Teoria da Medida e Integração

MCTB020-17

quadrimestre 2020.1 – ECE

Sumário

1 Espaços de medida **2**

2 Medidas exteriores **5**

3 Geração de medidas **7**

4 A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ **18**

4.1 A σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$ 20

4.2 O σ-ideal dos conjuntos nulos em $\mathbb{R}$ 27

4.3 Mais alguns aspectos dos conjuntos mensuráveis 29

5 Funções mensuráveis **34**

5.1 A reta real estendida ($\overline{\mathbb{R}}$) 34

5.2 Agora sim, funções mensuráveis! 35

6 Integrais de funções mensuráveis **43**

6.1 A relação entre a integral de Lebesgue e a integral de Riemann 68

6.2 Produtos de espaços de medida 72

6.3 Modos de convergência 81

Olá!

Antes de prosseguirmos, vamos dar uma geral no que já fizemos até aqui...

Onde estávamos?

Primeiramente, vamos relembrar algumas definições e resultados principais.

1 Espaços de medida

Definição 1.1 (Álgebra e σ-álgebra)**.** Sejam X um conjunto não vazio e $\mathscr{A} \subseteq \wp(X)$. Dizemos que $\mathscr{A}$ é uma *álgebra* (sobre X) se:

(i) $\mathscr{A} \neq \emptyset$;

(ii) para todo $A \in \mathscr{A}$, tem-se que $X \setminus A \in \mathscr{A}$;

(iii) para todo $\mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}$ finito, tem-se que $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathscr{A}_0} A \in \mathscr{A}$.

Dizemos, ainda, que $\mathscr{A}$ é uma *σ-álgebra* (sobre X) se $\mathscr{A}$ é uma álgebra em que a condição (iii) acima ainda é satisfeita se a palavra "finito" for substituída por "enumerável".

Observação 1.2. Equivalentemente, poderíamos substituir o item (i) na Definição 1.1 por

(i') $\emptyset \in \mathscr{A}$

ou por

(i'') $X \in \mathscr{A}$.

Observação 1.3. Equivalentemente, poderíamos substituir o item (iii) na Definição 1.1 por

(iii') para todo $\mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}$ finito e não vazio, tem-se que $\displaystyle\bigcap_{A \in \mathscr{A}_0} A \in \mathscr{A}$.

Observação 1.4. Se $\mathscr{A}$ é uma álgebra sobre $X \neq \emptyset$ e $A, B \in \mathscr{A}$, então $A \setminus B \in \mathscr{A}$ — pois $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$.

Definição 1.5 (Medida numa álgebra)**.** Sejam X um conjunto não vazio, $\mathscr{A} \subseteq \wp(X)$ uma álgebra e $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ uma função. Dizemos que μ é uma *medida* em $\mathscr{A}$ se as duas condições a seguir são satisfeitas:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) para todo $\mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}$ enumerável cujos elementos são dois a dois disjuntos e tal que $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathscr{A}_0} A \in \mathscr{A}$, tem-se que $\displaystyle\mu\Big(\bigcup_{A \in \mathscr{A}_0} A\Big) = \sum_{A \in \mathscr{A}_0} \mu(A)$.

Exemplo 1.6 (Um exemplo importante)**.** Sejam

$$\mathcal{I} = \{\,]a, +\infty[\, : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\,]-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\} \cup \{\,]a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$$

e $\mathscr{B}$ o conjunto de todas as uniões finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{I}$. (Nestas condições, $\mathscr{B}$ é uma álgebra — vide Exercício I-4 da Lista 1.)

Então

$$\begin{array}{rccc} \rho & : & \mathscr{B} & \to & [0, +\infty] \\ & & \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} I_k & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \end{array}$$

é uma medida em $\mathscr{B}$ — sendo $\ell(I)$ o comprimento do intervalo I.

Definição 1.7 (Medida numa σ-álgebra)**.** Sejam X um conjunto não vazio, $\mathscr{A} \subseteq \wp(X)$ uma álgebra e $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ uma função. Dizemos que μ é uma *medida* em $\mathscr{A}$ se as duas condições a seguir são satisfeitas:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) para todo $\mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}$ enumerável cujos elementos são dois a dois disjuntos, tem-se que $\mu\Big(\bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}_0} A\Big) = \sum\limits_{A \in \mathscr{A}_0} \mu(A)$.

Definição 1.8 (Espaço de medida)**.** Um *espaço de medida* é uma tripla $(X, \mathscr{A}, \mu)$ em que X é um conjunto não vazio, $\mathscr{A} \subseteq \wp(X)$ é uma σ-álgebra e $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ é uma medida em $\mathscr{A}$.

Proposição 1.9 (Algumas propriedades básicas)**.** Seja $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida. Então:

(a) para quaisquer $A, B \in \mathscr{A}$ com $A \subseteq B$, tem-se $\mu(A) \leq \mu(B)$ — além disso, se $\mu(B) < +\infty$, então $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$;

(b) para todo $\mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}$ enumerável, tem-se que $\mu\Big(\bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}_0} A\Big) \leq \sum\limits_{A \in \mathscr{A}_0} \mu(A)$;

(c) para toda sequência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathscr{A}$ satisfazendo $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $\mu\Big(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$;

(d) para toda sequência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathscr{A}$ satisfazendo $\mu(A_0) < +\infty$ e $A_n \supseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $\mu\Big(\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Definição 1.10 (Medida (σ-)finita)**.** Seja $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida.

- Dizemos que μ é uma medida *finita* se $\mu(X) < +\infty$.
- Dizemos que μ é uma medida *σ-finita* se existe $\mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}$ enumerável com $X = \bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}_0} A$ satisfazendo $\mu(A) < +\infty$ para todo $A \in \mathscr{A}_0$.

Definição 1.11 (Espaço de medida completo)**.** Um espaço de medida $(X, \mathscr{A}, \mu)$ é *completo* se, para todo $A \in \mathscr{A}$ com $\mu(A) = 0$, tem-se que $\wp(A) \subseteq \mathscr{A}$. (Em outras palavras: $(X, \mathscr{A}, \mu)$ é completo se $B \subseteq A \in \mathscr{A}$ com $\mu(A) = 0$ implica que $B \in \mathscr{A}$.)

Proposição 1.12 (Completamento de espaços de medida)**.** Seja $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida. Então, tomando-se

$$\widetilde{\mathscr{A}} = \{A \cup B : A \in \mathscr{A} \text{ e } B \subseteq Z \text{ para algum } Z \in \mathscr{A} \text{ com } \mu(Z) = 0\}$$

e definindo-se $\tilde{\mu}(A \cup B) = \mu(A)$ para todo $A \cup B \in \widetilde{\mathscr{A}}$ com $A \in \mathscr{A}$ e $B \subseteq Z$ para algum $Z \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(Z) = 0$, obtemos um espaço de medida completo $(X, \widetilde{\mathscr{A}}, \tilde{\mu})$ tal que $\mathscr{A} \subseteq \widetilde{\mathscr{A}}$ e $\tilde{\mu}\restriction_{\mathscr{A}} = \mu$ (ou seja, $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathscr{A}$). Além disso, se μ é (σ-)finita, então $\tilde{\mu}$ também o é.

O espaço de medida $(X, \widetilde{\mathscr{A}}, \tilde{\mu})$ assim obtido é dito o *completamento* de $(X, \mathscr{A}, \mu)$.

Observação 1.13. Dado um espaço de medida $(X, \mathscr{A}, \mu)$, pode ser que existam vários espaços de medida completos $(X, \mathscr{A}', \mu')$ satisfazendo $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}'$ e $\mu'\restriction_{\mathscr{A}} = \mu$; mas, para todos eles, teremos $\mathscr{A}' \supseteq \widetilde{\mathscr{A}}$ (sendo $\widetilde{\mathscr{A}}$ a σ-álgebra da Proposição 1.12) — isso porque, na demonstração da Proposição 1.12, mostramos que $\widetilde{\mathscr{A}}$ é a menor σ-álgebra sobre X que contém $\mathscr{A} \cup \{B \subseteq X : \text{existe } Z \in \mathscr{A} \text{ com } \mu(Z) = 0 \text{ tal que } B \subseteq Z\}$. Além disso, a função $\tilde{\mu}$ definida na Proposição 1.12 é a única medida em $\widetilde{\mathscr{A}}$ que estende μ.

Assim, num certo sentido, o completamento de um espaço de medida é o "menor" espaço de medida completo cuja σ-álgebra contém a original.

2 Medidas exteriores

Definição 2.1 (Medida exterior)**.** Seja X um conjunto não vazio. Dizemos que uma função $\mu^* : \wp(X) \to [0, +\infty]$ é uma *medida exterior* (sobre X) se as três seguintes condições são satisfeitas:

(*i*) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(*ii*) para quaisquer $A, B \in \wp(X)$ com $A \subseteq B$, tem-se $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (isto é, μ^* é *monótona*);

(*iii*) para qualquer $\mathscr{A}_0 \subseteq \wp(X)$ enumerável, tem-se que $\mu^*\Big(\bigcup_{A \in \mathscr{A}_0} A\Big) \leq \sum_{A \in \mathscr{A}_0} \mu^*(A)$ (isto é, μ^* é *subaditiva*).

Proposição 2.2 (Geração de medidas exteriores)**.** Sejam X um conjunto não vazio, $\mathscr{B} \subseteq \wp(X)$ um subconjunto com $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathscr{B}$ e $\rho : \mathscr{B} \to [0, +\infty]$ uma função com $\rho(\emptyset) = 0$. Então a função $\mu^* : \wp(X) \to [0, +\infty]$ definida por

$$\mu^*(E) = \inf\Big\{ \sum_{B \in \mathscr{B}_0} \rho(B) : \mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B} \text{ é enumerável e tal que } E \subseteq \bigcup_{B \in \mathscr{B}_0} B \Big\}$$

para todo $E \subseteq X$ é uma medida exterior sobre X.

Além disso, no caso em que $\mathscr{B}$ é uma álgebra e ρ é uma medida em $\mathscr{B}$, tem-se que $\mu^*(B) = \rho(B)$ para todo $B \in \mathscr{B}$.

Lema 2.3 (Medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}$)**.** Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ arbitrário, tem-se que os quatro números a seguir são iguais:

$$(a)\ \inf\Big\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(\,]a_n, b_n[\,) : \forall n \in \mathbb{N}\ (a_n, b_n \in \mathbb{R}\ \wedge\ a_n \leq b_n)\ \wedge\ A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a_n, b_n[\Big\};$$

$$(b)\ \inf\Big\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(\,]a_n, b_n]\,) : \forall n \in \mathbb{N}\ (a_n, b_n \in \mathbb{R}\ \wedge\ a_n \leq b_n)\ \wedge\ A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a_n, b_n] \Big\};$$

$$(c)\ \inf\Big\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(\,[a_n, b_n[\,) : \forall n \in \mathbb{N}\ (a_n, b_n \in \mathbb{R}\ \wedge\ a_n \leq b_n)\ \wedge\ A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n[\Big\};$$

$$(d)\ \inf\Big\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(\,[a_n, b_n]\,) : \forall n \in \mathbb{N}\ (a_n, b_n \in \mathbb{R}\ \wedge\ a_n \leq b_n)\ \wedge\ A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \Big\};$$

Esse valor recebe o nome de *medida exterior de Lebesgue* de A, e é denotado por $m^*(A)$. (Pela Proposição 2.2, $m^* : \wp(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ é, de fato, uma medida exterior sobre $\mathbb{R}$.)

Para onde vamos?

O próximo passo agora é usar medidas exteriores (muito por exemplo, a medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}$) para obter medidas de fato.

A principal ferramenta para conseguirmos isso será o Teorema da Extensão de Carathéodory. Como as aulas foram interrompidas quando estávamos ~~na metade~~ no começo da demonstração desse teoremão, acho que podemos (re)fazê-lo desde o início na primeira aula do ECE. (Não percam!)

[Em todo caso, as Listas 1 e 2 são baseadas no conteúdo elencado até aqui.]

3 Geração de medidas

Fixe um conjunto não vazio X. Nosso objetivo agora é, a partir de uma medida exterior μ^* sobre X (definida, portanto, em $\wp(X)$), obter uma medida μ sobre X — que será simplesmente a restrição de μ^* a uma σ-álgebra $\mathscr{A} \subseteq \wp(X)$.

O desafio, naturalmente, é que $\mathscr{A}$ tem que ser muito bem escolhida para que:

- $\mu := \mu^* \restriction_{\mathscr{A}}$ seja uma medida de fato (então $\mathscr{A}$ não pode ter gente demais: se, por exemplo, $\mathscr{A} = \wp(X)$, em geral não dá pra conseguir uma medida em $\mathscr{A}$ — como vimos na primeira aula do curso para o caso $X = \mathbb{R}$);

  e

- $\mathscr{A}$ tenha gente o bastante pra que a medida μ assim obtida preste pra alguma coisa (senão era só tomar $\mathscr{A} = \{\emptyset, X\}$ e sair andando).

