)$, es decir, que la derivada de la función inversa es la misma inversa.

96. Sean $a, b > 0$ y $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continua. Demostrar que
$$\lim_{t\to 0} \int_{at}^{bt} f(x)\frac{dx}{x} = f(0) \operatorname{lgn} \frac{b}{a}$$
(*Sugerencia*: ¿qué debe ocurrir con una función continua en un intervalo cerrado con respecto a los límites?; en la pregunta §22 ya se usó esto!).

97. Hallar todas las funciones continuas que satisfacen la ecuación funcional
$$f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(x)\,dx$$
(*Sugerencia*: derive dicha expresión y recuerde que la función exponencial del tipo $k\,e^x$ es la **única** que satisface la ecuación $f'(x) = f(x)$).

98. Hallar el valor de a para que el valor medio de la función $f(x) = \operatorname{lgn} x$ en $[1,a]$ sea igual a la velocidad media de dicha función en ese intervalo.

99. Sea $f : I = (0,\infty) \to \mathbf{R}$, definida como $\int_{2x}^{5x} \frac{dt}{t}$. Demostrar que f es constante, $\forall\, x \in I$.

100. Si $f(x) = \int_1^{\operatorname{lgn} x} \operatorname{sen} t^2\,dt$, calcular $(f^{-1})'(e)$.

101. Resolver la integral indefinida $\int f'(x)dx$, sabiendo que $f'(\operatorname{lgn} x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x \le 1 \\ x & , \quad 1 < x < \infty \end{cases}$ y que $f(0) = 0$.

102. Resolver la siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int x\,e^{-x^2/a}\,dx$
(b) $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen}(e^x)\,dx$
(c) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$
(d) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$
(e) $\displaystyle\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x}\,dx$
(f) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$
(g) $\displaystyle\int x\,e^{x^2}[1 + x\,e^{-(x^2+x^3)}]\,dx$
(h) $\displaystyle\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\,dx$
(i) $\displaystyle\int \frac{(a^x - b^x)^2}{(ab)^x}\,dx$
(j) $\displaystyle\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\,dx$
(k) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}\,dx$
(l) $\displaystyle\int x\tan(3x^2)\,dx$
(m) $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$
(n) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \operatorname{lgn} x \operatorname{lgn}(\operatorname{lgn} x)}$
(o) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\cos^2(1+\operatorname{lgn} x)}$
(p) $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x} + x\operatorname{lgn}(1+x^2) + 1}{1+x^2}\,dx$
(q) $\displaystyle\int \frac{1+x}{x(1+x\,e^x)}\,dx$
(r) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\,dx$
(s) $\displaystyle\int_1^{n+1} \operatorname{lgn}[\![x]\!]\,dx$
(t) $\displaystyle\int \frac{x}{1 - x\operatorname{ctg} x}\,dx$
(u) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{lgn}(x+1) - \operatorname{lgn} x}{x(x+1)}\,dx$
(v) $\displaystyle\int \frac{e^{x/2}\arctan(e^{x/2})}{1+e^x}\,dx$
(w) $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{sen}(2x)\,dx$
(x) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{lgn}(\operatorname{sen} x)}{\tan x}\,dx$

(y) Demostrar que $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$, y deducir que $\int_0^{\pi/4} \operatorname{lgn}(1+\tan x)\,dx = (\pi \operatorname{lgn} 2)/8$.

(z) Demostrar la fórmula

$$\mathrm{e}^x - \exp\left(\int_{\operatorname{lgn} 2}^{x} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} dt\right) = 1 \ .$$

♢ *Solución*: Resolvamos en este ejercicio el (d) y el (t).

(d) En el primer caso, debemos ubicar la derivada de expresiones exponenciales. Intentando multiplicar arriba y abajo por e^x, tenemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} &= \int \frac{\mathrm{e}^x\, dx}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \int \frac{d(\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x)^2+1} \\ &= \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C \\ &= \arctan \mathrm{e}^x + C \end{aligned}$$

(t) En el segundo caso, el numerador no parece ser la derivada interna del denominador. Pero escribiendo la $\operatorname{ctg} x$ en función de seno y coseno, tenemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{x\,dx}{1 - x\operatorname{ctg} x} &= \int \frac{x \operatorname{sen} x\,dx}{\operatorname{sen} x - x\cos x} \\ &= \int \frac{d(\operatorname{sen} x - x\cos x)}{\operatorname{sen} x - x \cos x} \\ &= \int \frac{dt}{t} = \operatorname{lgn}|t| + C \\ &= \operatorname{lgn}|\operatorname{sen} x - x\cos x| + C \ , \end{aligned}$$

♢

103. Sea $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\operatorname{lgn} t}{t+1} dt$, para $x > 0$. Hallar $f(x) + f(1/x)$ y comprobar que $f(2) + f(1/2) = (\operatorname{lgn}^2 2)/2$.

104. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región limitada por las curvas $y = 3^x$, $y = (1/3)^x$, $x = -1$ y $x = 1$ alrededor de la recta $y = -2$.

105. Hallar el límite $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\mathrm{e}\, x^2/\pi - \mathrm{e}\,\pi/4 + \int_x^{\pi/2} \mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}\, dt}{1+\cos(2x)}$.

106. (a) Demostrar por inducción la fórmula

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \ .$$

(b) Usar la parte anterior para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = \operatorname{lgn} 2$$

(*Sugerencia*: en la fórmula de la parte anterior, ubicar una suma de Riemann).

6 Funciones Hiperbólicas

Como una aplicación de las funciones exponenciales, analicemos finalmente las funciones hiperbólicas. En caso de que el lector no las conozca, demos primero sus definiciones y propiedades más elementales.

Definición 6.1. Dado $x \in \mathbf{R}$ arbitrario, se definen el **coseno hiperbólico** y el **seno hiperbólico** como las partes par e impar, respectivamente, de la función exponencial:

$$\cosh x := \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \ , \quad \operatorname{senh} x := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \ .$$

Asímismo, se define la **tangente hiperbólica** como la razón entre el seno y el coseno hiperbólicos, es decir,

$$\tanh x := \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \ ,$$

y las definiciones para la **secante**, **cosecante** y **cotangente** hiperbólicas son análogas a las que se dan para las funciones trigonométricas.

Proposición 6.3. Las funciones seno y coseno hiperbólico satisfacen la relación

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \ .$$

Además, ambas tienen como dominio a todo $\mathbf{R}$, son ambas **no acotadas** y **no periódicas**[2]. Finalmente, el rango del coseno hiperbólico es $[1, \infty)$, y el del seno hiperbólico es $\mathbf{R}$.

107. Demostrar las siguientes identidades:

(a) $\mathrm{e}^{\pm x} = \cosh x \pm \operatorname{senh} x$

(b) $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$

(c) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

(d) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

(e) $\operatorname{ctgh}^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

(f) $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

(g) $\operatorname{senh}(2x) = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

(h) $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

(i) $\tanh(2x) = \dfrac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}$

(j) $(\operatorname{senh} x + \cosh x)^n = \operatorname{senh} nx + \cosh nx$

108. En cada uno de los siguientes casos, se da una de las seis funciones hiperbólicas de cierto argumento u. Hallar las otras cinco:

[2] La razón de las “negritas”, es resaltar que estas dos propiedades **no son** análogas a las propiedades que gozan las funciones trigonométricas, que son tanto acotadas como periódicas.

(a) $\operatorname{senh} u = -3/4$ (d) $\operatorname{ctgh} u = 13/12$
(b) $\cosh u = 17/15$ (e) $\operatorname{sech} u = 3/5$
(c) $\tanh u = -7/25$ (f) $\operatorname{csch} u = 5/12$

109. Deducir cada una las siguientes fórmulas para las funciones hiperbólicas inversas:

(a) Para $x \in \mathbf{R}$: $\qquad \arg\operatorname{senh} x = \operatorname{lgn}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(b) Para $x \geq 1$: $\qquad \arg\cosh x = \operatorname{lgn}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

(c) Para $\mid x \mid < 1$: $\qquad \arg\tanh x = \frac{1}{2}\operatorname{lgn}\frac{1+x}{1-x}$

(d) Para $0 < x \leq 1$:
$$\arg\operatorname{sech} x = \operatorname{lgn}\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \arg\cosh\frac{1}{x}$$

(e) Para $x \neq 0$:
$$\arg\operatorname{csch} x = \operatorname{lgn}\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{\mid x \mid}\right) = \arg\operatorname{senh}\frac{1}{x}$$

(f) Para $\mid x \mid > 1$:
$$\arg\operatorname{ctgh} x = \frac{1}{2}\operatorname{lgn}\frac{x+1}{x-1} = \arg\tanh\frac{1}{x}$$

♢ *Solución*: Probemos la fórmula del (d). Notemos que si declaramos

$$x = \operatorname{sech} y \ , \ y \geq 0 \iff y = \arg\operatorname{sech} x \ , \quad 0 < x \leq 1$$

