Apuntes Tema 6:

# *Teoremas Básicos de Resolución de Circuitos.*

## Contenido

# 6 Herramientas Básicas de Resolución de Circuitos.

## 6.1 Introducción

La resolución de las diferentes circuitos que se presentan en redes eléctricas y electrónicas pueden solucionarse utilizando determinadas herramientas matemáticas.

Estas herramientas se suman a las ya conocidas tales como la ley de Ohm y las reglas de Kirchoff. Además a ellas se les puede agregar la resolución por mallas aplicando determinantes y otras. También se debe recordar, para los componentes lineales, su configuración en serie y paralelo.

Para que pueda utilizar las nuevas técnicas y métodos de resolución, se tratará aquí de analizar las más comunes y que tienen aplicación en prácticamente todos los problemas que se puedan presentar en los diferentes circuitos o mallas.

Por ello, para comenzar, se impartirán primero los conocimientos de nodos y mallas, posteriormente la resolución de circuitos con una sola fuente de alimentación ( tensión o corriente ), luego la resolución de un circuito por el método de mallas. Posteriormente se verá un método alternativo a la resolución por mallas y que se denomina: Principio de superposición. A continuación se estudiarán unas herramientas útiles para la resolución de la respuesta de un circuito en una determinada carga como son el Teorema de Thévenin y de Norton, también se analizara la llamada transformación de redes triángulo en estrella para la simplificación de por ejemplo, circuitos tipo puentes. Finalmente se estudiará el tema de redes de cuatro terminales conocidas como cuadripolo.

Todo lo antes dicho se estudiará para señal de corriente continua como de corriente alterna.

### 6.1.1 Resumen

La resolución de circuitos exige el conocimiento de herramientas matemáticas. Ya se conoce la ley de Ohm, las reglas de Kirchoff y resolución por mallas. Para lograr resolver algunos más complejos se proponen otras herramientas matemáticas tales como: transformación de redes estrella en triángulo y viceversa, principio de superposición, teoremas de Thévenin, Norton y nociones de cuadripolos.

### 6.1.2 Preguntas de Autoevaluación.

1) ¿Qué ley relaciona la tensión y la corriente en un material conductor?

2) ¿Qué tipos de materiales conoce en función de la corriente que circula por ellos?

3) ¿Cuál es la resistencia equivalente entre dos resistencias colocadas en serie? ¿y en paralelo?

4) ¿Cuánto vale la resistencia equivalente entre una resistencia de cualquier valor y un cortocircuito?

5) ¿Cuánto vale la resistencia interna de una fuente de tensión? ¿ Y la de una fuente de corriente?

6) ¿Qué significa “cargar” a un circuito?

## 6.2 Resolución General de Circuitos.

### 6.2.1 Leyes de Kirchhoff.

Las leyes de Kirchhoff son dos igualdades que se basan en la conservación de la energía y la carga en los circuitos eléctricos. Fueron descritas por primera vez en 1845 por Gustav Kirchhoff. Son ampliamente usadas en ingeniería eléctrica. Ambas leyes de circuitos pueden derivarse directamente de las ecuaciones de Maxwell, pero Kirchhoff precedió a Maxwell y gracias a Georg Ohm su trabajo fue generalizado. Estas leyes son muy utilizadas en ingeniería eléctrica e ingeniería electrónica para hallar corrientes y tensiones en cualquier punto de un circuito eléctrico.

#### 6.2.1.1 Definiciones: malla, rama, y nodo

Llamaremos

- Nodo o nudo: a todo punto de un circuito al que concurran tres o más conductores.
- Rama: Una rama es el tramo de un circuito entre dos nodos.
- Malla: Una malla es todo camino cerrado que se puede recorrer en un circuito.

Se aclararán estos conceptos en la figura 6.1.

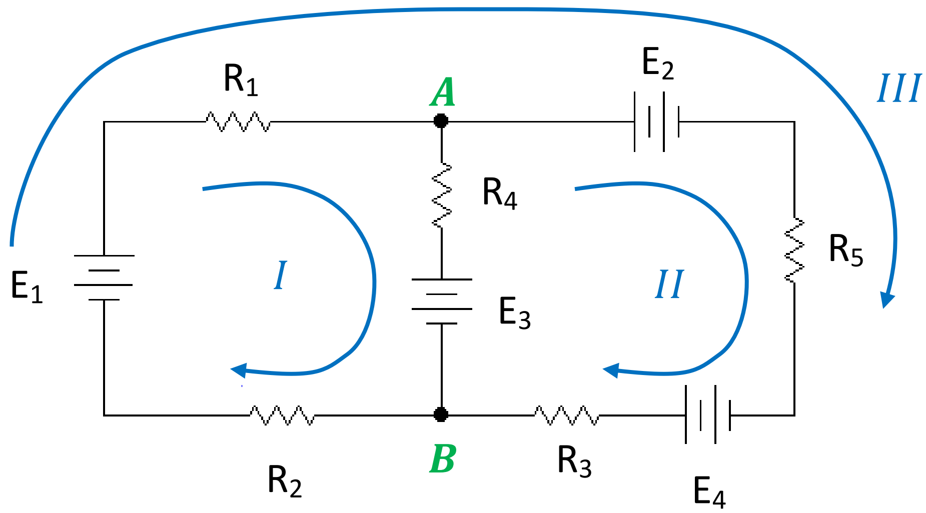



**Fig. 6.1 Nodos , ramas y mallas.**

- Dos NODOS $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$
- Tres RAMAS $R_2 - E_1 - R_1$ ; $R_4 - E_3$ Y $E_2 - R_5 - E_4 - R_3$
- Tres MALLAS $I$ ; $II$ ; $III$

#### 6.2.1.2 Ley de Kirchoff de corrientes.

Esta ley es llamada ley de nodos o primera ley de Kirchoff. Esta ley dice que:

**"En cualquier nodo la suma de las corrientes que entran a ese nodo es igual a la suma de las corrientes que salen. De forma equivalente la suma de todas las corrientes que pasan por el nodo es igual a cero."**

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n = 0$$

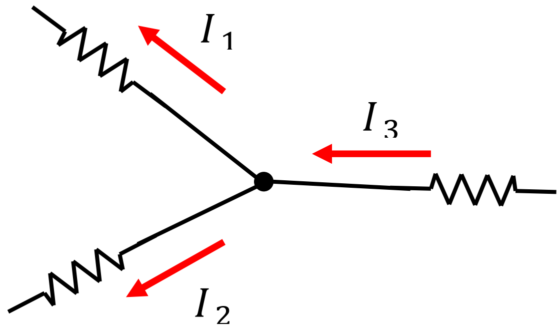



**Fig. 6.2 La corriente que entra a un nodo es igual a la corriente que sale del mismo**

Para usar la ley de Kirchhoff de la corriente, debe asignarse a cada corriente en el nodo un signo algebraico según una dirección de referencia. Si se otorga un signo positivo a una corriente que sale del nodo, debe asignarse uno negativo a una corriente que entra al nodo.

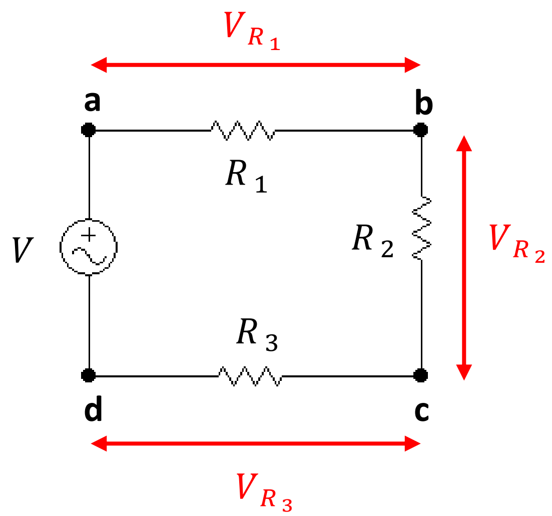
Antes de enunciar la ley de Kirchhoff del voltaje, debemos definir lo que es una trayectoria cerrada o lazo. Comenzando en un nodo seleccionado arbitrariamente, trazamos una trayectoria cerrada en un circuito a través de elementos básicos seleccionados del circuito y regresamos al nodo original sin pasar por ningún nodo intermedio más de una vez.

#### 6.2.1.3 Ley de Kirchoff de tensiones.

Esta ley es también llanada segunda ley de Kirchoff o ley de mallas de Kirchoff.

**"En un lazo cerrado, la suma de todas las caídas de tensión es igual a la tensión total suministrada. De forma equivalente la suma algebraica de las diferencias de potencial eléctrico en un lazo es igual a cero."**

$$\sum_{K=1}^{n} V_K = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$$




$$V = V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3}$$

**Fig. 6.2 Segunda ley de Kirchoff**

Se puede asociar sólo una variable desconocida con cada resistencia, ya sea el voltaje o la corriente, observe que si conoce la corriente en una resistencia, también conoce el voltaje a través de ella, debido a que la corriente y el voltaje están directamente relacionados por la ley de Ohm.

### 6.2.1.4 Resolución de Circuitos

- **Resolución de circuitos con una sola fuente de alimentación**

  Pasos a seguir:

  a) Identificar qué elementos están en serie o en paralelo (resistencias en caso de C.C. o impedancias en caso de C.A.)

  b) Resolver los elementos que están en serie o en paralelo y reemplazarlos por su equivalente.

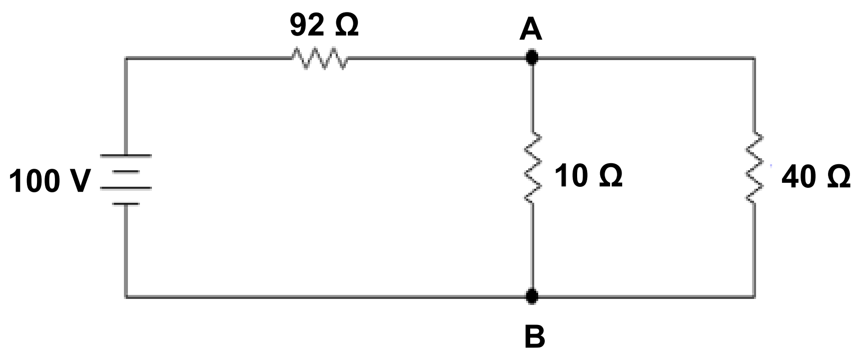
  c) Resolver aplicando este mismo método hasta llegar a un solo elemento con la fuente.

d) Buscar la corriente que sale de la fuente aplicando ley de Ohm (para CC. o CA.)

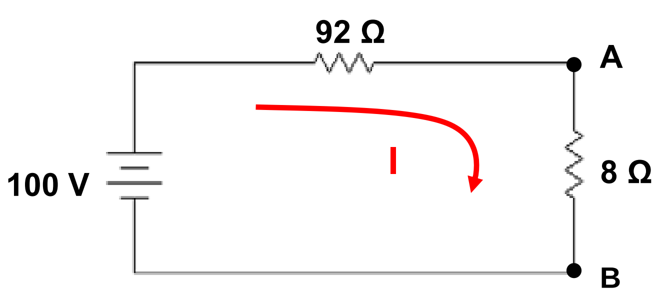
e) Retornar el camino contrario al realizado para obtener tensiones y corrientes en cada elemento del circuito.

f) Terminar cuando se logra encontrar el valor de la variable buscada ( tensión o corriente )

**Ejemplo:** Encuentre el valor de la corriente que circula por cada resistencia.




Asociando resistencias de 10 Ω y de 40 Ω se tiene




$$I = \frac{100\ V}{100\ \Omega} = 1\ Amp$$

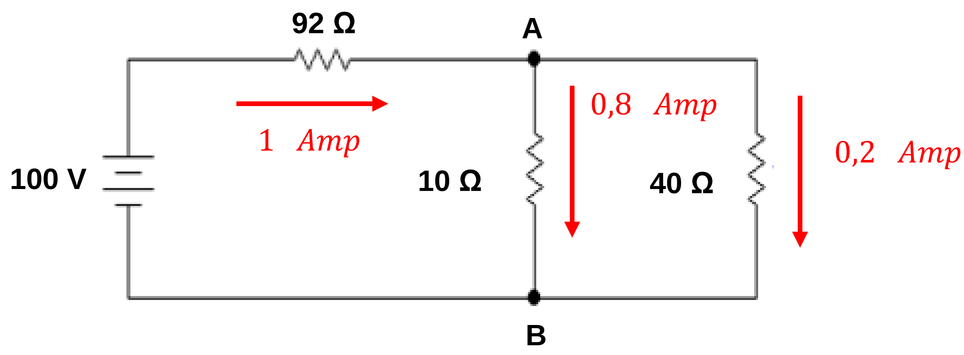
La tensión en A B está dada por: $V_{AB} = 1\ Amp\ .\ 8\ \Omega = 8\ Volts$

La corriente por la resistencia de 10 Ω está dada por:

$$I_{R\,10\,\Omega} = \frac{8\ V}{10\ \Omega} = 0{,}8\ Amp$$

La corriente por la resistencia de 40 Ω está dada por:

$$I_{R\,10\,\Omega} = \frac{8\,V}{40\ \Omega} = 0{,}2\ \ Amp$$




- **Resolución de circuitos con más de una fuente de alimentación**

Un circuito genérico está integrado por un número de ramas, que forman mallas y nodos. Resolver un circuito significa hallar todos los valores de las corrientes, de rama y su sentido de circulación, eventualmente podrán calcularse las tensiones. Para ello debemos componer un sistema de tantas ecuaciones independientes como corrientes de rama incógnitas tengamos y como circula una sola corriente por cada rama será :

$$Número\ de\ ecuaciones\ total\ = número\ de\ ramas$$

Para asegurarnos de que las ecuaciones son independientes debemos elegir:

$$Número\ de\ ecuaciones\ de\ nodos = número\ de\ nodos\ -\ 1$$

En efecto, como no hay acumulación, ni drenaje de corriente en ningún punto del circuito, la suma de todas las corrientes es nula, por lo tanto la última ecuación es suficiente. Debemos completar el sistema con ecuaciones de malla. Al escribir estas ecuaciones para la Segunda Ley de Kirchoff, es importante que se cubran todas las ramas de la red. En muchos casos se eligen las mallas sucesivamente de forma tal, que cada nueva malla incluya al menos una rama que no haya sido considerada anteriormente.

En el caso que en el circuito, haya fuentes de corriente, se eliminan tantas incógnitas como fuentes haya, lo que implica que se deben descartar las ecuaciones correspondientes a mallas que incluyen dichas fuentes.

### 6.2.1.4.1 *Resolución de circuitos aplicando las Leyes de Kirchoff.*

Este método se basa en la formulación del sistema de ecuaciones por aplicación directa de las Leyes de Kirchoff. Se expondrán a continuación una serie de reglas para escribir las ecuaciones de nodos y de mallas, reglas que tienen sólo validez para las convenciones de signos en uso, y que pueden variar si éstas cambian.

Sea el circuito de la Figura 6.3. Este circuito posee tres nodos A, B, y C y cinco ramas:( $R_1$ - $E_1$ – $R_7$ ), ( $R_6$ ), ( $R_8$ - $E_2$ - $R_2$ ), ( $R_5$ ) y ( $E_3$ - $R_3$ - $R_4$ ). Habrá, por lo tanto, cinco corrientes incógnitas (una por cada rama).

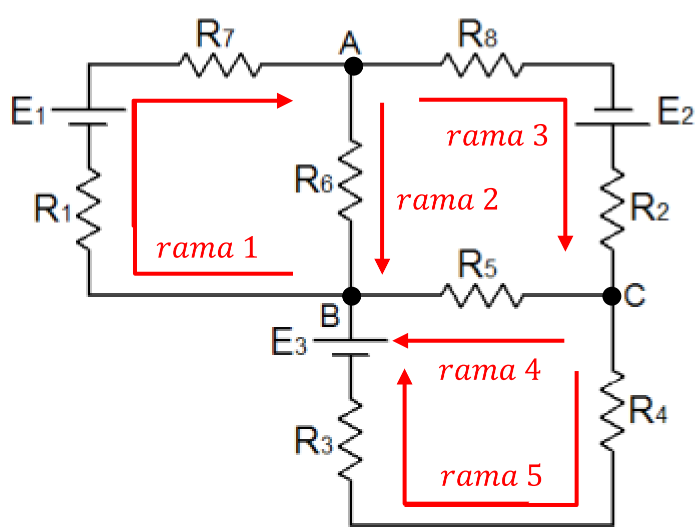



Figura 6.3. Ejemplo para resolución por el método general.

Se debe escribir dos ecuaciones de nodo y tres de malla. Se asignan sentidos arbitrarios a todas las corrientes y se eligen tres caminos de circulación, con indicación del sentido, también arbitrario (Figura 6.4).

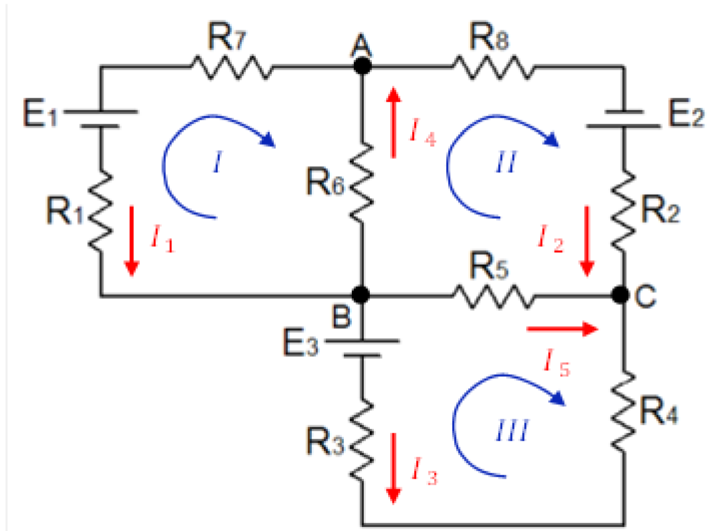



Figura 6.4. Ejemplo para resolución por el método general.

Nótese que cada una de las mallas elegidas tienen una rama no común con las otras dos. Para escribir las ecuaciones de nodos, colocamos en el primer miembro las corrientes entrantes y en el segundo a las salientes.

Así para el nodo A se tiene: $I_4 = I_1 + I_2$ (1)

Para el nodo B se tiene : $I_1 = I_3 + I_4 + I_5$ (2)

Y para el nodo C se tiene : $I_3 + I_2 + I_5 = 0$ (3)

Debemos elegir dos de las tres ecuaciones. Obviamente, se tomarán las más sencillas, en este caso la de los nodos A y C.

Para escribir las ecuaciones de malla pondremos en el primer miembro a las las caídas de tensión en cada resistencia y en el segundo a las fuerzas electromotrices.

- Una fuerza electromotriz es positiva cuando al circular en el sentido elegido por dentro del generador, el potencial sube (circulación de negativo a positivo).

- Una caída de tensión es positiva cuando el sentido de circulación coincide con el de la corriente

Con este criterio podemos escribir:

Para la malla I: $-I_1 . R_1 - I_4 . R_6 - I_1 . R_7 = E_1$ (4)

Para la malla II: $I_2 . R_2 - I_5 . R_5 + I_4 . R_6 + I_2 . R_8 = E_2$ (5)

Para la malla III: $I_5 . R_5 - I_3 . R_4 - I_3 . R_3 = E_3$ (6)

Todavía podríamos obtener más ecuaciones de mallas, pero que no serían independientes. En definitiva el sistema estará compuesto por las ecuaciones (1), (3), (4), (5) y (6), que se resolverá por alguno de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.

### 6.2.1.5 Preguntas de autoevaluación

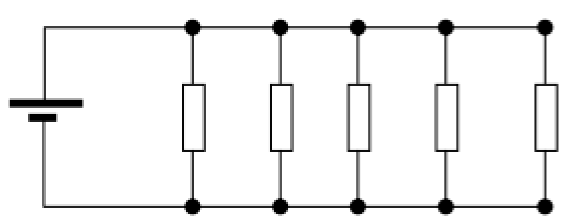
7) ¿A qué se denomina NODO en un circuito eléctrico?

8) ¿A qué se denomina RAMA en un circuito eléctrico?

9) ¿A qué se denomina MALLA en un circuito eléctrico?

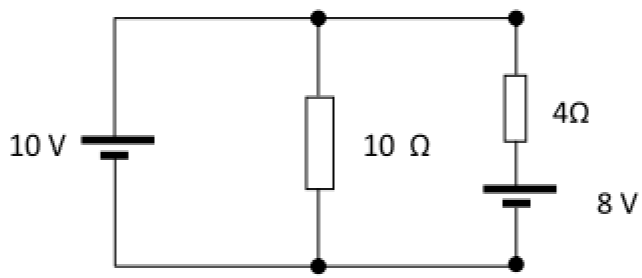
10) ¿Qué leyes se usan para realizar los cálculos de corriente y tensión en un circuito eléctrico?

11) Diga cuántas mallas reconoce en el siguiente circuito.



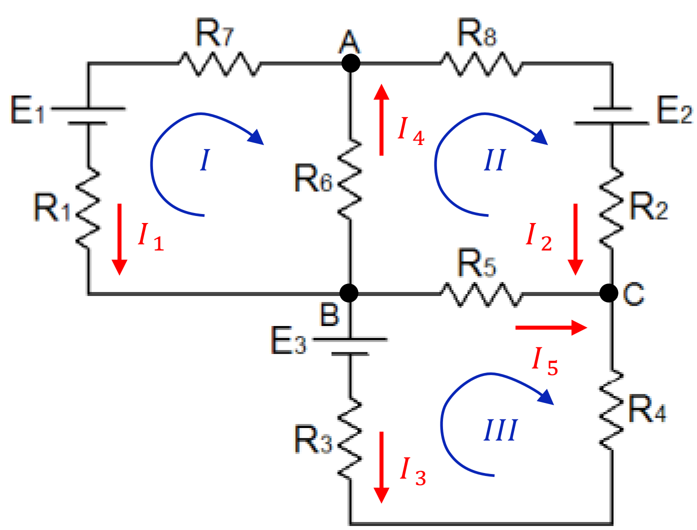
### 6.2.1.6 Ejercicios propuestos

1) Aplicar el método de ramas para resolver el problema que a continuación se dibuja.




2) Aplicar el método de ramas para resolver el problema que a continuación se dibuja.

$E_1$=20 V
$E_2$=10 V
$E_3$=30 V
$R_1$=10Ω
$R_2$=20Ω
$R_3$=50Ω
$R_4$= 5Ω
$R_5$= 5Ω
$R_6$=10Ω
$R_7$=20Ω
$R_8$=50Ω

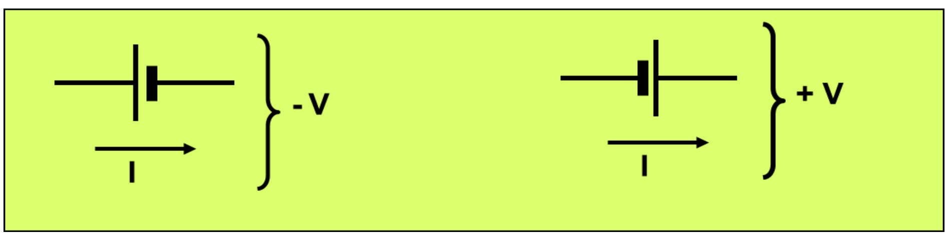


### 6.2.2 Resolución de un circuito aplicando método de Mallas

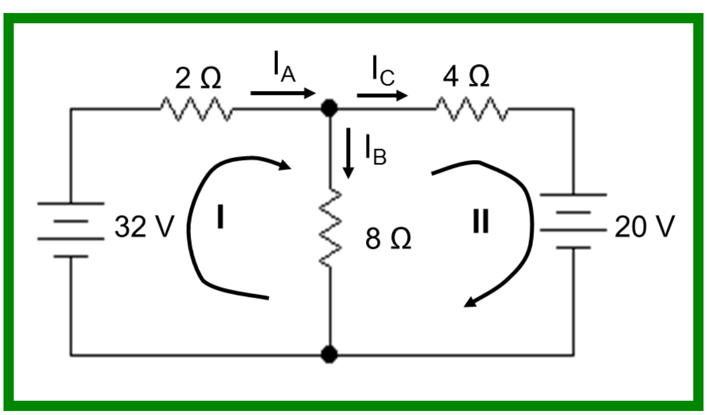
**Malla** : se define como malla a todo camino CERRADO en un circuito eléctrico.

Una red eléctrica es una combinación de impedancias y fuentes de tensión ( o corriente ) en serie o en paralelo. Las fuentes pueden ser de C.C. o C.A.

Aplicando Kirchoff se puede decir que: La suma algebraica de las caídas de potencial a lo largo de cualquier camino cerrado en una red, es nula . Es lo mismo decir que todas las caídas de tensión en las resistencias ( impedancias ) de la malla es igual a la suma de todas las fuente que hay en ella. Se hará la salvedad de que en el primer miembro se colocara la tensión en cada una de las resistencias ( impedancias ) de la malla y en el segundo miembro se colocará todas las fuentes de tensión que aparece a lo largo de la malla. Cuando una fuente se pasa de positivo a negativo su signo en el segundo miembro es NEGATIVO y cuando se pasa de negativo a positivo su signo es POSITIVO. Es decir :




**Ejemplo en C.C.** Se pide resolver el siguiente circuito aplicando el método de Mallas



Malla I : $I_1\,(2\,\Omega + 8\ \Omega\,) - I_2\ 8\,\Omega \ = \ 32$

Malla II : $-I_1\ 8\,\Omega + I_2\,(8\,\Omega + 4\,\Omega) = -20$

El planteo de estas mallas determina un sistema de ecuaciones el cual puede resolverse a través de una calculadora que resuelva ecuaciones o aplicando cualquiera de los métodos vistos para ello.

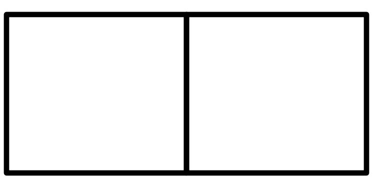
$$\begin{cases} 10\ I_1 - 8\ I_2 = 32 \\ -8\ I_1 + 12\ I_2 = -20 \end{cases}$$

$$\boxed{I_1 = 4\ Amp}$$

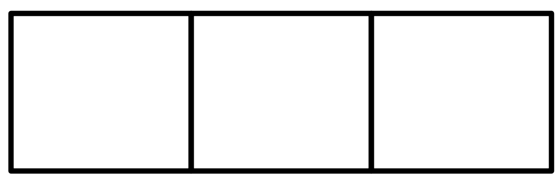
$$\boxed{I_1 = 1\ Amp}$$

El sistema de ecuaciones al que se debe llegar tendrá tantas ecuaciones como incógnitas tiene el circuito tratando de plantear el mismo número de mallas.