A título de motivação para como vamos definir essa tal σ-álgebra $\mathscr{A}$, vamos mostrar uma coisinha:

Lema 3.1. Considere as mesmas condições da Proposição 2.2 — com a hipótese adicional de $\mathscr{B}$ ser uma álgebra e ρ ser uma medida em $\mathscr{B}$. Então, para cada $A \in \mathscr{B}$, tem-se que $\forall E \subseteq X \ (\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A))$.

Como já fizemos outras vezes, para provar o Lema 3.1 faremos uso do seguinte resultado (cuja demonstração é um exercício de análise real):

Lema 0. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $\forall \varepsilon > 0 \ (a \leq b + \varepsilon)$, então $a \leq b$.

Demonstração do Lema 3.1. Fixe $A \in \mathscr{B}$ e $E \subseteq X$ arbitrários. Como $E = (E \cap A) \cup (E \setminus A)$, já temos (pelo fato de μ^* ser uma medida exterior) que

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

Agora, para mostrar a desigualdade

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \leq \mu^*(E),$$

usaremos o Lema 0.

Primeiramente, note que, se $\mu^*(E) = +\infty$, nada há a se fazer. Suponha, então, que $\mu^*(E) < +\infty$, e tome $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como μ^* é definida por

$$\mu^*(E) = \inf\Big\{ \sum_{B\in\mathscr{B}_0} \rho(B) : \mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B} \text{ é enumerável e tal que } E \subseteq \bigcup_{B\in\mathscr{B}_0} B \Big\},$$

tem-se (da definição de ínfimo) que existe $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$ enumerável tal que $E \subseteq \bigcup_{B\in\mathscr{B}_0} B$ e $\sum_{B\in\mathscr{B}_0} \rho(B) < \mu^*(E) + \varepsilon$.

Note que, para cada $B \in \mathscr{B}_0$, tem-se que $B \cap A \in \mathscr{B}$ e $B \setminus A \in \mathscr{B}$ (pois $\mathscr{B}$ é uma álgebra e $A, B \in \mathscr{B}$); logo, como ρ é uma medida em $\mathscr{B}$, decorre da igualdade $B = (B \cap A)\dot{\cup}(B \setminus A)$ e da Proposição 2.2 que $\rho(B) = \rho(B \cap A) + \rho(B \setminus A) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$. Assim,

$$\sum_{B\in\mathscr{B}_0} \rho(B) = \sum_{B\in\mathscr{B}_0} (\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)) = \sum_{B\in\mathscr{B}_0} \mu^*(B \cap A) + \sum_{B\in\mathscr{B}_0} \mu^*(B \setminus A). \quad (\dagger)$$

Agora, como $E \subseteq \bigcup_{B\in\mathscr{B}_0} B$, então

$$E \cap A \subseteq \Big(\bigcup_{B\in\mathscr{B}_0} B\Big) \cap A = \bigcup_{B\in\mathscr{B}_0} (B \cap A)$$

e

$$E \setminus A \subseteq \Big(\bigcup_{B\in\mathscr{B}_0} B\Big) \setminus A = \bigcup_{B\in\mathscr{B}_0} (B \setminus A);$$

logo, como μ^* é uma medida exterior, tem-se que

$$\mu^*(E \cap A) \leq \mu^*\Big(\bigcup_{B\in\mathscr{B}_0} (B \cap A)\Big) \leq \sum_{B\in\mathscr{B}_0} \mu^*(B \cap A)$$

e $\quad (\ddagger)$

$$\mu^*(E \setminus A) \leq \mu^*\Big(\bigcup_{B\in\mathscr{B}_0} (B \setminus A)\Big) \leq \sum_{B\in\mathscr{B}_0} \mu^*(B \setminus A).$$

Juntando (†) e (‡), obtemos

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \leq \sum_{B\in\mathscr{B}_0} \mu^*(B \cap A) + \sum_{B\in\mathscr{B}_0} \mu^*(B \setminus A) = \sum_{B\in\mathscr{B}_0} \rho(B) < \mu^*(E) + \varepsilon,$$

e a desigualdade desejada decorre então do Lema 0. $\square$

Informalmente, o Lema 3.1 nos diz que os elementos de $\mathscr{B}$ "cortam bem" qualquer subconjunto de X com relação a μ^*. Essa vai ser exatamente a propriedade (um tanto esquisita, é verdade) que vai definir os elementos da σ-álgebra que estamos buscando no caso geral — e que vai, magicamente, fazer o rolê todo funcionar.

O teoremão que vai nos dar isso é o famoso:

Teorema 3.2 (Teorema da Extensão de Carathéodory, pt.1)**.** Sejam X um conjunto não vazio e $\mu^* : \wp(X) \to [0, +\infty]$ uma medida exterior sobre X. Então

$$\mathscr{A} = \{A \subseteq X : \forall E \subseteq X \ (\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A))\}$$

é uma σ-álgebra sobre X; além disso, sendo μ a restrição de μ^* a $\mathscr{A}$, tem-se que $(X, \mathscr{A}, \mu)$ é um espaço de medida completo.

Demonstração. O enunciado é curto, mas temos várias coisas para mostrar aqui... Para ficar mais organizado, vamos dividir a demonstração em vários passos:
<u>*Passo 1.*</u> $\mathscr{A}$ é uma álgebra.
<u>*Passo 2.*</u> Para quaisquer $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ dois a dois disjuntos (sendo $n \in \mathbb{N}^*$) e $E \subseteq X$, tem-se que $\mu^*\Big(E \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap A_k)$.
<u>*Passo 3.*</u> $\mathscr{A}$ é uma σ-álgebra.
<u>*Passo 4.*</u> $\mu = \mu^*\restriction_{\mathscr{A}}$ é uma medida em $\mathscr{A}$.
<u>*Passo 5.*</u> O espaço de medida $(X, \mathscr{A}, \mu)$ é completo.

(O enunciado do teorema é a conjunção dos Passos 3, 4 e 5, apenas; mas vamos usar o Passo 2 para mostrar o Passo 3, e vamos precisar do Passo 1 para fazer o Passo 2.)

OK, vamos lá!

• <u>*Passo 1.*</u> $\mathscr{A}$ é uma álgebra.

É imediato que $\emptyset \in \mathscr{A}$ e $X \in \mathscr{A}$, de modo que $\mathscr{A} \neq \emptyset$. Além disso, dado $A \in \mathscr{A}$ arbitrário, tem-se que, para todo $E \subseteq X$,

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) = \mu^*(E \setminus (X \setminus A)) + \mu^*(E \cap (X \setminus A));$$

portanto, $X \setminus A \in \mathscr{A}$. Resta, assim, mostrar que toda união de uma quantidade finita de elementos de $\mathscr{A}$ é também um elemento de A. Para tanto, é suficiente mostrar que

toda união de dois elementos de $\mathscr{A}$ é um elemento de $\mathscr{A}$ — o caso mais geral decorre facilmente deste por indução.

Sejam, então, $A, B \in \mathscr{A}$ quaisquer. Devemos mostrar que, para todo $E \subseteq X$, tem-se $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \setminus (A \cup B))$.

Tome $E \subseteq X$ arbitrário. Note que $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \setminus B$; logo, a igualdade que devemos concluir é

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*((E \setminus A) \setminus B). \tag{$\dagger$}$$

Vamos ver como podemos usar a última parcela que aparece acima, $\mu^*((E \setminus A) \setminus B)$. Temos que essa mesma parcela aparece na seguinte igualdade (que decorre do fato de que $B \in \mathscr{A}$, aplicado ao conjunto $E \setminus A$):

$$\mu^*(E \setminus A) = \mu^*((E \setminus A) \cap B) + \mu^*((E \setminus A) \setminus B). \tag{$\dagger\dagger$}$$

Por outro lado, como $A \in \mathscr{A}$, temos também que $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$. Substituindo ($\dagger\dagger$) nesta igualdade, obtemos

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*((E \setminus A) \cap B) + \mu^*((E \setminus A) \setminus B).$$

Comparando a última igualdade obtida com a igualdade desejada ($\dagger$), nota-se que, para concluir o Passo 1, resta mostrar que

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*((E \setminus A) \cap B). \tag{$\ddagger$}$$

Mas o fato de que $A \in \mathscr{A}$, aplicado ao conjunto $E \cap (A \cup B)$, nos diz que

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) = \mu^*((E \cap (A \cup B)) \cap A) + \mu^*((E \cap (A \cup B)) \setminus A); \tag{$\ddagger\ddagger$}$$

e basta agora notar que $(E \cap (A \cup B)) \cap A = E \cap A$ e que $(E \cap (A \cup B)) \setminus A = (E \setminus A) \cap B$ (exercício) para obter ($\ddagger$) a partir de ($\ddagger\ddagger$).

• <u>*Passo 2.*</u> Para quaisquer $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ dois a dois disjuntos (sendo $n \in \mathbb{N}^*$) e $E \subseteq X$, tem-se que $\mu^*\Big(E \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap A_k)$.

Novamente, mostraremos apenas o caso $n = 2$; o caso geral decorre deste por indução, uma vez que $\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k = \Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \dot\cup A_{n+1}$ e que (pelo Passo 1) $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{A}$.

Tome, então, $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ e $E \subseteq X$ arbitrários com $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Aplicando ao conjunto $E \cap (A_1 \cup A_2)$ o fato de que $A_1 \in \mathscr{A}$, obtemos

$$\mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu^*((E \cap (A_1 \cup A_2)) \cap A_1) + \mu^*((E \cap (A_1 \cup A_2)) \setminus A_1)$$

— e, como A_1 e A_2 são disjuntos, isso se reduz a

$$\mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \cap A_2),$$

como queríamos.

• <u>*Passo 3.*</u> $\mathscr{A}$ é uma σ-álgebra.

Tome $\mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}$ enumerável; vamos mostrar que $\bigcup_{A \in \mathscr{A}_0} A \in \mathscr{A}$. Se $\mathscr{A}_0$ for finito, o Passo 1 já garante isso. Suponhamos então que $\mathscr{A}_0$ é infinito, e enumeremos os elementos deste conjunto como $\mathscr{A}_0 = \{A_k : k \in \mathbb{N}\}$. Seja $\widetilde{A} = \bigcup_{A \in \mathscr{A}_0} A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$. Queremos concluir que $\widetilde{A} \in \mathscr{A}$ — ou seja, que, para todo $E \subseteq X$,

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap \widetilde{A}) + \mu^*(E \setminus \widetilde{A}). \tag{$\dagger$}$$

(Na verdade, queremos a igualdade; mas a desigualdade $\leq$ já sai de graça porque $E = (E \cap \widetilde{A}) \cup (E \setminus \widetilde{A})$ e μ^* é subaditiva.)

Vamos tratar primeiro do caso em que $A_m \cap A_n = \emptyset$ sempre que $m, n \in \mathbb{N}$ forem distintos. Fixe $E \subseteq X$ arbitrário, e defina $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ ($\in \mathscr{A}$, pelo Passo 1) para cada $n \in \mathbb{N}$. Então, pelo Passo 2, todo $n \in \mathbb{N}$ satisfaz

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \setminus B_n) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \setminus B_n) \geq \sum_{k=0}^{n} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \setminus \widetilde{A}) \end{aligned}$$

(sendo que a desigualdade se deve ao fato de que $E \setminus \widetilde{A} \subseteq E \setminus B_n$ e μ^* é monótona). Como a desigualdade acima vale para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se assim que

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \setminus \widetilde{A});$$

disto decorre (†), uma vez que, como $E \cap \widetilde{A} = E \cap \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{\infty}(E \cap A_k)$ e μ^* é subaditiva, então $\mu^*(E \cap \widetilde{A}) = \mu^*\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty}(E \cap A_k)\Big) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(E \cap A_k)$.

Resta o caso em que os elementos de $\mathscr{A}_0$ não são dois a dois disjuntos. Mas este caso decorre do anterior: se, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, tomarmos $A_n \setminus B_{n-1}$ ($\in \mathscr{A}$) no lugar de A_n, teremos que estes são conjuntos dois a dois disjuntos cuja união é também $\widetilde{A}$; assim, pelo caso anterior, concluímos da mesma maneira que $\widetilde{A} \in \mathscr{A}$.

• <u>*Passo 4.*</u> $\mu = \mu^*\restriction_{\mathscr{A}}$ é uma medida em $\mathscr{A}$.

Tome $\mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}$ enumerável cujos elementos são dois a dois disjuntos, e seja $\widetilde{A} = \bigcup_{A \in \mathscr{A}_0} A \in \mathscr{A}$. Devemos mostrar que $\mu(\widetilde{A}) = \sum_{A \in \mathscr{A}_0} \mu(A)$.