(la elección de las variables es por conveniencia, y el intervalo inicial por invertibilidad), entonces tenemos una ecuación cuadrática en la variable e^y que depende de x. En efecto, si completamos cuadrados (aunque la aplicación directa de la resolvente también sirve), tenemos:

$$\begin{aligned}
x = \operatorname{sech} y = \frac{2}{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}} &= \frac{2\,\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^{2y}+1} \\
\Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{2y} - \frac{2}{x}\mathrm{e}^y + 1 &= 0 \\
\Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{2y} - \frac{2}{x}\mathrm{e}^y + \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{x^2} - 1 \\
\Longrightarrow \quad \left(\mathrm{e}^y - \frac{1}{x}\right)^2 &= \frac{1-x^2}{x^2} \\
\Longrightarrow \quad \mathrm{e}^y - \frac{1}{x} &= \pm\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} \\
\Longrightarrow \quad \mathrm{e}^y &= \frac{1}{x} \pm \frac{\sqrt{1-x^2}}{\mid x \mid} \\
\overset{0\leq x\leq 1}{\Longrightarrow} \quad \mathrm{e}^y &= \frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}
\end{aligned}$$

(nótese la desaparición del módulo en el último paso por ser $0 < x \leq 1$). Ahora bien, aunque ambos signos son posibles en la igualdad anterior (es decir, no hay contradicción entre los signos de e^y y dicha fracción), la escogencia del signo negativo la convierte en una fracción con rango en $(0,1]$, cosa que es imposible porque $\mathrm{e}^y \geq 1$ si $y \geq 0$. Así, el signo correcto a tomar es el positivo, y tomando logaritmos a ambos lados, tenemos finalmente

$$\mathrm{e}^y = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \Longrightarrow \quad y = \operatorname{lgn}\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \ ,$$

como pedía la primera igualdad a demostrar. La segunda es consecuencia más bien notacional de que

$$\begin{aligned}
y = \arg\operatorname{sech} x &\iff x = \operatorname{sech} y \\
\iff \frac{1}{x} = \cosh y &\iff y = \arg\cosh\frac{1}{x} \ ,
\end{aligned}$$

y con esto terminamos. Es de hacer notar, no sólo en este sino en los seis ejercicios presentados, que al igual (o más bien, un poco más general) que en el caso trigonométrico, lo variado de los dominios de definición de las funciones hiperbólicas inversas se debe a que el seno hiperbólico es inyectivo, pero nulo en el origen, y el coseno hiperbólico no es inyectivo, y con rango mayor que 1. Así, las seis funciones hiperbólicas tienen que restringirse con cuidado para no definir de manera errónea sus fórmulas, especialmente en el caso en el que aparecen ecuaciones cuadráticas en su definición, como en el caso que acabamos de resolver. ♢

110. Este ejercicio refleja los significados geométricos de las funciones hiperbólicas (ver figura 8):

(a) Si L es la recta tangente a la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ en el punto $P = (x_0, y_0)$, para el cual $\exists\, u > 0$ tal que $x_0 = \cosh u$ y $y_0 = \operatorname{senh} u$, demostrar que L corta al eje x en el punto $A = (\operatorname{sech} u, 0)$ y al eje y en el punto $B = (0, -\operatorname{csch} u)$.

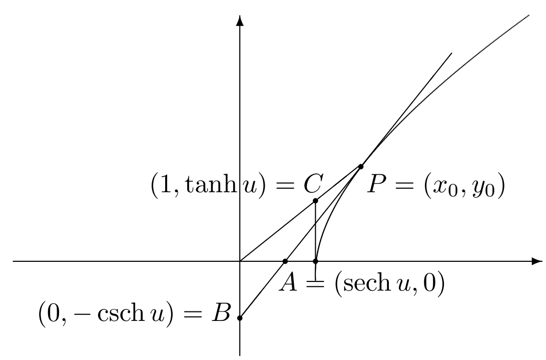


Fig. 8. Gráfica del ejercicio §110

(b) Demostrar que la tangente a dicha hipérbola en el vértice $(1,0)$ corta a la recta que va desde el origen de coordenadas hasta el punto P (ver la parte anterior) en el punto $C = (1, \tanh u)$.

111. Supongamos que existe una función tal que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -5 \ , \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 3 \ .$$

Hallar $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\tanh x + f(-x)\operatorname{ctgh} x}{-f(2x) + f(-2x)}$.

