Teori Probabilitas

Debrina Puspita Andriani
www.debrina.lecture.ub.ac.id
E-mail : debrina.ub@gmail.com / debrina@ub.ac.id

Outline

- Konsep Probabilitas
- Ruang Sampel
- Komplemen Kejadian
- Probabilitas Bersyarat
- Teorema Bayes

Berapa peluang munculnya angka 4 pada dadu merah???

Berapa peluang munculnya King heart?

Berapa peluang munculnya gambar?

Peluang atau Probabilitas

adalah perbandingan antara kejadian yang diharapkan muncul dengan banyaknya kejadian yang mungkin muncul.

Konsep Probabilitas

- Bila banyak kejadian yang diharapkan muncul dinotasikan dengan n(A), dan banyaknya kejadian yang mungkin muncul (ruang sampel = S) dinotasikan dengan n(S) maka Peluang kejadian A ditulis

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Contoh 1

Peluang muncul muka dadu nomor 5 dari pelemparan sebuah dadu satu kali adalah ...

- Penyelesaian:

n(5) = 1 dan

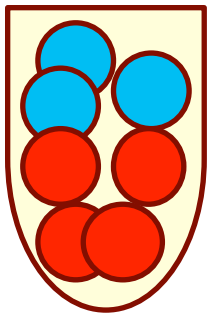
n(S) = 6 → yaitu: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Jadi $P(5) = \frac{n(5)}{n(S)} = \frac{1}{6}$

Contoh 2

Dalam sebuah kantong terdapat 4 kelereng merah dan 3 kelereng biru.

Bila **sebuah** kelereng diambil dari dalam kantong maka peluang terambilnya kelereng merah adalah …



- Penyelesaian:
- Kejadian yang diharapkan muncul yaitu terambilnya kelereng merah ada 4
  → n(merah) = 4
- Kejadian yang mungkin muncul yaitu terambil 4 kelereng merah dan 3 kelereng biru
  → n(S) = 4 + 3 = 7
- Jadi peluang kelereng merah yang terambil adalah

$$P(\text{merah}) = \frac{n(\text{merah})}{n(S)}$$

$$P(\text{merah}) = \frac{4}{7}$$

Contoh 3

Dalam sebuah kantong terdapat 7 kelereng merah dan 3 kelereng biru.

Bila **tiga buah** kelereng diambil sekaligus maka peluang terambilnya kelereng merah adalah …

Banyak kelereng merah = 7
dan biru = 3
→ jumlahnya = 10

- Penyelesaian:
- Banyak cara mengambil 3 dari 7

$$\rightarrow {}_7C_3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!.4!}$$

$$= \frac{5.6.7}{1.2.3}$$

$$= 35$$

- Banyak cara mengambil 3 dari 10

$$\rightarrow {}_{10}C_3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!.7!}$$

$$= \frac{8.9.10}{1.2.3}$$

$$= 120$$

- Peluang mengambil 3 kelereng merah sekaligus

$$= \frac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$$

Ruang Sampel (S)

Suatu kelompok universal bagi **semua** hasil aktual ataupun konseptual yang mungkin terjadi karena pada setiap percobaan selalu diinginkan terjadinya berbagai peristiwa yang berhubungan dengan percobaan itu sendiri.

Contoh 1

- Pada peristiwa melempar dua buah dadu, merah dan hitam, masing- masing bermata 1 sampai 6 secara bersama-sama sebanyak satu kali.
  Berapakah nilai peluang kejadian-kejadian :

a. muncul mata 4 dadu merah **atau** mata ganjil dadu hitam

b. muncul mata dadu merah kurang dari 3 **dan** mata dadu hitam lebih dari 4

Penyelesaian:

dadu merah \ dadu hitam	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ruang sampel ada sebanyak 36 kemungkinan.

a. kejadian muncul mata 4 dadu merah **atau** mata ganjil dadu hitam ada sebanyak 21 kemungkinan pasangan, maka peluangnya adalah :

$$\text{P(merah angka 4 atau hitam angka ganjil)} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

Penyelesaian:

dadu merah \ dadu hitam	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ruang sampel ada sebanyak 36 kemungkinan.