Enumere os elementos de $\mathscr{A}_0$ como $\mathscr{A}_0 = \{A_k : k \in \mathbb{N}\}$; mostraremos que $\mu(\widetilde{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$. (Caso $\mathscr{A}_0 = \{A_0, \ldots, A_n\}$ seja finito, tome $A_k = \emptyset$ para todo $k > n$; como $\mu(\emptyset) = 0$, a igualdade $\mu(\widetilde{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$ ainda significará que $\mu(\widetilde{A}) = \sum_{A \in \mathscr{A}_0} \mu(A)$.)

Perceba que, na demonstração do Passo 3 para o caso em que os conjuntos eram dois a dois disjuntos (como agora), mostramos que valia a seguinte cadeia de desigualdades:

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \setminus \widetilde{A}) \geq \mu^*(E \cap \widetilde{A}) + \mu^*(E \setminus \widetilde{A}) \geq \mu^*(E)$$

— e, portanto, que as desigualdades se tratavam de igualdades. Em particular,

$$\mu^*(E) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \setminus \widetilde{A})$$

para cada $E \subseteq X$; tomando então $E = \widetilde{A}$, obtemos da igualdade acima que

$$\mu(\widetilde{A}) = \mu^*(\widetilde{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(\widetilde{A} \cap A_k) + \mu^*(\widetilde{A} \setminus \widetilde{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k),$$

como queríamos.

• <u>*Passo 5.*</u> O espaço de medida $(X, \mathscr{A}, \mu)$ é completo.

Seja $Z \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(Z) = 0$, e tome $B \subseteq Z$ arbitrário. Devemos mostrar que $B \in \mathscr{A}$ — ou seja, que, para todo $E \subseteq X$, tem-se $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \setminus B)$.

Tome, então, $E \subseteq X$ qualquer. Como no Passo 3, já sabemos que $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \setminus B)$, pois μ^* é subaditiva; assim, basta mostrarmos que

$$\mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \setminus B) \leq \mu^*(E).$$

Note que $E \cap B \subseteq B \subseteq Z$; logo, como μ^* é monótona, decorre da hipótese sobre Z que $\mu^*(E \cap B) \leq \mu^*(Z) = \mu(Z) = 0$. Portanto, $\mu^*(E \cap B) = 0$.

Mas então, novamente pela monotonicidade de μ^*, temos

$$\mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \setminus B) = \mu^*(E \setminus B) \leq \mu^*(E),$$

como requerido. □

(... Ufa!)

Vamos agora dar sequência ao tópico de extensão de medidas mostrando um resultado que justifica o porquê da palavra "extensão" no nome do Teorema da Extensão de Carathéodory. Basicamente, vamos mostrar que, sob certas hipóteses, se a medida exterior μ^* considerada no teorema é proveniente de uma medida numa álgebra $\mathscr{B}$ (como na Proposição 2.2), então a σ-álgebra $\mathscr{A}$ definida na "parte 1" do Teorema da Extensão de Carathéodory (Teorema 3.2) é a menor σ-álgebra sobre X que contém $\mathscr{B} \cup \{Z \subseteq X : \mu^*(Z) = 0\}$.

Vamos enunciar isso de maneira completa:

Teorema 3.3 (Teorema da Extensão de Carathéodory, pt.2)**.** Sejam:

· X um conjunto não vazio,

· $\mathscr{B} \subseteq \wp(X)$ uma álgebra,

· $\rho : \mathscr{B} \to [0, +\infty]$ uma medida em $\mathscr{B}$,

· $\mu^* : \wp(X) \to [0, +\infty]$ a medida exterior[1] obtida definindo-se, para cada $E \subseteq X$,

$$\mu^*(E) = \inf\Big\{ \sum_{B \in \mathscr{B}_0} \rho(B) : \mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B} \text{ é enumerável e tal que } E \subseteq \bigcup_{B \in \mathscr{B}_0} B \Big\},$$

[1] O fato de que μ^* é uma medida exterior foi mostrado na Proposição 2.2.

· $\mathscr{A} = \{A \subseteq X : \forall E \subseteq X \ (\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A))\}$,

· μ a restrição de μ^* a $\mathscr{A}$,

· $\sigma(\mathscr{B})$ a menor σ-álgebra sobre X que contém $\mathscr{B}$,

e

· μ' a restrição de μ^* a $\sigma(\mathscr{B})$.

Então μ' é uma medida em $\sigma(\mathscr{B})$. Além disso, se μ' é uma medida σ-finita (Definição 1.10), então $(X, \mathscr{A}, \mu)$ é o completamento (vide Proposição 1.12 e Observação 1.13) do espaço de medida $(X, \sigma(\mathscr{B}), \mu')$.

Demonstração. O fato de que μ' é uma medida em $\sigma(\mathscr{B})$ é bem imediato a partir do que fizemos na aula passada: basta notar que, como $\mathscr{A}$ é uma σ-álgebra sobre X (pelo Teorema 3.2) que contém $\mathscr{B}$ (pelo Lema 3.1), então $\sigma(\mathscr{B}) \subseteq \mathscr{A}$ pela própria definição de $\sigma(\mathscr{B})$; assim, μ' é também igual à restrição de μ a $\sigma(\mathscr{B})$ — e, como μ é uma medida (pelo Teorema 3.2), então μ' também vai ser.

A substância do teorema, então, está na segunda parte. Antes de procedermos a ela, vamos precisar de dois lemas referentes à situação descrita na Proposição 2.2 — e que são importantes por si sós. [pausa]

Lema 3.4. Sejam X um conjunto não vazio, $\mathscr{B} \subseteq \wp(X)$ uma álgebra, $\rho : \mathscr{B} \to [0, +\infty]$ uma medida em $\mathscr{B}$ e $\mu^* : \wp(X) \to [0, +\infty]$ a medida exterior definida por

$$\mu^*(E) = \inf\Big\{ \sum_{B \in \mathscr{B}_0} \rho(B) : \mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B} \text{ é enumerável e tal que } E \subseteq \bigcup_{B \in \mathscr{B}_0} B \Big\}$$

para todo $E \subseteq X$. Então, dado $E \subseteq X$ arbitrário, tem-se que existe $S \in \sigma(\mathscr{B})$ tal que $E \subseteq S$ e $\mu^*(S) = \mu^*(E)$.

Demonstração. Tome $E \subseteq X$ qualquer. Se $\mu^*(E) = +\infty$, basta tomar $S = X$. Suponhamos, então, que $\mu^*(E) < +\infty$.

Pela definição de ínfimo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\mathscr{B}_n \subseteq \mathscr{B}$ enumerável tal que $E \subseteq \bigcup_{B \in \mathscr{B}_n} B$ e $\sum_{B \in \mathscr{B}_n} \rho(B) < \mu^*(E) + \dfrac{1}{2^n}$; tome, então, $S_n = \bigcup_{B \in \mathscr{B}_n} B$, e note que $S_n \in \sigma(\mathscr{B})$ — uma vez que $\mathscr{B}_n \subseteq \mathscr{B} \subseteq \sigma(\mathscr{B})$.

Defina, agora, $S = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n \in \sigma(\mathscr{B})$. Como $E \subseteq S_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, é claro que $E \subseteq S$ — e, portanto, $\mu^*(E) \leq \mu^*(S)$. Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $S \subseteq S_n$, logo

$$\mu^*(S) \leq \mu^*(S_n) = \mu^*\Big(\bigcup_{B\in\mathscr{B}_n} B\Big) \leq \sum_{B\in\mathscr{B}_n} \mu^*(B) = \sum_{B\in\mathscr{B}_n} \rho(B) < \mu^*(E) + \frac{1}{2^n}$$

(sendo que a última igualdade decorre da Proposição 2.2). Como $n \in \mathbb{N}$ é arbitrário, o Lema 0 nos garante então que $\mu^*(S) \leq \mu^*(E)$. Assim, $\mu^*(S) = \mu^*(E)$. □

Lema 3.5. Considere as mesmas hipóteses do Teorema 3.3. Então, dado $A \subseteq X$ arbitrário, tem-se que $\mu^*(A) = 0$ se, e somente se, $A \in \mathscr{A}$ e $\mu(A) = 0$.

Demonstração. Se $A \in \mathscr{A}$ e $\mu(A) = 0$, então $\mu^*(A) = 0$ pela definição de μ.

Para a outra implicação, suponha que $\mu^*(A) = 0$. Pelo Lema 3.4, existe $S \in \sigma(\mathscr{B})$ tal que $A \subseteq S$ e $\mu^*(S) = \mu^*(A) = 0$. Agora, pelo mesmo argumento utilizado no início da demonstração do Teorema 3.3, tem-se que $\sigma(\mathscr{B}) \subseteq \mathscr{A}$; assim, $S \in \mathscr{A}$ e $\mu(S) = \mu^*(S) = 0$, e o fato de que $A \in \mathscr{A}$ (e, portanto, $0 \leq \mu(A) \leq \mu(S) = 0$) decorre do fato de que, pelo Teorema 3.2, o espaço de medida $(X, \mathscr{A}, \mu)$ é completo. □

OK, voltemos agora à demonstração do teorema!

Continuação da demonstração do Teorema 3.3. Levando em conta a Proposição 1.12, o que devemos mostrar é

$$\mathscr{A} = \{A \cup B : A \in \sigma(\mathscr{B}) \text{ e } B \subseteq Z \text{ para algum } Z \in \sigma(\mathscr{B}) \text{ com } \mu'(Z) = 0\};$$

como μ' é a restrição de μ^* a $\sigma(\mathscr{B})$, isto é o mesmo que

$$\mathscr{A} = \{A \cup B : A \in \sigma(\mathscr{B}) \text{ e } B \subseteq Z \text{ para algum } Z \in \sigma(\mathscr{B}) \text{ com } \mu^*(Z) = 0\}. \qquad (\dagger)$$

Façamos primeiro a inclusão $\supseteq$, que é a mais fácil. Tome, então, $A \in \sigma(\mathscr{B})$, $Z \in \sigma(\mathscr{B})$ com $\mu^*(Z) = 0$, e $B \subseteq Z$ arbitrários; queremos concluir que $A \cup B \in \mathscr{A}$. Temos que $A \in \mathscr{A}$ (porque $\sigma(\mathscr{B}) \subseteq \mathscr{A}$) e $B \in \mathscr{A}$ (pelo Lema 3.5, uma vez que $B \subseteq Z$ e $\mu^*(Z) = 0$ implicam $\mu^*(B) = 0$); logo, o fato de que $\mathscr{A}$ é uma (σ-)álgebra (mostrado no Teorema 3.2) nos garante que $A \cup B \in \mathscr{A}$.

Para a inclusão $\subseteq$, tome $H \in \mathscr{A}$ arbitrário. Vamos dividir a demonstração em dois casos:

• <u>Caso 1.</u> $\mu(H) < +\infty$.

Pelo Lema 3.4, existe $S \in \sigma(\mathscr{B})$ tal que $H \subseteq S$ e $\mu^*(S) = \mu^*(H)$; logo, como $S \in \sigma(\mathscr{B}) \subseteq \mathscr{A}$, então $\mu(S) = \mu^*(S) = \mu^*(H) = \mu(H)$. Assim, pela hipótese do Caso 1, decorre da Proposição 1.9(a) que o conjunto $S \setminus H \in \mathscr{A}$ satisfaz $\mu(S \setminus H) = \mu(S) - \mu(H) = 0$.

Agora vem o truquezinho sujo (e bonito) para fazer aparecerem os conjuntos A e B que procuramos[2]... Novamente pelo Lema 3.4, existe $T \in \sigma(\mathscr{B})$ tal que $S \setminus H \subseteq T$ e $\mu^*(T) = \mu^*(S \setminus H) = \mu(S \setminus H) = 0$. Basta agora notar (exercício) que $H = (S \setminus T) \cup (H \cap T)$; assim, como $S \setminus T \in \sigma(\mathscr{B})$ e $H \cap T \subseteq T \in \sigma(\mathscr{B})$ com $\mu^*(T) = 0$, obtemos que H pertence ao conjunto da direita em (†), como queríamos.

• <u>Caso 2.</u> $\mu(H) = +\infty$.

Aqui o truquezinho do Caso 1 não funciona, porque o conjunto S que conseguiríamos pelo Lema 3.4 pode não satisfazer a condição de que a diferença $S \setminus H$ é "pequena". É neste ponto que vamos precisar da hipótese de que μ' é σ-finita, porque aí teremos que a conclusão do Caso 1 vai se aplicar a cada um dos pedaços de medida finita do nosso espaço. Façamos isso!