**Una regla para saber cuántas mallas deben plantearse es CONTAR el número de VENTANAS que aparecen a simple vista en el circuito ( siempre podrá plantearse mas mallas de las necesarias )**



A simple vista se observan DOS ventanas (también se puede tener en cuenta la externa pero no se toma)

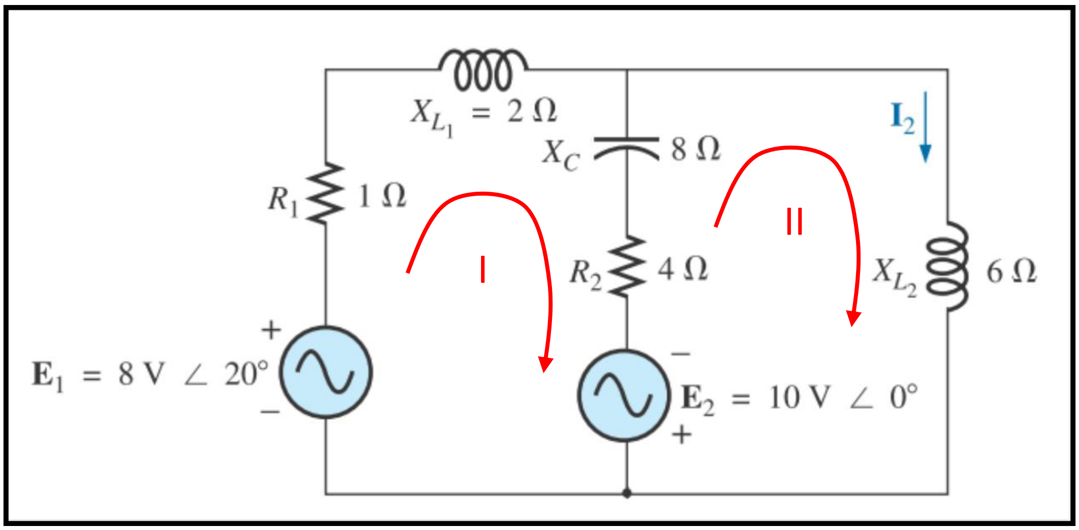


A simple vista se observan TRES ventanas (pueden tenerse en cuenta varias más pero no se toman)

Para hallar el valor de corriente que circula por cada una de las resistencias debe observarse como se relacionan en la misma los valores de mallas antes encontrados, es decir en nuestro circuito se aprecia que en la resistencia de 2 Ω solamente circula la corriente encontrada $I_1$ , en cambio por la resistencia de 8 Ω circula hacia ABAJO la corriente $I_1$ y hacia ARRIBA la corriente $I_2$ con lo cual deben restarse el valor de cada una de ellas para hallar el valor de la corriente que circula por la resistencia , el valor de la corriente que circula por la resistencia de 4 Ω es el valor de la corriente $I_2$.

$\boxed{I_A = 4 \ Amp}$ $\boxed{I_B = 3 \ Amp}$ $\boxed{I_C = 1 \ Amp}$

**Ejemplo en C.A.** Aplicando el método de mallas al siguiente circuito encuentre el valor de la corriente $I_2$.




**[Boylestad, 2011]**

$$[(1 + j2) + (4 - j8)]\, I_1 - (4 - j8)\, I_2 = 8 \angle 20° + 10 \angle 0°$$

$$-(4 - j8)\, I_1 + [(4 - j8) + j\,6]\, I_2 = -10 \angle 0°$$

Agrupando los reales y los imaginarios y pasando a la forma binómica se llega:

$$(5 - j6)\, I_1 + (-4 + j8)\, I_2 = 17{,}52 + j\ 2{,}74$$

$$(-4 + j8)\, I_1 + (4 - j2)\, I_2 = -10 + j\,0$$

El valor de la corriente $I_2$ está dado por :

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 - j6 & 17{,}52 + j2{,}74 \\ -4 + j8 & -10 + j0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 - j6 & -4 + j8 \\ -4 + j8 & 4 - j2 \end{vmatrix}} = \frac{42 - j\,69{,}2}{56 + j\,30}$$

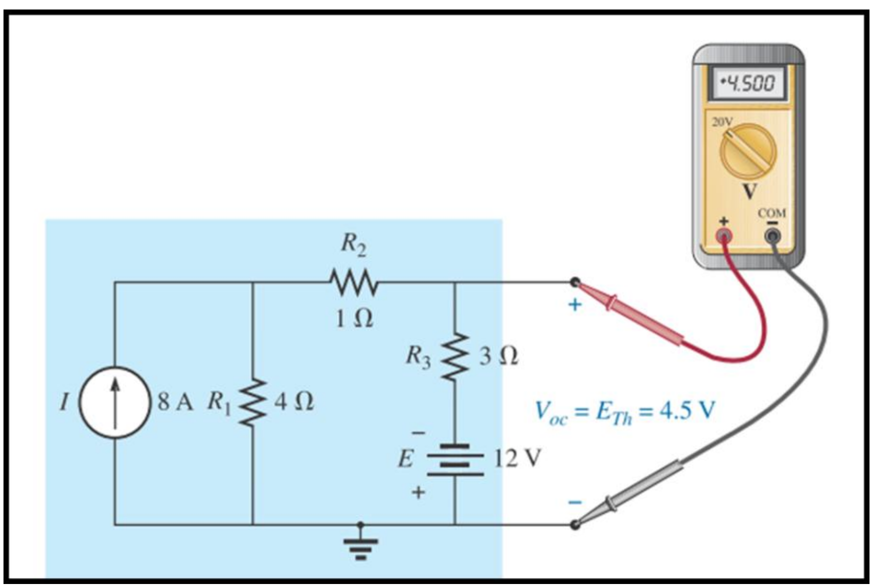
$$\boxed{I_2 = 0{,}068 - j\,1{,}27 = 1{,}27 \angle 273{,}07°}$$

## 6.2.3 Teoremas para la resolución de circuitos.

### 6.2.3.1 *Teorema de Thevenin*

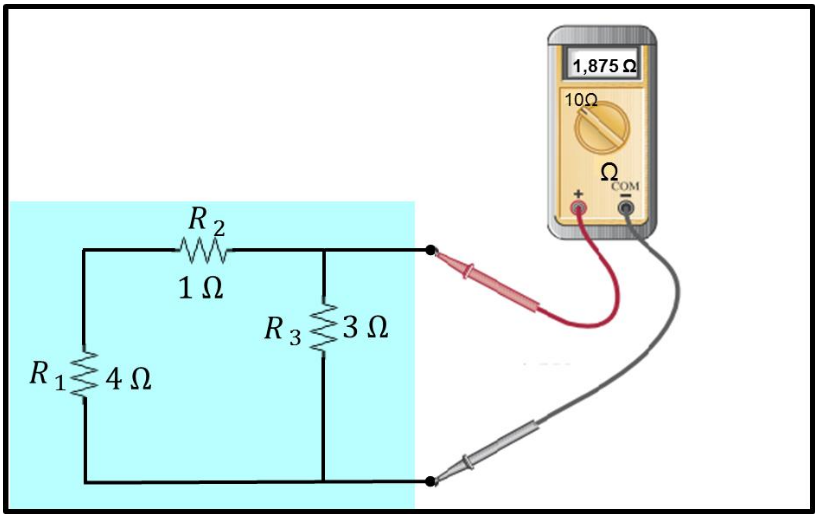
Todo circuito lineal y pasivo con dos terminales de salida puede ser reemplazado por un circuito equivalente de Thevenin formado por una fuente de tensión y una impedancia en serie.

El valor de la fuente de tensión es el que se mediría con un voltímetro en los bornes de salida a circuito abierto , esto es sin admitancia de carga.




[Boylestad, 2011]

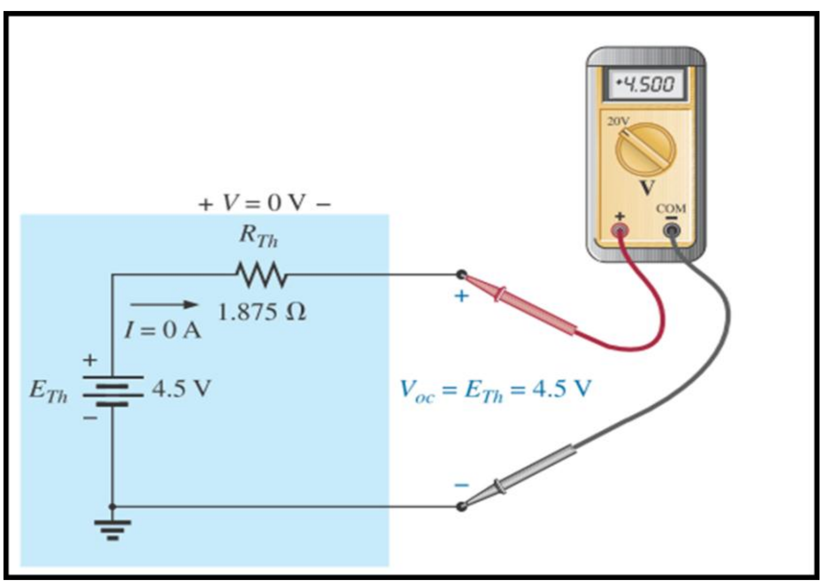
La impedancia en serie es la que se mide en los terminales de salida cuando todas las fuentes generadoras ( tensión y corriente ) son reemplazadas por su impedancia interna.




[Boylestad, 2011]

Es de hacer notar que en la CARGA solamente se cumple que la potencia puesta en juego es la misma en el circuito original y en el equivalente. No se cumple para las demás partes del circuito.

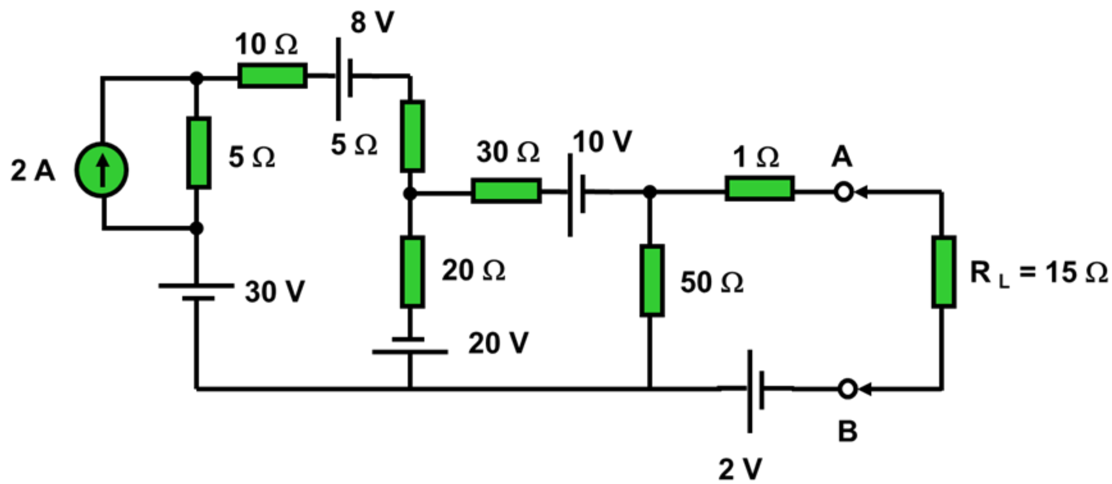
El circuito equivalente al circuito original es :



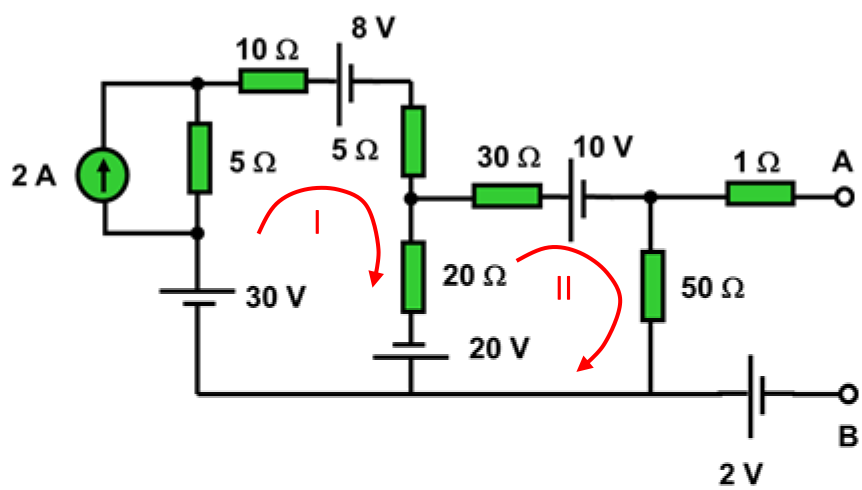

[Boylestad, 2011]

En forma teórica se resuelve el circuito **EXTRAYENDO** la resistencia de carga ( es aquella en donde se desea sustituir al circuito original )

**Ejemplo :** Hallar el equivalente de Thevenin para el siguiente circuito.




Debe extraerse la resistencia de 15 ohms y determinar la tensión entre los extremos A- B.




A simple vista se observan 3 ventanas ( la de la derecha no lo es dado a que esta ABIERTA )

La izquierda superior tampoco se tiene en cuenta ya que la corriente que circula por dicha malla es conocida y vale 2 Amp.

Tomando sentido HORARIO al recorrido de la malla puede escribirse el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} 40\ I_1\ -\ 20\ I_2\ -\ 2\,Amp\ .\ 5\ =\ 30\ -\ 8\ +\ 20 \\ -\ 20\ I_1\ +\ 100\ I_2\ =\ -\ 20\ -\ 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 40\ I_1\ -\ 20\ I_2\ =\ 52 \\ -\ 20\ I_1\ +\ 100\ I_2\ =\ -30 \end{cases} \quad \begin{matrix} I_1\ =\ 1{,}27\ Amp \\ \boxed{I_2\ =\ -0{,}044\ Amp} \end{matrix}$$

Solamente se toma el valor de $\boxed{I_2\ =\ -0{,}044\ Amp}$ ya que es la que interesa para averiguar la tensión entre los puntos A y B.

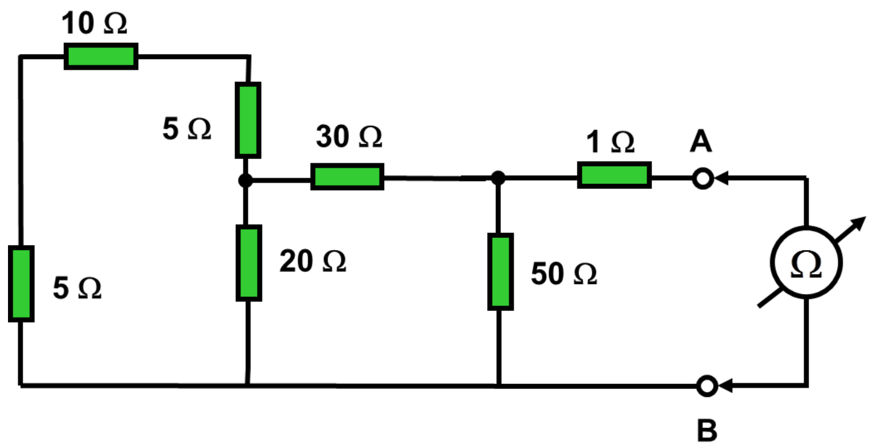
Al tener signo negativo indica que el entido asignado es contrario a real.

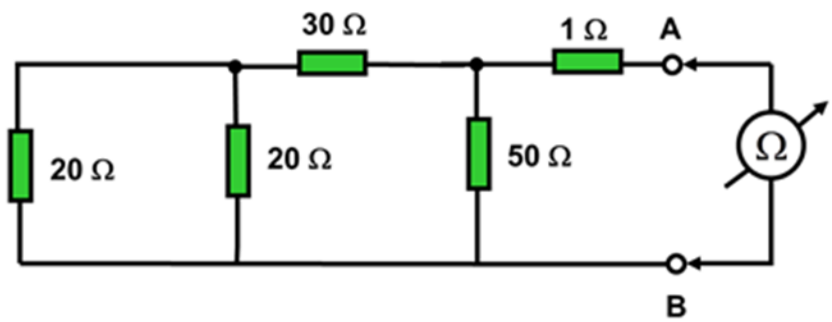
$I\ =\ 0\ \ 0{,}044\ Amp$

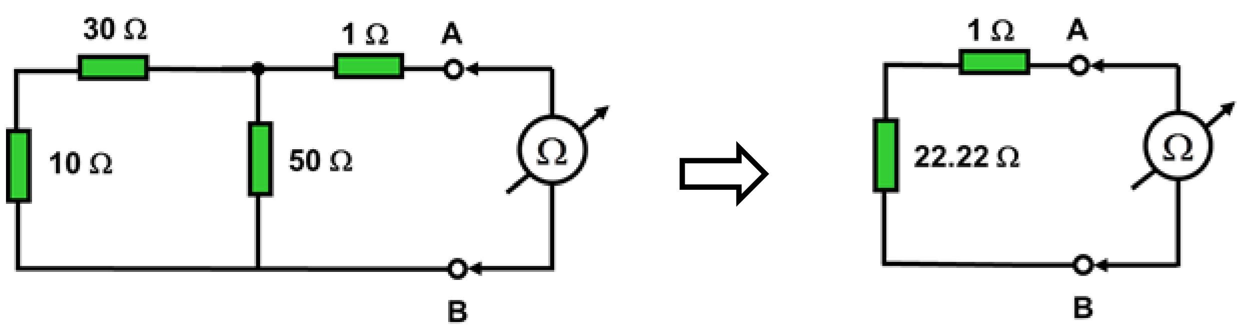

$$0\ \ 0{,}044\,Amp\ .\ 50\ \ \Omega\ \ =\ \ 2{,}22\ \ V$$

La tensión de Thevenin entonces es : $\boxed{V_{TH}\ =\ 2{,}22\ V\ -\ 2\ V\ =\ 0{,}22\,Volts}$

Encontremos ahora la resistencia de Thevenin. Para ello reemplazamos a todas las fuentes por su resistencia interna. Con ello el circuito queda :




Como puede observarse la resistencia de Thevenin es : $\boxed{R_{TH} = 23,22\ \Omega}$

Este circuito tambien puede ser resuelto aplicando otro teorema denominado :

### 6.2.3.2 *Teorema de Superposición*

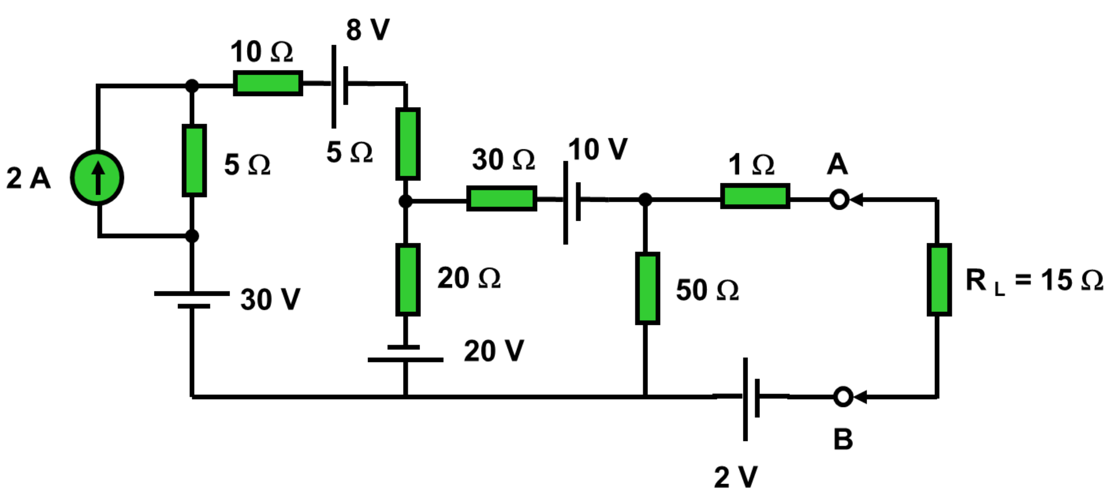
"Todo circuito compuesto por componentes lineales y fuentes de tensión y corriente, se puede resolver determinando las corrientes, en tantos circuitos como fuentes de tensión o corriente posean, de tal manera que cada una de ellas disponga de solamente una sola fuente de corriente o de tensión con el resto desactivadas. Una vez obtenidas las corrientes de cada malla, posteriormente se superpondrán los circuitos determinados con los sentidos de las corrientes obtenidas, sumándose algebraicamente para cada caso, obteniéndose de esta manera las corrientes definitivas con su sentido"

Los pasos que deben seguirse para aplicar a un circuito este teorema son:

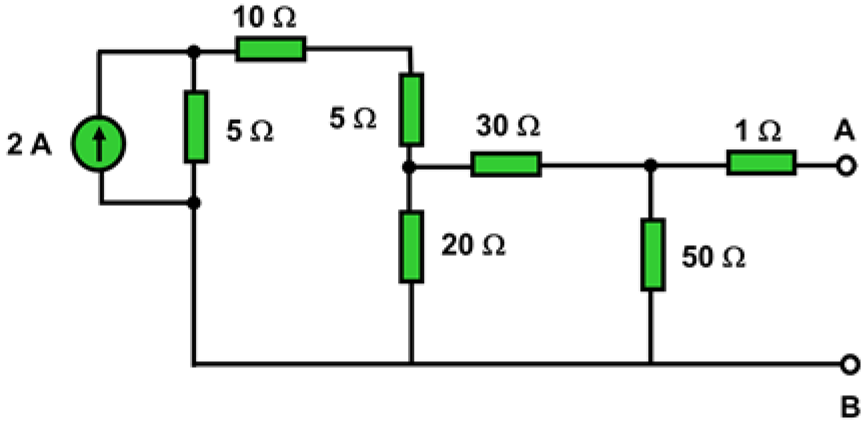
1. Eliminar todos los generadores independientes menos uno y hallar la respuesta debida solamente a dicho generador.
2. Repetir el primer paso para cada uno de los generadores independientes que haya en el circuito.
3. Sumar las repuestas parciales obtenidas para cada generador.

Los generadores independientes de tensión se anulan cortocircuitándolos (así se impone la condición de tensión generada nula), mientras que los de corriente se anulan abriendo el circuito (corriente nula).

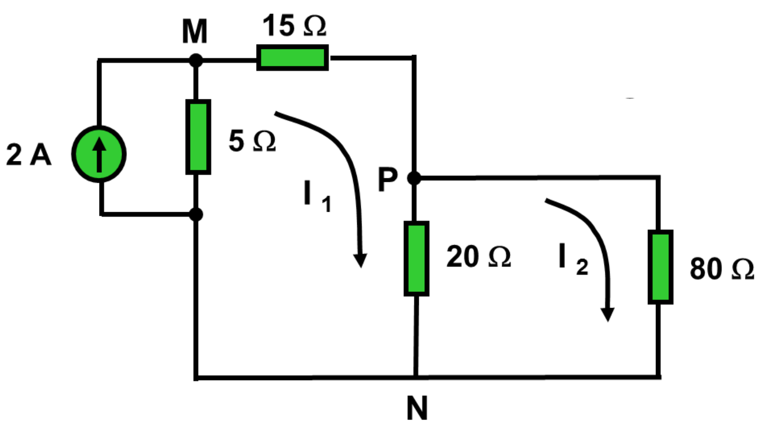
Resolver el mismo circuito anterior aplicando el teorema de superposición

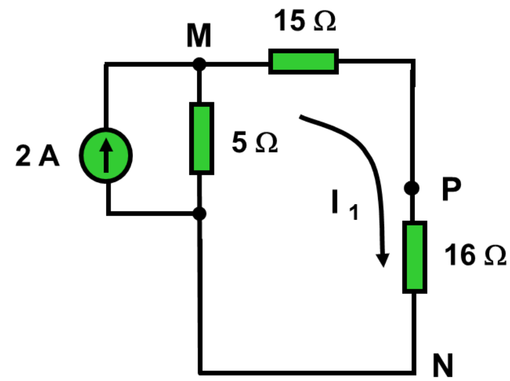


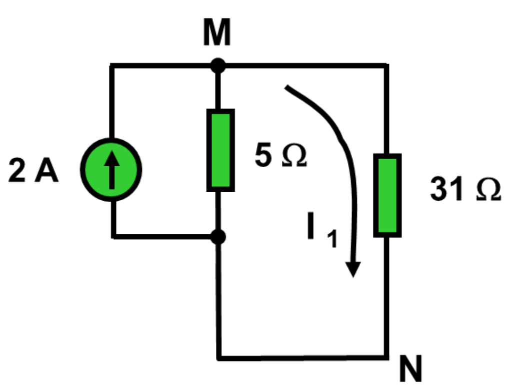

Se comienza con la fuente de corriente en estado activa y las de tensiones desactivadas.