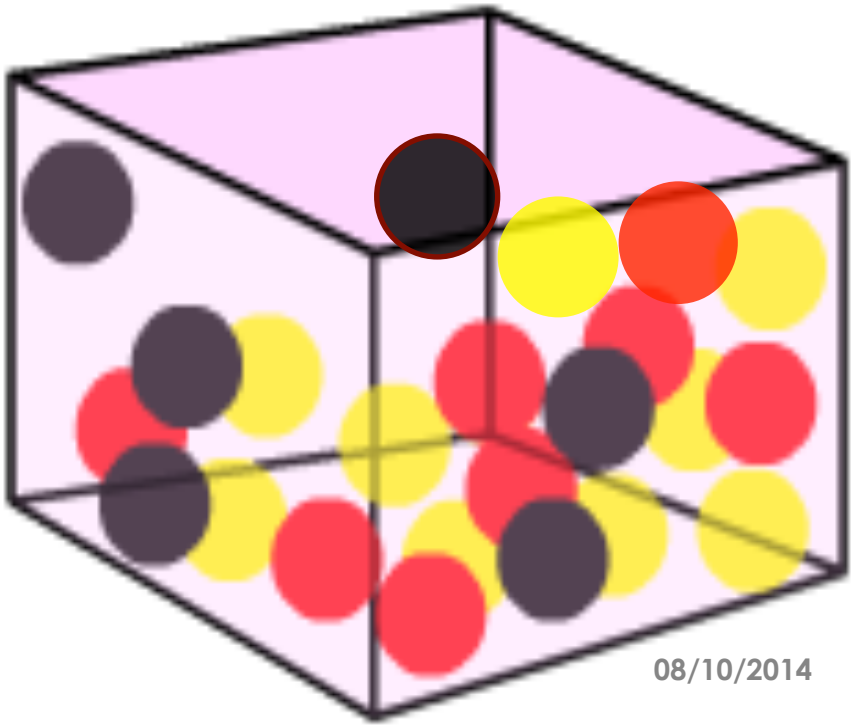
b. kejadian muncul mata dadu merah kurang dari 3 **dan** mata dadu hitam lebih dari 4 ada sebanyak 4 kejadian, yaitu (1,5), (2,5), (1,6) dan (2,6), maka nilai peluangnya adalah :

$$P(\text{merah} < 3 \text{ dan hitam} > 4) = \frac{4}{36}$$

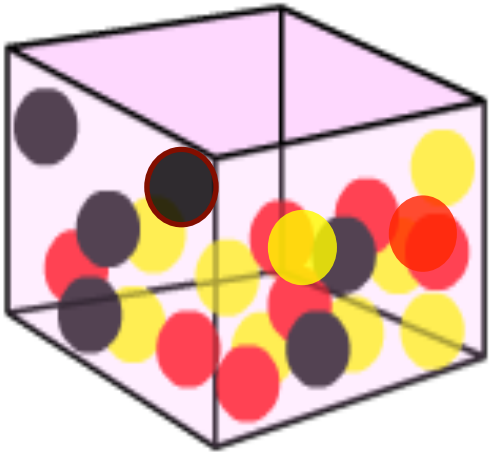
$$= \frac{1}{9}$$

Contoh 2

- Di dalam sebuah kotak terdapat 6 bola warna hitam, 8 bola warna merah dan 10 bola warna kuning.
- Diambil sebuah bola secara acak dan tidak dikembalikan.
- Tentukan nilai peluang terambil berturut-turut :
  a. Bola hitam
  b. Bola kuning
  c. Bola merah



Penyelesaian:



a. $P(1 \text{ hitam}) = \frac{6}{6 + 8 + 10}$

$= \frac{6}{24}$

$= \frac{1}{4}$

b. $P(1 \text{ kuning}) = \frac{10}{5 + 8 + 10}$

$= \frac{10}{23}$

c. $P(1 \text{ merah}) = \frac{8}{5 + 8 + 9}$

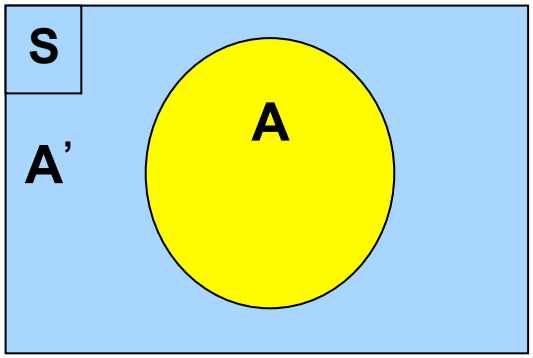
$= \frac{8}{22}$

$= \frac{4}{11}$

Komplemen Kejadian

- Nilai suatu peluang antara 0 sampai dengan 1 → $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A) = 0$ → kejadian yang **tidak mungkin** terjadi
- $P(A) = 1$ → kejadian yang **pasti** terjadi
- $P(A^1) = 1 - P(A)$
  → **A^1 adalah komplemen A**