Como μ' é σ-finita, existe $\mathscr{C} \subseteq \sigma(\mathscr{B})$ enumerável com $\mu'(C) < +\infty$ para todo $C \in \mathscr{C}$ e tal que $X = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} C$. Para cada $C \in \mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$, tem-se que $H \cap C \in \mathscr{A}$ satisfaz $\mu(H \cap C) \leq \mu(C) = \mu'(C) < +\infty$; logo, pelo Caso 1, podemos escrever $H \cap C = A_C \cup B_C$, sendo $A_C \in \sigma(\mathscr{B})$ e $B_C \subseteq Z_C$ para algum $Z_C \in \sigma(\mathscr{B})$ com $\mu^*(Z_C) = 0$. Mas então

$$H = H \cap X = H \cap \bigcup_{C \in \mathscr{C}} C = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} (H \cap C) = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} (A_C \cup B_C) = \Big(\bigcup_{C \in \mathscr{C}} A_C\Big) \cup \Big(\bigcup_{C \in \mathscr{C}} B_C\Big);$$

logo, tomando $A = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} A_C \in \sigma(\mathscr{B})$ e $B = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} B_C \subseteq \bigcup_{C \in \mathscr{C}} Z_C \in \sigma(\mathscr{B})$, em que $0 \leq \mu^*\Big(\bigcup_{C \in \mathscr{C}} Z_C\Big) \leq \sum_{C \in \mathscr{C}} \mu^*(Z_C) = 0$, obtemos o desejado. □

Antes de prosseguirmos, vamos exibir uma caracterização mais amigável para a σ-álgebra $\mathscr{A}$ obtida no Teorema da Extensão de Carathéodory, e que será útil mais adiante:

Proposição 3.6. Nas hipóteses do Teorema 3.3, tem-se que

$$\mathscr{A} = \{A \cup B : A \in \sigma(\mathscr{B}) \text{ e } B \subseteq X \text{ com } \mu^*(B) = 0\}.$$

[2]Lembrando que queremos mostrar que $H = A \cup B$, nas condições de (†).

Demonstração. Tendo em vista a igualdade (†) na demonstração do Teorema 3.3, a demonstração estará concluída se mostrarmos que, dado $B \subseteq X$ arbitrário, tem-se que $\mu^*(B) = 0$ se, e somente se, existe $Z \in \sigma(\mathscr{B})$ tal que $\mu^*(Z) = 0$ e $B \subseteq Z$.

O "se" da equivalência decorre do fato de que, se $Z \in \sigma(\mathscr{B})$ é tal que $\mu^*(Z) = 0$, então todo $B \subseteq Z$ satisfaz $\mu^*(B) = 0$.

Para o "somente se", tome $B \subseteq X$ arbitrário com $\mu^*(B) = 0$. Pelo Lema 3.4, existe $Z \in \sigma(\mathscr{B})$ tal que $B \subseteq Z$ e $\mu^*(Z) = \mu^*(B) = 0$, o que acarreta o desejado. □

E, para encerrar esta seção, vamos extrair uma consequência do Teorema 3.3 que, apesar de seu enunciado relativamente simples, não é nada óbvia:

Teorema 3.7 (Teorema da Extensão de Hahn–Kolmogorov)**.** Sejam X um conjunto não vazio, $\mathscr{B} \subseteq \wp(X)$ uma álgebra e $\rho : \mathscr{B} \to [0, +\infty]$ uma medida em $\mathscr{B}$. Então ρ pode ser estendida a uma medida $\hat{\rho} : \sigma(\mathscr{B}) \to [0, +\infty]$. Além disso, se ρ é σ-finita[3], então $\hat{\rho}$ é única.

Demonstração. Para a existência de $\hat{\rho}$, basta tomar $\hat{\rho} = \mu'$ no Teorema 3.3.

Para a unicidade, seja $\nu : \sigma(\mathscr{B}) \to [0, +\infty]$ uma medida em $\sigma(\mathscr{B})$ que estende ρ. Façamos, primeiro, dois passos intermediários:

<u>*Afirmação 1.*</u> Para todo $S \in \sigma(\mathscr{B})$, tem-se que $\nu(S) \leq \mu^*(S)$.

De fato, como ν é uma medida e estende ρ, temos que, para cada família enumerável $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$ tal que $S \subseteq \bigcup_{B \in \mathscr{B}_0} B$, ocorre

$$\nu(S) \leq \nu\Big(\bigcup_{B \in \mathscr{B}_0} B\Big) \leq \sum_{B \in \mathscr{B}_0} \nu(B) = \sum_{B \in \mathscr{B}_0} \rho(B);$$

logo, a desigualdade da afirmação decorre da definição de μ^*.

<u>*Afirmação 2.*</u> Se $T \in \sigma(\mathscr{B})$ é tal que $T \subseteq F$ para algum $F \in \mathscr{B}$ com $\rho(F) < +\infty$, então $\nu(T) = \mu'(T)$.

[3]Aqui estamos estendendo para medidas em álgebras a Definição 1.10, feita originalmente para medidas em σ-álgebras. (É fácil ver que a definição faz sentido igualmente neste contexto.)

Pela Proposição 2.2, tem-se que $\mu'(F) = \mu^*(F) = \rho(F) < +\infty$. Além disso, como ν estende ρ, temos também que $\nu(F) = \rho(F) < +\infty$. Assim, como tanto ν quanto μ' são medidas e satisfazem $\nu(F) = \mu'(F) < +\infty$, temos que

$$\nu(T) + \nu(F \setminus T) = \nu(F) = \mu'(F) = \mu'(T) + \mu'(F \setminus T);$$

mas, como — pela Afirmação 1 — $\nu(T) \leq \mu^*(T) = \mu'(T)$ e $\nu(F \setminus T) \leq \mu^*(F \setminus T) = \mu'(F \setminus T)$, a única maneira de ocorrer a igualdade acima é termos $\nu(T) = \mu'(T)$ e $\nu(F \setminus T) = \mu'(F \setminus T)$.

Agora, no caso em que ρ é σ-finita, vamos provar que $\nu = \mu'$ (dada pelo Teorema 3.3).

Fixe uma sequência $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathscr{B}$ satisfazendo $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ e $\rho(B_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definindo $F_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$ para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos que, como antes, $\rho(F_n) \leq \sum_{k=0}^{n} \rho(B_k) < +\infty$ e $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, mas agora temos a condição adicional de que $F_n \subseteq F_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para mostrar que $\nu = \mu'$, tome $A \in \sigma(\mathscr{B})$ arbitrário. Então, pela Proposição 1.9(c),

$$\nu(A) = \nu(A \cap X) = \nu\Big(A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\Big) = \nu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap F_n)\Big) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \nu(A \cap F_n)$$

$$\text{e} \tag{†}$$

$$\mu'(A) = \mu'(A \cap X) = \mu'\Big(A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\Big) = \mu'\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap F_n)\Big) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mu'(A \cap F_n).$$

Mas, tomando $T = A \cap F_n$ e $F = F_n$ na Afirmação 2, obtemos que $\nu(A \cap F_n) = \mu'(A \cap F_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ — portanto, decorre de (†) que $\nu(A) = \mu'(A)$. □

Nosso interesse agora vai ser aplicar isso tudo ao contexto onde está nosso maior interesse: a reta real.

4 A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$

Até que enfim, vamos definir a medida de Lebesgue na reta!

Tendo em vista tudo o que fizemos até aqui, a definição não poderia ser outra:

Definição 4.1 (Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$)**.** Seja $m^* : \wp(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ a medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}$ (vide Lema 2.3). A *medida de Lebesgue* em $\mathbb{R}$ é a restrição $m : \mathscr{M} \to [0, +\infty]$ de m^* à σ-álgebra[4]

$$\mathscr{M} = \{A \subseteq \mathbb{R} : \forall E \subseteq \mathbb{R}\ (m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A))\}.$$

Os elementos de $\mathscr{M}$ são ditos os subconjuntos *mensuráveis (segundo Lebesgue)* de $\mathbb{R}$.

Vamos agora interpretar os resultados da seção anterior neste contexto — deixando como exercício as afirmações não justificadas em detalhe.

Pela caracterização dada pelo Lema 2.3(b), temos que a medida exterior de Lebesgue é a medida exterior dada pela Proposição 2.2 a partir do Exemplo 1.6. Mas, sendo $\mathscr{B}$ a álgebra do Exemplo 1.6, essencialmente o mesmo argumento empregado no Exercício II-6 da Lista 1 mostra que $\sigma(\mathscr{B})$ é a σ-álgebra de Borel[5] $\mathcal{B}$ sobre $\mathbb{R}$. Assim, o Teorema 3.3 nos diz que, se m' é a restrição de m^* a $\mathcal{B}$, então $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m')$ é um espaço de medida e $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$ é o seu completamento.

A meta agora é buscar enxergar melhor como são os subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}$. Para isso, vejamos uma definição:

Definição 4.2 (Medida zero / Conjunto nulo)**.** Dizemos que $B \subseteq \mathbb{R}$ é um *conjunto de medida (de Lebesgue) zero* (ou é um *conjunto nulo*) se B satisfaz as condições (equivalentes, pelo Lema 3.5):

(i) $B \in \mathscr{M}$ e $m(B) = 0$;

(ii) $m^*(B) = 0$.

Denotamos ainda $\mathscr{N} = \{B \subseteq \mathbb{R} : B \text{ é um conjunto nulo}\}$.

Cabe notar uma propriedade importante:

Lema 4.3. Para todo $B \in \mathscr{N}$, tem-se que $\wp(B) \subseteq \mathscr{N}$. (Ou, dito de outra maneira: $C \subseteq B \in \mathscr{N}$ implica que $C \in \mathscr{N}$.)

Demonstração. Basta notar que, se $m^*(B) = 0$ e $C \subseteq B$, então $m^*(C) = 0$. □

[4]Tem que $\mathscr{M}$ é de fato uma σ-álgebra e m é de fato uma medida pelo Teorema 3.2.

[5]Lembrando: a *σ-álgebra de Borel* sobre $\mathbb{R}$ é a menor σ-álgebra $\mathcal{B}$ sobre $\mathbb{R}$ que contém todos os abertos de $\mathbb{R}$. (Na notação da Lista 1, $\mathcal{B} = \sigma(\tau)$, sendo τ a topologia usual de $\mathbb{R}$.)

Traduzindo então a Proposição 3.6 para esta situação, temos:

Proposição 4.4. $\mathscr{M} = \{A \cup B : A \in \mathcal{B} \text{ e } B \in \mathscr{N}\}$.

Observação 4.5 (Uma observação sutil mas pertinente)**.** Num primeiro momento, a Proposição 4.4 pode dar a impressão de estar caracterizando a σ-álgebra $\mathscr{M}$ de maneira circular, uma vez que $\mathscr{N} = \{B \in \mathscr{M} : m(B) = 0\}$ (e daí estaríamos usando $\mathscr{M}$ para descrever $\mathscr{M}$, o que não adiantaria muito). Mas, graças ao Lema 3.5, a condição (ii) da Definição 4.2 mostra que $\mathscr{N}$ pode ser definido sem fazer menção alguma a $\mathscr{M}$ ou a m.

A Proposição 4.4 nos aponta que, para tentar entender melhor quem são os subconjuntos mensuráveis da reta real, será útil saber que cara têm os elementos de $\mathcal{B}$ — que, a propósito, são os chamados subconjuntos *borelianos* de $\mathbb{R}$ — e os elementos de $\mathscr{N}$. Vamos tratar disso na sequência!

4.1 A σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$

Como observado há pouco, temos que a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ em $\mathbb{R}$ satisfaz $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{M}$; em outras palavras, todo conjunto boreliano é mensurável. Antes de mais nada, vejamos qual é a medida de Lebesgue de certos tipos especiais de conjuntos borelianos.

Definição 4.6 (Conjuntos G_δ e F_σ)**.** Dizemos que $A \subseteq \mathbb{R}$ é:

- um *conjunto* G_δ se existe uma família enumerável $\mathcal{U}$ de abertos de $\mathbb{R}$ tal que $A = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$;
- um *conjunto* F_σ se existe uma família enumerável $\mathcal{F}$ de fechados de $\mathbb{R}$ tal que $A = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$.

Note que um conjunto é um G_δ se, e somente se, seu complementar é um F_σ.

Exemplo 4.7.

- É imediato que todo aberto é um G_δ e todo fechado é um F_σ.
- Para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se que $\{x\}$ é, ao mesmo tempo, um conjunto F_σ (já que é fechado) e também um conjunto G_δ (pois $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left]x - \frac{1}{2^n}, x + \frac{1}{2^n}\right[$).

- De modo mais geral, tem-se que todo subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ (ou, mais geralmente ainda, de um espaço métrico) é um G_δ. [Exercício.]
- Todo subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$ é um F_σ (pois é a união dos unitários de seus elementos, que são fechados).
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é um G_δ (pois é o complementar de um F_σ).

Observação 4.8. Como $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra, temos imediatamente que:

– todo aberto de $\mathbb{R}$ é boreliano;

– todo fechado de $\mathbb{R}$ é boreliano (pois é o complementar de um boreliano);

– todo G_δ de $\mathbb{R}$ é boreliano (pois é a intersecção de uma família enumerável de borelianos);

– todo F_σ de $\mathbb{R}$ é boreliano (pois é o complementar de um G_δ, logo é o complementar de um boreliano).