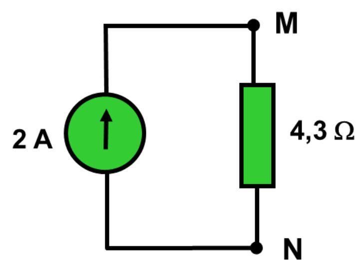



Como se aprecia en el circuito la tensión en los puntos A y B se encontrará obteniendo la tensión en los extremos de la resistencia de 50 Ω por lo que hace falta hallar la corriente que circula por dicha resistencia. Haciendo algunas simplificaciones en el circuito se tiene :




En esta figura puede verse que la tensión en los extremos de la resistencia es:

$$V_{MN} = 2\ Amp\ .4{,}306\,\Omega = 8{,}612\,Volts$$

La corriente $I_1$ esta dada por :

$$I_2 = \frac{V_{MN}}{31\,\Omega} = 0{,}278\ Amp$$

La tensión en P-N en la Figura 2 entonces es:

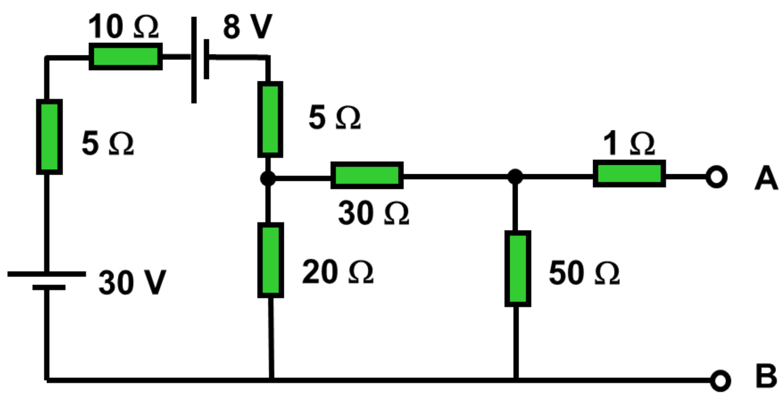
$$V_{PN} = 0{,}278\ Amp\ .\ 16\,\Omega = 4{,}44 Volts$$

La corriente $I_2$ esta dada por :

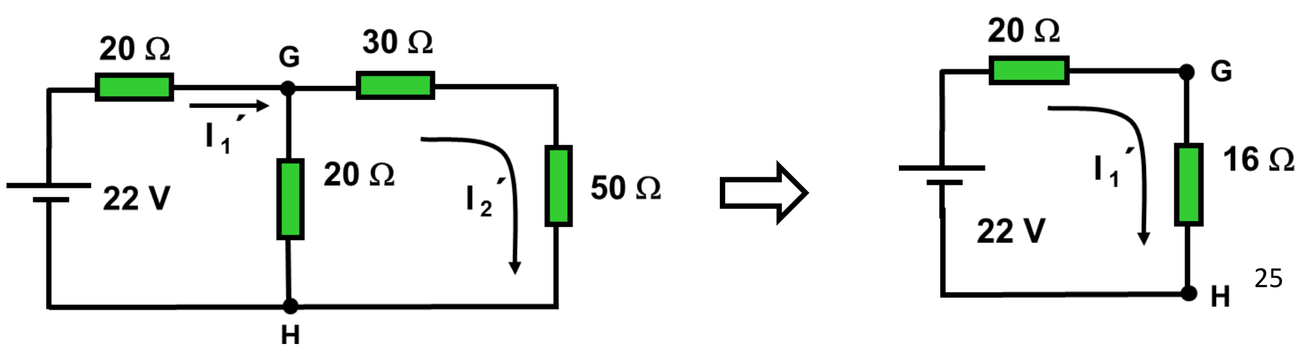
$$\boxed{I_2 = \frac{V_{PN}}{80\,\Omega} = 0{,}0556\ Amp} \downarrow$$

( circula hacia abajo )

Desactivando ahora la fuente de corriente y activando las fuentes de 8 Volts y de 30 Volts que están en la MISMA rama se tiene :




Reagrupando se llega a:



De la última figura se obtiene :

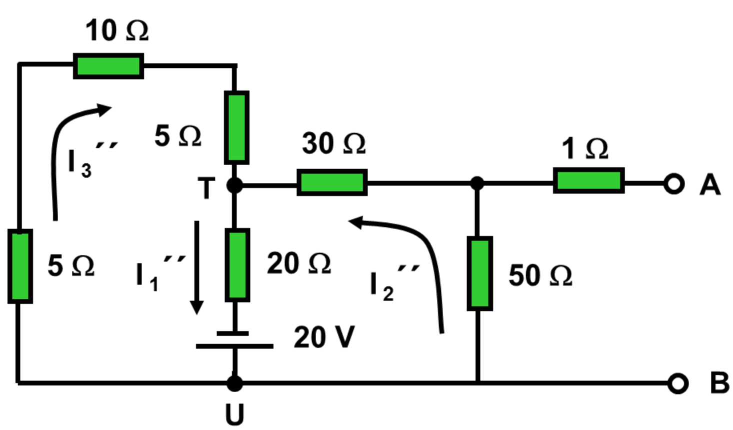
$$I_1^{'} \;=\; \frac{22\ Volts}{36\ \Omega} \;=\; 0{,}6111\ \ Amp \quad \Rightarrow \quad V_{GH} \;=\; 0{,}6111\ \ Amp\ .\ 16\,\Omega \;=\; 9{,}777\,Volts$$

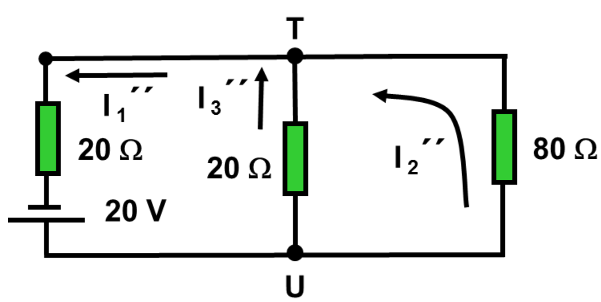
De la anterioro figura se encuentra :

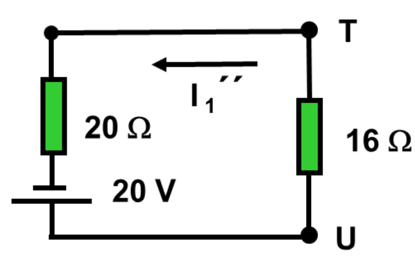
$$\boxed{I_2^{'} \;=\; \frac{V_{GH}}{80\ \Omega} \;=\; 0{,}1222\ \ Amp} \quad \downarrow$$

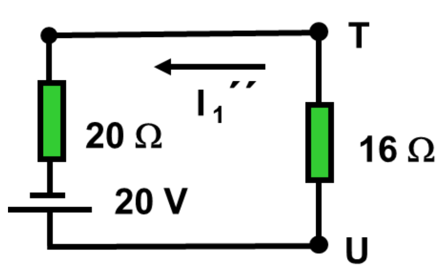
( circula hacia abajo )

Activando ahora la fuente de 20 Volts y desactivando las demás se tiene :




$$I_1^{''} \;=\; \frac{20\ Volts}{36\ \Omega} \;=\; 0{,}555\ \ Amp$$

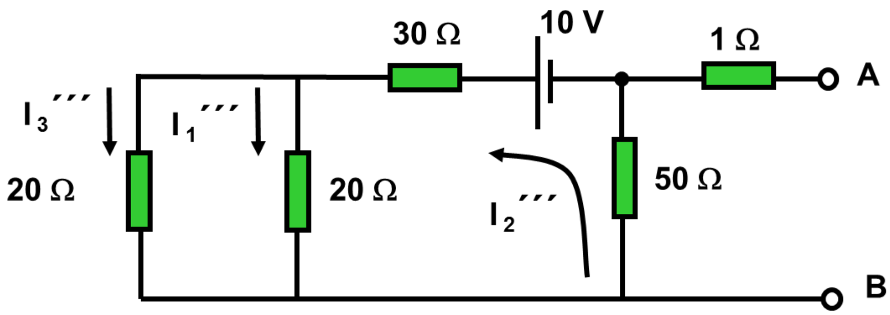
$$\Downarrow$$

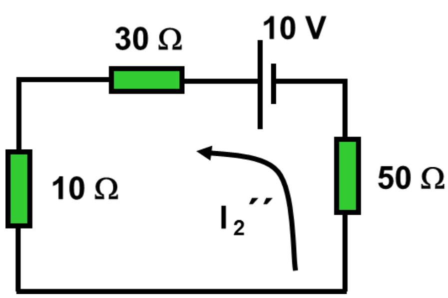
$$V_{UT} \;=\; 0{,}555\ \ Amp\ .\ 16\,\Omega \;=\; 8{,}888\,Volts$$

$$\boxed{I_2^{''} = \frac{V_{UT}}{80\ \Omega} = 0{,}111\ Amp}$$

( circula hacia arriba )

Finalmente activando la fuente de 10 volts queda :




$$\boxed{I_2^{'''} = \frac{10\,Volts}{90\ \Omega} = 0{,}111\ Amp}$$

( circula hacia arriba )

Aplicando el teorema de superposición se obtiene la corriente total que circula por la resistencia de 50 Ω. Esto es:

$$I_{2T} = I_2 + I_2^{'} - I_2^{''} - I_2^{'''}$$

Se denota con el signo menos a aquellas corrientes que circulan de abajo hacia arriba por la resistencia.

$$I_{2T} = 0{,}0556\ Amp + 0{,}1222\ Amp - 0{,}111\ Amp - 0{,}111\ Amp = -0{,}044\,Amp$$

El signo menos indica que la corriente por la resistencia circula de abajo hacia arriba y su valor es :

$$\boxed{I_{2T} = 0{,}044 \ Amp}$$

( circula hacia arriba )

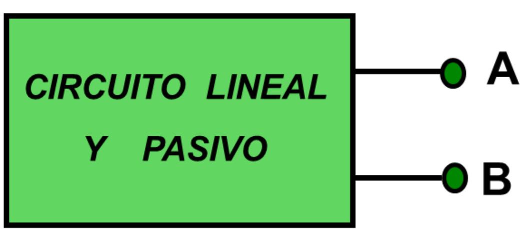
Este valor ya se había encontrado en el ejercicio anterior aplicando el método de mallas.

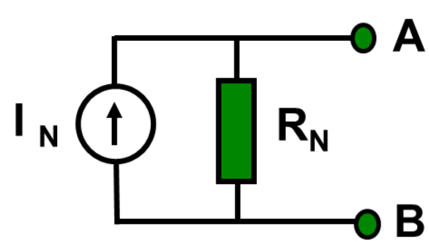
### 6.2.3.3 *Teorema de Norton*

Todo circuito lineal y pasivo con dos terminales de salida puede ser reemplazado por un circuito equivalente de Norton formado por una fuente de corriente y una resistencia en paralelo.

El valor de la fuente de corriente tanto sea de C.C. como de C.A. es el que se mediría con un amperímetro en los bornes de salida a circuito abierto , esto es sin resistencia de carga.

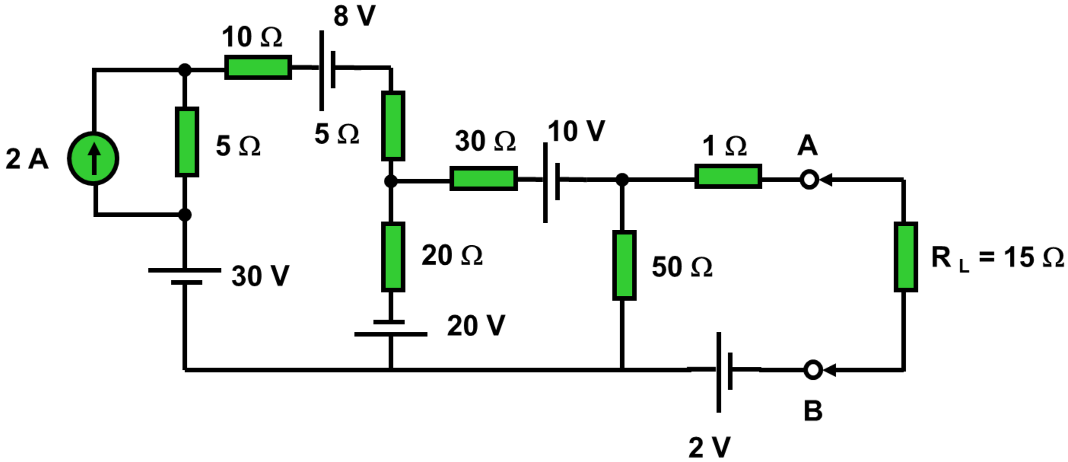
La resistencia en paralelo es la que se mide en los terminales de salida cuando todas las fuentes generadoras ( tensión y corriente ) son reemplazadas por su resistencia interna.



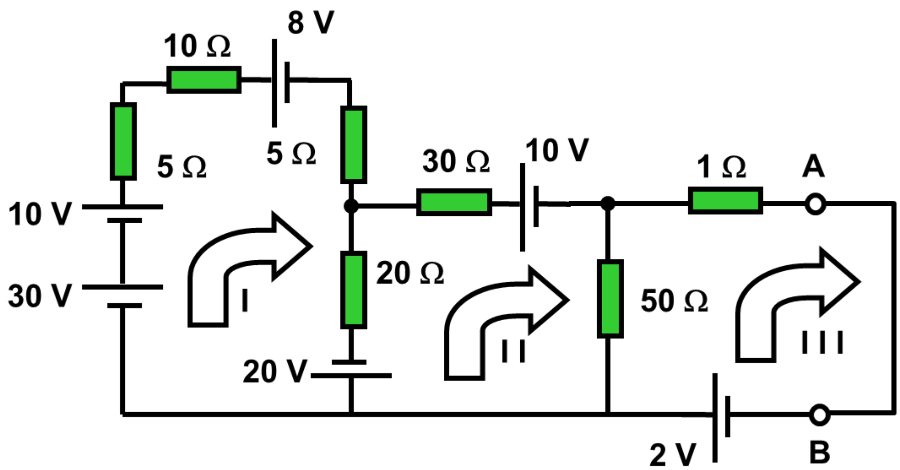




Es de hacer notar que en la CARGA solamente se cumple que la potencia puesta en juego es la misma en el circuito original y en el equivalente. No se cumple para las demás partes del circuito.

Ejercicio : Hallar el equivalente de Norton para el circuito ya estudiado.




Reemplazando la fuente de corriente por una de tensión ( equivalencia entre fuente de tensión y corriente ) y cortocircuitando la salida se tiene:




$$\begin{cases} 40\ I_1 - 20\ I_2 + 0\ I_3 = 52 \\ -20\ I_1 + 100\ I_2 - 50\ I_3 = -30 \\ 0\ I_1 - 50\ I_2 + 51\ I_3 = 2 \end{cases}$$

Por cualquier método se resuelve este sistema y el valor para la corriente $I_3$ es el valor de la corriente de Norton bascada.

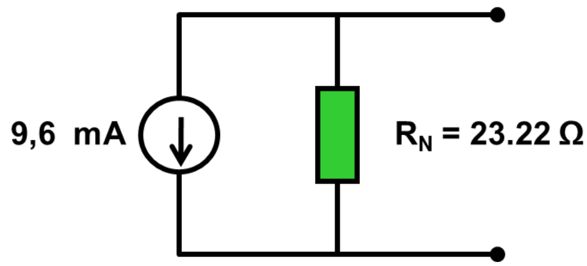
$$\boxed{I_N = -0{,}0096\ Amp}$$

El signo negativo significa que la corriente circula en sentido opuesto al dado en un principio y su valor es de 9,6 mA.

Se sabe que la resistencia equivalente se saca de la misma manera que en Thevenin por lo que su valor ya lo tenemos y es :

$$\boxed{R_N = 23,22\,\Omega}$$

El circuito equivalente en los terminales de salida entonces es :




De teoría se sabe que existe una equivalencia entre fuente de tensión y de corriente que es aplicada entre estos teoremas, es decir que encontrando el equivalente de Thevenin se encuentra el de Norton de la siguiente manera :

$$I_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} = \frac{0{,}22\,Volts}{23{,}22\ \Omega} = 0{,}0095\,Amp \cong 9{,}6\,mA$$

De igual manera si se encuentra primero el equivalente de Norton se puede hallar el equivalente de Thevenin de la siguiente manera :

$$V_{TH} = I_N \,.\, R_{TH} = 9{,}6\,mA \,.\, 23{,}22\ \Omega = 0{,}22\,Volts$$

## 6.2.3.3.1 Preguntas de autoevaluación

12) ¿Qué dice el enunciado del teorema de Thevenin?

13) ¿Qué dice el principio superposición en redes eléctricas?

14) ¿Cuándo se aplica el método de superposición?

18) ¿Qué dice el enunciado del teorema de Norton?

19) ¿Cuál es la equivalencia entre los sistemas asociados por el teorema de Thevenin y Nortor?

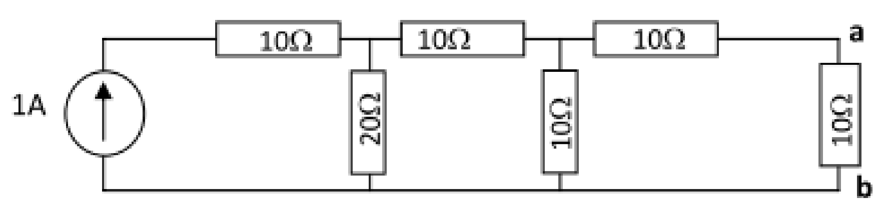
20) ¿La resistencia de Thevenin es distinta a la de Norton?

21) ¿La potencia disipada en el circuito es igual a la disipada en el circuito equivalente asociados por el teorema de Thevenin y Nortor?

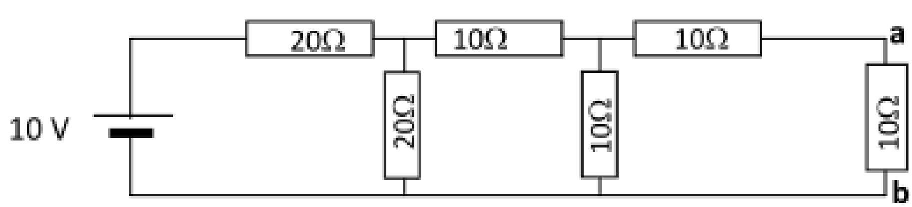
22) ¿En donde las potencias son iguales en los circuitos asociados por el teorema de Thevenin y Norton?

### 6.2.3.3.2 Ejercicios propuestos

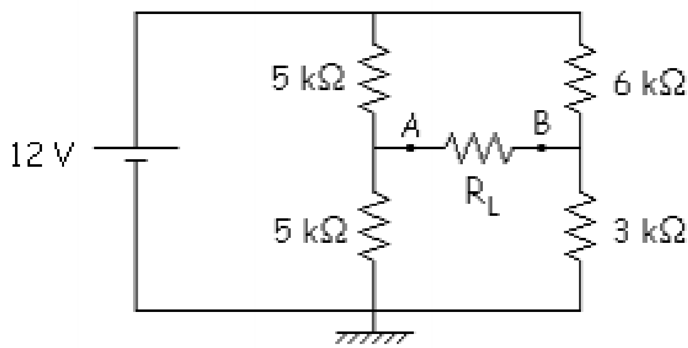
3) Aplique el teorema de Thévenin en la rama " ab " del circuito de la figura:



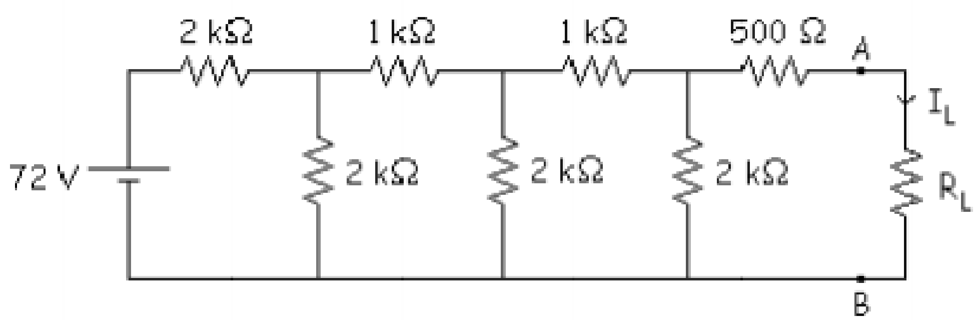

4) En el circuito que se dibuja a continuación aplique Norton en la rama ab:



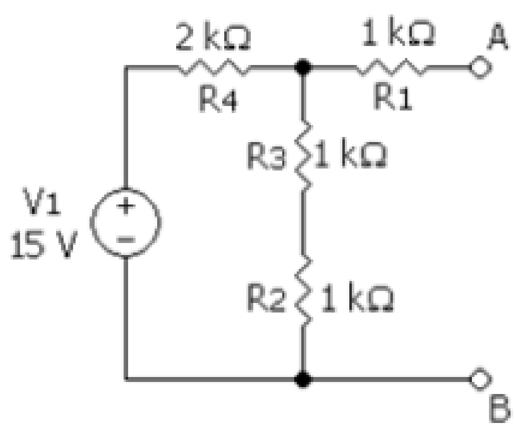
5) Calcular el equivalente de Thevenin en A-B del siguiente circuito. Obtener el equivalente Norton a partir del Thevenin.



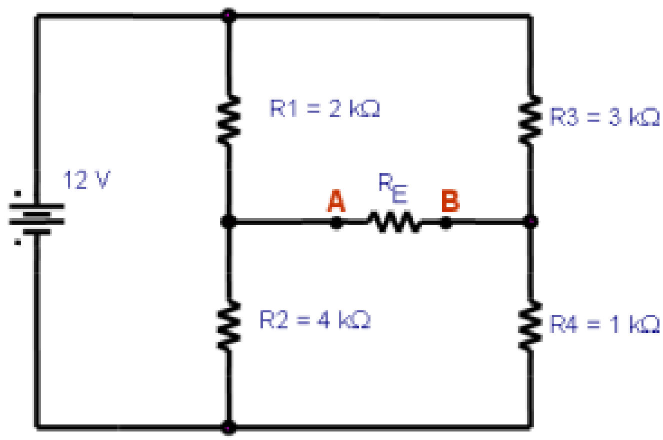

6) Calcular el equivalente de Norton en A.B del siguiente circuito. Obtener el equivalente de Thevenin. Verificar los resultados obtenidos aplicando equivalencias.



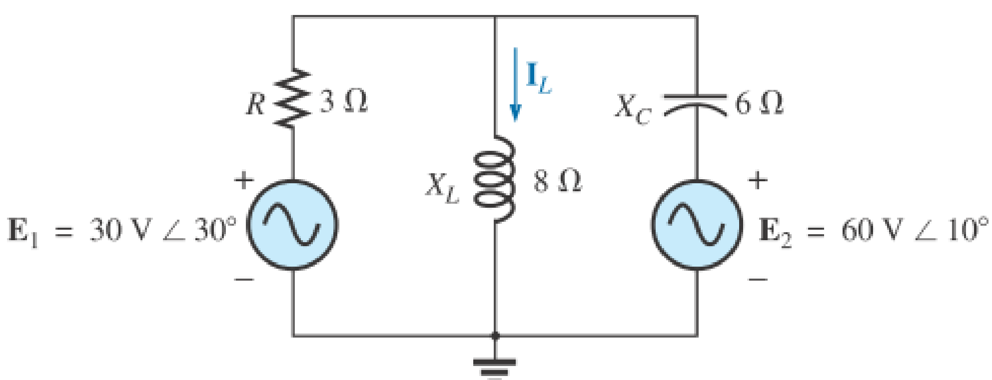

7) Calcular el equivalente de Thevenin del siguiente circuito. Obtener el equivalente de Norton. Verificar los resultados obtenidos aplicando equivalencias.



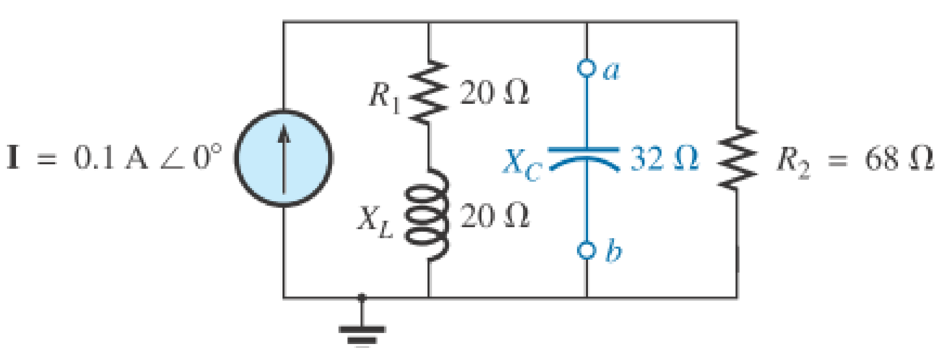
8) Calcular el equivalente de Thevenin del siguiente circuito. Obtener el equivalente Norton a partir del Thevenin.



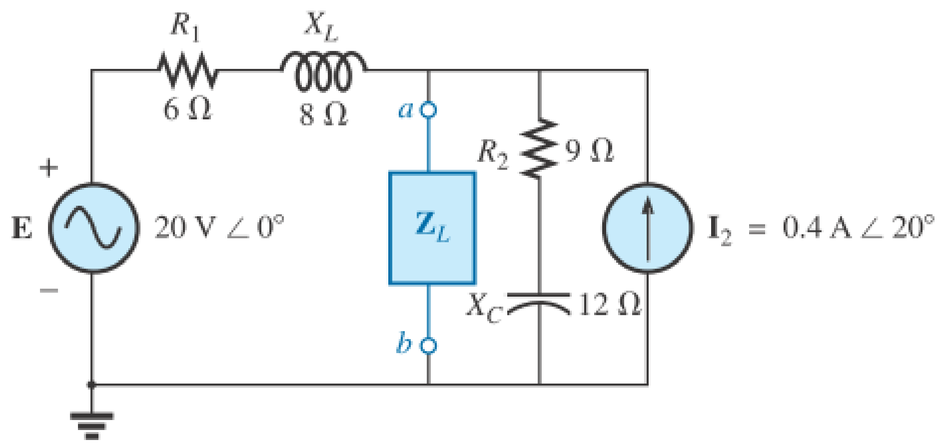

9) Por medio de superposición, determine la corriente a través de la inductancia $X_L$ en la red de la siguiente figura:




10) Determine el circuito equivalente de Thévenin para la parte de la red entre los puntos a y b.

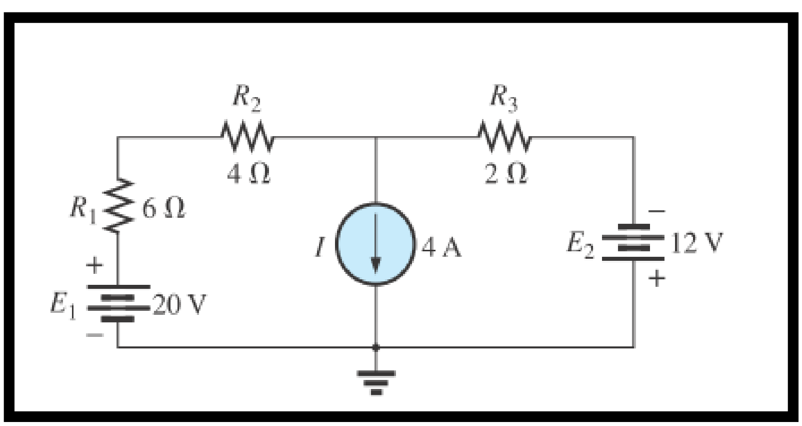


11) Determine el circuito equivalente de Norton entre los puntos a y b.