Komplemen



Kejadian bukan A dari himpunan S ditulis dengan simbol **A' (atau A^c)** disebut komplemen dari A.

Jika A mempunyai *a* elemen, dan S mempunyai *n* elemen maka A' mempunyai *n-a* elemen.

Maka P(A') adalah peluang tidak terjadinya A.

$$P(A') = \frac{n-a}{n}$$

$$= \frac{n}{n} - \frac{a}{n}$$

$$= 1 - \frac{a}{n}$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Contoh 1

- Sepasang suami istri mengikuti keluarga berencana. Mereka berharap mempunyai dua anak.
- Peluang *paling sedikit* mempunyai seorang anak laki-laki adalah …

Penyelesaian:

Kemungkinan pasangan anak yang akan dimiliki:

- keduanya laki-laki,
- keduanya perempuan atau
- 1 laki-laki dan 1 perempuan → n(S) = 3

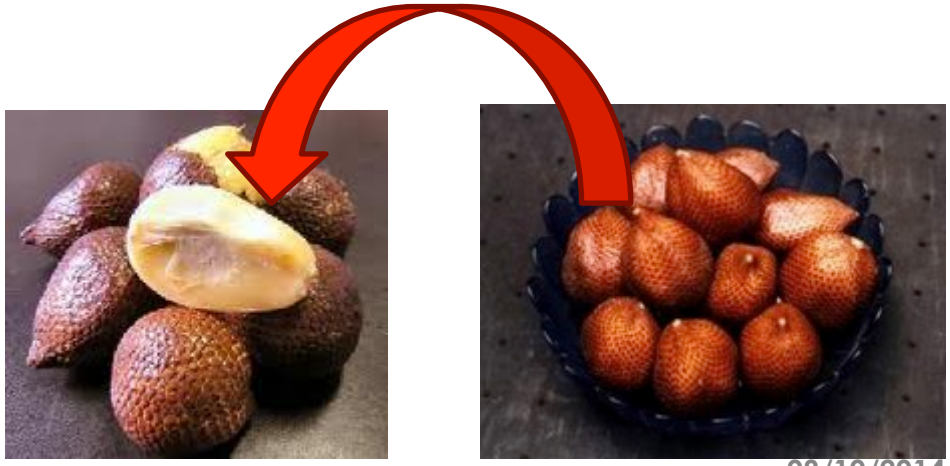
- Peluang *paling sedikit 1 laki-laki*

  = 1 – peluang *semua perempuan*

$$= 1 - \frac{n(p,p)}{n(S)} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Contoh 2

- Dalam sebuah keranjang terdapat 50 buah salak, 10 diantaranya busuk.
- Diambil 5 buah salak.
- Peluang *paling sedikit* mendapat sebuah salak *tidak busuk* adalah …



Penyelesaian:

- banyak salak 50, 10 salak busuk
- diambil 5 salak → r = 5
- $n(S) = {}_{50}C_5$

- Peluang paling sedikit 1 salak *tidak busuk*

= 1 – peluang *semua* salak busuk

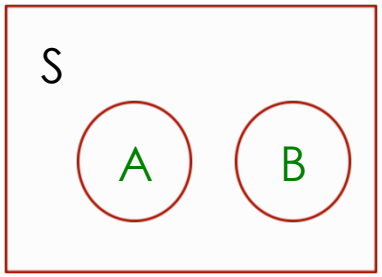
$$= 1 - \frac{{}_{10}C_5}{{}_{50}C_5}$$

Kejadian Saling Lepas
(Eksklusif Bersamaan)

Jika A dan B adalah dua kejadian yang saling lepas maka peluang kejadian A atau B adalah

$$P(A \text{ atau } B) = P(A) + P(B)$$

DUA KEJADIAN SALING LEPAS



Jika suatu kejadian *A* dan *B* **tidak dapat terjadi pada saat bersamaan**, dalam hal ini