Vejamos agora o seguinte:

Lema 4.9. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ quaisquer com $a \leq b$. Então:

(i) $m(\,]a, b[\,) = m([a, b]) = b - a$;

(ii) $m(\,]-\infty, a[\,) = m(\,]-\infty, a]) = m(\,]a, +\infty[\,) = m([a, +\infty[\,) = +\infty$.

Demonstração. Pela definição da medida de Lebesgue, temos que $m(\,]x, y]) = y - x$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ com $x \leq y$.

Vamos provar primeiro que $m(\,]a, b[\,) = b - a$. Se $a = b$, então $]a, b[= \emptyset$, e a igualdade é imediata. Suponhamos, então, que $a < b$. Fixe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < b - a$, e defina $I_k =]a, b - \frac{1}{2^{n+k}}]$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como, para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se que $I_k \in \mathscr{B} \subseteq \mathscr{M}$, decorre da Proposição 2.2 que $m(I_k) = m^*(I_k) = \rho(I_k) = b - \frac{1}{2^{n+k}} - a$. Agora, note que $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de intervalos satisfazendo $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k =]a, b[$; logo, pela Proposição 1.9(c), temos que $m(\,]a, b[\,) = \lim_{k\in\mathbb{N}} m(I_k) = \lim_{k\in\mathbb{N}}(b - \frac{1}{2^{n+k}} - a) = b - a - \lim_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+k}} = b - a$.

Um argumento análogo (usando a Proposição 1.9(d) agora) mostra que $m([a, b]) = b - a$. [Exercício.]

Para o item (ii), note que, dado $M \in \mathbb{R}$ qualquer com $M > 0$, tem-se que $m(\,]a, +\infty[\,) \geq m(\,]a, a + M[\,) = a + M - a = M$; logo, da arbitrariedade de M, tem-se que necessariamente $m(\,]a, +\infty[\,) = +\infty$. Os demais casos são análogos. $\square$

Corolário 4.10. Todo subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$ tem medida zero.

Demonstração. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ enumerável. Então $m(A) = m\Big(\bigcup_{a \in A} \{a\}\Big) = \sum_{a \in A} m(\{a\}) = \sum_{a \in A} 0 = 0$ (aqui, na penúltima igualdade, usamos o Lema 4.9(i) com $a = b$). $\square$

Note que, pelo corolário acima, um conjunto de medida finita (ou mesmo medida zero) não precisa ser limitado![6]

Agora, para falarmos sobre a medida de Lebesgue de subconjuntos abertos quaisquer (não apenas intervalos), precisaremos do lema a seguir — que é um resultado clássico de análise real, mas que provaremos usando argumentos de topologia.

Lema 4.11. Todo subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ é a união de uma família enumerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos.

Antes de provar o lema, vamos relembrar (ou ser apresentados a) algumas noções e resultados de topologia geral:

Definição 4.12 (Espaço conexo)**.** Um espaço topológico X é *conexo* se não existem dois abertos não vazios e disjuntos $U, V \subseteq X$ tais que $X = U \dot{\cup} V$. Diremos, ainda, que um subconjunto de X é conexo se ele for um espaço conexo quando considerado com a topologia de subespaço.

Fato 4.13. Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, é um intervalo.

Fato 4.14. Seja $\mathscr{C}$ uma família não vazia de subconjuntos conexos de um espaço topológico. Se $\bigcap_{C \in \mathscr{C}} C \neq \emptyset$, então $\bigcup_{C \in \mathscr{C}} C$ é conexo.

Demonstração (esboço). Fixe $x \in \bigcap_{C \in \mathscr{C}} C \neq \emptyset$, e suponha, por absurdo, que $\bigcup_{C \in \mathscr{C}} C = U \dot{\cup} V$, sendo U e V abertos não vazios do subespaço $\bigcup_{C \in \mathscr{C}} C$. Suponha, sem perda de generalidade, que $x \in U$, e tome $C \in \mathscr{C}$ tal que $V \cap C \neq \emptyset$. Então $U \cap C$ e $V \cap C$ são abertos de C que mostram que C não é conexo — contradição. $\square$

[6] Agora isso pode parecer óbvio, mas eu garanto que esse é um erro que todo mundo ainda vai fazer — ou pelo menos ter vontade de fazer...

Fato 4.15. Num espaço topológico X, seja $\sim$ a relação binária definida por

$$x \sim y \;\leftrightarrow\; \exists\, C \subseteq X \text{ conexo tal que } x, y \in C$$

para $x, y \in X$ quaisquer. Então $\sim$ é uma relação de equivalência.

Demonstração. Reflexividade e simetria são imediatas, e transitividade decorre do Fato 4.14. □

Definição 4.16 (Componente conexa)**.** As *componentes conexas* de um espaço topológico X são as classes de equivalência determinadas pela relação $\sim$ definida no Fato 4.15.

Fato 4.17. Dados um espaço topológico X e $a \in X$, tem-se que a componente conexa de X que contém a é o conjunto $[a] = \bigcup_{\substack{C \subseteq X \text{ conexo} \\ a \in C}} C$. (Pelo Fato 4.14, tem-se que este é um conjunto conexo.)

OK, vamos à demonstração do lema!

Demonstração do Lema 4.11. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ aberto. A demonstração consiste em, basicamente, dois passos.

• <u>*Passo 1.*</u> Toda componente conexa de A é um intervalo aberto.

De fato, seja $C \subseteq A$ uma componente conexa. Então C é um subconjunto conexo de $\mathbb{R}$, e portanto é um intervalo. Resta mostrarmos que C é aberto.

Tome, então, $x \in C$ arbitrário. Em particular, temos que $x \in A$; logo, como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq A$. Mas então $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ é um subconjunto conexo de A que contém o ponto x; logo, como $C \subseteq A$ é a componente conexa de x em A, tem-se (pela definição de componente conexa) que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq C$. Assim, x é um ponto interior de C — e, como $x \in C$ foi tomado de maneira arbitrária, segue-se que C é aberto.

• <u>*Passo 2.*</u> A quantidade de componentes conexas de A é enumerável.

Seja $\mathcal{U}$ a família de todas as componentes conexas de A. Para cada $I \in \mathcal{U}$, tem-se do Passo 1 que I é um intervalo aberto (não vazio) de $\mathbb{R}$; podemos, então, tomar um $q_I \in \mathbb{Q} \cap I$. Desta forma, a função

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathcal{U} & \to & \mathbb{Q} \\ & & I & \mapsto & q_I \end{array}$$

é injetora (uma vez que componentes conexas distintas são disjuntas), o que mostra que $|\mathcal{U}| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ — isto é, $\mathcal{U}$ é enumerável.

O resultado decorre então do fato de que A é a união disjunta de suas componentes conexas (o que é uma consequência da Definição 4.16). $\square$

Dos Lemas 4.9 e 4.11, obtemos então:

Corolário 4.18. Dado um aberto $A \subseteq \mathbb{R}$ qualquer, tem-se que A é mensurável e $m(A) = \sum_{I \in \mathcal{U}} \ell(I)$, sendo $\mathcal{U}$ uma família de intervalos abertos dois a dois disjuntos com $A = \bigcup_{I \in \mathcal{U}} I$.

Sabendo determinar a medida de Lebesgue de abertos de $\mathbb{R}$, podemos então obter a medida de Lebesgue de fechados de $\mathbb{R}$. Para tanto, façamos isso primeiro para os fechados que são limitados — ou seja, os compactos de $\mathbb{R}$.

Corolário 4.19. Seja $K \subseteq \mathbb{R}$ um compacto não vazio. Então $m(K) = b - a - m(U)$, sendo $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $K \subseteq \,]a, b[$ e $U \subseteq \mathbb{R}$ o aberto dado por $U = \,]a, b[\, \setminus K$.

Demonstração. Basta notar que $m(K) + m(U) = m(\,]a, b[\,) = b - a$ (uma vez que $K \,\dot{\cup}\, U = \,]a, b[\,$). $\square$

Corolário 4.20. Seja $F \subseteq \mathbb{R}$ um fechado. Então $m(F) = \lim_{n \in \mathbb{N}} m(F \cap [-n, n])$.

Demonstração. Note que F é a união de uma família enumerável de compactos, uma vez que $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (F \cap [-n, n])$. Como $F \cap [-n, n] \subseteq F \cap [-(n+1), n+1]$, o resultado decorre da Proposição 1.9(c). $\square$

Tendo as medidas dos fechados de $\mathbb{R}$, podemos então obter as medidas dos subconjuntos F_σ de $\mathbb{R}$:

Corolário 4.21. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto F_σ. Então $m(A) = \lim_{n \in \mathbb{N}} m(F_n)$, sendo $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente de fechados de $\mathbb{R}$ com $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Demonstração. A igualdade decorre diretamente da Proposição 1.9(c), uma vez garantida a existência da sequência $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Para conseguirmos isso, seja $\mathcal{F}$ uma família enumerável de fechados de $\mathbb{R}$ com $A = \bigcup_{H \in \mathcal{F}} H$, e enumere esta família como

$\mathcal{F} = \{H_k : k \in \mathbb{N}\}$. Basta agora definir $F_n = \bigcup_{k=0}^{n} H_k$ para cada $n \in \mathbb{N}$, e teremos o desejado. $\square$

Finalmente, para os subconjuntos G_δ de $\mathbb{R}$, usaremos a Proposição 1.9(d) — como a demonstração do corolário anterior sugere, aliás. Isso requererá dividir a situação em dois casos.

Corolário 4.22. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto G_δ.

(a) Se todo aberto $U \subseteq \mathbb{R}$ com $A \subseteq U$ satisfaz $m(U) = +\infty$, então $m(A) = +\infty$.

(b) Se existe um aberto $U \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \subseteq U$ e $m(U) < +\infty$, então $m(A) = \lim_{n\in\mathbb{N}} m(V_n)$, sendo $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência decrescente de abertos de $\mathbb{R}$ satisfazendo $V_n \subseteq U$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$.

Demonstração. Mostremos a contrapositiva do item (a). Suponha que $m(A) < +\infty$; devemos provar que existe um aberto $U \subseteq \mathbb{R}$ satisfazendo $A \subseteq U$ e $m(U) < +\infty$. Como $m(A) = m^*(A)$, tem-se do Lema 2.3(a) que existe uma sequência de intervalos abertos $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ satisfazendo $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) < m(A) + 1$. Basta, então, tomar $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, e teremos que

$$m(U) = m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(I_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) < m(A) + 1 < +\infty.$$

Provemos agora o item (b). Seja $\mathcal{U}$ uma família enumerável de abertos de $\mathbb{R}$ tal que $A = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} U$, e enumere esta família como $\mathcal{U} = \{U_k : k \in \mathbb{N}\}$. Definindo então $V_n = U \cap \bigcap_{k\leq n} U_k$ para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de abertos de $\mathbb{R}$ satisfazendo $V_n \subseteq U$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Big(U \cap \bigcap_{k\leq n} U_k\Big) = U \cap \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\leq n} U_k\Big) = U \cap \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k = U \cap A = A,$$

e o resultado segue então da Proposição 1.9(d). $\square$

Exemplo 4.23. É importante fazer a distinção de casos no Corolário 4.22 porque nem toda sequência decrescente de abertos de $\mathbb{R}$ é tal que a medida de sua intersecção é igual ao limite da sequência das medidas de seus termos.

Como exemplo, considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $U_n =]-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}[\cup]n, +\infty[$. Temos que cada U_n é um aberto de $\mathbb{R}$ tal que $m(U_n) = +\infty$ e $U_n \supseteq U_{n+1}$. No entanto, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{0\}$, e portanto $m\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) = m(\{0\}) = 0 < +\infty = \lim_{n\in\mathbb{N}} m(U_n)$.

Até aqui, vimos alguns tipos específicos de conjuntos borelianos. Seriam eles todos os borelianos?

A resposta é não. Usando uniões de famílias enumeráveis e complementos de conjuntos, obtemos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são G_δ e F_σ a partir de abertos e fechados, certo? Pois bem: nada nos impede de, repetindo as mesmas operações, obter novos tipos de conjuntos a partir de conjuntos G_δ e F_σ (por exemplo, uniões enumeráveis de conjuntos G_δ), e depois novos conjuntos a partir destes, e assim por diante. Conforme iteramos essa operação de "tomar uniões de famílias enumeráveis e complementos de conjuntos", vamos obtendo novos conjuntos cada vez mais complicados; no entanto, todos eles são borelianos, pois $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra — e, portanto, não vamos sair de $\mathcal{B}$ se aplicarmos essas operações a elementos de $\mathcal{B}$.