112. Hallar los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to a} \dfrac{\operatorname{senh} x - \operatorname{senh} a}{x-a}$ (d) $\lim_{x\to\infty} x - \operatorname{lgn}(\cosh x)$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh}^2 x}{\operatorname{lgn}(\cosh 3x)}$ (e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen} 2x} - \operatorname{senh} x}{\tanh(3x)}$

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{lgn}(\cosh x)}{\operatorname{lgn}(\cos x)}$ (f) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\cosh\sqrt{2}x - 1}{x^2}\right)^{\operatorname{ctg} x}$

♢ *Solución*: Resolvamos el (d). Como la forma indeterminada es $\infty - \infty$ y la naturaleza de ambas funciones no parece ser la misma, aprovechamos el hecho de que $x = \operatorname{lgn}(e^x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x - \operatorname{lgn}(\cosh x) &= \lim_{x\to\infty} \operatorname{lgn}(e^x) - \operatorname{lgn}(\cosh x)\\ = \lim_{x\to\infty} \operatorname{lgn}\frac{e^x}{\cosh x} &= \lim_{x\to\infty} \operatorname{lgn}\frac{2e^x}{e^x + e^{-x}}\\ \overset{*}{=} \operatorname{lgn}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+e^{-2x}} &= \operatorname{lgn}\frac{2}{1+0} = \operatorname{lgn} 2\ ,\end{aligned}$$

donde en el paso (*) estamos usando la continuidad de la función logaritmo. ♢

113. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \operatorname{ctgh}(\tan x)$

(b) $f(x) = e^{ax}\dfrac{\cosh x - a\operatorname{senh} x}{1-a^2}$ $(|\, a\, | \neq 1)$

(c) $f(x) = \arctan x - \operatorname{arg\,tanh} x$

(d) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arg\,senh} x}{\sqrt{1+x^2}} - \arctan x$

(e) $f(x) = \left(\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)^2 \tanh x$

(f) $\cosh y = \operatorname{ctg} x$ (*Sugerencia*: usar derivación implícita)

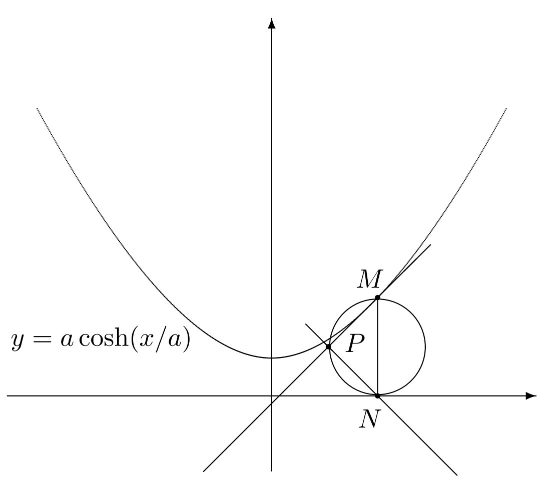


Fig. 9. Gráfica del ejercicio §114

114. Sea M un punto de la *catenaria* $y = a\cosh(x/a)$ y N su proyección sobre el eje x. Se construye un semicírculo de diámetro $\overline{MN}$, tal como lo indica la figura 9, y se escoge un punto P sobre el semicírculo tal que la longitud del segmento $\overline{NP}$ sea a. Demostrar que la recta que pasa por M y por P es tangente a la catenaria.

115. Resolver las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \tanh x\, dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{senh} x}$

(b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh^4 x}\, dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{1+\cosh 2x}{x + \operatorname{senh} x \cosh x} dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{(e^x + e^{-x})\, dx}{e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x}}$

(f) $\displaystyle\int \frac{(e^x - 4e^{-2x})\, dx}{e^{3x} + 6 + 12e^{-3x} + 8e^{-6x}}$

(g) $\displaystyle\int x\cosh^2(x^2/2)\, dx$ (i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{senh} x + 2\cosh x}$

(h) $\displaystyle\int \sqrt{\cosh x - 1}\, dx$ (j) $\displaystyle\int \frac{e^x\ dx}{\cosh x - \operatorname{senh} x}$

(k) Demostrar la identidad

$$\operatorname{senh} u \cosh v = \frac{1}{2}\left[\operatorname{senh}(u+v) - \operatorname{senh}(u-v)\right]\ ,$$

y con este resultado, calcular la integral

$$\int \operatorname{senh} 5x \cosh 3x\, dx\ .$$

♢ *Solución*: Veamos la solución del (e). Recordando la fórmula del binomio

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\ ,$$

y comparándola con el denominador del subintegrando, es claro que este es igual a $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^3}\, dx$. Haciendo el cambio

$$u = e^x - e^{-x}\ ,\quad du = (e^x + e^{-x})\, dx\ ,$$

tenemos que la respuesta es $I = -\dfrac{1}{2(e^x - e^{-x})^2} + C$. Notando ahora que

$$\frac{e^x + e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^3} = \frac{1}{4}\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \cdot \frac{2^2}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{\operatorname{csch}^2 x}{4\tanh x}\ ,$$

le sugerimos al lector que vuelva a resolver la integral usando funciones hiperbólicas. ♢

116. Sea S la región limitada por las gráficas de $y = \cosh x$ y $y = 0$ en el intervalo $[0, \operatorname{lgn} 2]$. Hallar el volumen del sólido generado por la rotación de S alrededor de:

(a) el eje $y = -1$, (b) el eje $x = -2$.