## 6.2.3.4 *Método de SUPERMALLA*

Hay veces en que una fuente de corriente esta en una rama sin su resistencia en paralelo por lo cual no se la puede convertir en una fuente de tensión ni se puede decir que la corriente que pasa por las mallas que comparten a esta fuente circule la corriente de la misma. Un caso como este es el del siguiente circuito.

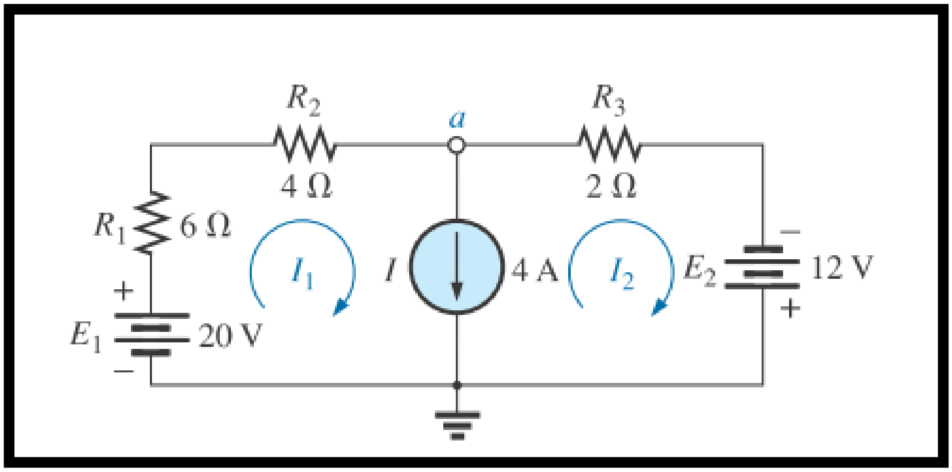



**[Boylestad, 2011]**

- El método consiste en asignar a cada malla su corriente de malla como se analizó en los circuitos anteriores.
- Posteriormente reemplace la fuente de corriente por su resistencia interna ( infinito ) es decir saque la fuente del circuito.
- Aplique el método de mallas visto al circuito sin la fuente de corriente.

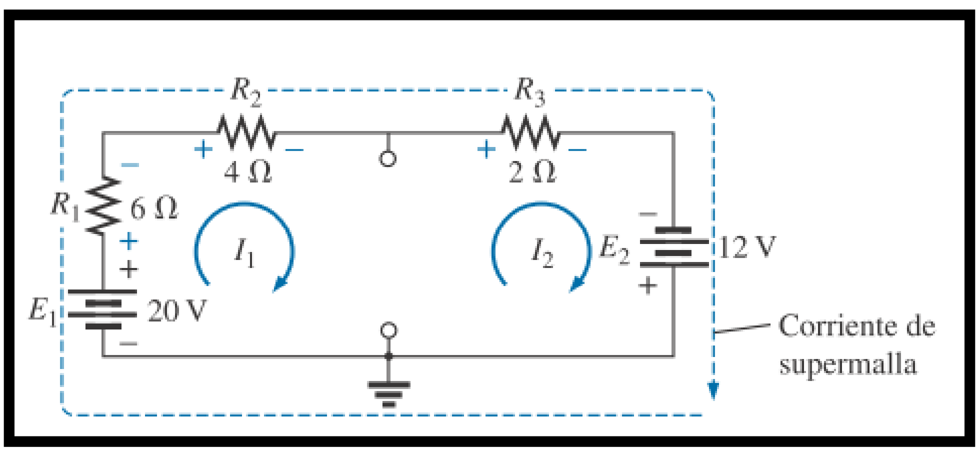
- Relacione la corriente de súper malla con las corriente de las mallas individuales.

Para resolver el circuito se reuelve aplicando los pasos antes mencionados. Se asignan las corrientes $I_1$ e $I_2$ en ambas mallas.




[Boylestad, 2011]

Reemplazando a la fuente de corriente por su resistencia interna y planteando la malla correspondiente se encuentra la « corriente de súper malla"




[Boylestad, 2011]

Aplicando mallas a este último circuito se tiene :

$$10\ I_1 + 2\ I_2 = 32$$

Relacionando las corrientes de cada malla con la corriente de la fuente se tiene:

$$I_1 - \ I_2 = 4$$

Entonces queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} 10\ I_1 + 2\ I_2 = 32 \\ I_1 - \ I_2 = 4 \end{cases}$$

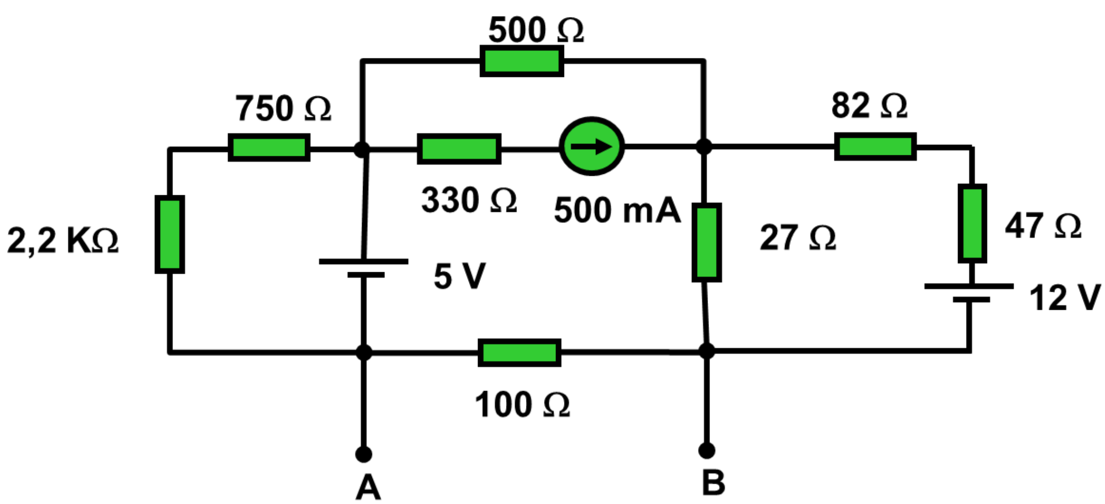
Cuyo resultado es :

$$\boxed{I_1 = 3{,}33\ Amp}$$

$$\boxed{I_2 = -0{,}67\ Amp}$$

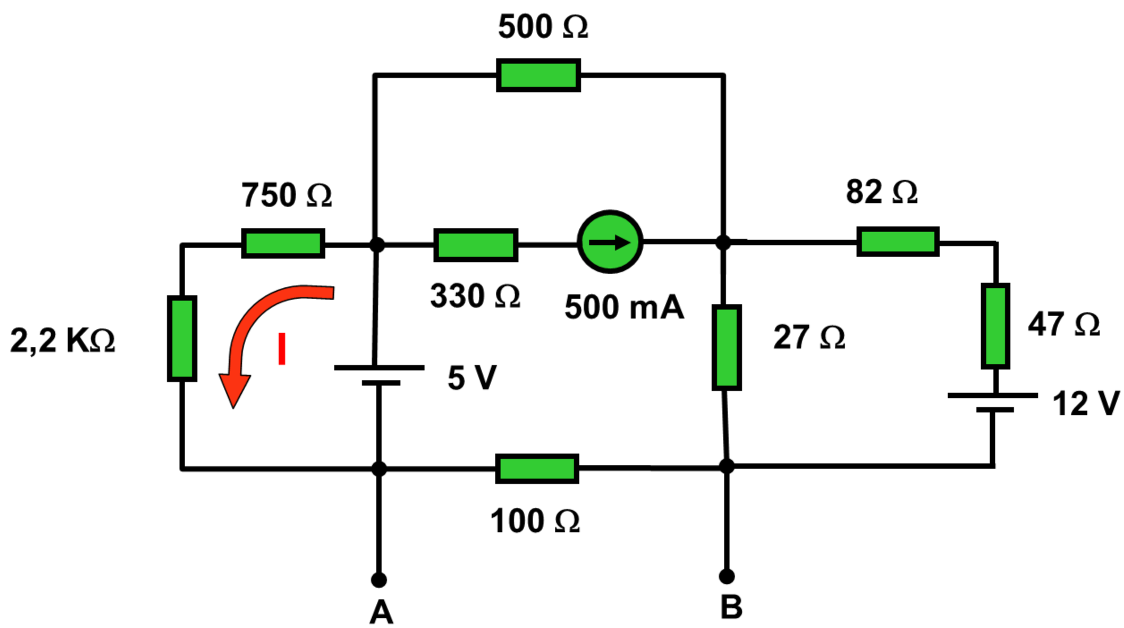
Llegando a la conclusión que el sentido que se adoptó para la corriente $I_2$ es en sentido opuesto al que circula realmente.

Ejemplo : Calcule el equivalente de Thevenin entre los puntos A-B. Verifíquelo con una RL = 1 KΩ




En este circuito hay dos cosas fundamentales a tener en cuenta :

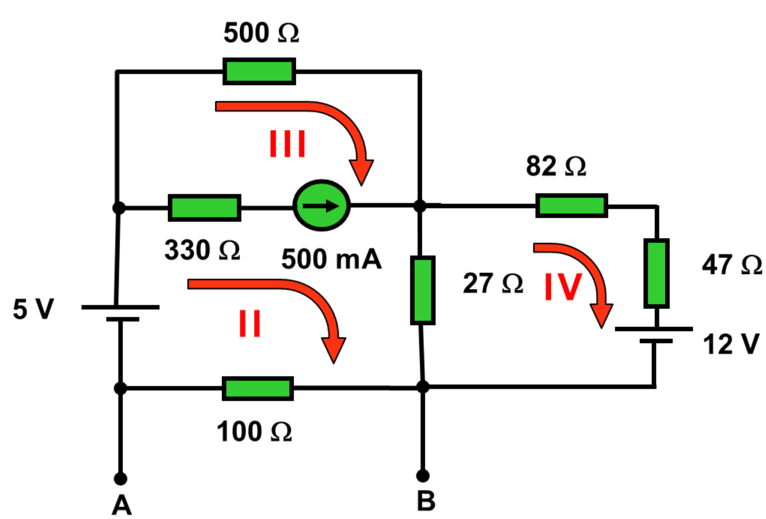
- En la malla de la izquierda se ve que la corriente por dicha malla es fácil de calcular ya que la corriente se calcula por ley de Ohm



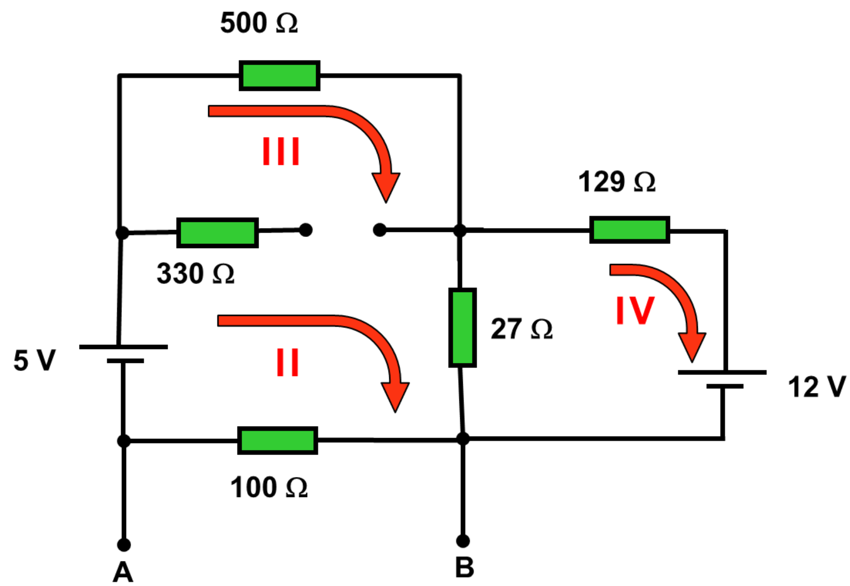

$$I = \frac{5 \ Volts}{2950 \ \Omega} = 1{,}695 \ mAmp$$

- Para solucionar el problema de que dos mallas comparten la fuente de corriente debe plantearse el concepto de SUPER MALLA reemplazando la fuente de corriente por su resistencia equivalente.

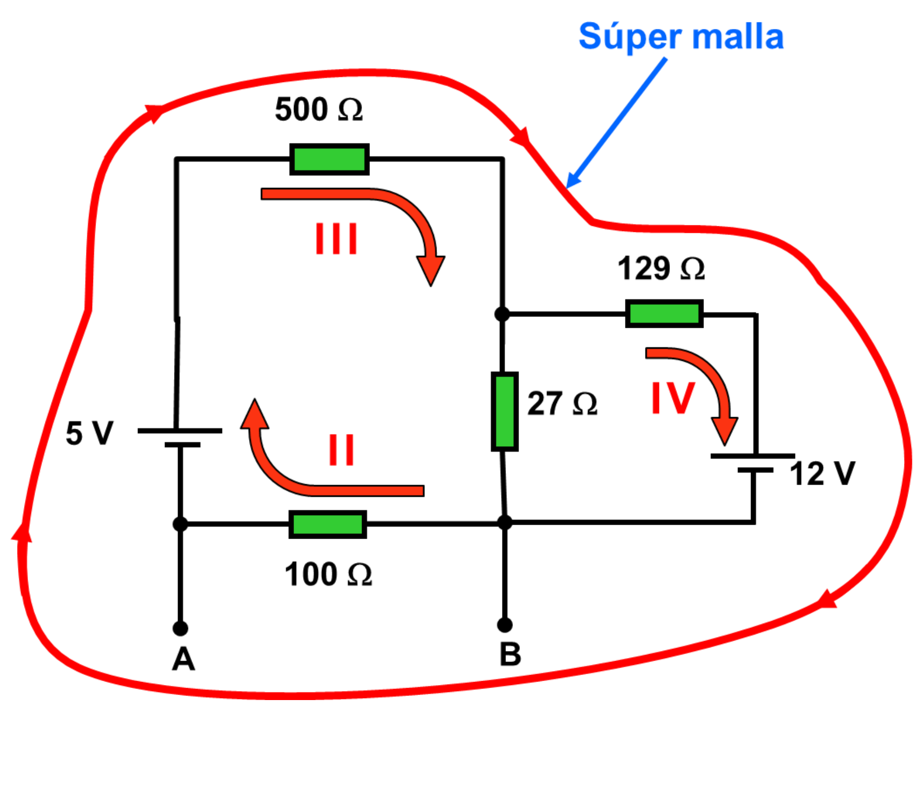
Al haber encontrado ya la corriente de la malla de la izquierda puede eliminarse de dicho circuito quedando :



Al reemplazar la fuente por su resistencia el circuito queda :




La súper malla se plantea por la parte externa del circuito como se observa en la próxima figura.




Entonces la ecuación de la súper malla está dada por:

$$100\ I_2 + 500\ I_3 + 129\ I_4 = -12 + 5$$

Queda ahora la ecuación de la malla IV que está dada por :

$$-27\ I_2 + 0\ I_3 + 156\ I_4 = -12$$

La ecuación que se plantea en la rama en la que se encuentra la fuente de corriente compartida por ambas mallas es :

$$I_2 - I_3 = 500\ mA$$

Entonces el sistema de ecuaciones correspondiente es :

$$\begin{cases} 100\ I_2 + 500\ I_3 + 129\ I_4 = -12 + 5 \\ -27\ I_2 + 0\ I_3 + 156\ I_4 = -12 \\ I_2 - I_3 = 500\ mA \end{cases}$$

El sistema así planteado finalmente queda :

$$\begin{cases} 100\ I_2 + 500\ I_3 + 129\ I_4 = -7 \\ -27\ I_2 + 0\ I_3 + 156\ I_4 = -12 \\ I_2 - I_3 + 0\ I_4 = 0{,}5 \end{cases}$$

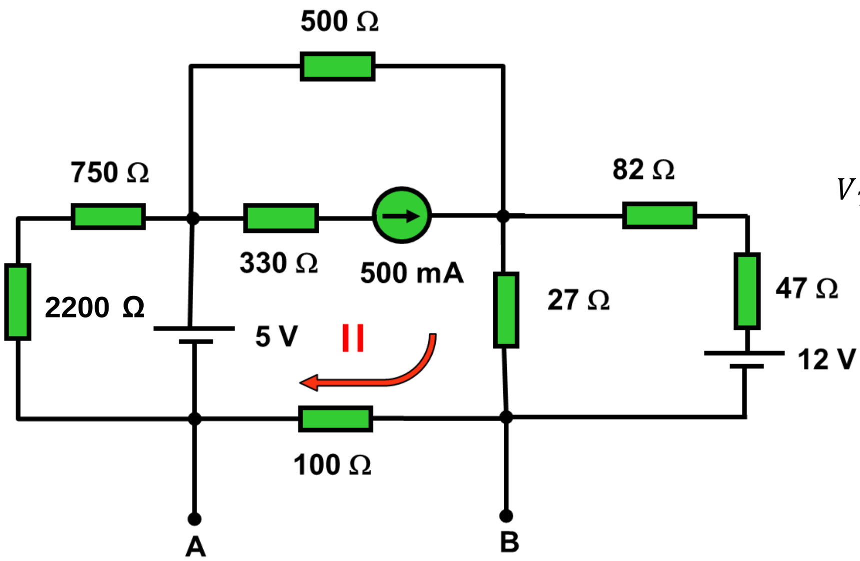
Cuyas soluciones son :

$$\boxed{I_2 = 0{,}4064\ Amp}$$

$$\boxed{I_3 = -0{,}0936\ Amp}$$

$$\boxed{I_4 = -0{,}0066\ Amp}$$

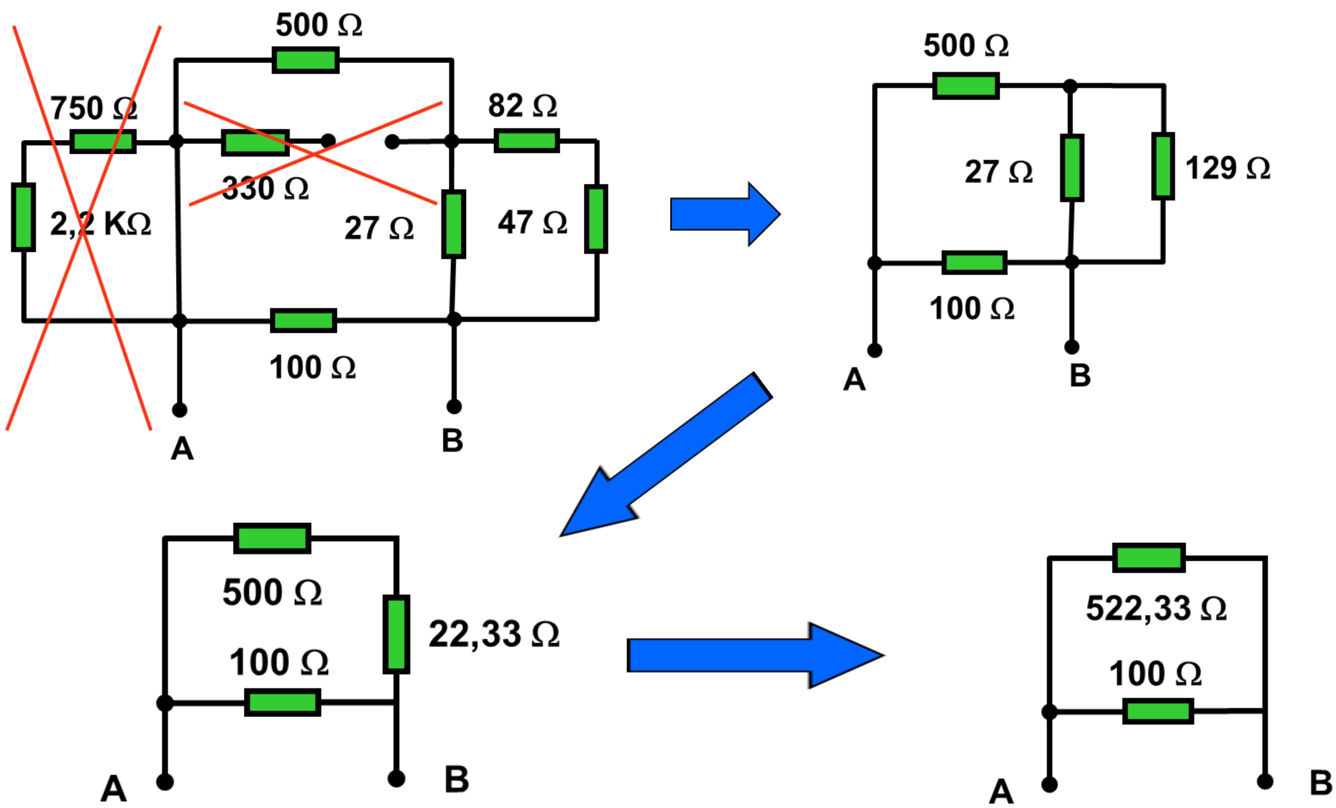
La tensión de Thevenin esta dada por :




$$V_{TH} = 0{,}4064\ Amp\ .\ 100\ \Omega$$

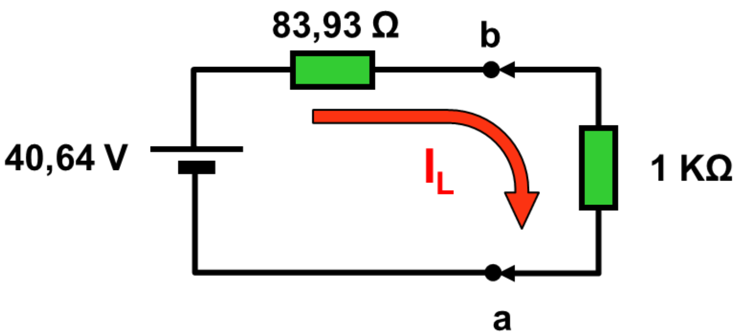
$$\boxed{V_{TH} = 40{,}64\ Volts}$$

El valor de la resistencia de Thevenin se calcula como :




$$\boxed{R_{TH} = 83{,}93\ \Omega}$$

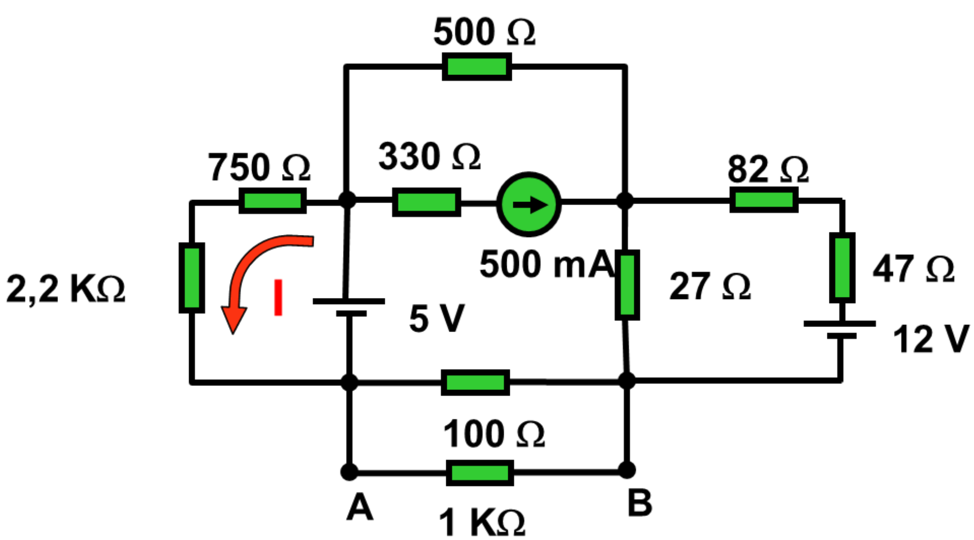
El equivalente de Thevenin entonces es :

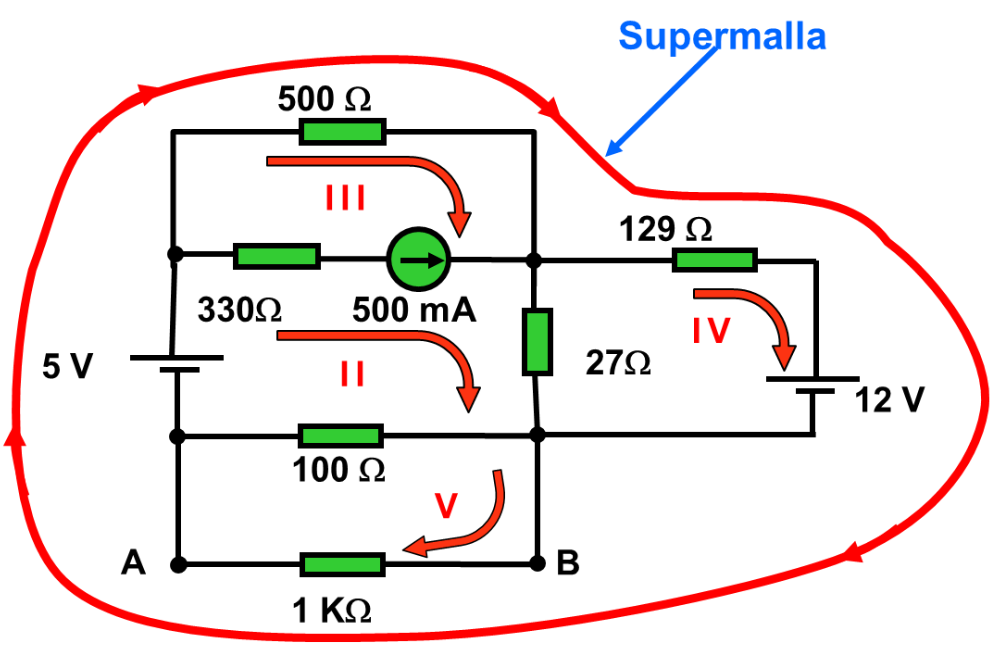



$$I_L = \frac{40{,}64\,Volts}{1083{,}93\,\Omega}$$

$$\boxed{I_L = 37{,}49\,mA}$$

Para verificar si lo encontrado es realmente equivalente debe encontrarse el valor de la corriente que circula por la resistencia de caga de 1 KΩ.



$$\begin{cases} 500\ I_3 + 129\ I_4 + 1000\, I_5 = -7 \\ -27\ I_2 + 156\ I_4 = -12 \\ -100\ I_2 + 1100\ I_5 = 0 \\ I_2 - I_3 = 0{,}5 \end{cases}$$