Tentando tornar essa ideia (um pouco) mais precisa:

Dado $\mathcal{A} \subseteq \wp(\mathbb{R})$ qualquer, defina

$$S(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cup \{\mathbb{R} \setminus A : A \in \mathcal{A}\} \cup \Big\{ \bigcup_{A\in\mathcal{A}_0} A : \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A} \text{ é enumerável} \Big\}.$$

Note que, se $\mathscr{A}$ é uma σ-álgebra sobre $\mathbb{R}$ e $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{A}$, então $S(\mathcal{A}) \subseteq \mathscr{A}$ — pois $\mathscr{A}$ é fechada para cada uma das operações que realizamos para obter $S(\mathcal{A})$ a partir de $\mathcal{A}$.

Perceba agora (exercício!) que, tomando $\mathcal{A} = \tau$ (a topologia de $\mathbb{R}$), teremos:

- $S(\tau) = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ é aberto ou } A \text{ é fechado}\}$;
- $S(S(\tau)) \supseteq \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ é aberto ou } A \text{ é fechado ou } A \text{ é um } F_\sigma\}$;
- $S(S(S(\tau))) \supseteq \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ é aberto ou } A \text{ é fechado ou } A \text{ é um } F_\sigma \text{ ou } A \text{ é um } G_\delta\}$;
- $S(S(S(S(\tau)))) \supseteq \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ é aberto ou } A \text{ é fechado ou } A \text{ é um } F_\sigma \text{ ou } A \text{ é uma união enumerável de conjuntos } G_\delta\}$;

$\vdots$

E agora vem a parte que é difícil de formalizar bonitinho neste curso:

$\mathcal{B}$ é o conjunto obtido a partir de τ se aplicarmos S uma quantidade de vezes que é "a menor quantidade não enumerável".

Para dar um sentido exato à frase acima, é preciso ter à mão algumas ferramentas de teoria dos conjuntos (como ordinais e recursão transfinita). Mas, expressando isso de maneira (um pouco) mais precisa, o que conseguimos mostrar é que

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}_\alpha,$$

sendo ω_1 o primeiro ordinal não enumerável e $\mathcal{A}_\alpha$ a família obtida ao se aplicar S "exatamente α vezes" (para formalizar o que exatamente isso significa, precisamos de uma coisa chamada recursão transfinita). E, usando mais ferramentas de teoria dos conjuntos (dessa vez, aritmética cardinal e indução transfinita), conseguimos mostrar que $|\mathcal{A}_\alpha| = 2^{\aleph_0}$ (ou seja, que $\mathcal{A}_\alpha$ tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$) para todo $\alpha < \omega_1$, o que implica (depois de umas continhas envolvendo cardinais infinitos) que $|\mathcal{B}| = 2^{\aleph_0}$.

(Para ver essas coisas direito, faça um curso de teoria dos conjuntos! ;)

4.2 O σ-ideal dos conjuntos nulos em $\mathbb{R}$

Vamos agora explorar um pouco a estrutura de $\mathscr{N}$ e tentar ter uma ideia melhor de como são os conjuntos nulos de $\mathbb{R}$.

Só pra falarmos com uma linguagem um pouco mais de gente grande (que na verdade a gente não vai precisar usar, mas é pra enriquecer o vocabulário), vamos introduzir uma nomenclatura:

Definição 4.24 (Ideal e σ-ideal)**.** Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{I} \subseteq \wp(X)$. Dizemos que $\mathcal{I}$ é um *ideal* sobre X se:

(i) $\forall x \in X\ (\{x\} \in \mathcal{I})$;

(ii) $\forall A \in \mathcal{I}\ (\forall B \subseteq A\ (B \in \mathcal{I}))$; e

(iii) $\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ finito $\Big(\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A \in \mathcal{I}\Big)$.

Dizemos ainda que $\mathcal{I}$ é um *σ-ideal* se "finito" puder ser substituído por "enumerável" no item *(iii)*.

Exemplo 4.25. Um exemplo de (σ-)ideal sobre X é o conjunto

$$\mathcal{I} = \{A \subseteq X : A \text{ é finito (enumerável)}\}.$$

Na verdade, este é o menor (σ-)ideal sobre X — no sentido de que todo (σ-)ideal sobre X contém $\mathcal{I}$.

Proposição 4.26. $\mathscr{N}$ é um σ-ideal sobre $\mathbb{R}$.

Demonstração. A condição (i) da Definição 4.24 é consequência do Corolário 4.10; a condição (ii) é o Lema 4.3; e a condição (iii) é garantida pelo fato de que toda medida é σ-aditiva. □

Como já vimos (no Corolário 4.10), todo subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$ é um elemento de $\mathscr{N}$. É natural nos perguntarmos se esses não seriam todos os elementos de $\mathscr{N}$ — afinal, os elementos de $\mathscr{N}$ são conjuntos "pequenos", certo? Veremos agora que não: um conjunto pode ser "pequeno" no sentido de medida mas ser bastante "grande" no sentido de cardinalidade!

Exemplo 4.27. Sendo $C \subseteq \mathbb{R}$ o conjunto ternário de Cantor, tem-se que $C \in \mathscr{N}$.

Demonstração. Vamos nos lembrar da construção de C:

Comece tomando $C_0 = [0, 1]$. Em seguida, remova o "terço intermediário" aberto deste intervalo, obtendo assim $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Repetindo o procedimento em cada um dos intervalos que são as componentes conexas de C_1 (isto é, removendo o "terço intermediário" aberto de cada um deles), obtemos $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Prosseguindo dessa maneira, obtemos uma sequência decrescente $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos compactos de $[0, 1]$; defina, então, $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ — que é compacto, portanto fechado, portanto boreliano, portanto mensurável.

É simples mostrar (por indução) que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto C_n é uma união disjunta de 2^n intervalos fechados de comprimento $\dfrac{1}{3^n}$ cada; logo, decorre do Lema 4.9 que $m(C_n) = 2^n \cdot \dfrac{1}{3^n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Assim, pela Proposição 1.9(d), temos que $m(C) = m\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\Big) = \lim_{n\in\mathbb{N}} m(C_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0.$ □

No entanto, no que diz respeito à cardinalidade, o conjunto de Cantor tem o maior tamanho possível para um subconjunto de $\mathbb{R}$: prova-se (no curso de Análise Real) que

um número real x é um elemento de C se, e somente se, x possui representação em base 3 na qual ocorrem apenas os dígitos 0 e 2. Com isto, é possível obter uma bijeção entre C e o conjunto de todas as sequências infinitas de 0s e 2s; logo, como este último conjunto tem cardinalidade $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$, o mesmo vale para C.

Como consequência disso, obtemos:

Proposição 4.28. $|\mathscr{N}| = |\mathscr{M}| = 2^{2^{\aleph_0}} (> 2^{\aleph_0})$.

Demonstração. Como o conjunto de Cantor C é um elemento de $\mathscr{N}$, o Lema 4.3 implica que $\wp(C) \subseteq \mathscr{N}$. Mas $|\wp(C)| = 2^{|C|} = 2^{2^{\aleph_0}}$, donde

$$2^{2^{\aleph_0}} = |\wp(C)| \leq |\mathscr{N}| \leq |\mathscr{M}| \leq |\wp(\mathbb{R})| = 2^{|\mathbb{R}|} = 2^{2^{\aleph_0}}.$$

Assim, $|\mathscr{N}| = |\mathscr{M}| = 2^{2^{\aleph_0}}$. □

Corolário 4.29. $|\mathcal{B}| < |\mathscr{N}| = |\mathscr{M}|$.

Em palavras: há (estritamente) mais conjuntos nulos que conjuntos borelianos em $\mathbb{R}$, e há tantos conjuntos nulos quanto há conjuntos mensuráveis em $\mathbb{R}$.

Corolário 4.30. Existem (muitos!) conjuntos mensuráveis que não são borelianos.

4.3 Mais alguns aspectos dos conjuntos mensuráveis

Vejamos agora mais algumas propriedades que nos trarão informações úteis sobre os conjuntos mensuráveis e sua relação com a medida exterior de Lebesgue. Em particular, vamos ver (no Corolário 4.34) que os subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}$ podem ser expressos por uma representação ainda mais amigável que a vista na Proposição 4.4.

A ideia essencial está na seguinte caracterização de mensurabilidade na reta real:

Lema 4.31. Seja $E \subseteq \mathbb{R}$. São equivalentes:

(*a*) $E \in \mathscr{M}$;

(*b*) para todo $\varepsilon > 0$, existe um aberto $U \subseteq \mathbb{R}$ tal que $E \subseteq U$ e $m^*(U \setminus E) < \varepsilon$;

(*c*) existe $A \subseteq \mathbb{R}$ que é um G_δ de $\mathbb{R}$ e satisfaz $E \subseteq A$ e $A \setminus E \in \mathscr{N}$.

Demonstração. Comecemos provando a implicação $(c) \to (a)$. Sendo A dado por (c), defina $Z = A \setminus E \in \mathscr{N}$. Como $A, Z \in \mathscr{M}$, decorre do fato de $\mathscr{M}$ ser uma (σ-)álgebra que $A \setminus Z \in \mathscr{M}$, isto é, $E \in \mathscr{M}$.

Provemos, agora, que (b) implica (c). Por (b), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $U_n \subseteq \mathbb{R}$ aberto satisfazendo $E \subseteq U_n$ e $m^*(U_n \setminus E) < \dfrac{1}{2^n}$. Sendo $A = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, temos que A é um subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$ com $E \subseteq A$. Além disso, para $n_0 \in \mathbb{N}$ arbitrário, temos que $A \setminus E = \Big(\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \setminus E = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (U_n \setminus E) \subseteq U_{n_0} \setminus E$, donde $m^*(A \setminus E) \leq m^*(U_{n_0} \setminus E) < \dfrac{1}{2^{n_0}}$; logo, como isso vale para todo $n_0 \in \mathbb{N}$, concluímos que $m^*(A \setminus E) = 0$, ou seja, $A \setminus E \in \mathscr{N}$.

Resta agora provar que (a) implica (b). Para tanto, suponha que $E \in \mathscr{M}$. Temos dois casos possíveis:

• <u>Caso 1.</u> $m(E) < +\infty$.

Fixe $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $m^*(E) = m(E) < +\infty$, decorre da definição de m^* (Lema 2.3) que existe uma família enumerável $\mathcal{I}$ de intervalos abertos limitados de $\mathbb{R}$ satisfazendo $E \subseteq \displaystyle\bigcup_{I\in\mathcal{I}} I$ e $\displaystyle\sum_{I\in\mathcal{I}} \ell(I) < m^*(E) + \varepsilon$. Sendo então $U = \displaystyle\bigcup_{I\in\mathcal{I}} I$, temos que U é um aberto de $\mathbb{R}$ contendo E; além disso, como $E, U \in \mathscr{M}$ e $m(E) < +\infty$, decorre da Proposição 1.9(a) que

$$\begin{aligned}
m^*(U \setminus E) \;=\; m(U \setminus E) \;&=\; m(U) - m(E) &&= \\
&=\; m\Big(\bigcup_{I\in\mathcal{I}} I\Big) - m(E) &&\leq \\
&\leq\; \Big(\sum_{I\in\mathcal{I}} m(I)\Big) - m(E) &&= \\
&=\; \Big(\sum_{I\in\mathcal{I}} \ell(I)\Big) - m(E) &&= \\
&=\; \Big(\sum_{I\in\mathcal{I}} \ell(I)\Big) - m^*(E) &&< \;\; \varepsilon.
\end{aligned}$$

• <u>Caso 2.</u> $m(E) = +\infty$.

Fixe $\varepsilon > 0$ arbitrário. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $E_n = E \cap \,]-n, n[\,$; então, pelo que fizemos no Caso 1, existe um aberto $U_n \subseteq \mathbb{R}$ tal que $E_n \subseteq U_n$ e $m^*(U_n \setminus E_n) < \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Note que $E = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$; logo, definindo $U = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, temos que U é um aberto de $\mathbb{R}$ que

contém E e satisfaz $U \setminus E = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \setminus E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (U_n \setminus E) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (U_n \setminus E_n)$, donde

$$m^*(U \setminus E) \leq m^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (U_n \setminus E_n)\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(U_n \setminus E_n) < \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon,$$

como desejado. □

Observação 4.32. Cabe aqui comparar a equivalência entre (a) e (c) no Lema 4.31 com o Lema 3.4. Se olharmos com cuidado a demonstração do Lema 3.4 e transpusermos o argumento para a situação da medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}$, veremos que (com uma adaptaçãozinha) o que ele nos diz é:

para todo $E \subseteq \mathbb{R}$, existe $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que A é um G_δ e $m^*(A) = m^*(E)$.