$(A \cap B) = \emptyset$, maka kita katakan dua kejadian tersebut adalah saling lepas. Untuk kejadian saling lepas (saling asing)

Maka $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$

Jika *A* dan *B* kejadian yang saling lepas maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Contoh

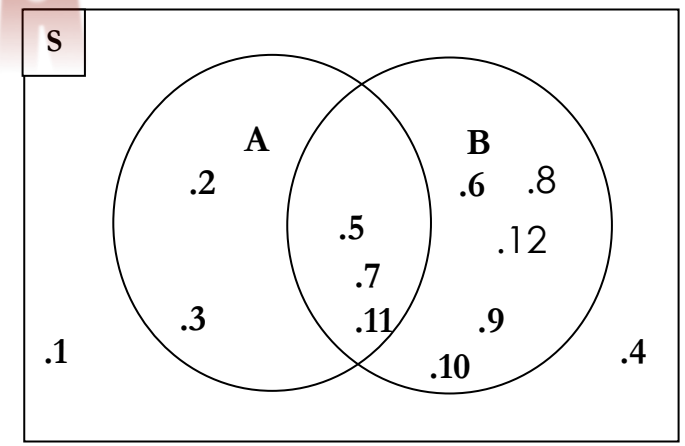
- Dari satu set kartu bridge (tanpa joker) akan diambil dua kartu satu persatu berturut-turut, kemudian kartu tersebut dikembalikan.
- Peluang terambilnya kartu as atau kartu king adalah …

Penyelesaian:

- Kartu bridge = 52 → n(S) = 52
- Kartu as = 4 → n(as) = 4
- P(as) = $\frac{4}{52}$
- Kartu king = 4 → n(king) = 4
- P(king) = $\frac{4}{52}$

→ **P(as atau king) = P(as) + P(king) =** $\frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52}$

Exception:
DUA KEJADIAN SALING LEPAS



S= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

A= {kejadian mendapatkan bilangan prima}

B= {kejadian mendapatkan sedikitnya bilangan 5}

Maka $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$
$B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Sehingga: $$P(A \cup B) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Jika kita melihat hubungan antara , *P(A)* dan *P(B)*, terdapat **irisan antara *A* dan *B***, yaitu {5, 7, 11} dan juga diperoleh

$$P(A \cap B) = \frac{3}{12} \quad \text{dan} \quad P(A \cup B) = \frac{10}{12} = \frac{5+8-3}{12} = \frac{5}{12} + \frac{8}{12} - \frac{3}{12}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Kejadian Saling Bebas (Independen)

Kejadian A dan B saling bebas
Jika keduanya **tidak saling mempengaruhi**

DUA KEJADIAN SALING BEBAS

Sekeping uang logam dan sebuah dadu dilempar sekali. Kejadian munculnya sisi angka pada uang logam dan kejadian munculnya mata 3 pada dadu adalah dua kejadian yang **tidak saling mempengaruhi**.

Jika *A* dan *B* kejadian yang saling bebas maka

$$P(A \text{ dan } B) = P(A) \times P(B)$$

Contoh 1

- Anggota paduan suara suatu sekolah terdiri dari 12 putra dan 18 putri. Bila diambil dua anggota dari kelompok tersebut untuk mengikuti lomba perorangan
- maka peluang terpilihnya putra dan putri adalah …

Penyelesaian:

banyak anggota putra 12 dan banyak anggota putri 18
→ n(S) = 12 + 18 = 30

P(putra dan putri)
= P(putra) x P(putri)

$$= \frac{12}{30} \times \frac{18}{30}$$

$$= \frac{6}{25}$$

Contoh 2

- Peluang Amir lulus pada Ujian Nasional adalah 0,90. Sedangkan peluang Badu lulus pada Ujian Nasional 0,85.
- Peluang Amir lulus tetapi Badu tidak lulus pada ujian itu adalah …

Penyelesaian:

- Amir lulus $\rightarrow P(A_L) = 0{,}90$
- Badu lulus $\rightarrow P(B_L) = 0{,}85$
- Badu tidak lulus