Completado el sistema queda :

$$\begin{cases} 0\ I_2 + 500\ I_3 + 129\ I_4 + 1000\, I_5 = -7 \\ -27\ I_2 + 0\ I_3 + 156\ I_4 + 0\ I_5 = -12 \\ -100\ I_2 + 0\ I_3 + 0\ I_4 + 1100\ I_5 = 0 \\ I_2 - I_3 + 0\ I_4 + 0\ I_5 = 0{,}5 \end{cases}$$

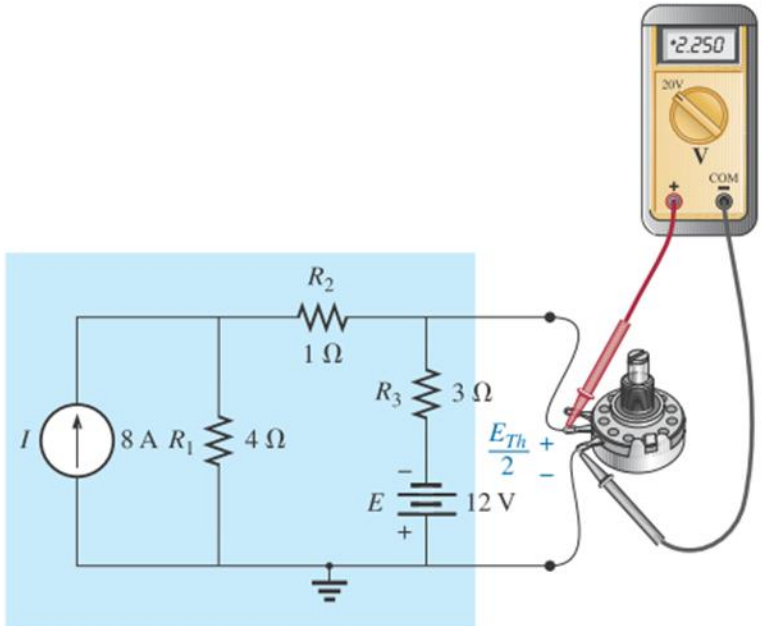
Cuyas soluciones son :

$I_2 = 412{,}4\, mA$ $\qquad$ $I_L = -875\, mA$ $\qquad$ $I_L = -55\, mA$

$$\boxed{I_L = 37{,}49\ mA}$$

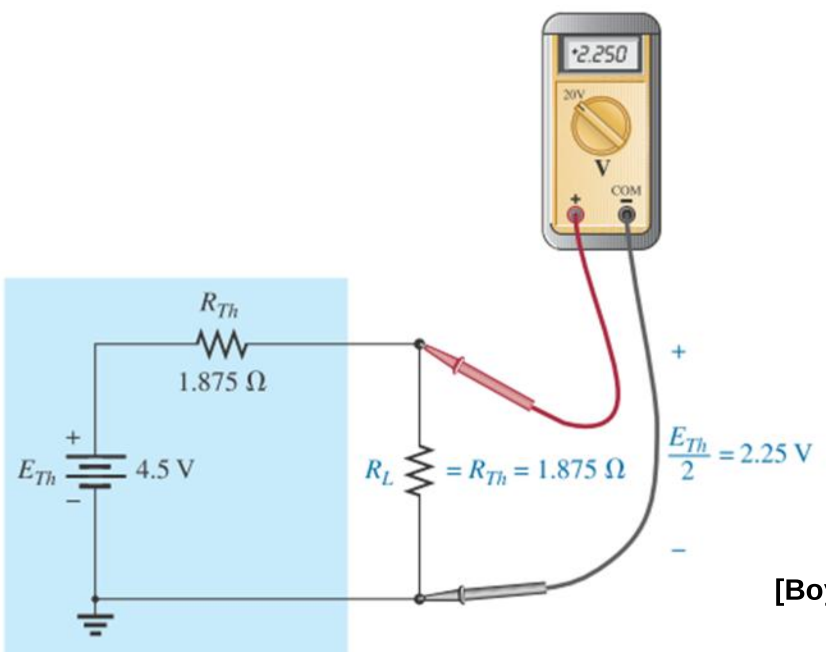
### 6.2.3.5 *Forma práctica de obtener la resitencia de Thevenin.*

**Utilización de un potenciómetro :** Hay una técnica práctica y sencilla para medir la resistencia de Thevenin utilizando un POTENCIOMETRO. Aplicando este método no es necesario reemplazar a las fuentes por su resistencia interna En la figura se ha conectado un potenciómetro en los puntos de salida de la red. Ahora deberá ajustarse la resistencia del potenciómetro de modo que el voltaje medido por el multímetro indique la mitad del voltaje de Thévenin medido anteriormente. En este momento la resistencia de Thévenin será igual a la del potenciómetro.



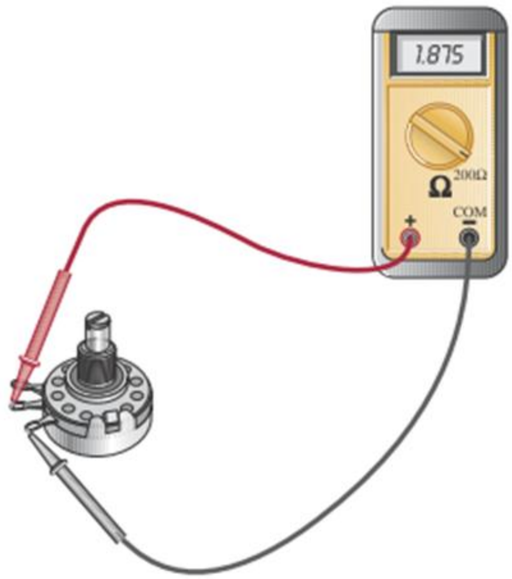

[Boylestad, 2011]

A esta conclusión se llega sabiendo que cuando la reisitencia de carga es igual a la del generador ( en este caso la tensión de Thevenin ) la tensión se repartirá en partes iguales entre la resistencia del generador y la de carga.




[Boylestad, 2011]

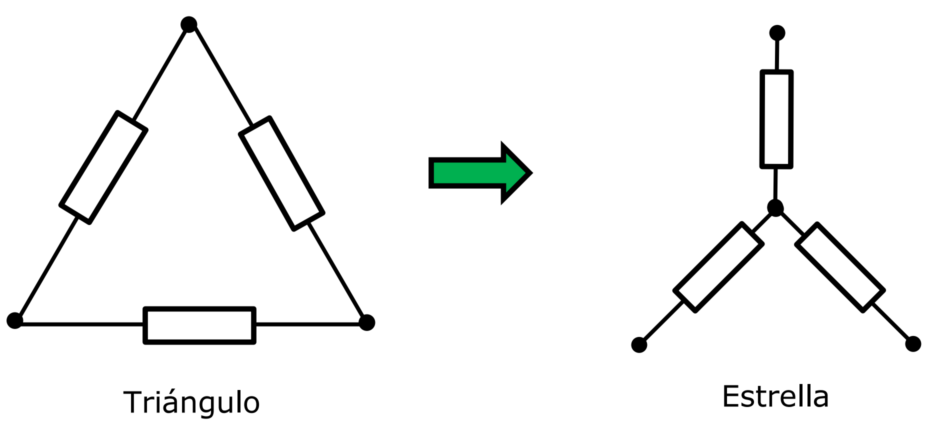
Por ello una vez que la tensión cae a la mitad se lee con un tester el valor ohmico del potenciómetro y este será el valor de la resistencia de Thevenin buscada.



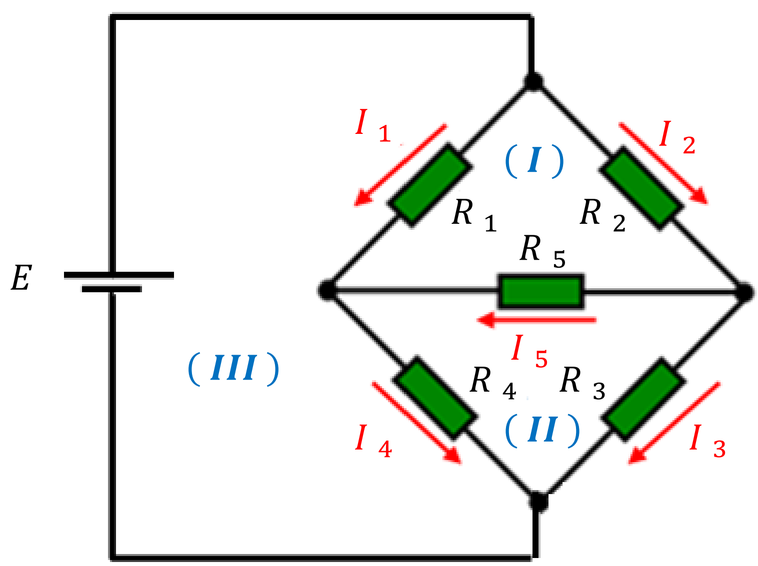

**[Boylestad, 2011]**

### 6.2.3.6 *Redes de tres terminales.*

***Introducción :*** Las redes o mallas de tres terminales son aquellas en las cuales los componentes están conectados de tal forma que poseen tres terminales de conexión al resto del circuito o malla. Estas configuraciones son del tipo estrella y triángulo.



Estas mallas son muy comunes en las redes tipo puente y su resolución por medio de las herramientas matemáticas conocidas es posible pero se complica mucho. En la proxima figura se ha presentado una malla puente. En la misma, si se desea encontrar el valor de la corriente circulante en la resistencia $R_5$ con las herramientas que ya se conocen, se puede lograr, pero después de muchas operaciones. Existe una forma simplificada de resolver estas mallas, para lo cual primero se debe determinar el formato de las mismas. En la figura se observa que existen dos mallas a saber: la **(I)** y la **(II)**. Si se analiza la **(II)**, ella es una red triángulo; de la misma forma, la **(I)** también lo es. Como ya hemos visto a simple vista se aprecian tres ventanas po lo que para resolver el circuito bastará con aplicar mallas dando por resultado un sistema de tres ecuaciones con tres variables que se resuelve por el método más conveniente.

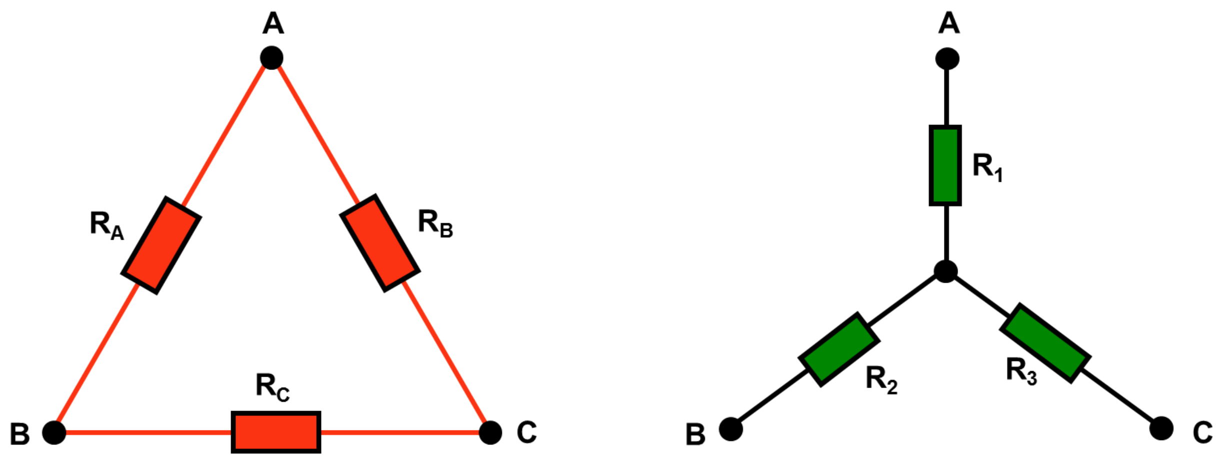



Hay otra manera de resolver este circuito y es aplicando la transformación de trángulo a estrella que se verá a continuación.

### 6.2.3.6.1 Transformación de TRIANGULO a ESTRELLA

Existen redes en donde hay conexiones de resistencias ( o impedancias ) que están conectadas tipo triángulo en que es difícil de encontrar el valor de la corriente que circula por cada una de las resistencias de la red. Este caso se resuelve transformando la red en una conexión tipo estrella y de ahí obtener el valor de las corrientes y con ello el de las tensiones para así encontrar lo pedido.

Para transformar una red triángulo a estrella se hace lo siguiente :




Entre A y B en la conexión triángulo se tiene :

$$R_A \,//\, ( R_B + R_C ) \quad \Longrightarrow \quad \frac{R_A \, ( R_B + R_C )}{R_A + R_B + R_C}$$

Entre A y B en la conexión estrella se tiene :

$$R_1 + R_2$$

Se concluye que para que haya equivalencia :

$$R_1 + R_2 = \frac{R_A \, ( R_B + R_C )}{R_A + R_B + R_C} \qquad (1)$$

Entre A y C en la conexión triángulo se tiene :

$$R_B \; // \; (R_A + R_C) \Longrightarrow \frac{R_B \; (R_A + R_C)}{R_A + R_B + R_C}$$

Entre A y C en la conexión estrella se tiene :

$$R_1 + R_3$$

Se concluye que para que haya equivalencia :

$$R_1 + R_3 = \frac{R_B \; (R_A + R_C)}{R_A + R_B + R_C} \qquad 2$$

Entre B y C en la conexión triángulo se tiene :

$$R_C \; // \; (R_A + R_B) \Longrightarrow \frac{R_C \; (R_A + R_B)}{R_A + R_B + R_C}$$

Entre B y C en la conexión estrella se tiene :

$$R_2 + R_3$$

Se concluye que para que haya equivalencia :

$$R_2 + R_3 = \frac{R_C \; (R_A + R_B)}{R_A + R_B + R_C} \qquad 3$$

Restando 1 y 2 se tiene :

$$R_1 + R_2 = \frac{R_A\ (R_B + R_C)}{R_A + R_B + R_C}$$

$$-$$

$$R_1 + R_3 = \frac{R_B\ (R_A + R_C)}{R_A + R_B + R_C}$$

---

$$R_2 - R_3 = \frac{\cancel{R_A R_B} + R_A R_C - \cancel{R_B R_A} - R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_2 - R_3 = \frac{R_C\ (R_A - R_B)}{R_A + R_B + R_C} \qquad 4$$

Sumando 3 y 4 se tiene :

$$R_2 + R_3 = \frac{R_C\ (R_A + R_B)}{R_A + R_B + R_C}$$

$$+$$

$$R_2 - R_3 = \frac{R_C\ (R_A - R_B)}{R_A + R_B + R_C}$$

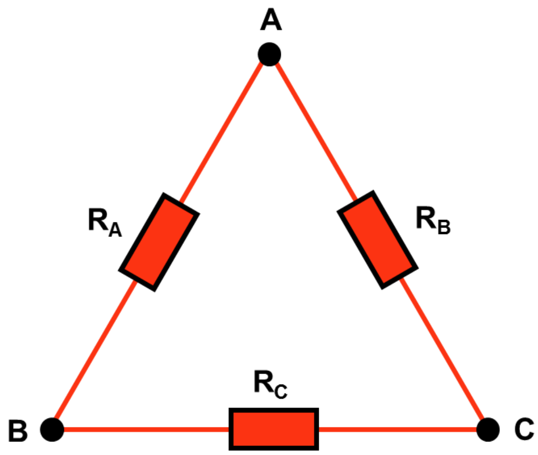
---

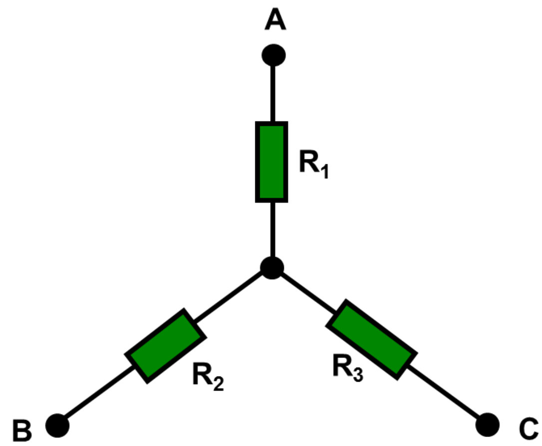
$$2\ R_2 = \frac{R_C R_A + \cancel{R_C R_B} + R_C R_A - \cancel{R_C R_B}}{R_A + R_B + R_C}$$

$$\cancel{2}\ R_2 = \frac{\cancel{2}\ R_C\ R_A}{R_A + R_B + R_C} \Longrightarrow \boxed{R_2 = \frac{R_C\ R_A}{R_A + R_B + R_C}}$$

Como se observa en este último recuadro la expresión que transforma de triángulo a estrella esta dada por: La resistencia de la conexión estrella que llega al punto B es igual al producto de las resistencias que llegan a dicho punto en la conexión triángulo dividida por la suma de las tres resistencias de la conexión triángulo.

Por ello las otras dos resistencias se encuentran de la siguiente manera:

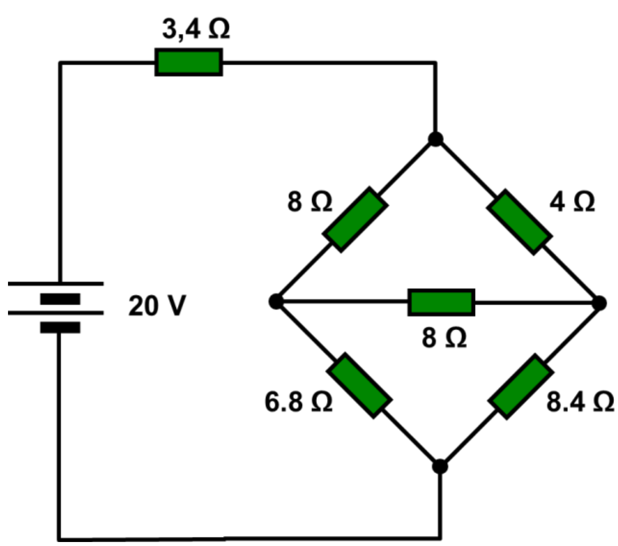


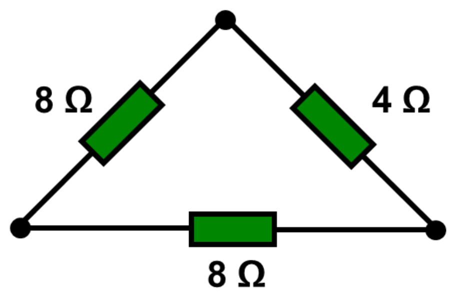

$$R_1 = \frac{R_A \; R_B}{R_A + R_B + R_C}$$

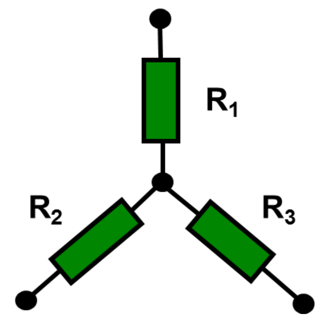
$$R_3 = \frac{R_B \; R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

Ejercicio : Encuentre el valor de la corriente que circula por la resistencia de 4 Ω



Haciendo la transformación de triángulo a estrella



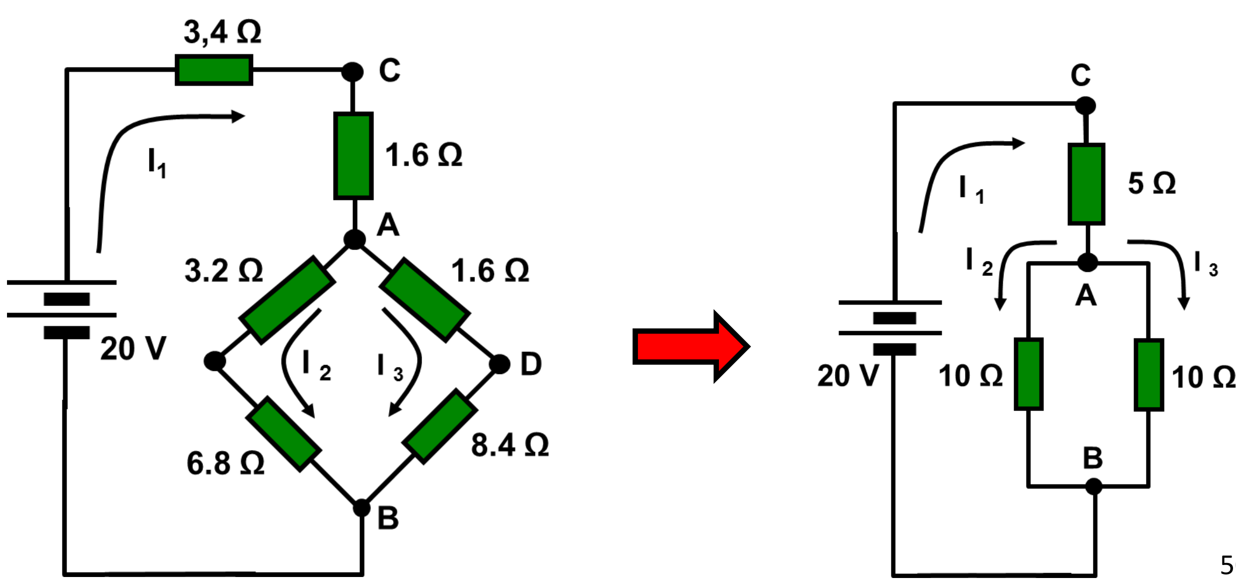



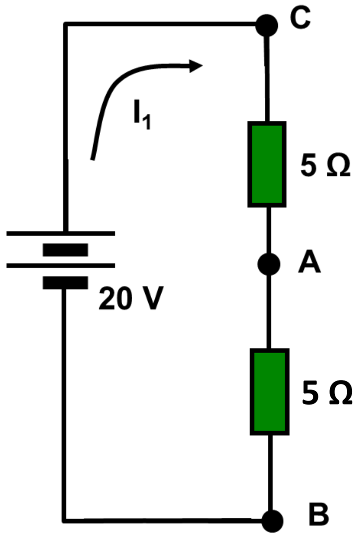

$$R_1 = \frac{8\,\Omega\ .\ 4\,\Omega}{20\ \Omega} \qquad R_1 = 1{,}6\ \Omega$$

$$R_2 = \frac{8\,\Omega\ .\ 8\ \Omega}{20\ \Omega} \qquad R_2 = 3{,}2\ \Omega$$

$$R_3 = \frac{4\ \Omega\ .\ 8\ \Omega}{20\ \Omega} \qquad R_3 = 1{,}6\ \Omega$$

El circuito entonces queda :





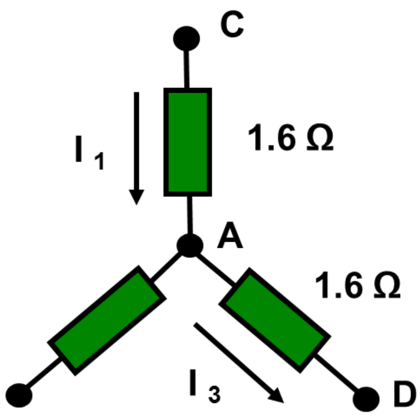

$$I_1 = \frac{20\ V}{10\ \Omega} = 2\ Amp$$

$$V_{AB} = I_1 \,.\, 5\,\Omega = 10\ V$$

$$I_2 = \frac{10\ V}{10\ \Omega} = 1\ Amp$$

$$I_3 = \frac{10\ V}{10\ \Omega} = 1\ Amp$$

Para encontrar el valor de la corriente que circula por la resistencia de 4 Ω debe encontrarse la tensión entre los puntos C y D.

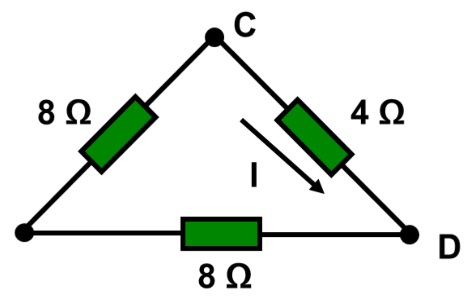



$$V_{CD} = V_{CA} + V_{AD}$$

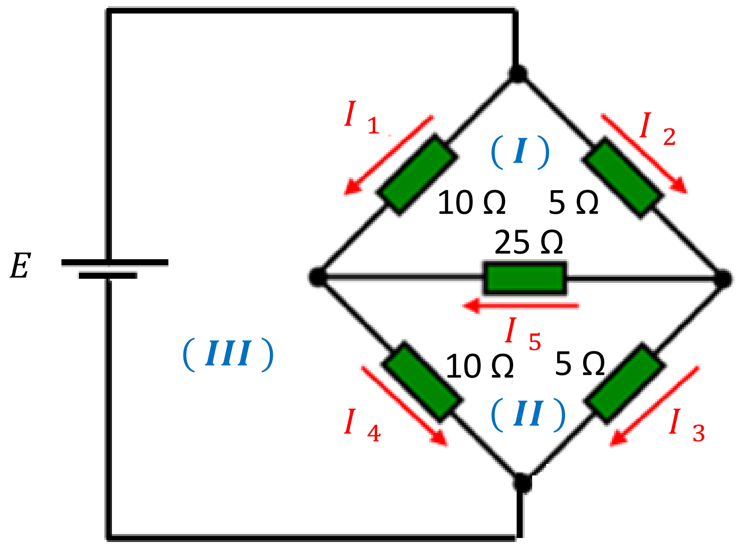
$$V_{CD} = I_1 \,.\, 1{,}6\,\Omega + I_3 \,.\, 1{,}6\,\Omega$$

$$V_{CD} = 4{,}8\,Volts$$

$$\boxed{I = \frac{V_{CD}}{4\ \Omega} = 1{,}2\ Amp}$$



Si el circuito presenta los siguientes valores de resistencias se puede aegurar que el valor de la corriente $I_5 = 0\ Amp$. ¿ Por qué ?




### 6.2.3.6.2 Resumen

La técnica de conversión de redes Pi a estrella, se utiliza en el caso de redes en puente, en los cuales se hace muy tediosa su resolución. Para ello entonces, una malla con cuatro terminales (en realidad tres) que tenga forma de la letra PI o triángulo se puede transformar en una red estrella. Ello permite que intercambiándolas, el circuito se comporte exactamente igual. El procedimiento se recuerda con una regla nemotécnica: **cada una de las impedancias de la red estrella será igual al producto de las impedancias que llegan al mismo vértice del triángulo, dividido por la suma de las tres ramas del mismo**. Así se conocen las nuevas impedancias que permiten su intercambio y hace más fácil la resolución de los problemas en los cuales intervienen estas configuraciones.