Numa leitura desatenta, a combinação dessa afirmação com a equivalência $(a) \leftrightarrow (c)$ do Lema 4.31 pode dar a impressão de nos dizer que todo $E \subseteq \mathbb{R}$ é mensurável (!). Mas **não se trata disso**, pois a existência de $A \supseteq E$ tal que $m^*(A) = m^*(E)$ **não** garante que $m^*(A \setminus E) = 0$. Isso porque em geral não vale que $m^*(A \setminus E) = m^*(A) - m^*(E)$. (A igualdade correspondente seria válida para m (que é uma medida), mas para isso seria preciso saber de antemão que $A, E \in \mathscr{M}$.)

Em posse do Lema 4.31, podemos então enunciar outras caracterizações de conjuntos mensuráveis:

Proposição 4.33. Seja $E \subseteq \mathbb{R}$. São equivalentes:

(a) $E \in \mathscr{M}$;

(b) para todo $\varepsilon > 0$, existe um aberto $U \subseteq \mathbb{R}$ tal que $E \subseteq U$ e $m^*(U \setminus E) < \varepsilon$;

(c) existe $A \subseteq \mathbb{R}$ que é um G_δ de $\mathbb{R}$ e satisfaz $E \subseteq A$ e $A \setminus E \in \mathscr{N}$;

(d) para todo $\varepsilon > 0$, existe um fechado $F \subseteq \mathbb{R}$ tal que $F \subseteq E$ e $m^*(E \setminus F) < \varepsilon$;

(e) existe $H \subseteq \mathbb{R}$ que é um F_σ de $\mathbb{R}$ e satisfaz $H \subseteq E$ e $E \setminus H \in \mathscr{N}$.

Demonstração. Já vimos no Lema 4.31 que (a), (b) e (c) são equivalentes. Note agora que (a) é equivalente a $\mathbb{R} \setminus E \in \mathscr{M}$ — o que, pelo Lema 4.31, é equivalente a

(d') para todo $\varepsilon > 0$, existe um aberto $U \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{R} \setminus E \subseteq U$ e $m^*(U \setminus (\mathbb{R} \setminus E)) < \varepsilon$; e

(e') existe $A \subseteq \mathbb{R}$ que é um G_δ de $\mathbb{R}$ e satisfaz $\mathbb{R} \setminus E \subseteq A$ e $A \setminus (\mathbb{R} \setminus E) \in \mathscr{N}$.

Estas duas condições podem ser reescritas como

(d') para todo $\varepsilon > 0$, existe um aberto $U \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{R} \setminus U \subseteq E$ e $m^*(E \setminus (\mathbb{R} \setminus U)) < \varepsilon$; e

(e') existe $A \subseteq \mathbb{R}$ que é um G_δ de $\mathbb{R}$ e satisfaz $\mathbb{R} \setminus A \subseteq E$ e $E \setminus (\mathbb{R} \setminus A) \in \mathscr{N}$.

Tomando então $F = \mathbb{R} \setminus U$ em (d') e $H = \mathbb{R} \setminus A$ em (e'), as afirmações acima se tornam

(d) para todo $\varepsilon > 0$, existe um fechado $F \subseteq \mathbb{R}$ tal que $F \subseteq E$ e $m^*(E \setminus F) < \varepsilon$; e

(e) existe $H \subseteq \mathbb{R}$ que é um F_σ de $\mathbb{R}$ e satisfaz $H \subseteq E$ e $E \setminus H \in \mathscr{N}$,

como queríamos. □

Corolário 4.34. $\mathscr{M} = \{A \cup B : A \text{ é um } F_\sigma \text{ de } \mathbb{R} \text{ e } B \in \mathscr{N}\}$.

Demonstração. Trata-se da equivalência $(a) \leftrightarrow (d)$ na Proposição 4.33. □

Finalmente, vejamos que a medida de Lebesgue satisfaz propriedades que são compatíveis com a noção intuitiva (que motivou a sua construção) de que buscamos uma função que associe a subconjuntos de $\mathbb{R}$ um número que representa "quanto espaço esse conjunto ocupa na reta real".

Antes, vamos introduzir uma notação:

Notação 4.35. Dados $E \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ quaisquer, definimos:

$$E + a = \{x + a : x \in E\};$$

$$aE = \{ax : x \in E\}.$$

Vamos às propriedades, então!

Proposição 4.36. Sejam $E \in \mathscr{M}$ e $a \in \mathbb{R}$. Então:

(i) $E + a \in \mathscr{M}$ e $m(E + a) = m(E)$;

(*ii*) $aE \in \mathscr{M}$ e $m(aE) = |a| \cdot m(E)$.

Demonstração. Pelo Corolário 4.34, temos que $E = A \cup B$, sendo A um subconjunto F_σ de $\mathbb{R}$ e $B \in \mathscr{N}$. Substituindo B por $B \setminus A \in \mathscr{N}$ se for preciso, podemos supor que $A \cap B = \emptyset$. Como $(A \dot{\cup} B) + a = (A + a) \dot{\cup} (B + a)$ e $a(A \dot{\cup} B) = (aA) \dot{\cup} (aB)$, a demonstração estará concluída uma vez que tivermos verificado os seguintes passos:
<u>*Passo 1.*</u> $A + a$ é um subconjunto F_σ de $\mathbb{R}$.
<u>*Passo 2.*</u> $m(A + a) = m(A)$.
<u>*Passo 3.*</u> $B + a \in \mathscr{N}$.
<u>*Passo 4.*</u> aA é um subconjunto F_σ de $\mathbb{R}$.
<u>*Passo 5.*</u> $m(aA) = |a| \cdot m(A)$.
<u>*Passo 6.*</u> $aB \in \mathscr{N}$.
(... Concorda?)

Vamos a eles, então! (Vai ser bem mais rápido do que parece :)

• <u>*Passo 1.*</u> $A + a$ é um subconjunto F_σ de $\mathbb{R}$.

Basta notar que a função $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_a(x) = x + a$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é um homeomorfismo — e, portanto, $f_a[F]$ é fechado em $\mathbb{R}$ para cada $F \subseteq \mathbb{R}$ fechado. Disto decorre que, se A é a união de uma família enumerável de fechados, então $A + a = f_a[A]$ também o é.

• <u>*Passo 2.*</u> $m(A + a) = m(A)$.

Basta notar que, como $\ell(I + a) = \ell(I)$ para todo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, então a definição de m^* (Lema 2.3) garante que $m(A + a) = m^*(A + a) = m^*(A) = m(A)$ — uma vez que a inclusão $A \subseteq \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$ implica $A + a \subseteq \bigcup_{I \in \mathcal{I}} (I + a)$.

• <u>*Passo 3.*</u> $B + a \in \mathscr{N}$.

Como no Passo 2, temos que $m^*(B + a) = m^*(B) = 0$.

• <u>*Passo 4.*</u> aA é um subconjunto F_σ de $\mathbb{R}$.

Se $a = 0$, então $aA = \{0\}$, que é fechado — e, portanto, F_σ — em $\mathbb{R}$. Já se $a \neq 0$, temos que a função $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_a(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é um homeomorfismo — e, portanto, $g_a[F]$ é fechado em $\mathbb{R}$ para cada $F \subseteq \mathbb{R}$ fechado. Disto decorre que, se A é a união de uma família enumerável de fechados, então $aA = g_a[A]$ também o é.

• <u>*Passo 5.*</u> $m(aA) = |a| \cdot m(A)$.

Assim como o Passo 4 foi análogo ao Passo 1, este será análogo ao Passo 2. Notemos que $\ell(aI) = |a| \cdot \ell(I)$ para todo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Logo, pela definição de m^*, o fato de que a inclusão $A \subseteq \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$ implica $aA \subseteq \bigcup_{I \in \mathcal{I}} (aI)$ nos dá que $m^*(aA) = |a| \cdot m^*(A)$, isto é, $m(aA) = |a| \cdot m(A)$.

• <u>*Passo 6.*</u> $aB \in \mathscr{N}$.

Pelo mesmo argumento apresentado no Passo 5, temos que $m^*(aB) = |a| \cdot m^*(B) = |a| \cdot 0 = 0$. □

Vejamos, agora, como as propriedades de medidas podem ser usadas para o estudo de funções — e, particularmente, para construirmos uma teoria de integração de funções reais.

5 Funções mensuráveis

O primeiro passo em direção a definirmos a integral de funções (com uma abordagem de medida, que é nosso objetivo aqui desde o início) é delinearmos quais funções são as "candidatas naturais" a serem integráveis.

Mas, antes, vamos apenas fazer algo rapidinho que vai nos ajudar lá na frente...

5.1 A reta real estendida ($\overline{\mathbb{R}}$)

Definição 5.1 (A reta real estendida)**.** Chamamos de *reta real estendida* o conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \dot{\cup} \{-\infty, +\infty\}$, em que $-\infty < x < +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Consideramos, em $\overline{\mathbb{R}}$, a topologia que tem como base a família de todos os conjuntos dos seguintes tipos:

- $]a, b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x < b\}$, para $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ com $a < b$;
- $[-\infty, a[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x < a\}$, para $a \in \overline{\mathbb{R}}$;
- $]a, +\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x > a\}$, para $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Sendo $\overline{\mathbb{R}}$ um espaço topológico, podemos considerar sobre $\overline{\mathbb{R}}$ a *σ-álgebra estendida de Borel* $\overline{\mathcal{B}} = \sigma(\overline{\tau}) \subseteq \wp(\overline{\mathbb{R}})$, sendo $\overline{\tau}$ a topologia de $\overline{\mathbb{R}}$. Nestas condições, temos que $\mathcal{B} \subseteq \overline{\mathcal{B}}$ e que $\mathbb{R}, \{-\infty\}, \{+\infty\} \in \overline{\mathcal{B}}$ (por quê?), e disto decorre:

Proposição 5.2. Seja $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Então $E \in \overline{\mathcal{B}}$ se, e somente se, $E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}$.

Demonstração. Exercício. $\square$

OK, vamos então começar a estudar as funções de fato!

5.2 Agora sim, funções mensuráveis!

Definição 5.3 (Função mensurável)**.** Sejam X e X' conjuntos não vazios, $\mathscr{A} \subseteq \wp(X)$ e $\mathscr{A}' \subseteq \wp(X')$ σ-álgebras e $f : X \to X'$ uma função. Dizemos que f é $(\mathscr{A}, \mathscr{A}')$-*mensurável* se, para cada $A' \in \mathscr{A}'$, tem-se que $f^{-1}[A'] \in \mathscr{A}$. Equivalentemente, na notação do Exercício II-7 da Lista 1, f é $(\mathscr{A}, \mathscr{A}')$-*mensurável* se $f^{\leftarrow}[\mathscr{A}'] \subseteq \mathscr{A}$.

Adotaremos ainda as seguintes convenções:

- no caso particular em que $X = \mathbb{R}$, diremos que $f : \mathbb{R} \to X'$ é $\mathscr{A}'$-*mensurável* se f é $(\mathscr{M}, \mathscr{A}')$-mensurável;
- no caso particular em que $X' = \mathbb{R}$, diremos que $f : X \to \mathbb{R}$ é $\mathscr{A}$-*mensurável* se f é $(\mathscr{A}, \mathcal{B})$-mensurável;
- no caso particular em que $X' = \overline{\mathbb{R}}$, diremos que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é $\mathscr{A}$-*mensurável* se f é $(\mathscr{A}, \overline{\mathcal{B}})$-mensurável;
- no caso particular em que $X = X' = \mathbb{R}$, diremos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *mensurável* se f é $(\mathscr{M}, \mathcal{B})$-mensurável.
- no caso particular em que $X = \mathbb{R}$ e $X' = \overline{\mathbb{R}}$, diremos que $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ é *mensurável* se f é $(\mathscr{M}, \overline{\mathcal{B}})$-mensurável.

Tendo em vista o Exercício II-7 da Lista 1, decorre diretamente da definição anterior o seguinte resultado:

Proposição 5.4. Sejam X e X' conjuntos não vazios, $\mathscr{A} \subseteq \wp(X)$ uma σ-álgebra, $\mathscr{B} \subseteq \wp(X')$ e $f : X \to X'$. Então f é $(\mathscr{A}, \sigma(\mathscr{B}))$-mensurável se, e somente se, $f^{\leftarrow}[\mathscr{B}] \subseteq \mathscr{A}$ — isto é, $f^{-1}[B] \in \mathscr{A}$ para todo $B \in \mathscr{B}$.