  $\rightarrow P(B_{TL}) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$

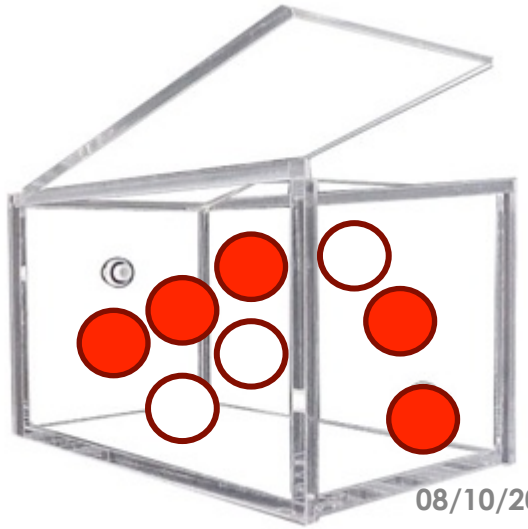
- $P(A_L \text{ tetapi } B_{TL}) = P(A_L) \times P(B_{TL})$

  $= 0{,}90 \times 0{,}15$

  $= 0{,}135$

Contoh 3

- Dari sebuah kotak yang berisi 5 bola merah dan 3 bola putih diambil 2 bola sekaligus secara acak.
- Peluang terambilnya keduanya merah adalah …



Penyelesaian:

- banyak bola merah = 5 dan putih = 3
  → jumlahnya = 8

- banyak cara mengambil 2 dari 5

$$\rightarrow {}_5C_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!.3!}$$

$$= \frac{4.5}{1.2}$$

$$= 10$$

- banyak cara mengambil 2 dari 8

$$\rightarrow {}_8C_2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!.6!}$$

$$= \frac{7.8}{1.2}$$

$$= 28$$

❖ Peluang mengambil 2 bola merah sekaligus = $\frac{10}{28}$

Probabilitas Bersyarat

Peluang **terjadinya kejadian B**
jika diketahui **kejadian A telah terjadi**

Peluang Bersyarat

Peluang terjadinya kejadian B jika diketahui suatu kejadian lain A telah terjadi

- Dinyatakan dengan $P(B \mid A)$.
- Dibaca " Peluang B terjadi bila diketahui A terjadi" atau " peluang B bila A diketahui".

Peluang bersyarat B dengan diketahui A, dinyatakan dengan $P(B \mid A)$, ditentukan oleh :

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ bila } P(A) > 0$$

Contoh:

Sebuah penerbangan reguler berangkat tepat pada waktunya adalah P(B) = 0,83. Peluang penerbangan itu mendarat tepat pada waktunya adalah P (A) = 0,92 dan peluang penerbangan itu berangkat dan mendarat tepat pada waktunya adalah P(A∩B) = 0,78.

Hitung peluang suatu pesawat pada penerbangan tersebut :

1. Mendarat pada waktunya jika diketahui bahwa pesawat itu berangkat tepat pada waktunya

2. Berangkat pada waktunya jika diketahui bahwa pesawat tersebut mendarat tepat waktu.

Solusi

1. Peluang pesawat mendarat tepat waktu bila diketahui pesawat tersebut berangkat tepat waktu adalah :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0.78}{0.83}$$

$$= 0.94$$

2. Peluang pesawat berangkat tepat waktu bila diketahui pesawat tersebut mendarat tepat waktu adalah :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(B/A) = \frac{0.78}{0.92}$$

$$= 0,85$$

Probabilitas Bersyarat

- Apabila terdapat suatu kondisi dimana probabilitas P(A/B) menjadi bernilai sama dengan P(A), maka dalam hal ini **peristiwa B tidak mempunyai pengaruh** terhadap terjadinya peristiwa A, sehingga :

P(A/B)=P(A)

Atau

P(B/A)=P(B)

→ dinamakan sebagai peristiwa yang saling bebas (*independent*)

- Antara A dan B, sesuai dengan aturan perkalian maka kondisi saling bebas tersebut :

$$p(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Dengan demikian, bila terdapat peristiwa A1, A2,.....,Ak yang saling bebas maka:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 .... \cap A_k) = P(A_1).P(A_2).....P(A_k)$$

Kaidah Penggandaan

Bila suatu percobaan kejadian A dan B keduanya dapat terjadi sekaligus, maka

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Karena kejadian $A \cap B$ dan $B \cap A$ setara, dapat ditulis juga:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B)P(A|B)$$