117. Marcar sólamente una de las alternativas dadas en cada uno de los siguientes ejercicios:

(I) Si $F(x) = \displaystyle\int_1^{\operatorname{lgn} x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\, dt$, entonces $F'(x)$ es igual a:

a. $\dfrac{1}{\operatorname{lgn} x}$ c. $\dfrac{\mathrm{e}^{\operatorname{lgn} x}}{\operatorname{lgn} x}$ d. $\dfrac{1}{\operatorname{lgn} x} - \operatorname{lgn} \mathrm{e}$

b. $\dfrac{1}{x \operatorname{lgn} x}$ e. $\dfrac{x}{\operatorname{lgn} x} - \mathrm{e}$

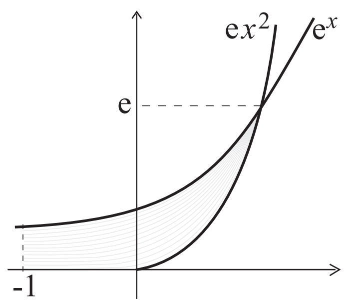
(II) El valor de $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{x\, dx}{x^2 - 1}$ es:

a. $\dfrac{1}{2} \operatorname{lgn}(\mathrm{e}^2 + 1)$ d. $\dfrac{\mathrm{e}}{4} \operatorname{lgn}(\mathrm{e}^2 - 1)$

b. $\dfrac{1}{4} \operatorname{lgn}(\mathrm{e}^2 - 1)$ e. $\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$

c. $\dfrac{\mathrm{e}}{2} \operatorname{lgn}(\mathrm{e}^2 + 1)$

(III) El área sombreada en la figura es igual a:



a. $\dfrac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}}$ c. $\dfrac{2\mathrm{e}^2 - 3}{3\mathrm{e}}$ e. $\dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{\mathrm{e}^2 + 1}$

b. $\dfrac{1 - 2\mathrm{e}^2}{3}$ d. $\dfrac{\mathrm{e} + 1}{\mathrm{e} - 1}$

(IV) El área encerrada por la curva de ecuación $y = f(x)$, los ejes coordenados y la recta $x = x_0$ está dada por $x_0\, \mathrm{e}^{x_0}$. Entonces la fórmula de $f(x)$ es:

a. e^x c. $(x - 1)\, \mathrm{e}^x$ e. $(x^2 - x)\, \mathrm{e}^x$

b. $x\, \mathrm{e}^x$ d. $(x + 1)\, \mathrm{e}^x$

(V) Si $f(x) = \operatorname{senh}(x + \cosh x)$, entonces $f''(0)$ es igual a:

a. $2\mathrm{e}$ d. $\operatorname{senh} 1 - \cosh 1$

b. e e. e^{-1}

c. 1

(VI) La expresión definida como

$$A = \cosh(\operatorname{arg\,sech} x) + \tanh(\operatorname{arg\,ctgh} x)$$

es equivalente a:

a. $2/x$ c. 1 e. 2

b. $2x$ d. $x + 1/x$

7 Métodos de Integración

En éste capítulo emprenderemos el estudio de los diversos métodos de integración para integrales indefinidas, clasificando las integrales por tipos.

Le advertimos al lector que casi todas las integrales que aparecen esta guía tienen un cambio de variable previo que facilitan su posterior cálculo por otros métodos.

118. A continuación se expone una tabla de integrales notables que Ud. ya conoce, indicando en la primera columna la función y en la segunda su primitiva (excepto por una constante de integración, la cual se ha omitido en la mayoría de los casos por eficiencia). Las primeras son de uso general y las segundas suministran la antiderivada de funciones más particulares. Usando dicha tabla, calcular las integrales indefinidas dadas:

(a) $\displaystyle\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)}$ (b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3}\, dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x(1 + x)}\, dx$ (*Sugerencia*: $\dfrac{\sqrt{x}}{x}\, dx = \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$)

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 3x^2}}$ (n) $\displaystyle\int \frac{x + \sqrt{\arccos^2 3x}}{\sqrt{1 - 9x^2}}\, dx$