### 6.2.3.6.3 Preguntas de autoevaluación.

23) ¿ Cuando se usa el método de super malla ?

24) ¿ Que pasos hay que seguir para aplicar el método de supermalla ?

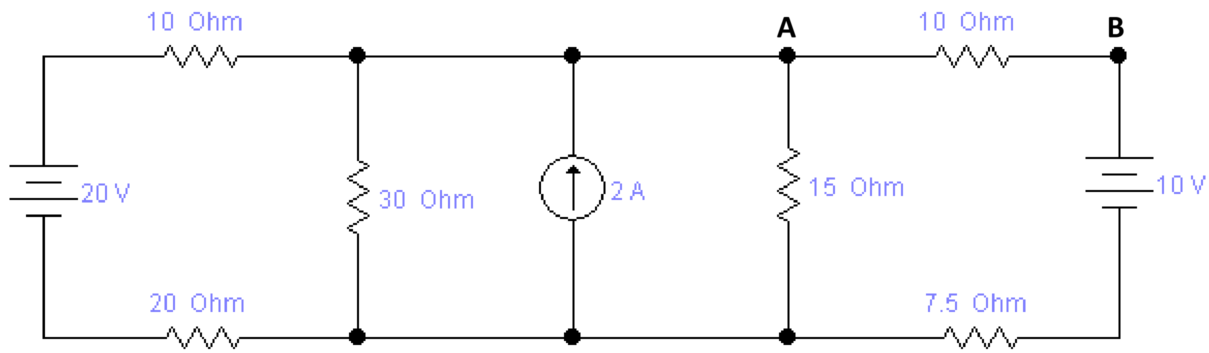
25) ¿Para qué sirve transformar un circuito triángulo en estrella?

25) ¿Las corrientes son las mismas en un circuito triángulos y uno estrella?

26) ¿Las tensiones son las mismas en un circuito triángulo y uno estrella?

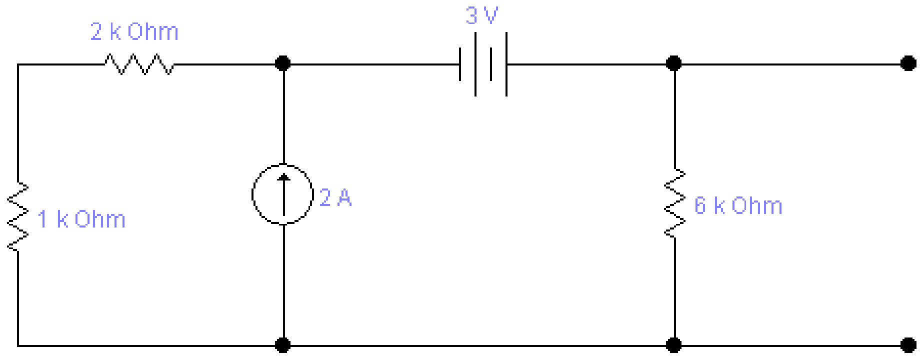
### 6.2.3.6.4 Ejercicios propuestos

12) Calcular el equivalente de Thevenin del siguiente circuito entre los puntos A-B. Verifique el resultado con la resistencia de 10 Ω.




$Respuestas: \quad V_{TH} = 10\,V \qquad R_{TH} = 15\,\Omega \qquad I_L = 400\,mA$

13) Calcular el equivalente de Norton del siguiente circuito. Obtener el equivalente Thevenin a partir del Norton.



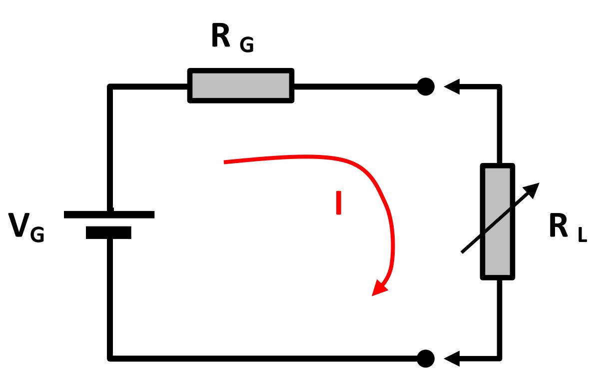
## 6.2.3.7 *Teorema de Máxima Transferencia de Potencia.*

En aquellas aplicaciones electrónicas en las cuales es necesario extraer la máxima potencia que puede entregar un generador a la carga, pudiendo el mismo ser un amplificador de audio, un equipo eco doppler, o un transmisor de radiofrecuencias, etc, se hace particularmente necesario tener en cuenta la resistencia ( C.C. ) o impedancia interna ( C.A. ) de quien provee la potencia, amplificador, eco doppler o transmisor de radiofrecuencia, para alimentar a la carga. Esta última también debe tener ciertas condiciones respecto a la salida del generador. Por otro lado también estas condiciones tienen que ver con la calidad de las señales que se transfieren a la carga o a otros circuitos para que no se produzcan deformaciones u otros efectos tales como destrucción de la carga o del amplificador.

Por ello, mediante la aplicación y demostración del Teorema de la MáximaTransferencia de Potencia se encontrarán las condiciones necesarias para que se produzca la misma en forma lineal. Primero se demostrará para corriente continua y luego se generalizará para corriente alterna. Demás está decir que la mayor cantidad de aplicaciones es para corriente alterna. Esto se entiende cuando se acoplan, por ejemplo un transmisor de radiofrecuencia a una antena; cuando se trata de acoplar a un circuito otro que recibe la energía del primero, etc.

El enunciado del teorema dice: Cuando se posee un generador que alimenta a una carga a través de un valor fijo de resistencia, $R_S$ (que puede incluir resistencia interna del generador), la carga recibirá la máxima potencia, si la misma es igual a la $R_S$ . Se demostrará, mediante un circuito compuesto por un generador de C.C. con su resistencia interna y una carga resistiva

### 6.2.3.7.1 *Circuitos Resistivos Puros*




El valor de la corriente que circula por el circuito está dada por

$$I = \frac{V_G}{R_G + R_L}$$

El valor de la potencia que se disipa en la resistencia de carga es :

$$P_L = I^2 R_L = \left( \frac{V_G}{R_G + R_L} \right)^2 R_L$$

Para encontrar la máxima potencia que se desarrolla en la carga se aplica la técnica de máximos y mínimos. La variable es el valor de la $R_L$ por ello se deriva respecto a ella.

$$\frac{d_{P_L}}{d_{R_L}} = 0$$

$$\frac{d_{P_L}}{d_{R_L}} = \frac{d\left[\left( \frac{V_G}{R_G + R_L} \right)^2 R_L\right]}{d_{R_L}} = \frac{d\left[\frac{V_G{}^2 \; R_L}{(R_G + R_L)^2}\right]}{d_{R_L}}$$

$$\frac{d_{P_L}}{d_{R_L}} = \frac{V_G^2 (R_G + R_L)^2 - V_G^2 R_L \; 2(R_G + R_L)(0 + 1)}{(R_G + R_L)^4} = 0$$

Sacando factor común $V_G{}^2$ en el numerador y llevando multiplicando al segundo miembro $(R_G + R_L)^4$ la última expresión queda:

$$\frac{V_G^2 \left[ (R_G + R_L)^2 - R_L \; 2(R_G + R_L) \right]}{(R_G + R_L)^4} = 0$$

Llevando dividiendo al segundo miembro $V_G{}^2$ ( esto se puede hacer ya que nunca es cero ) y desarrollando el cuadrado del binomio se tiene :

$$V_G{}^2 \left[ (R_G + R_L)^2 - R_L \; 2(R_G + R_L) \right] = 0$$

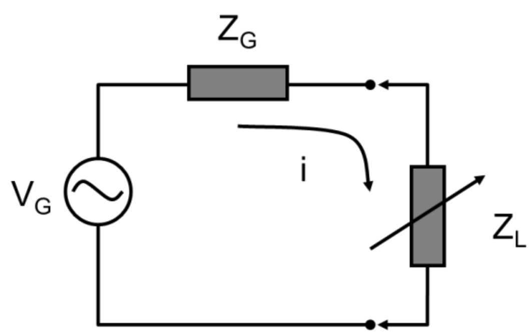
$$R_G^{\,2} + \cancel{2\,R_G\,R_L} + R_L^{\,2} \cancel{-\,2\,R_L\,R_G} - 2\,R_L^{\,2} = 0$$

En donde surge la condición que debe cumplirse para que haya máxima transferencia de potencia del generador a la carga.

$$\boxed{\boldsymbol{R_G = R_L}}$$

### 6.2.3.7.2 Circuitos Reactivos

Para encontrar la impedancia total del circuito debe sumarse el valor de las impadancias de la fuente con la de la carga. En complejos esto se hace sumando entre sí las partes reales y las imaginarias.




$$Z_T = Z_G + Z_L$$

$$Z_T = (R_G + R_L) + J\,(X_G + X_L)$$

El módulo de la corriente que circula por el circuito esta dado por :

$$|I| = \frac{|V|}{|Z|} = \frac{V_G}{\sqrt{(R_G + R_L)^2 + (X_G + X_L)^2}}$$

Lo que se desea obtener es la máxima potencia útil en la carga que es aquella que se desarrolla en la parte resistiva de la misma. Aplicando la misma técnica que en carga resistiva pura ( técnica da máximos y mínimos ) se llega a :

$$P = I^2 \cdot R_L = \left( \frac{V_G}{\sqrt{(R_G + R_L)^2 + (X_G + X_L)^2}} \right)^2 \cdot R_L$$

$$P = \frac{V_G{}^2 \cdot R_L}{\left(\sqrt{(R_G + R_L)^2 + (X_G + X_L)^2}\right)^2} = \frac{V_G{}^2 \cdot R_L}{(R_G + R_L)^2 + (X_G + X_L)^2} .$$

$$\frac{d_{P_L}}{d_{R_L}} = \frac{V_G^2 \left[ (R_G + R_L)^2 + (X_G + X_L)^2 \right] - V_G^2 R_L \left[ 2\left( R_G + R_L \right) + 0 \right]}{((R_G + R_L)^2 + (X_G + X_L)^2)^2} = 0$$

$$\frac{d_{P_L}}{d_{R_L}} = \frac{V_G^2 \left\{ \left[ (R_G + R_L)^2 + (X_G + X_L)^2 \right] - R_L \; 2\left( R_G + R_L \right) \right\}}{((R_G + R_L)^2 + (X_G + X_L)^2)^2} = 0$$

$$(R_G + R_L)^2 + (X_G + X_L)^2 - R_L \; 2\left( R_G + R_L \right) = 0$$

Desarrollando el cuadrado del binomio en la parte resistiva y aplicando distributiva en el segundo término se llega a :

$$R_G{}^2 + \cancel{2 R_G . R_L} + R_L{}^2 + (X_G + X_L)^2 - \cancel{2 R_L . R_G} - 2 R_L{}^2 = 0$$

Quedando finalmente que : $R_G{}^2 - R_L{}^2 + (X_G + X_L)^2 = 0$

Para que esta igualdad se cumpla en números complejos la parte real debe ser nula y la imaginaria también. De ahí surge :

$$\boxed{R_G = R_L} \qquad \boxed{X_G = -X_L}$$

Lo que indica que para que exista máxima transferencia de potencia útil a la carga las partes reistivas del generador y de la carga deben ser iguales y las partes reactiva de ambas deben ser complejas conjugadas que significa que si una es inductiva la otra debe ser capacitiva.

En caso de que esto no pueda cumplirse por que una de las impedancias por ejemplo sea resistiva pura lo que debe tenerse en cuenta es :

$$Z_G = R_G + J\ 0 \quad \Longrightarrow \quad |Z_G| = \sqrt{R_G{}^2 + 0^2} = R_G$$

$$Z_L = R_L + J\ X_L \quad \Longrightarrow \quad |Z_L| = \sqrt{R_L{}^2 + X_L{}^2}$$

$$\boxed{R_G = \sqrt{R_L{}^2 + X_L{}^2}}$$

Con Lo cual se puede concluir que si se encuentra una impedancia que cumpla con lo visto se tendrá máxima potencia útil en la carga.

## 6.2.3.7.3 Resumen

El teorema de la máxima transferencia de potencia permite encontrar, para un circuito electrónico, la potencia máxima en la carga, en función de la resistencia interna de la fuente o generador. Así se obtiene que la transferencia es máxima cuando la resistencia interna de la fuente es igual a la de la carga. Para lograr este objetivo entonces, en los distintos circuitos en los cuales se transmite potencia, será necesario realizar lo que se denomina: ***adaptación de impedancias.***

## 6.2.3.7.4 Preguntas de Autoevaluación

27) Si la resistencia del generador es distinta a la de carga. ¿ hay máxima transferencia de potencia entra generador y carga?

28) En caso de no poseer una resistencia fija de igual valor a la del generador. ¿Cómo lo soluciona?

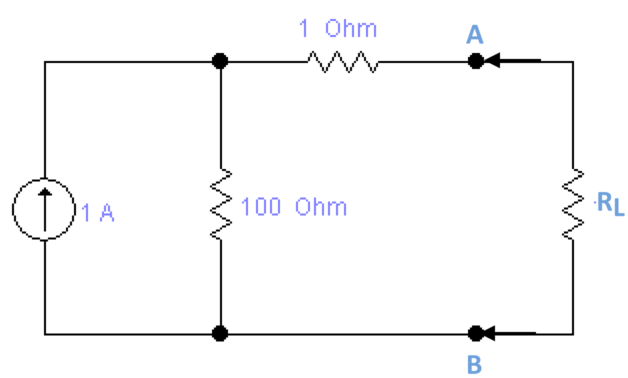
29) ¿Qué condición se tiene que cumplir para que haya máxima transferencia de potencia entre un generador y una carga para un circuito resistivo puro? Demuéstrela.

30) ¿Qué condición se tiene que cumplir para que haya máxima transferencia de potencia entre un generador y una carga para un circuito reactivo? Demuéstrela.

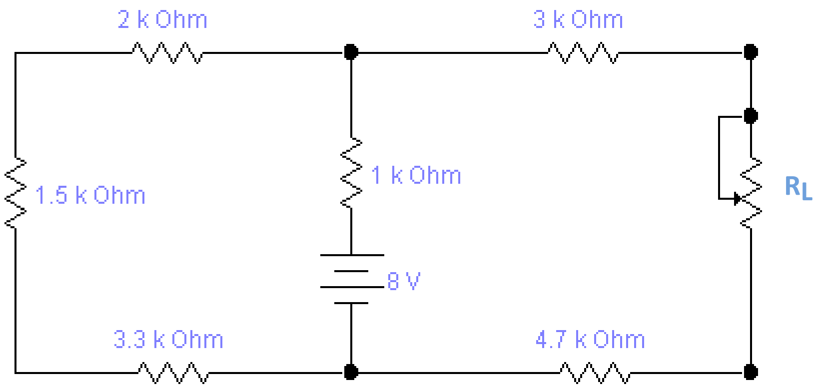
### *6.2.3.7.5 Ejercicios propuestos*

14) Calcule el valor de $R_g$ que posee un generador cuando se le extrae la máxima potencia. El generador es de 60V y en el momento de la máxima potencia se le extraen 100 mA. Determine además el valor de $R_L$ y las caídas , tanto en el generador como en la carga.

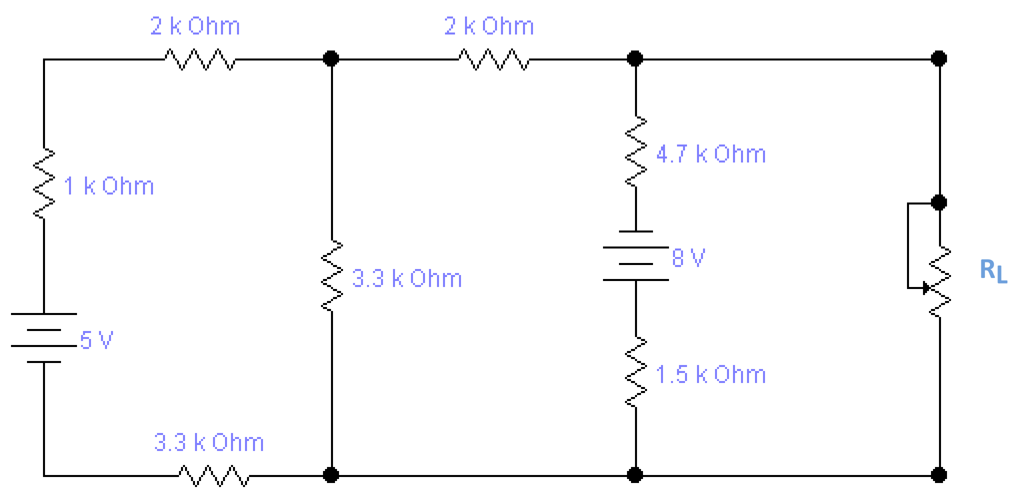
15) Calcular $R_L$ para obtener la máxima transferencia de potencia por parte de la fuente de corriente hacia la carga (Sugerencia: obtener primero equivalente Thévenin).



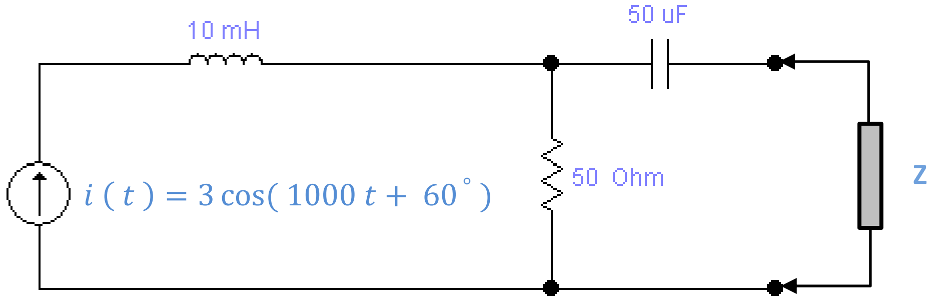
16) Precisar el valor de la resistencia de carga $R_L$ para el circuito que se muestra a continuación , a fin de obtener la máxima transferencia de potencia.




17) Precisar el valor de la resistencia de carga $R_L$ para el circuito que se muestra a continuación , a fin de obtener la máxima transferencia de potencia.




18) ¿ Cuánto debe valer la impedancia Z para obtener la máxima transferencia de potencia media desde el siguiente circuito ? ¿ Con qué elementos implementaría la impedancia Z ? ¿ Cuánto vale la potencia transferida a la carga Z ?




## *6.3 CUADRIPOLOS*

***Un cuadripolo es un circuito eléctrico que tiene la particularidad de tener dos pares de terminales , es decir cuatro terminales de ahí su nombre.***

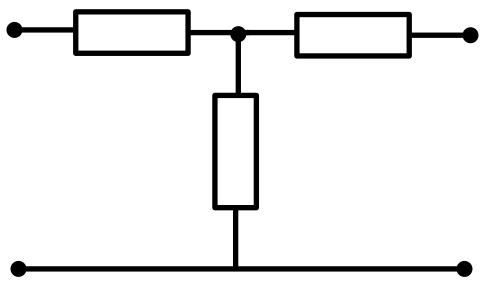
Como ya se vio anteriormente, una red arbitraria de dos terminales compuesta por fuentes y elementos pasivos puede representarse por un equivalente de Thevenin o de Norton.

En esta sección se va a generalizar el concepto de circuito equivalente para incluir una clase importante de redes de cuatro terminales denominadas cuadripolo.

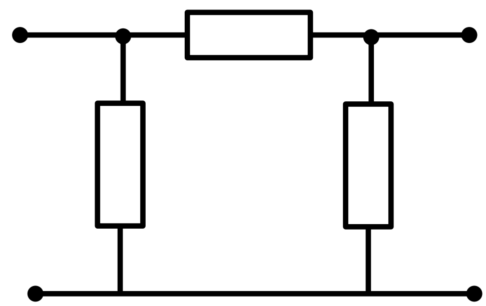
Es importante destacar que se dispone de una teoría completa respecto a las redes de dos terminales de entrada y dos de salida. En esa teoría se consideran también no solo componentes pasivos, sino que también dispositivos activos.

Ello tiene una importancia trascendente en los transistores bipolares y en los de efecto de campo, ya que las características impresas en los manuales se especifican de acuerdo a la teoría de cuadripolos.

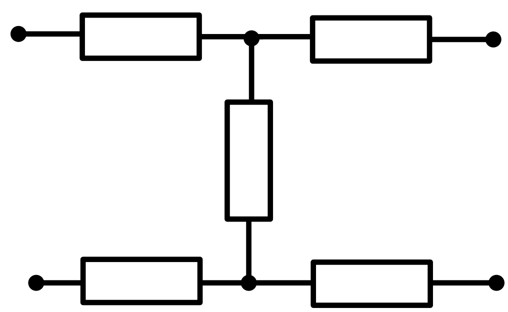
Estas redes se construyen de acuerdo a arreglos comunes tales como: circuitos tipo T o tipo π (Triángulo o Pi ) , tipo H, etc.



Circuito tipo T

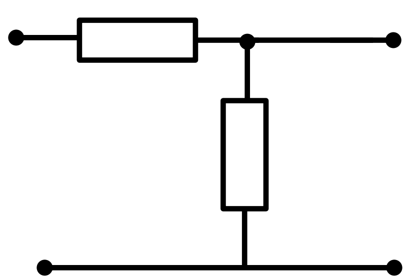


Circuito tipo Π

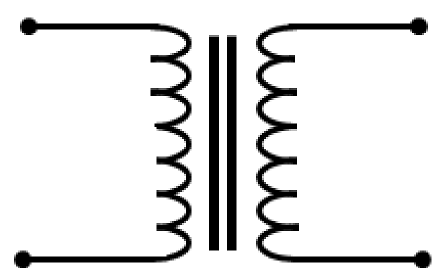


Circuito tipo H

En la siguiente figura se pueden observar algunos cuadripolos comunes que se utilizan con componentes pasivos.



Circuito Atenuador o L



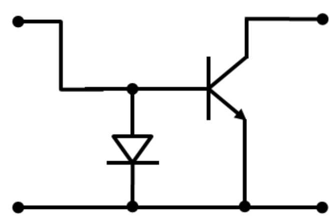
Transformador

### 6.3.1 Clasificación de los cuadripolos

De acuerdo a lo visto en las figuras los cuadripolos se pueden clasificar según los siguientes criterios:

#### 6.3.1.1 *Según el tipo de elementos que incluyan :*

- Activos : Son aquellos que incluyen componentes tales como transistores y fuentes. La potencia de salida por ello es mayor que la de entrada.



- Pasivos : Son aquellos que incluyen resistencias, inductores, capacitores, diodos , etc. La potencia de salida es menor que la de entrada.

#### 6.3.1.2 ***Según las características de los elementos incluidos :***

- Lineales : Son aquellos que incluyen elementos lineales tales como resistencias , inductancias y capacitores.
- No lineales : Son aquellos que poseen componentes tales como termistores, diodos, amplificadores, etc.

#### 6.3.1.3 ***Según el sentido de transferencia de la energía:***

- Bilaterales : Estos cuadripolos conducen energía en cualquiera de los dos sentidos , como por ejemplo una red pasiva T , Pi o un cable coaxial.
- Unilaterales : Poseen componentes tales como amplificadores o diodos que solamente permite que la energía circule en un solo sentido.

### 6.3.1.4 *Según el tipo de configuración:*

- Balanceados : Son aquellos que poseen un eje de simetría longitudinal, por ejemplo H, o línea de conductores paralelo.
- Desbalanceados : Son aquellos que no poseen un eje de simetría longitudinal.
- Simétricos : Poseen un eje de simetría transversal, por ej. la configuración T. En este caso se pueden permutar ambos pares de terminales y el circuito externo no lo nota. Otro ejemplo es el conductor coaxial.
- Asimétricos : Que no poseen ningún eje de simetría transversal , por ej. Transistores. Dejan pasar la energía en un solo sentido.

### 6.3.1.5 *Resumen*

Un cuadripolo es una circuito eléctrico que tiene la particularidad de tener dos pares de terminales, es decir cuatro terminales de ahí su nombre. La teoría de cuadripolo permite simplificar considerablemente el estudio de muchos problemas en electrónica. Los cuadripolos se pueden clasificar de acuerdo a diferentes criterios en Activos o Pasivos, Lineales o No Lineales, Unilaterales o Bilaterales, Balanceados, Desbalanceados, Simétricos o Asimétricos, etc.

### 6.3.1.6 *Preguntas de Autoevaluación*

31) ¿Qué es un cuadripolo?
32) ¿Qué diferencia existe entre los cuadripolos activos y los pasivos?
33) ¿Cuál es la utilidad de los cuadripolos?
34) ¿Qué diferencia existe entre los cuadripolos lineales y los no lineales?
 ¿Qué propiedad importante tienen los cuadripolos lineales?
35) ¿Qué diferencia existe entre los cuadripolos unilaterales y los bilaterales?
36) ¿Qué quiere decir que un cuadripolo es balanceado?
37) ¿Qué quiere decir que un cuadripolo es desbalanceado?

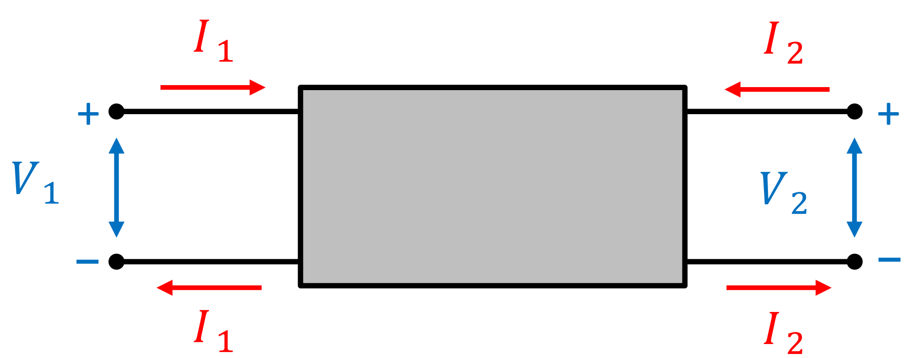
38) ¿Qué quiere decir que un cuadripolo es simétrico?