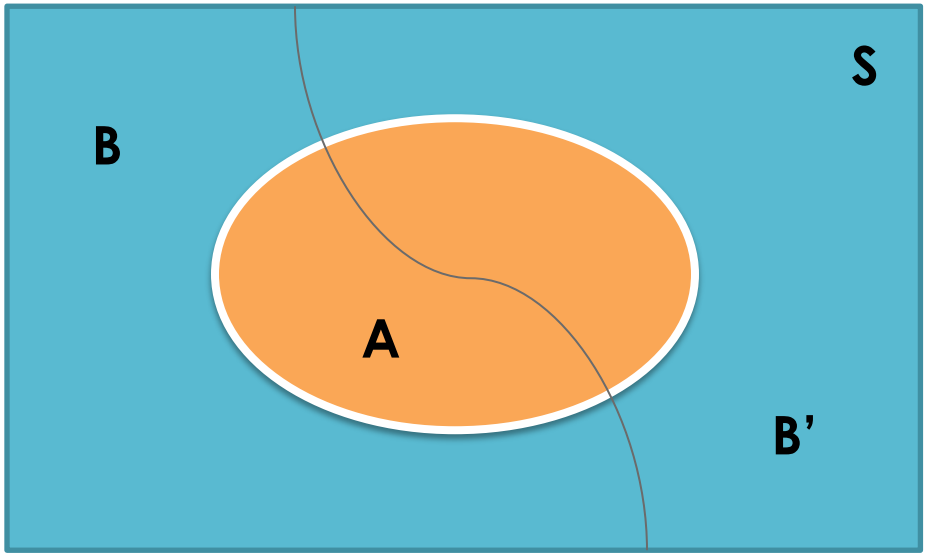
Contoh:
Dalam sebuah kotak terdapat 10 gulungan film, dan diketahui bahwa 3 diantaranya rusak.
Hitung peluang bila 2 buah gulungan film rusak diambil acak satu persatu secara berurutan.

Penyelesaian:
Misal A: peristiwa terambil gulungan pertama rusak
B: peristiwa terambil gulungan kedua rusak
Maka peluang kedua gulungan rusak adalah :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$
$$= (3/10).(2/9) = 1/15$$

Teorema Bayes

Teorema Bayes



$$A = (BA) \ (B' \ A)$$

$$P(A) = P(BA) + P(B'A)$$

$$= P(B).P(A|B) + P(B').P(A|B')$$

Aturan Bayes

Pandang diagram venn berikut:

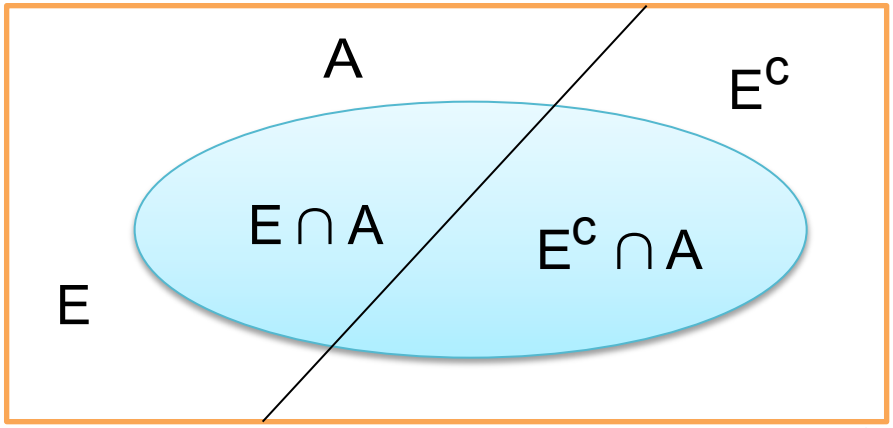


Diagram Venn untuk kejadian A,E dan E^c

$$(E \cap A) \text{dan} (E^c \cap A)$$

saling terpisah, jadi

$$A = (E \cap A) \cup (E^c \cap A)$$

Diperoleh rumus $P(A) = P\left[(E \cap A) \cup (E^c \cap A)\right]$

$$= P(E \cap A) + P(E^c \cap A)$$

$$= P(E)P(A/E) + P(E^c)P(A/E^c)$$

Contoh (1)

Ruang sampel menyatakan populasi orang dewasa yang telah tamat SMU di suatu kota tertentu dikelompokan menurut jenis kelamin dan status bekerja seperti pada tabel sbb:

	Bekerja	Tdk bekerja	**Jumlah**
Laki-laki	460	40	500
Wanita	140	260	400
Jumlah	600	300	900

Daerah ini akan dijadikan daerah pariwisata dan seseorang akan dipilih secara acak dalam usaha penggalakan kota tersebut sebagai obyek wisata keseluruh negeri. Dan diketahui bahwa ada 36 orang yang berstatus bekerja dan 12 orang berstatus menganggur adalah anggota koperasi.