(e) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\, dx$ (o) $\displaystyle\int \frac{(1 + \mathrm{e}^x)^2}{1 + \mathrm{e}^{2x}}\, dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{2x - 1}{x^2 + 9}\, dx$ (p) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x(1 + \mathrm{e}^x)}{\sqrt{1 - \mathrm{e}^{2x}}}\, dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{2x + 3}{2x + 1}\, dx$ (q) $\displaystyle\int \frac{2^x}{\sqrt{1 - 4^x}}\, dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 5x + 7}{x + 3}\, dx$ (r) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x - \cos x}}\, dx$

(i) $\displaystyle\int x \tan(x^2 + 1)\, dx$ (s) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \operatorname{lgn} x \operatorname{lgn} \operatorname{lgn} x}$

(j) $\displaystyle\int \tan x\, dx$ (t) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1 - x)^{100}}\, dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x}\, dx$ (u) $\displaystyle\int \frac{x - \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx$

(l) $\displaystyle\int \operatorname{sen} \operatorname{lgn} x \frac{dx}{x}\, dx$ (v) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{-x} \cos x\, dx}{(\cos x + \operatorname{sen} x)^2}$

(m) $\displaystyle\int \frac{x - \sqrt{\arctan 2x}}{1 + 4x^2}\, dx$ (w) $\displaystyle\int \frac{2 + 6^x + 6^{-x}}{(2^{-x} + 3^x)^2}\, dx$

(x) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1 + \cosh x)^2}$ (*Sugerencia*: escribir $\cosh x$ en términos de funciones exponenciales, simplificar y hacer $u = \mathrm{e}^x + 1$).

$\int f(x)\,dx$	$F(x)$
$\int f(ax+b)\,dx$	$\frac{1}{a}F(ax+b)$
$\int (f_1(x)\pm\alpha f_2(x))\,dx$	$F_1(x)\pm\alpha F_2(x)$
$\int f(g(x))g'(x)\,dx$	$F(g(x))$
$\int x^n\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$, si $n\neq -1$
$\int \frac{dx}{x}$	$\operatorname{lgn}\lvert x\rvert$
$\int \operatorname{sen} x\,dx$	$-\cos x$
$\int \operatorname{senh} x\,dx$	$\cosh x$
$\int \cos x\,dx$	$\operatorname{sen} x$
$\int \cosh x\,dx$	$\operatorname{senh} x$
$\int \tan x\,dx$	$-\operatorname{lgn}\lvert\cos x\rvert$
$\int \tanh x\,dx$	$\operatorname{lgn}\cosh x$
$\int \operatorname{ctg} x\,dx$	$\operatorname{lgn}\lvert\operatorname{sen} x\rvert$
$\int \operatorname{ctgh} x\,dx$	$\operatorname{lgn}\lvert\operatorname{senh} x\rvert$
$\int \sec^2 x\,dx$	$\tan x$
$\int \csc^2 x\,dx$	$-\operatorname{ctg} x$
$\int \sec x\tan x\,dx$	$\sec x$
$\int \csc x\operatorname{ctg} x\,dx$	$-\csc x$
$\int \frac{dx}{1+x^2}$	$\begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arcctg}(1/x)+C_2 \end{cases}$
$\int \frac{dx}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\operatorname{lgn}\left\lvert\frac{1-x}{1+x}\right\rvert = \operatorname{arg\,tanh} x$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\begin{cases} \operatorname{arcsen} x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{cases}$ (*)
$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{lgn}(x+\sqrt{1+x^2}) = \operatorname{arg\,senh} x$
$\int \mathrm{e}^x\,dx$	e^x
$\int \mathrm{a}^x\,dx$	$\frac{\mathrm{a}^x}{\operatorname{lgn}\mathrm{a}}$

(y) $\int(\operatorname{arcsen} x + \arccos x)\,dx$ (*Sugerencia*: busque la relación entre C_1 y C_2 de la fórmula (*) de la tabla).

(z) Sean $x, y \in \mathbf{R}$ constantes tales que $xy \neq 1$ y sea $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$. Sin resolver la integral, demostrar que

$$F(x)+F(y) = F\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) .$$

(*Sugerencia*: Simplificar $F\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - F(y)$ y hacer el cambio de variable $t = \frac{u+y}{1-uy}$).

♢ *Solución*: Resolvamos los ejercicios (b), (m) y (w).