39) ¿Qué quiere decir que un cuadripolo es asimétrico?

### 6.3.2 *Teoría de cuadripolos*

#### 6.3.2.1 *Definición de cuadripolo*

Estas configuraciones, se pueden estudiar midiendo las tensiones y corrientes en ambos terminales del cuadripolo, de acuerdo a que poseen dos de " entrada (1) " y dos de " salida (2) ". A cada par de terminales de cada lado se lo llama " puerto ", por lo que el cuadripolo tiene dos puertos. Se debe cumplir que la corriente entra al terminal tanto de entrada como de salida.




Por ello se genera una función implícita de cuatro variables, identificada así:

$$F\,(V_1, V_2, I_1, I_2) = 0$$

En la cual: $V_1$ e $I_1$ es la tensión y corriente de la entrada y $V_2$ e $I_2$, las de salida.

### 6.3.3 Problemas a tratar con cuadripolos

Planteada esta función, es lógico suponer que esta nueva herramienta permitirá atacar circuitos o mallas desconocidos o cajas negras con dos pares de terminales de entrada y dos de salida. Mediante mediciones de tensión y corriente en ciertas condiciones se podrá resolver los siguientes problemas que en general se presentan:

#### 6.3.3.1 *Problemas de transferencia:*

Para estos casos, se trata de la determinación de la tensión o corriente en un par de terminales en función de la tensión o corriente en el otro par. Es particularmente útil realizar este estudio, ya que en base a algunos parámetros que se pueden determinar en el cuadripolo, se pueden analizar con los pares de terminales abiertos o en cortocircuito.

#### 6.3.3.2 *El problema de la transmisión:*

En este caso, se trata de la determinación de la potencia en un par de terminales en función de la potencia en el otro par. El ejemplo típico es aquella configuración que trasmite energía. Por ejemplo un cable coaxial.

#### 6.3.3.3 *El problema de la inserción:*

Surge del efecto que produce la inserción (colocación) de un cuadripolo en una red. El ejemplo típico son los filtros, ya sean pasivos o activos. En este caso se trata de determinar la respuesta en frecuencia. Con este procedimiento se pueden calcular pérdidas de frecuencia por inserción, como así también, en algunos casos, la potencia.

A partir de los problemas planteados, y tomando en cuenta $F(V_1, V_2, I_1, I_2) = 0$ se pueden plantear una serie de ecuaciones, parámetros y matrices características que permiten simplificar el estudio de los diferentes problemas planteados precedentemente.

Así entonces, dado el cuadripolo de la figura anterior con la nomenclatura allí expuesta y con la medición de tensiones y corrientes, se tiene una función implícita de cuatro variables , que permite obtener seis combinaciones o ecuaciones lineales a saber:

$$\begin{cases} V_1 = f(I_1, I_2) \\ V_2 = f(I_1, I_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = f(V_1, V_2) \\ I_2 = f(V_1, V_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} V_1 = f(I_1, V_2) \\ I_2 = f(I_1, V_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = f(V_2, I_2) \\ I_1 = f(V_2, I_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = f(V_1, I_2) \\ V_2 = f(V_1, I_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} V_2 = f(V_1, I_1) \\ I_2 = f(V_1, I_1) \end{cases}$$

Con ellas, se pueden escribir las siguientes, igualdades que relacionan las entradas y salidas mediante parámetros específicos a saber:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}\, I_1 + Z_{12}\, I_2 \\ V_2 = Z_{21}\, I_1 + Z_{22}\, I_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = Y_{11}\, V_1 + Y_{12}\, V_2 \\ I_2 = Y_{21}\, V_1 + Y_{22}\, V_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = h_{11}\, I_1 + h_{12}\, V_2 \\ I_2 = h_{21}\, I_1 + h_{22}\, V_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = g_{11}\, V_1 + g_{12}\, I_2 \\ V_2 = g_{21}\, V_1 + g_{22}\, I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = A\, V_2 + B\, I_2 \\ I_1 = C\, V_2 + D\, I_2 \end{cases}$$

Z ; Y ; A ; B ; C ; D ; h y g se denominan parámetros de las ecuaciones y son quienes relacionan las entradas con las salidas de acuerdo a las combinaciones vistas. Los nombres de los parámetros son : impedancia Z ; Admitancia Y ; Generales de Transmisión A, B, C, D ; Híbridos h y Trasconductancia g.

### 6.3.4 *Caracterización con los parámetros*

Los parámetros de los cuadripolos expresan diferentes características del circuito de donde proviene. Analizando sus valores pueden sacarse dichas conclusiones.

Los parámetros con subíndices iguales se denominan de entrada y salida:

$$Z_{11} \;,\; Z_{22} \;,\; Y_{11} \;,\; Y_{22} \;,\; h_{11} \;,\; h_{22} \;,\; g_{11} \;,\; g_{22} \;,\; \text{A y D}$$

Los parámetros con subíndice distintos son denominados de transferencia porque relacionan la entrada con la salida o viceversa.

$$Z_{12} \;,\; Z_{21} \;,\; Y_{12} \;,\; Y_{21} \;,\; h_{12} \;,\; h_{21} \;,\; g_{12} \;,\; g_{21} \;,\; \text{B y C}$$

A continuación se realizará un análisis de los parámetros, ya que ellos entregan información importante:

a) Si los parámetros de transferencia son nulos: Ello indica que las variaciones de la entrada (o salida) no modifican a la salida (o a la entrada) lo que indica que los circuitos de entrada y salida son independientes.

$$Z_{12} = Z_{21} = Y_{12} = Y_{21} = h_{12} = h_{21} = g_{12} = g_{21} = 0$$

b) Si los parámetros de transferencia son nulos en un solo sentido: Significa que variando la tensión o corriente en un par de terminales, no varía en el otro y si a la inversa. Se dice que el cuadripolo es unilateral.

$$Z_{12} \neq 0 \;;\; Z_{21} = 0 \qquad o \qquad Z_{21} \neq 0 \;;\; Z_{12} = 0$$

$$Y_{12} \neq 0 \;;\; Y_{21} = 0 \qquad o \qquad Y_{21} \neq 0 \;;\; Y_{12} = 0$$

$$h_{12} \neq 0 \;;\; h_{21} = 0 \qquad o \qquad h_{21} \neq 0 \;;\; h_{12} = 0$$

$$g_{12} \neq 0 \;;\; g_{21} = 0 \qquad o \qquad g_{21} \neq 0 \;;\; g_{12} = 0$$

c) Si los parámetros de transferencia son iguales entre sí y distintos de cero : Se transfiere energía con facilidad en ambos sentidos. Se denomina al cuadripolo bilateral y pasivo.

$$Z_{12} = Z_{21} \neq 0 \;;\; Y_{12} = Y_{21} \neq 0 \;;\; h_{12} = h_{21} \neq 0 \;;\; g_{12} = g_{21} \neq 0$$

d) Si los parámetros de transferencia son distintos entre sí y distintos de cero : Esta condición indica que se transfiere energía con distinto valor en los dos sentidos.

$$Z_{12} \neq Z_{21} \neq 0 \; ; \; Y_{12} \neq Y_{21} \neq 0 \; ; \; h_{12} \neq h_{21} \neq 0 \; ; \; g_{12} \neq g_{21} \neq 0$$

e) Si los parámetros de entrada y salida, admitancia e impedancia, son iguales entre si y distintos de cero : Significa que las impedancias y admitancias de entrada y salida son iguales; el cuadripolo es eléctricamente simétrico.

$$Z_{11} = Z_{22} \neq 0 \; ; \; Y_{11} = Y_{22} \neq 0$$

f) Si las admitancias e impedancias de entrada y salida son distintas entre sí : Significa que los cuadripolos son eléctricamente asimétricos.

$$Z_{11} \neq Z_{22} \; ; \; Y_{11} \neq Y_{22}$$

### 6.3.5 *Obtención de los parámetros de un cuadripolo*

Los distintos parámetros de un cuadripolo se pueden obtener de dos formas:

a) POR ENSAYO : Midiendo las tensiones y corrientes de los puertos se calculan los parámetros Z, Y ,...

*b) POR CÁLCULO : Conociendo los componentes interno del cuadripolo se calculan los parámetros Z, Y, ...*

*En ambos casos se parte de las ecuaciones correspondientes a los parámetros que se desea obtener.*

*A continuación se obtienen los parámetros por experimentación y en secciones posteriores se obtendrán los diferentes parámetros por cálculo en algunos cuadripolos particulares.*

- ***Obtención de los parámetros de Impedancia Z por ensayo***

*En este caso se realiza la medición de las tensiones y corrientes de los puertos y se calculan los parámetros Z a partir de la ecuación de los parámetros de impedancia. Si el CIRCUITO ES LINEAL , las ecuaciones se pueden obtener como superposición de respuestas de fuentes de corriente (o tensión) conectadas en los dos lados. Si se coloca una fuente de tensión (o corriente) en la entrada y la salida se deja a circuito abierto, resultará I2 = 0 y de la ecuación de Z se obtiene.*

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}\, I_1 + Z_{12}\, I_2 \\ V_2 = Z_{21}\, I_1 + Z_{22}\, I_2 \end{cases}$$


$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}\, I_1 + \cancel{Z_{12}\, 0} \\ V_2 = Z_{21}\, I_1 + \cancel{Z_{22}\, 0} \end{cases} \Rightarrow V_1 = Z_{11}\, I_1 \Rightarrow \boxed{Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2 = 0}}$$

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}\, I_1 + \cancel{Z_{12}\, 0} \\ V_2 = Z_{21}\, I_1 + \cancel{Z_{22}\, 0} \end{cases} \Rightarrow V_2 = Z_{21}\, I_1 \Rightarrow \boxed{Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2 = 0}}$$

Si se coloca una fuente de tensión (o corriente) en la salida y la entrada se deja a circuito abierto, resulta $I_1 = 0$ y de la ecuación de Z se obtiene :

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}\, I_1 + Z_{12}\, I_2 \\ V_2 = Z_{21}\, I_1 + Z_{22}\, I_2 \end{cases} \Rightarrow$$


$$\begin{cases} V_1 = \cancel{Z_{11}\, 0} + Z_{12}\, I_2 \\ V_2 = \cancel{Z_{21}\, 0} + Z_{22}\, I_2 \end{cases} \Rightarrow V_1 = Z_{12}\, I_2 \Rightarrow \boxed{Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1 = 0}}$$

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}\cancel{0 +} Z_{12}\, I_2 \\ V_2 = Z_{21}\cancel{0 +} Z_{22}\, I_2 \end{cases} \Rightarrow \quad V_2 = Z_{22}\, I_2 \quad \boxed{Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1 = 0}}$$

De esta manera se observa que para encontrar en forma experimental los parámetros de impedancia hay que colocar alimentación y la salida o la entrada en circuito abierto y medir los valores de tensión y corriente adecuados.

- ***Obtención de los parámetros de Admitancia Y por ensayo***

En este caso se realiza la medición de las tensiones y corrientes de los puertos y se calculan los parámetros Y. A partir de la ecuación de los parámetros de impedancia. Si se cortocircuita la salida se tiene :

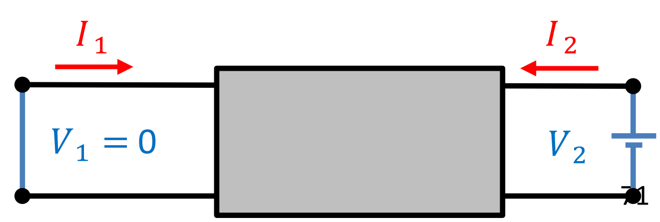
$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}\, V_1 + Y_{12}\, V_2 \\ I_2 = Y_{21}\, V_1 + Y_{22}\, V_2 \end{cases}$$


$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}\, V_1 + \cancel{Y_{12}\, 0} \\ I_2 = Y_{21}\, V_1 + \cancel{Y_{22}\, 0} \end{cases} \Rightarrow \quad I_1 = Y_{11}\, V_1 \Rightarrow \boxed{Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2 = 0}}$$

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}\, V_1 + \cancel{Y_{12}\, 0} \\ I_2 = Y_{21}\, V_1 + \cancel{Y_{22}\, 0} \end{cases} \Rightarrow \quad I_2 = Y_{21}\, V_1 \Rightarrow \boxed{Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2 = 0}}$$

Si se cortocircuita la entrada se tiene :

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}\, V_1 + Y_{12}\, V_2 \\ I_2 = Y_{21}\, V_1 + Y_{22}\, V_2 \end{cases}$$

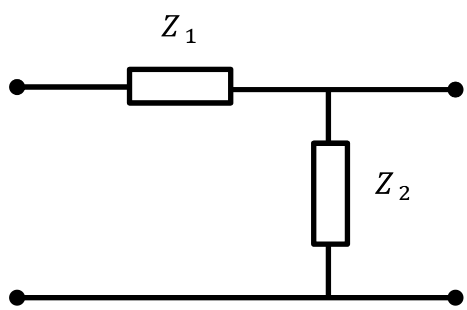


$$\begin{cases} I_1 = \cancel{Y_{11}\,0} + Y_{12}\,V_2 \\ I_2 = \cancel{Y_{21}\,0} + Y_{22}\,V_2 \end{cases} \Rightarrow I_1 = Y_{12}\,V_2 \Rightarrow \boxed{Y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1 = 0}}$$

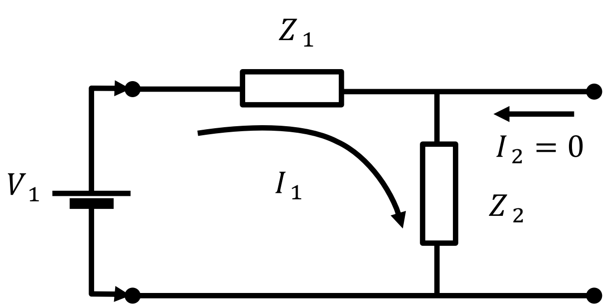
$$\begin{cases} I_1 = \cancel{Y_{11}\,V_1} + Y_{12}\,V_2 \\ I_2 = \cancel{Y_{21}\,V_1} + Y_{22}\,V_2 \end{cases} \Rightarrow I_2 = Y_{22}\,V_2 \Rightarrow \boxed{Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1 = 0}}$$

### 6.3.5.1 *Ejemplo Nº 1 :*

Como encontrar los parámetros Z en un cuadripolo cualquiera.




Colocando una fuente de tensión en la entrada circulará por ella una cierta corriente




Para hallar los parámetros $Z_{11}$ y $Z_{21}$ se aplica :

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}\,I_1 + \cancel{Z_{12}\,0} \\ V_2 = Z_{21}\,I_1 + \cancel{Z_{22}\,0} \end{cases}$$

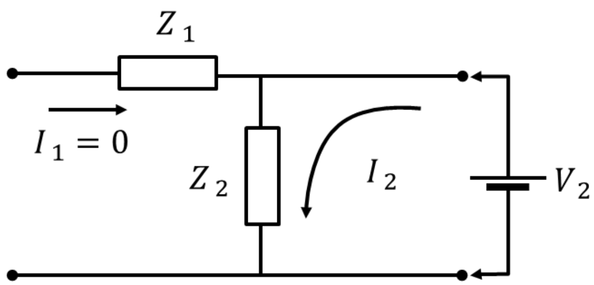
En el circuito se aprecia que:

$$V_1 = I_1\,(Z_1 + Z_2) \Rightarrow \frac{V_1}{I_1} = Z_1 + Z_2 \Rightarrow \boxed{Z_{11} = Z_1 + Z_2}$$

Se aprecia en el circuito que la tensión de salida está dada por :

$$V_2 = I_1 \,.\, Z_2 \;\Rightarrow\; \frac{V_2}{I_1} = Z_2 \;\Rightarrow\; \boxed{Z_{21} = Z_2}$$

Colocando ahora una fuente en la salida se tiene :




$$\begin{cases} V_1 = \cancel{Z_{11}\;0} + Z_{12}\; I_2 \\ V_2 = \cancel{Z_{21}\;0} + Z_{22}\; I_2 \end{cases}$$

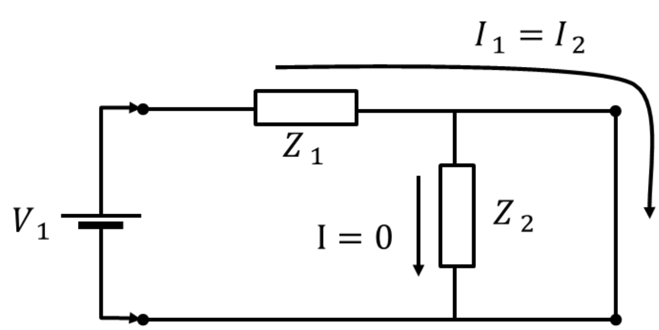
$$V_1 = I_2 \,.\, Z_2 \;\Rightarrow\; \frac{V_1}{I_2} = Z_2 \;\Rightarrow\; \boxed{Z_{12} = Z_2}$$

De igual manera :

$$V_2 = I_2 \,.\, Z_2 \;\Rightarrow\; \frac{V_2}{I_2} = Z_2 \;\Rightarrow\; \boxed{Z_{22} = Z_2}$$

### 6.3.5.2 *EjemploNº 2 :*

Trataremos ahora encontrar los parámetros " Y " en el mismo cuadripolo .



Cortocircuitando la salida se tiene : $V_2 = 0$

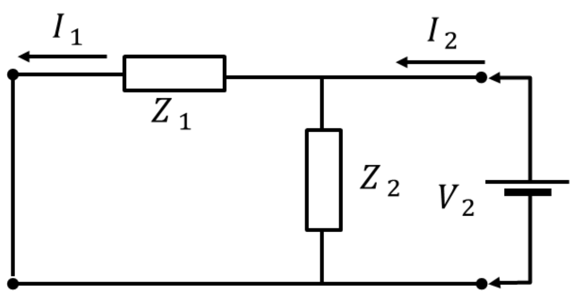
$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} V_1 + \cancel{Y_{12}\,0} \\ I_2 = Y_{21} V_1 + \cancel{Y_{22}\,0} \end{cases}$$

$$V_1 = I_1 \, . \, Z_1 \Rightarrow \frac{I_1}{V_1} = \frac{1}{Z_1} \Rightarrow \boxed{Y_{11} = \frac{1}{Z_1}}$$

$$V_1 = I_2 \, . \, Z_1 \Rightarrow \frac{I_2}{V_1} = \frac{1}{Z_1} \Rightarrow \boxed{Y_{21} = \frac{1}{Z_1}}$$

Cortocircuitando la entrada se tiene $V_1 = 0$

$$\begin{cases} I_1 = \cancel{Y_{11} V_1} + Y_{12} V_2 \\ I_2 = \cancel{Y_{21} V_1} + Y_{22} V_2 \end{cases}$$



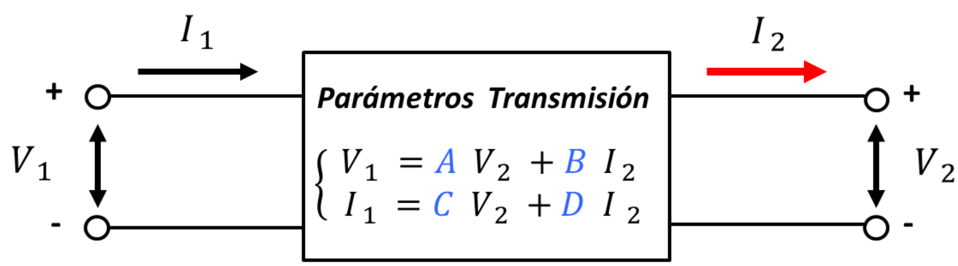

$$V_2 = I_1 \, . \, Z_1 \Rightarrow \frac{I_1}{V_2} = \frac{1}{Z_1} \Rightarrow \boxed{Y_{12} = \frac{1}{Z_1}}$$

$$V_2 = I_2 \, . \, Z_{equiv} \Rightarrow V_2 = I_2 \, . \, \frac{1}{\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)}$$

$$\frac{I_2}{V_2} = \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Y_{22} = \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right)}$$

### 6.3.6 *Paso de los parámetros de impedancia y admitancia a parámetros de transmisión.*

Dado que tienen importancia los cuadripolos transmitiendo energía, convendrá ahora determinar los parámetros generales de transmisión ( A, B, C y D ), a partir de considerar las impedancias ( Z ) y admitancias ( Y ). En otras palabras ello se obtendrá realizando mediciones en condiciones de circuito abierto ( parámetros Z ) o en cortocircuito ( parámetros Y ). Ello permitirá identificar a estas cajas negras. A partir de aquí se obtendrán los parámetros generales que accederán a identificar al circuito, de acuerdo a lo expresado en párrafos anteriores. El esquema a considerar es el siguiente, en el cual a $I_2$ se le ha invertido el sentido, ya que el cuadripolo se comporta transmitiendo energía desde 1 a 2.




La inversión de la corriente se aplicará a las ecuaciones lineales de impedancia y admitancia.

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}\, I_1 + Z_{12}\, I_2 \\ V_2 = Z_{21}\, I_1 + Z_{22}\, I_2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} V_1 = Z_{11}\, I_1 - Z_{12}\, I_2 \\ V_2 = Z_{21}\, I_1 - Z_{22}\, I_2 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}\,V_1 + Y_{12}\,V_2 \\ I_2 = Y_{21}\,V_1 + Y_{22}\,V_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = Y_{11}\,V_1 + Y_{12}\,V_2 \\ -I_2 = Y_{21}\,V_1 + Y_{22}\,V_2 \end{cases}$$

Esto se hace para adecuarlos a los parámetros generales que se plantearon.

De la segunda ecuación 1 se llega a : $Z_{21}\,I_1 = V_2 + Z_{22}\,I_2$

Despejando $I_1$ queda

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{Z_{21}}\,V_2 + \frac{Z_{22}}{Z_{21}}\,I_2}$$

Comparando con : $I_1 = C\,V_2 + D\,I_2$

$$C = \frac{1}{Z_{21}}$$

$$D = \frac{Z_{22}}{Z_{21}}$$

Reemplazando el valor de $I_1$ en la primer ecuación de la 1 queda :

$$V_1 = Z_{11}\left(\frac{1}{Z_{21}}\,V_2 + \frac{Z_{22}}{Z_{21}}\,I_2\right) - Z_{12}\,I_2$$

$$V_1 = \frac{Z_{11}}{Z_{21}}\,V_2 + \left(\frac{Z_{22}\;Z_{11}}{Z_{21}} - Z_{12}\right)\,I_2$$

$$\boxed{A = \frac{Z_{11}}{Z_{21}}}$$

Comparándola con : $V_1 = A\ V_2 + B\ I_2$

$$\boxed{B = \frac{Z_{22}\ \ Z_{11}}{Z_{21}} - Z_{12}}$$

Realizando ahora el mismo procedimiento, pero para los parámetros " Y " se obtiene algo similar.

#### 6.3.6.1 *Análisis de los parámetros de transmisión.*

Volviendo ahora a los parámetros de la impedancia, y teniendo en cuenta las ecuaciones, se puede construir el determinante de los mismos así:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = A\,.\,D - B\,.\,C$$

Reemplazando los valores encontrados se tiene que :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{Z_{11}}{Z_{21}} & \dfrac{Z_{22}\ \ Z_{11}}{Z_{21}} - Z_{12} \\[2ex] \dfrac{1}{Z_{21}} & \dfrac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{vmatrix} = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} \cdot \frac{Z_{22}}{Z_{21}} - \left( \frac{Z_{22}\ \ Z_{11}}{Z_{21}} - Z_{12} \right) \cdot \frac{1}{Z_{21}}$$

$$\frac{Z_{11}}{Z_{21}} \cdot \frac{Z_{22}}{Z_{21}} - \left( \frac{Z_{22}\ \ Z_{11}}{Z_{21}\ Z_{21}} - \frac{Z_{12}}{Z_{21}} \right) = \cancel{\frac{Z_{11}}{Z_{21}} \frac{Z_{22}}{Z_{21}}} - \cancel{\frac{Z_{22}\ \ Z_{11}}{Z_{21}\ Z_{21}}} + \frac{Z_{12}}{Z_{21}}$$

Por ello: $$\boxed{A\,.\,D\;-\;B\,.\,C\;=\;\frac{Z_{12}}{Z_{21}}}$$

En esta ecuación se observa que si los cuatro parámetros de impedancia son distintos igual se cancelan los dos primeros términos del determinante. El determinante resulta distinto de " 1 ". En esta red los cuatro parámetros son independientes.

Si dos de ellos son iguales, caso de $Z_{21} = Z_{12}$ el determinante es igual a 1. En este caso la red resulta BILATERAL (se encuentra también para $Y_{21} = Y_{12}$ ), por lo que solamente hay tres parámetros independientes.

Con el análisis realizado, se pueden estudiar dos configuraciones muy comunes y que son: la red estrella o T y la triángulo o Pi. Por razones de simpleza y mejor aprovechamiento matemático, se estudiará la red T mediante los parámetros Z y la Pi con los parámetros Y.

### 6.3.6.2 *Resumen*

Cuando se poseen redes en los circuitos que posean dos terminales de entrada y dos de salida, se está en presencia de un cuadripolo (cuatro terminales o dos vías). En estas redes que pueden ser pasivas o activas , se pueden identificar (conocer) mediante mediciones en dos condiciones: a circuito abierto o en cortocircuito, obteniéndose de ellas parámetros que caracterizan a la red oculta. Así entonces se poseen parámetros Z, parámetros Y, generales de transmisión (A, B, C y D), que son para configuraciones pasivas; y parámetros híbridos h y transconductancia g, siendo estos últimos, circuitos con componentes activos. Estos parámetros, permiten caracterizar la forma del cuadripolo: bilateral, unilateral, y simétrico en casos de cuadripolos con componentes pasivos. Mediante esta técnica, solamente con mediciones en cortocircuito y abierto, se logra conocer el interior de cajas negras y caracterizarlas o sea conocer que poseen y su comportamiento.

### 6.3.6.3 *Preguntas de autoevaluación*

40) ¿Qué condición debe cumplirse para que un elemento con cuatro terminales sea un cuadripolo?

41) ¿Qué son los puertos de un cuadripolo y cuantos tiene? ¿Cuáles son?

42) ¿Cuáles son los problemas a tratar con cuadripolos? Realice una pequeña descripción de los mismos.

43) ¿Cómo es la representación general de un cuadripolo? Especifique las ecuaciones correspondientes a parámetros de Impedancia, Híbridos y Transmisión.