Berapa peluang orang yang terpilih ternyata anggota koperasi?

Penyelesaian

Misal: E = orang yang terpilih berstatus bekeja
A = orang yang terpilih anggota koperasi

Dari tabel diperoleh: $P(E) = \frac{600}{900} = \frac{2}{3}$

$$P(E^c) = 1 - P(E) = \frac{1}{3}$$

$$P(A/E) = \frac{36}{600} = \frac{3}{50}$$

$$P(A/E^c) = \frac{12}{300} = \frac{1}{25}$$

Jadi peluang orang yang terpilih anggota koperasi adalah

$$P(A) = P(E)P(A/E) + P(E^c)P(A/E^c)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{50}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{25}\right)$$

$$= \frac{4}{75}$$

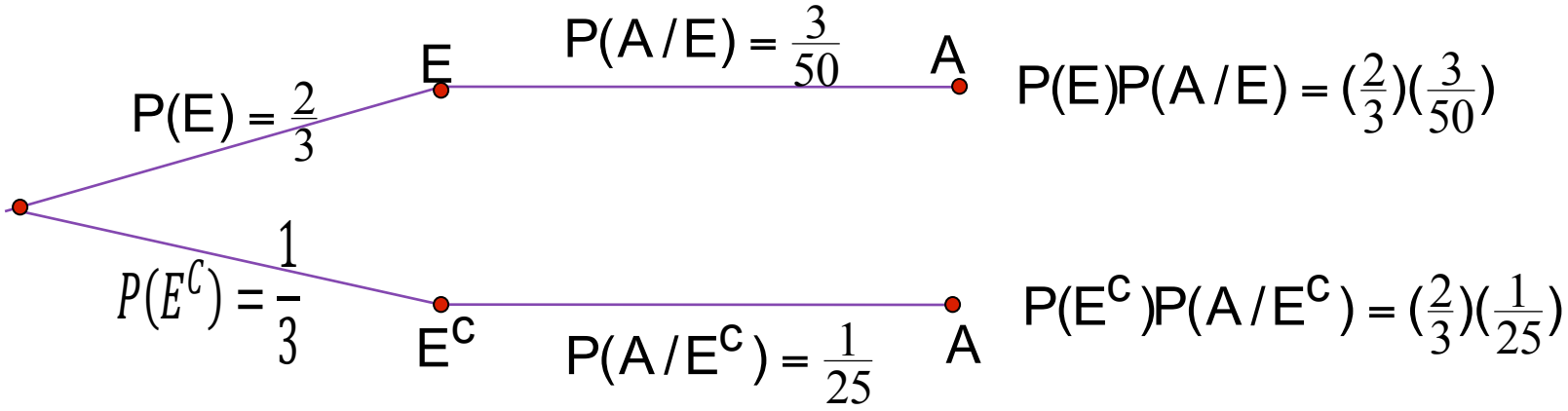


Diagram pohon untuk data

Jika dalam ruang sampel (S) terdapat kejadian-kejadian saling lepas $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_k$ dengan probabilitas ≠ 0, dan bila ada kejadian A yang mungkin dapat terjadi pada kejadian $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_k$ maka probabilitas kejadian A adalah:

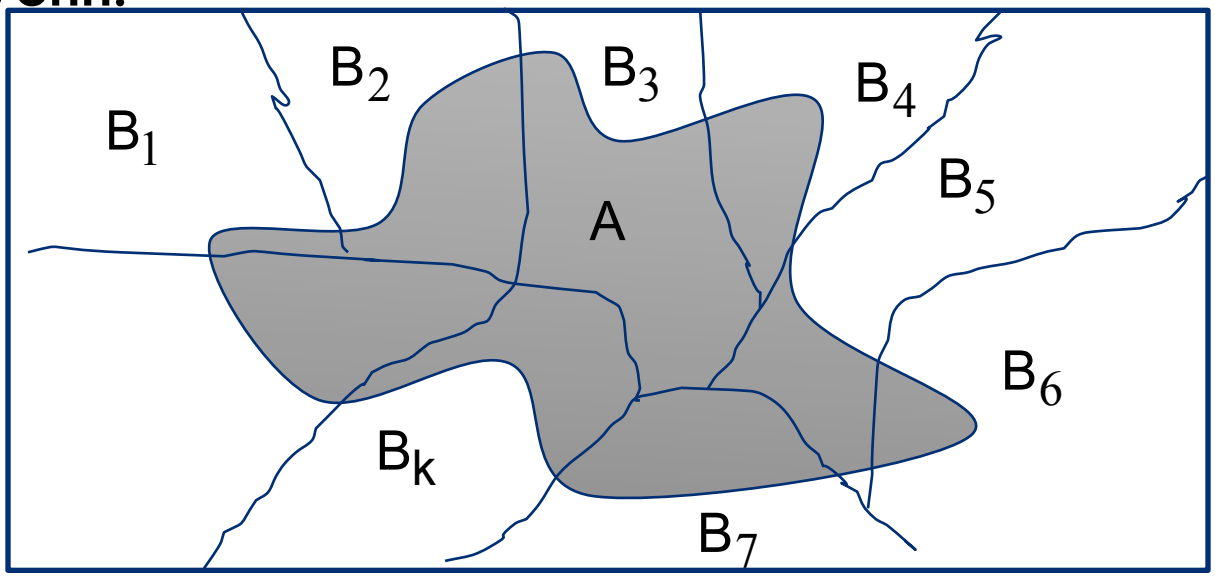
$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i-1}^{k} P(B_i)P(A/B_i)$$

$$= P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \ldots\ldots + P(B_k)P(A/B_k)$$

dengan: $A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \ldots\ldots \cup (B_k \cap A)$

dan $B_1 \cap A, B_2 \cap A, \ldots\ldots\ldots, B_k \cap A$ **saling terpisah**

Diagram Venn:



Penyekatan ruang sampel S

Jika kejadian-kejadian $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_k$ merupakan sekatan dari ruang sampel S dengan $P(B_i) \neq 0 \; ; i = 1, 2, \ldots, k$,maka utk sembarang $P(A) \neq 0$ kejadian A , berlaku:

$$P(B_r/A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A/B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A/B_i)}$$

untuk r = 1,2, …. , k

Contoh (2)

Tiga anggota dari sebuah organisasi dicalonkan sebagai ketua. Telah diketahui peluang bpk Ali (A) terpilih 0,3 ; peluang bpk Basuki (B) terpilih 0,5 dan peluang bpk Catur (C) terpilih 0,2. Juga telah diketahui peluang kenaikan iuran anggota jika A terpilih 0,8 ; jika B terpilih 0,1 dan jika C terpilih 0,4.

a. Berapa peluang iuran anggota akan naik ?
b. Berapa peluang bpk C terpilih sbg ketua jika terjadi kenaikan iuran?

Penyelesaian

Misal: I : iuran anggota dinaikan

A : pak Ali terpilih → P (A) = 0.3

B : pak Basuki terpilih → P (B) = 0.5

C : pak Catur terpilih → P (C) = 0.2

$P(I/A) = 0.8$

$P(I/B) = 0.1$

$P(I/C) = 0.4$

a). Peluang iuran anggota akan naik adalah

$$P(I) = P(A)P(I/A) + P(B)P(I/B) + P(C)P(I/C)$$
$$= (0.3)(0.8) + (0.5)(0.1) + (0.2)(0.4)$$
$$= 0.24 + 0.05 + 0.08$$
$$= 0.37$$

b). Peluang bapak C terpilih sebagai ketua jika terjadi kenaikan iuran adalah

$$P(C/I) = \frac{P(C)P(I/C)}{P(A)P(I/A) + P(B)P(I/B) + P(C)P(I/C)}$$
$$= \frac{(0.2)(0.4)}{(0.3)(0.8) + (0.5)(0.1) + (0.2)(0.8)}$$
$$= \frac{0.08}{0.37} = \frac{8}{37}$$