(b) Como $x^4 + x^{-4} + 2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(x^{-2}) + (x^{-2})^2$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\,dx = \\
&= \int \frac{\sqrt{(x^2+x^{-2})^2}}{x^3}\,dx = \int\left(\frac{x^2}{x^3}+\frac{x^{-2}}{x^3}\right)dx \\
&= \int\frac{dx}{x} + \int x^{-5}\,dx = \operatorname{lgn}|x| - \frac{1}{4x^4} + C
\end{aligned}$$

(m) En este caso hay que estar muy claro con la regla de la cadena; la función que más molesta es el subradical, y su derivada es la fracción $2/(1+4x^2)$. Pero no sirve de entrada hacer el cambio $v = \arctan 2x$, ya que el sumando x nada tiene que ver con él. Si antes de eso separamos la integral en dos sumandos:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}\,dx = \\
&= \int\frac{x}{1+4x^2}\,dx - \int\frac{\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{8}\int\frac{8x\,dx}{1+4x^2} - \frac{1}{2}\int\sqrt{\arctan 2x}\,\frac{2\,dx}{1+(2x)^2} ,
\end{aligned}$$

ocurre algo que es típico en integrales de fracciones complicadas; el cambio anterior solo sirve para la segunda de las integrales separadas. Además, observamos (y es la razón del 8 que aparece ahora) que la primera integral es además susceptible del cambio $u = 1+4x^2$, de modo que:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}\,dx = \\
&= \frac{1}{8}\int\frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int v^{1/2}\,dv = \frac{1}{8}\operatorname{lgn} u - \frac{1}{2}\frac{v^{3/2}}{3/2} + C \\
&= \frac{1}{8}\operatorname{lgn}(1+4x^2) - \frac{1}{3}\sqrt{(\arctan 2x)^3} + C ,
\end{aligned}$$

donde podemos omitir el módulo en el logaritmo, ya que $1+4x^2>0$ siempre. Este ejemplo muestra que varios términos en una misma integral pueden ser o bien las funciones a cambiar o bien las derivadas de tales cambios.

(w) En este caso, hay dos maneras de resolver la integral. En primer lugar, notando (otra vez una factorización con exponentes negativos) que

$$\begin{aligned} 2+6^x+6^{-x} &= (6^{x/2})^2+2(6^{x/2})(6^{-x/2})+(6^{-x/2})^2 \\ &= \left(6^{x/2}+6^{-x/2}\right)^2 = 6^{-x}\left(1+6^x\right)^2, \\ \left(2^{-x}+3^x\right)^2 &= 2^{-2x}\left(1+6^x\right)^2 , \end{aligned}$$

de modo que

$$\int \frac{2+6^x+6^{-x}}{(2^{-x}+3^x)^2}\,dx = \int \frac{6^{-x}\left(1+6^x\right)^2}{2^{-2x}\left(1+6^x\right)^2}\,dx$$
$$= \int \frac{2^{2x}}{2^x\cdot 3^x}\,dx = \int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = \frac{1}{\operatorname{lgn}(2/3)}\left(\frac{2}{3}\right)^x + C$$

En segundo lugar, la presencia del cuadrado en el denominador sugiere que la primitiva del subintegrando *puede* ser un cociente. En efecto, haciendo manipulaciones parecidas a las que se hicieron antes, tenemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{2+6^x+6^{-x}}{(2^{-x}+3^x)^2}\,dx &= \int \frac{6^x\left(1+6^{-x}\right)^2}{(3^x)^2\left(1+6^{-x}\right)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{\operatorname{lgn}(2/3)}\int \frac{2^x\cdot 3^x\operatorname{lgn}(2/3)}{(3^x)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{\operatorname{lgn}(2/3)}\int \frac{2^x\operatorname{lgn}2\cdot 3^x-3^x\operatorname{lgn}3\cdot 2^x}{(3^x)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{\operatorname{lgn}(2/3)}\int \left(\frac{2^x}{3^x}\right)' dx = \frac{1}{\operatorname{lgn}(2/3)}\left(\frac{2}{3}\right)^x + C \end{aligned}$$

por lo que las soluciones coinciden. Es claro que este método es un muy rebuscado, pero solo se expone con la intención de que el lector note lo difícil que resulta calcular una antiderivada "deshaciendo" los pasos que se hicieron al derivar, mucho más si se trata de integrales de cocientes. ♢

119. Comprobar que las integrales del tipo

$$\int R\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

se convierten en integrales polinómicas, usando el cambio de variable $u^n=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Con este resultado, calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

(c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\operatorname{lgn}x}}{x\operatorname{lgn}x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt[3]{x}}$

120. Usando completación de cuadrados, y las fórmulas (por ahora notables; luego las justificaremos con los cambios trigonométricos):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+a^2} &= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}, \\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}, \\ \int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a}\operatorname{lgn}\left|\frac{x-a}{x+a}\right|, \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} &= \operatorname{lgn}\left(x+\sqrt{x^2+k}\right), \end{aligned}$$

resolver las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

(b) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{(n-x)(x-3n)}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-2x^2-1}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^6-x^3-2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x\cos\alpha+1}\,dx$
(*Sugerencia*: $\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=1$)