44) ¿Cómo es la representación general de un cuadripolo? Especifique las ecuaciones correspondientes a parámetros de Admitancia, Transconductancia

45) ¿Qué ocurre cuando los parámetros de trasferencia son nulos?

46) ¿Qué ocurre cuando los parámetros de trasferencia son nulos en un solo sentido? Indique para los diferentes tipos de cuadripolos cuáles son estos parámetros.

47) ¿Qué ocurre cuando los parámetros de transferencia son iguales entre sí y distintos de cero? Indique para los diferentes tipos de cuadripolos cuáles son estos parámetros.

48) ¿Qué ocurre cuando los parámetros de transferencia son distintos entre sí y distintos de cero? Indique para los diferentes tipos de cuadripolos cuáles son estos parámetros.

49) ¿Cuales son las formas que se obtienen los parámetro de un cuadripolo? ¿Con que hay que contar en cada caso?

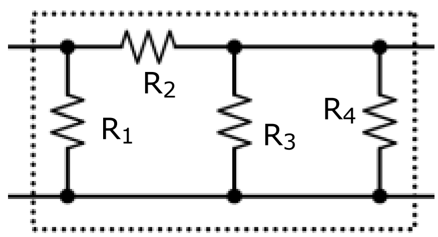
50) ¿Cómo se obtienen los parámetros de Impedancia por ensayo? Explique el procedimiento.

51) ¿Cómo se obtienen los parámetros de Admitancia por ensayo? Explique el procedimiento.

52) ¿Cómo se detecta que un cuadripolo es bilateral a partir de los parámetros de Transmisión?.

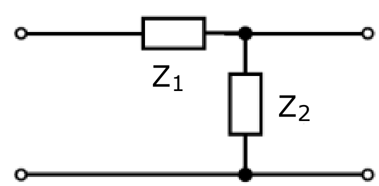
### 6.3.6.4 *Ejercicios propuestos*

19) En el circuito de la siguiente figura $R_1 = 8\ \Omega$ ; $R_2 = 10\ \Omega$ ; $R_3 = 9\ \Omega$ ; $R_4 = 3\ \Omega$. Calcular los parámetros Z, del cuadripolo dentro de la línea de puntos.

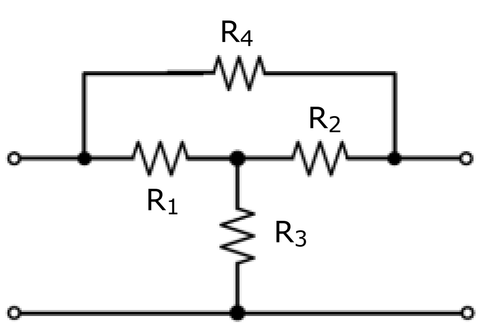



20) En el circuito de la siguiente figura $Z_1 = (2 - j\ 3)\ \Omega$ y $Z_2 = (1 - j\ 1)\ \Omega$.

1. Calcular los parámetros Z del cuadripolo.
2. Indicar también la característica del cuadripolo.
3. Obtener los parámetros de trasmisión



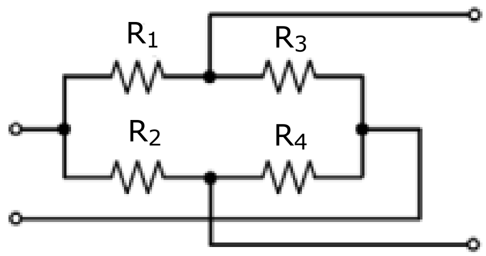

21) En el circuito de la figura $R_1 = 1\Omega$ ; $R_2 = 1\Omega$ ; $R_3 = 8\ \Omega$ y $R_4 = 4\ \Omega$.



1. Calcular los parámetros de transmisión A, B, C y D del cuadripolo.

2. Indicar las características del cuadripolo.

22) En el circuito de la siguiente figura $R_1 = 1\Omega$ ; $R_2 = 2\Omega$ ; $R_3 = 3\Omega$ y $R_4 = 2\Omega$.



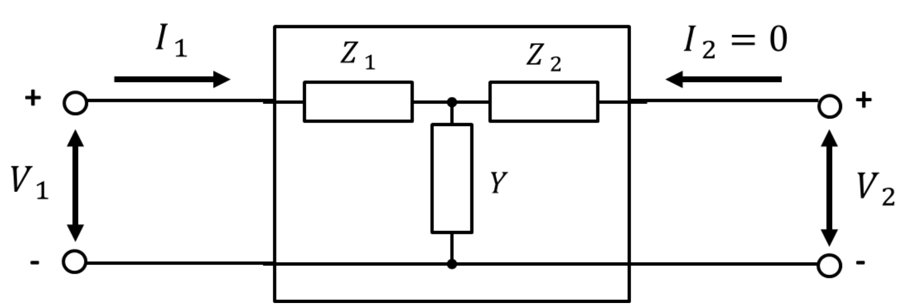

1. Calcular los parámetros Y del cuadripolo.

2. Indicar también la característica del cuadripolo.

### 6.3.6.5 *Redes T Caracterización con parámetros de impedancia*

Para ello entonces, primero se comienza con los parámetros Z en la red T (ecuaciones de nodo), los elementos que están en serie son impedancias, y las que están en paralelo, admitancias.

Por otro lado, este tipo de cuadripolo se estudiará en primer lugar haciendo el análisis desde la entrada con la salida sin carga (abierta), por lo que $I_2$ será cero; posteriormente se realiza el análisis, de igual forma pero desde la salida.



Escribiendo nuevamente las ecuaciones de los parámetros Z :

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}\, I_1 + Z_{12}\, I_2 \\ V_2 = Z_{21}\, I_1 + Z_{22}\, I_2 \end{cases}$$

Despejando en cada caso los parámetros Z se obtiene :

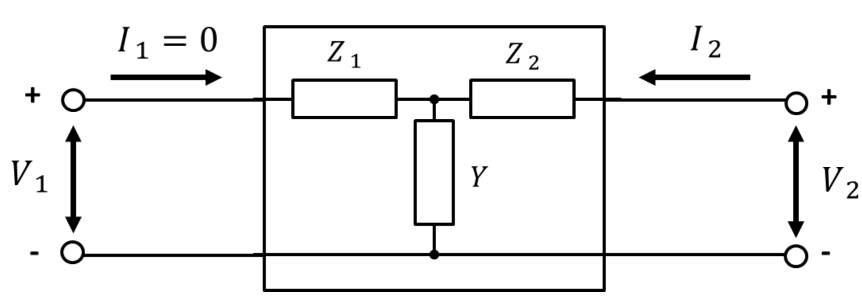
$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2 = 0} \quad \Longrightarrow \quad Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{I_1 \left(Z_1 + \frac{1}{Y}\right)}{I_1}$$

$$\boxed{Z_{11} = Z_1 + \frac{1}{Y}}$$

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2 = 0} \quad \Longrightarrow \quad Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{I_1 \left(\frac{1}{Y}\right)}{I_1}$$

$$\boxed{Z_{21} = \frac{1}{Y}}$$

Para $I_1 = 0$ , esto es que la entrada está abierta y por lo tanto :



$$Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1 = 0} \Longrightarrow Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = \frac{I_2\left(\frac{1}{Y}\right)}{I_2}$$

$$\boxed{Z_{12} = \frac{1}{Y}}$$

$$Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1 = 0} \Longrightarrow Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{I_2\left(Z_2 + \frac{1}{Y}\right)}{I_2}$$

$$\boxed{Z_{22} = Z_2 + \frac{1}{Y}}$$

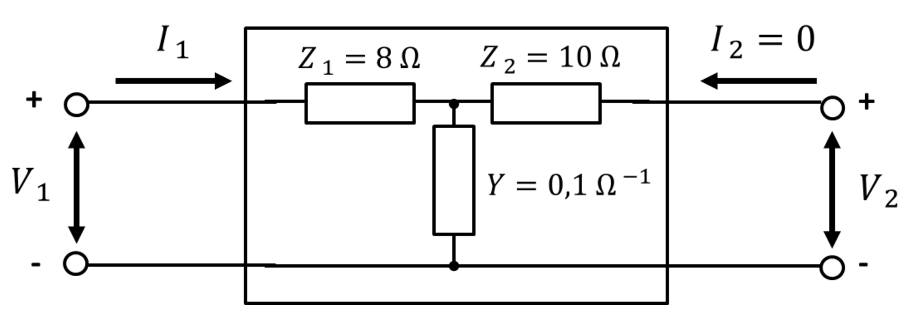
Si $Z_1 \neq Z_2$ el cuadripolo es BILATERAL y ASIMETRICO

Si $Z_1 = Z_2$ el cuadripolo es BILATERAL y SIMETRICO

Ahora, para afianzar los conocimientos que se están adquiriendo, se propone un ejemplo con componentes pasivos tales como resistencias.

Se deberán encontrar los valores de A, B, C y D y catalogar el tipo de cuadripolo.

Veamos un ejemplo :

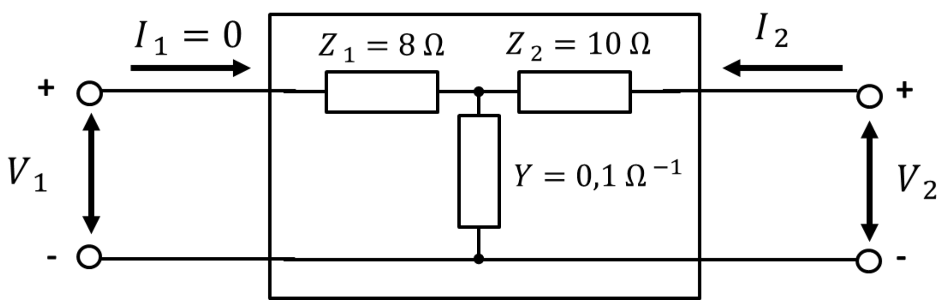


Desde $V_1$ con $I_2 = 0$ (salida abierta)

$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2 = 0} \Rightarrow Z_{11} = Z_1 + \frac{1}{Y} = 8\,\Omega + \frac{1}{0{,}1\Omega^{-1}} = 18\ \Omega$$

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2 = 0} \Rightarrow Z_{21} = \frac{1}{Y} = \frac{1}{0{,}1\ \Omega^{-1}} = 10\ \Omega$$

Desde $V_2$ con $I_1 = 0$ ( entrada abierta )




$$Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1 = 0} \Rightarrow Z_{22} = Z_2 + \frac{1}{Y} = 10\,\Omega + \frac{1}{0{,}1\,\Omega^{-1}} = 20\ \Omega$$

$$Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1 = 0} \Rightarrow Z_{12} = \frac{1}{Y} = \frac{1}{0{,}1\ \Omega^{-1}} = 10\ \Omega$$

Recordando los parámetros de trasmisión en función de las impedancias

$$A = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} \qquad B = \frac{Z_{22}\ \ Z_{11}}{Z_{21}} - Z_{12} \qquad C = \frac{1}{Z_{21}} \qquad D = \frac{Z_{22}}{Z_{21}}$$

Reemplazando se llega a :

$$A = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} = \frac{18\ \Omega}{10\ \Omega} = 1{,}8$$

$$B = \frac{Z_{22}\ \ Z_{11}}{Z_{21}} - Z_{12} = \frac{20\ \Omega\ .\ 18\ \Omega}{10\ \Omega} - 10\ \Omega = 26\ \ \Omega$$

$$C = \frac{1}{Z_{21}} = \frac{1}{10\ \Omega} = 0{,}1\ mho$$

$$D = \frac{Z_{22}}{Z_{21}} = \frac{20\ \Omega}{10\ \Omega} = 2$$

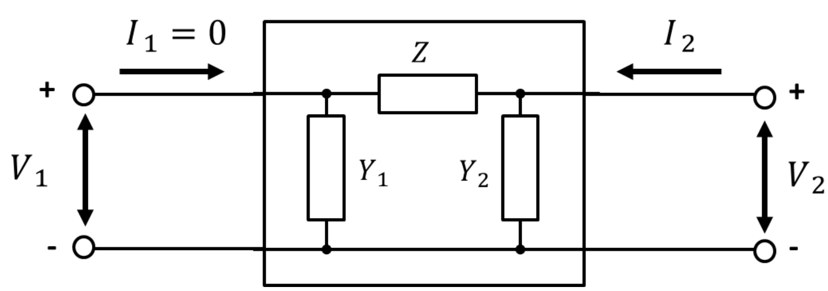
Se puede observar que el cuadripolo no es simétrico pero si es bilateral , en cuanto a los parámetros A, B, C y D se tiene :

Aplicando el determinante de los parámetros, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = A\,.\,D - B\,.\,C = 1{,}8\,.\ 2 - 26\ .\ 0{,}1 = 1$$

### 6.3.6.6 *Redes π Caracterización con Parámetros de admitancia.*

Ahora se analizará el caso de la red Pi, tal como se observa en la siguiente figura :



Se aplican las ecuaciones de admitancia $\begin{cases} I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \end{cases}$

La obtención de las admitancias se realiza con la salida y entrada en cortocircuito, o sea en un caso $V_2 = 0$ y en el otro $V_1 = 0$ .

Recordando la relación entre los parámetros de transmisión con las admitancias :

$$\boxed{A = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}} \quad \boxed{B = -\frac{1}{Y_{21}}} \quad \boxed{C = Y_{12} - \frac{Y_{11} \; Y_{22}}{Y_{21}}} \quad \boxed{D = -\frac{Y_{11}}{Y_{21}}}$$

Haciendo un análisis similar se llega a :

$$\boxed{Y_{11} = Y_1 + \frac{1}{Z}} \quad \boxed{Y_{12} = -\frac{1}{Z}} \quad \boxed{Y_{21} = -\frac{1}{Z}} \quad \boxed{Y_{22} = Y_2 + \frac{1}{Z}}$$

Debe tenerse en cuenta que la información que se obtiene de parámetros Z e Y y de transmisión, es a partir exclusivamente de mediciones a circuito abierto y en cortocircuito, lo que permite caracterizar al cuadripolo y encuadrarlo en los tipos conocidos.

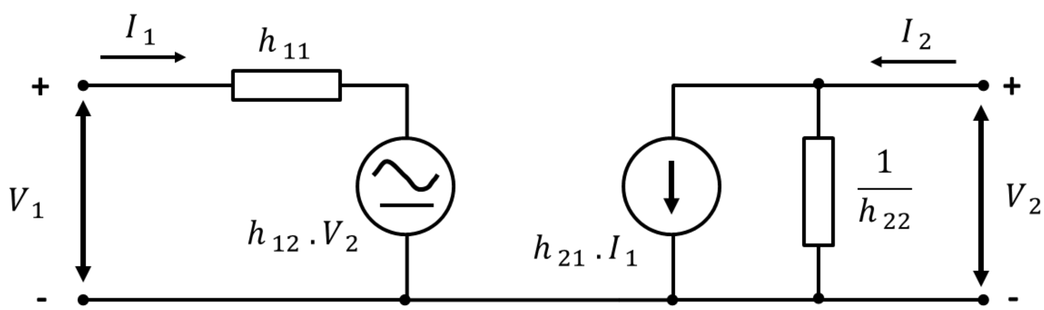
Cuando se vean los parámetros híbridos y trasconductancia, en asignaturas del próximo semestre estos permitirán definir características típicas de dispositivos activos tales como transistores bipolares y de efecto de campo. Estas características son las que los fabricantes especifican en los manuales de estos dispositivos.

### 6.3.7 *Parámetros Híbridos.*

Estos parámetros identifican generalmente a las características de los transistores bipolares. Los mismos se identifican con una fuente de tensión y otra de corriente; de allí el nombre de híbridos. Resulta la expresión general

$$\begin{cases} V_1 = h_{11}\, I_1 + h_{12}\, V_2 \\ I_2 = h_{21}\, I_1 + h_{22}\, V_2 \end{cases}$$

En la Figura se observa el circuito equivalente cuando se utilizan parámetros Híbridos. Se puede observar que en la entrada el circuito equivalente está formado por una fuente de tensión. En cambio, en el circuito de salida el circuito equivalente está formado por una fuente de corriente.




En los TRANSISTORES BIPOLARES cada uno de los parámetros recibe nombres particulares.

$h_{11}$ = *Impedancia de Entrada del Transistor (con la salida en Cortocircuito)*

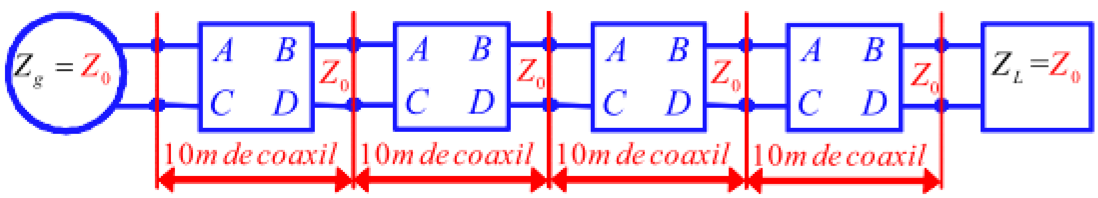
$h_{12}$ = *Ganancia de Tensión Inversa (con Entrada en Circuito Abierto)*

$h_{21}$ = *Ganancia de Corriente Directa (con la salida en Cortocircuito)*

$h_{22}$ = *Admitancia de Salida con la entrada en Circuito Abierto*

### 6.3.8 *El problema de transmisión : Impedancia Característica.*

Estas redes poseen una impedancia que se denomina impedancia característica Zo. Esta impedancia es la que se observa desde un extremo del conductor con la salida cargada con la misma impedancia (recordar el teorema de máxima transferencia de potencia). Esto es característico en forma general para conductores especiales tales como los cables coaxiales o conductores paralelos utilizados para transmitir potencia en alta frecuencia. Se puede decir que diez metros lineales de cable coaxil, por ejemplo está representado por un cuadripolo característico cuyas impedancias están perfectamente distribuidas. Las redes de transmisión tanto de datos como de energía son simétricas y bilaterales. Esta característica es muy importante para los conductores coaxiales, y dado que se consideran con constantes distribuidas por unidad lineal de cable, se puede considerar como un cable total a la conexión en cascada de cuadripolos representativos de los mismos.




En la Figura se pueden ver varios cuadripolos cuya impedancia de entrada es igual a la de salida o sea Zo. Al conectar como carga cada cuadripolo, su impedancia es Zo, y así entonces, también el generador ve una carga única cuya impedancia es Zo. El conductor puede tener por ejemplo 40 o 100 m, pero la impedancia característica es siempre la misma.

Cabe ahora una pregunta: ¿ habrá algún valor de la impedancia de salida para el que la impedancia de entrada sea igual a la de salida ? ; ¿ Se podrán realizar ajustes en $Z_2$ hasta que $Z_2 = Z_1$ ?


Si es posible realizar este ajuste y a esta impedancia se le ha dado el nombre de ***impedancia imagen*** ¨$\boldsymbol{Z_0}$¨ . El valor de ¨$\boldsymbol{Z_0}$¨ puede encontrarse en función de los parámetros B y C que caracterizan a la red.

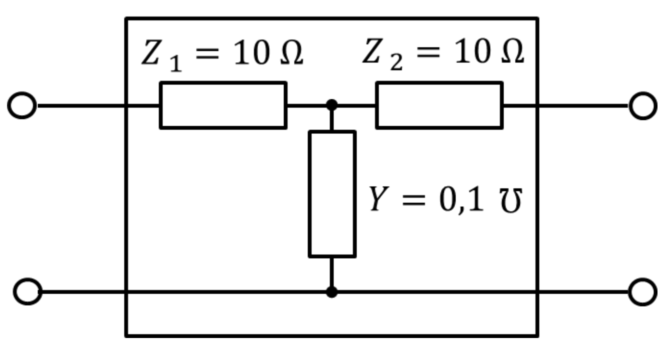
Realizando los cálculos correspondientes ( no de interés en esta cátedra) se llega :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{B}{C}}$$

Se puede llegar a encontrar $\boldsymbol{Z_0}$ de una manera mucho más simple y común utilizando las impedancias de entrada en circuito abierto y en corto circuito.

$$Z_0 = \sqrt{Z_{1\,(cortocircuito)} \cdot Z_{1\,(abierto)}}$$

## 6.3.8.1 *Ejemplo*



$$Z_{11} = Z_1 + \frac{1}{Y} = 10\,\Omega + 10\,\Omega = 20\,\Omega$$

$$Z_{12} = \frac{1}{Y} = 10\,\Omega$$

$$Z_{21} = \frac{1}{Y} = 10\,\Omega$$

$$Z_{22} = Z_2 + \frac{1}{Y} = 10\,\Omega + 10\,\Omega = 20\,\Omega$$

$$B = \frac{Z_{22}\ \ Z_{11}}{Z_{21}} - Z_{12}$$

$$C = \frac{1}{Z_{21}}$$

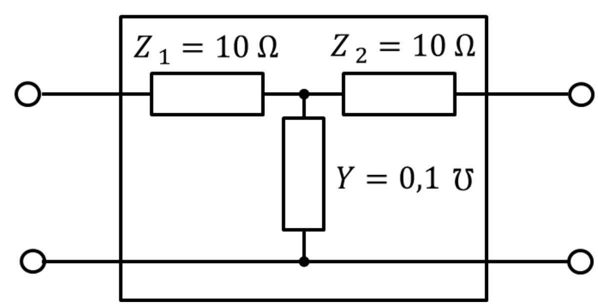
$$B = \frac{20\,\Omega\ .\ 20\,\Omega}{10\,\Omega} - 10\,\Omega = 30\,\Omega$$

$$C = \frac{1}{10\,\Omega} = 0{,}1\,\Omega^{-1}$$

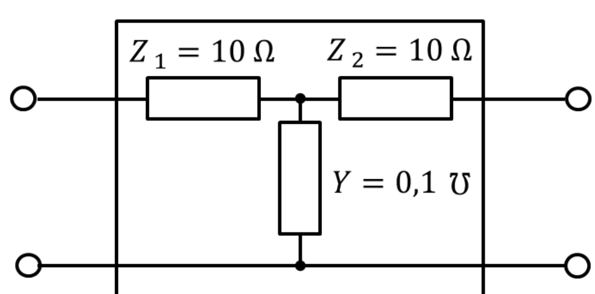
$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{30\,\Omega}{0{,}1\,\Omega^{-1}}} = 17{,}32\,\Omega}$$

También puede calcularse como :

$$Z_{1\,(corto)} = Z_1 + \left( \frac{\frac{1}{Y}\ .\ Z_2}{\frac{1}{Y} + Z_2} \right) = 15\,\Omega$$

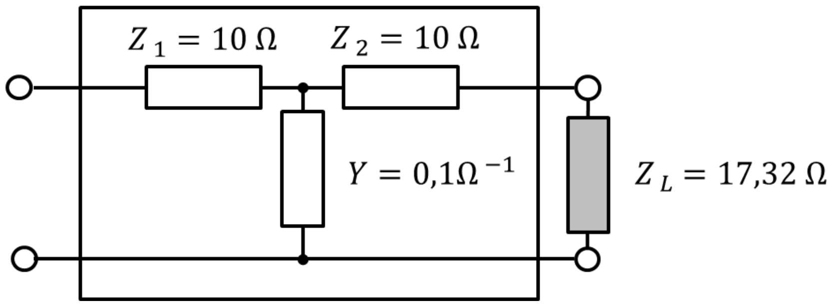



$$Z_{1\,(abierto)} = Z_1 + \frac{1}{Y} = 20\,\Omega$$



$$Z_0 = \sqrt{15\,\Omega \quad 20\,\Omega} = 17{,}32\,\Omega$$

Esto significa que colocando una carga de 17,32 Ω en la salida puede calcularse la impedancia de entrada al cuadripolo y ver que valor tiene.




$$Z_{entrada} = 10\,\Omega + \frac{\frac{1}{0{,}1\,\Omega}\quad 27{,}32\,\Omega}{\frac{1}{0{,}1\,\Omega} + 27{,}32\,\Omega} = 17{,}32\,\Omega$$

Con ello, y tal como se esperaba la impedancia de entrada es igual a la impedancia de salida cuando la impedancia es la característica.

#### 6.3.8.2 *Resumen*

Una aplicación importante de los cuadripolos es cuando se transfiere energía o información a través de líneas o cables. Para describir su comportamiento se utilizan los parámetros generales de transmisión (A, B, C y D). Es importante que se transfiera la mayor cantidad de energía, para ello tiene que haber acoplamiento entre las impedancias del generador, la línea de transmisión y la carga. Se puede obtener una característica muy utilizada en los conductores coaxiales y de conductores paralelo: su impedancia característica Zo. Esta impedancia está muy ligada a las impedancias del generador y receptor, ya que para transmitir la máxima potencia, ellas deben ser iguales (recuerde el teorema de máxima transferencia de potencia).

### 6.3.8.3 *Preguntas de autoevaluación*

53) ¿Para que sirve la impedancia característica de una liena de transmisión? ¿Qué principio se tiene que cumplir para que haya mayor transferencia de energía?

54) ¿Cómo se obtiene la impedancia característica a partir de los parámetros generales de transmisión?

55) ¿Cómo se obtiene la impedancia característica de un cuadripolo por experimentación?.

## 6.4 Bibliografía

[1] Knowlton, A. E.; "Manual Estándar del Ingeniero Electricista";

Editorial LABOR; 1956.

[2] Pueyo, Héctor, Marco, Carlos y QUEIRO, Santiago; "Circuitos

Eléctricos: Análisis de Modelos Circuitales3ra Ed. Tomo 1";

Editorial Alfaomega;2009.

[3] Pueyo, Héctor, Marco, Carlos y QUEIRO, Santiago; "Circuitos

Eléctricos: Análisis de Modelos Circuitales3ra Ed. Tomo 2";

Editorial Alfaomega;2011.

[4] Terman, Frederick E.; “Ingeniería en Radio”; Editorial ARBÓ;1952.

[5] PACKMAN, Emilio; “Mediciones Eléctricas”; Editorial ARBO;1972.

[6] CASTEJÓN, Agustín y SANTAMARIA, Germán; “Tecnología Eléctrica”- Editorial Mc GRAW HILL;1993.

[7] SANJURJO NAVARRO, Rafael; “Maquinas Eléctricas”; Editorial Mc GRAW HILL;1989.

[8] POLIMENI, Héctor G.; “Documentos de Cátedra”; 2009.

[9] ROBERT L. BOYLESTAD ; " Introducción al análisis de circuitos " Editorial : PEARSON EDUCACIÓN, México, 2011 decimo segunda edición