(h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x\operatorname{sen}\alpha-\cos 2\alpha}$
(*Sugerencia*: $\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=\cos 2\alpha$)

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$

(j) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$

(k) $\displaystyle\int \frac{3x-4}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}\,dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\,dx$

(o) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2x-6\operatorname{sen}x+12}}\,dx$

(p) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{\cos^2x+4\cos x+1}}\,dx$

(q) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{lgn}x}{x\sqrt{1-4\operatorname{lgn}x-\operatorname{lgn}^2x}}\,dx$

(r) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{10+4e^x+4e^{2x}}}\,dx$

121. Comprobar que las integrales del tipo

$$\int \frac{dx}{(mx+n)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

se reducen a integrales del tipo anterior, usando la sustitución $mx+n=1/u$. Con este resultado, calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2\,\sqrt{x^2+2x-3}}$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$ (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x}}$

122. Demostrar que

$$\begin{aligned}\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx &= Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\\ &+ \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ ,\end{aligned}$$

donde P_n es un polinomio de grado n, Q_{n-1} es otro de grado $n-1$ con coeficientes indeterminados y λ es una constante. Con este resultado, resolver las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$ (d) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$

$\diamondsuit$ *Solución*: Resolvamos ahora el (c). La aparición del monomio x en el denominador no permite emplear el método de este ejercicio, pero descomponemos el integrando en dos, de modo que:

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}} + \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx\ ,$$

y la primera integral en el lado derecho es del tipo anterior, la cual el lector ya sabrá resolver. En cuanto a la segunda, aplicamos el método de esta pregunta y escribimos

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = a\sqrt{x^2-x+1} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Para hallar a y λ, derivamos a ambos lados de la expresión anterior para obtener:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{a(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-x+1}}\ .$$

Identificando numeradores en ambos lados de la última expresión, llegamos a

$$2x+2 = a(2x-1)+2\lambda \implies$$

$$\left\{\begin{array}{rclcl} 2 &=& 2a & \implies & a=1\\ 2 &=& -a+2\lambda & \implies & \lambda = \dfrac{1}{2}(2+a) = \dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

Así, la segunda integral tiene por solución

$$I_2 = \sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}\ ,$$

y juntando esto con lo obtenido al comienzo, llegamos a que la integral propuesta es igual a

$$\sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}\ ,$$

con lo cual el lector ya tiene para resolver por el método de integrales cuadráticas una sola integral, y otra de ellas por el método de la pregunta anterior. $\diamondsuit$

123. Resolver las siguientes integrales trigonométricas:

(a) $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x+\pi/4)}{\operatorname{sen} x\cos x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^4 x}}\,dx$ (g) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{lgn}(\tan x)}{\operatorname{sen} x\cos x}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{e^{-\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$ (i) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}\,dx$ (j) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

(k) $\displaystyle\int_0^{\alpha} (\cos 2\alpha - \cos 2x)\,dx$

(l) $\displaystyle\int (\sqrt{\operatorname{sen} x}+\cos x)^2\,dx$

$\diamondsuit$ *Solución*: Veamos la solución del (e). Recordando la identidad $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$, el numerador se puede escribir como

$$\begin{aligned}\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x &= (\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)^2 + 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\\ &= \cos^2 2x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2x = \frac{1}{2}\cos^2 2x + \frac{1}{2}\ ,\end{aligned}$$

por lo que la integral es igual a

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \frac{\cos^2 2x+1}{\cos 2x}\,dx\\ &= \frac{1}{4}\left(\int \cos 2x\, d(2x) + \frac{1}{4}\int \sec 2x\, d(2x)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen} 2x + \operatorname{lgn}|\sec 2x+\tan 2x|\right) + C\ ,\end{aligned}$$

donde el resultado de $\int \sec u\,du$ se puede considerar notable; basta con multiplicar arriba y abajo del subintegrando por $\sec u + \tan u$, y darse cuenta de la relación $(\sec u+\tan u)' = \sec u\tan u + \sec^2 u$. $\diamondsuit$

124. Este ejercicio pretende clasificar algunas de las integrales trigonométricas polinomiales y racionales, como son

$$I_1 = \int \operatorname{sen}^m x\,dx\ ,\ I_2 = \int \cos^n x\,dx\ ,$$

$$I_3 = \int \frac{\cos^n x}{\operatorname{sen}^m x}\,dx\ .$$