Demonstração. Por definição, f é $(\mathscr{A}, \sigma(\mathscr{B}))$-mensurável se, e somente se, $f^{\leftarrow}[\sigma(\mathscr{B})] \subseteq \mathscr{A}$. Pelo item (b) do Exercício II-7 da Lista 1, isto é o mesmo que $\sigma(f^{\leftarrow}[\mathscr{B}]) \subseteq \mathscr{A}$ — o que, por sua vez, é equivalente a $f^{\leftarrow}[\mathscr{B}] \subseteq \mathscr{A}$, visto que $\mathscr{A}$ é uma σ-álgebra. $\square$

Combinando a Proposição 5.4 com o Exercício II-6 da Lista 1, obtemos diversas caracterizações de mensurabilidade para funções com valores em $\mathbb{R}$. Algumas (as mais úteis) estão elencadas no seguinte corolário:

Corolário 5.5. Sejam X um conjunto não vazio, $\mathscr{A} \subseteq \wp(X)$ uma σ-álgebra e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. São equivalentes:

(a) f é $\mathscr{A}$-mensurável;

(b) $f^{-1}[U] \in \mathscr{A}$ para todo aberto $U \subseteq \mathbb{R}$;

(c) $f^{-1}\Big[]a, +\infty[\Big] \in \mathscr{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$;

(d) $f^{-1}\Big[]a, +\infty[\Big] \in \mathscr{A}$ para todo $a \in \mathbb{Q}$;

(e) $f^{-1}\Big[[a, +\infty[\Big] \in \mathscr{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$;

(f) $f^{-1}\Big[[a, +\infty[\Big] \in \mathscr{A}$ para todo $a \in \mathbb{Q}$;

(g) $f^{-1}\Big[]-\infty, a[\Big] \in \mathscr{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$;

(h) $f^{-1}\Big[]-\infty, a[\Big] \in \mathscr{A}$ para todo $a \in \mathbb{Q}$;

(i) $f^{-1}\Big[]-\infty, a]\Big] \in \mathscr{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$;

(j) $f^{-1}\Big[]-\infty, a]\Big] \in \mathscr{A}$ para todo $a \in \mathbb{Q}$.

É um exercício semelhante ao Exercício II-6 da Lista 1 verificar que $\overline{\mathcal{B}}$ é a σ-álgebra gerada pelos subconjuntos de $\overline{\mathbb{R}}$ correspondentes aos intervalos considerados nos itens do Exercício II-6 da Lista 1. Em virtude disso, o Corolário 5.5 possui também uma versão para funções com valores em $\overline{\mathbb{R}}$:

Lema 5.6. Sejam X um conjunto não vazio, $\mathscr{A} \subseteq \wp(X)$ uma σ-álgebra e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função. São equivalentes:

(a) f é $\mathscr{A}$-mensurável;

(b) $f^{-1}[U] \in \mathscr{A}$ para todo aberto $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$;

(c) $f^{-1}\Big[]a,+\infty]\Big] \in \mathscr{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$;

(d) $f^{-1}\Big[]a,+\infty]\Big] \in \mathscr{A}$ para todo $a \in \mathbb{Q}$;

(e) $f^{-1}\Big[[a,+\infty]\Big] \in \mathscr{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$;

(f) $f^{-1}\Big[[a,+\infty]\Big] \in \mathscr{A}$ para todo $a \in \mathbb{Q}$;

(g) $f^{-1}\Big[[-\infty,a[\Big] \in \mathscr{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$;

(h) $f^{-1}\Big[[-\infty,a[\Big] \in \mathscr{A}$ para todo $a \in \mathbb{Q}$;

(i) $f^{-1}\Big[[-\infty,a]\Big] \in \mathscr{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$;

(j) $f^{-1}\Big[[-\infty,a]\Big] \in \mathscr{A}$ para todo $a \in \mathbb{Q}$.

Demonstração. Exercício. □

A definição a seguir nos dará uma classe (muito) importante de funções mensuráveis.

Definição 5.7 (Função simples)**.** Sejam X um conjunto não vazio, $\mathscr{A} \subseteq \wp(X)$ uma σ-álgebra e $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função. Dizemos que φ é *$\mathscr{A}$-simples* se $\mathrm{im}(\varphi)$ é um conjunto finito e $\varphi^{-1}[\{a\}] \in \mathscr{A}$ para todo $a \in \mathrm{im}(\varphi)$.

No caso particular em que $X = \mathbb{R}$ e $\mathscr{A} = \mathscr{M}$, diremos apenas que φ é *simples* em vez de $\mathscr{M}$-simples.

O próximo lema apresenta uma representação útil de funções $\mathscr{A}$-simples. Antes, mais uma definição:

Definição 5.8. Sejam X um conjunto não vazio e $A \subseteq X$. A *função característica* de A (em X) é a função

$$\begin{array}{rcl} \chi_A : X & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A; \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases} \end{array}$$

Lema 5.9. Sejam X um conjunto não vazio, $\mathscr{A} \subseteq \wp(X)$ uma σ-álgebra e $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função. Então φ é $\mathscr{A}$-simples se, e somente se, existem $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A} \setminus \{\emptyset\}$ dois a dois disjuntos e $a_1, \ldots, a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ dois a dois distintos tais que $X = A_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} A_n$ e $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$. Além disso, tal representação de φ é única (a menos de reordenação dos A_is e a_is).

Demonstração. Exercício. □

Vejamos, agora, alguns exemplos mais imediatos de funções mensuráveis:

Exemplo 5.10. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathscr{A} \subseteq \wp(X)$ uma σ-álgebra. Então toda função $\mathscr{A}$-simples $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é $\mathscr{A}$-mensurável.

Demonstração. Faremos uso da equivalência $(a) \leftrightarrow (c)$ no Lema 5.6.

Seja $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função $\mathscr{A}$-simples, e fixe $a \in \mathbb{R}$ arbitrário. Então

$$\varphi^{-1}\Big[]a, +\infty]\Big] = \varphi^{-1}\Big[]a, +\infty] \ \cap \ \mathrm{im}(\varphi)\Big] = \bigcup_{b \in \,]a, +\infty] \, \cap \, \mathrm{im}(\varphi)} \varphi^{-1}[\{b\}] \in \mathscr{A}$$

— uma vez que, por φ ser $\mathscr{A}$-simples, o conjunto acima é a união de uma quantidade finita de elementos de $\mathscr{A}$. □

Exemplo 5.11. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f é mensurável.

Demonstração. Basta lembrarmos que, se τ é a topologia de $\mathbb{R}$, então $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}[U] \in \tau$ para todo $U \in \tau$. O resultado decorre então da equivalência $(a) \leftrightarrow (b)$ no Corolário 5.5, aliada ao fato de que $\tau \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathscr{M}$. □

Exemplo 5.12. Toda função monótona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é mensurável.

Demonstração. Usaremos a equivalência $(a) \leftrightarrow (e)$ do Corolário 5.5.

Suponhamos que f é não decrescente (o caso em que f é não crescente é análogo). Então, dado $a \in \mathbb{R}$ qualquer, temos duas possibilidades:

- <u>Caso 1.</u> $f^{-1}\Big[[a, +\infty[\Big] \in \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

  Nesse caso, claramente $f^{-1}\Big[[a, +\infty[\Big] \in \mathscr{M}$.

- <u>Caso 2.</u> $f^{-1}\Big[[a, +\infty[\Big] \notin \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

  Então, como f é não decrescente, existe $b = \inf\Big(f^{-1}\Big[[a, +\infty[\Big]\Big) \in \mathbb{R}$, e portanto $f^{-1}\Big[[a, +\infty[\Big] =]b, +\infty[\in \mathscr{M}$ ou $f^{-1}\Big[[a, +\infty[\Big] = [b, +\infty[\in \mathscr{M}$. □

O próximo resultado nos diz que $\mathscr{A}$-mensurabilidade é preservada por diversas operações entre funções:

Proposição 5.13. Sejam X um conjunto não vazio, $\mathscr{A} \subseteq \wp(X)$ uma σ-álgebra, $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções $\mathscr{A}$-mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. Então são também $\mathscr{A}$-mensuráveis as funções:

(i) cf;

(ii) $f + g$;

(iii) f^2;

(iv) fg;

(v) $|f|$.

Demonstração. Usaremos a equivalência $(a) \leftrightarrow (c)$ do Corolário 5.5. Fixe, então, $a \in \mathbb{R}$ arbitrário. Devemos mostrar que $h^{-1}\Big[]a, +\infty[\Big] \in \mathscr{A}$ para cada função h nos itens (i)–(v).

(i) Se $c = 0$, então cf é a função constante nula, que é $\mathscr{A}$-mensurável por ser uma função $\mathscr{A}$-simples (vide Exemplo 5.10). Se $c > 0$, então $(cf)^{-1}\Big[]a, +\infty[\Big] = f^{-1}\Big[]\frac{a}{c}, +\infty[\Big] \in \mathscr{A}$ (uma vez que f é $\mathscr{A}$-mensurável). Já se $c < 0$, temos que $(cf)^{-1}\Big[]a, +\infty[\Big] = f^{-1}\Big[]-\infty, \frac{a}{c}[\Big] \in \mathscr{A}$ (novamente por f ser $\mathscr{A}$-mensurável).

(ii) Note que

$$\begin{aligned}
(f+g)^{-1}\Big[]a, +\infty[\Big] &= \{x \in X : f(x) + g(x) > a\} = \\
&= \{x \in X : f(x) > a - g(x)\} = \\
&= \{x \in X : \exists q \in \mathbb{Q}\ (f(x) > q > a - g(x))\} = \\
&= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in X : f(x) > q > a - g(x)\} = \\
&= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in X : f(x) > q \text{ e } g(x) > a - q\} = \\
&= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \Big(\{x \in X : f(x) > q\} \cap \{x \in X : g(x) > a - q\}\Big) = \\
&= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \Big(f^{-1}\Big[]q, +\infty[\Big] \cap g^{-1}\Big[]a - q, +\infty[\Big]\Big),
\end{aligned}$$

que é um elemento de $\mathscr{A}$ pois f e g são $\mathscr{A}$-mensuráveis e $\mathscr{A}$ é uma σ-álgebra.

(iii) Se $a < 0$, então $(f^2)^{-1}\Big[]a, +\infty[\Big] = X \in \mathscr{A}$. Já se $a \geq 0$, temos

$$(f^2)^{-1}\Big[]a, +\infty[\Big] = f^{-1}\Big[]\sqrt{a}, +\infty[\Big] \cup f^{-1}\Big[]-\infty, -\sqrt{a}[\Big] \in \mathscr{A}$$

(pois f é $\mathscr{A}$-mensurável).

(iv) Como $fg = \dfrac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$, o fato de que fg é $\mathscr{A}$-mensurável decorre dos itens anteriores.

(v) Se $a < 0$, então $|f|^{-1}\Big[]a, +\infty[\Big] = X \in \mathscr{A}$. Já se $a \geq 0$, então $|f|^{-1}\Big[]a, +\infty[\Big] = (f^2)^{-1}\Big[]a^2, +\infty[\Big]$, que é um elemento de $\mathscr{A}$ pelo item (iii). $\square$

Vamos agora enunciar mais um resultado que garante a $\mathscr{A}$-mensurabilidade de funções obtidas a partir de outras funções $\mathscr{A}$-mensuráveis:

Proposição 5.14. Sejam X um conjunto não vazio, $\mathscr{A} \subseteq \wp(X)$ uma σ-álgebra e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções $\mathscr{A}$-mensuráveis de X em $\overline{\mathbb{R}}$. Então:

(i) são também $\mathscr{A}$-mensuráveis as funções $g, h, G, H : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definidas por

$$g(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$
$$h(x) = \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$
$$G(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$
$$H(x) = \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

para todo $x \in X$;

(ii) se a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, então f é $\mathscr{A}$-mensurável.

Demonstração. Para o item (i), usaremos o Lema 5.6.

Fixe $a \in \mathbb{R}$ arbitrário. Note que

$$\begin{aligned} g^{-1}\Big[[a, +\infty]\Big] &= \{x \in X : \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \geq a\} = \\ &= \{x \in X : \forall n \in \mathbb{N}\ (f_n(x) \geq a)\} = \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \geq a\} = \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}\Big[[a, +\infty]\Big] \in \mathscr{A} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G^{-1}\Big[]a,+\infty]\Big] &= \{x \in X : \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) > a\} = \\ &= \{x \in X : \exists n \in \mathbb{N}\ (f_n(x) > a)\} = \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) > a\} = \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}\Big[]a,+\infty]\Big] \in \mathscr{A}, \end{aligned}$$

donde g e G são $\mathscr{A}$-mensuráveis. Por razões análogas, para cada $k \in \mathbb{N}$ são também $\mathscr{A}$-mensuráveis as funções $h_k, H_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definidas por $h_k(x) = \inf\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq k}} f_n(x)$ e $H_k(x) = \sup\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq k}} f_n(x)$ para todo $x \in X$. Portanto, também por razões análogas, são $\mathscr{A}$-mensuráveis as funções $h = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} h_k$ e $H = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} H_k$.

O item (ii) é um caso particular do item (i), uma vez que, se $f(x) = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, então $f(x) = \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$. □

Corolário 5.15. Sejam X um conjunto não vazio, $\mathscr{A} \subseteq \wp(X)$ uma σ-álgebra, $n \in \mathbb{N}^*$ e $f_1, \ldots, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funções $\mathscr{A}$-mensuráveis. Então são também $\mathscr{A}$-mensuráveis as funções $g, G : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definidas por $g(x) = \min\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ e $G(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ para todo $x \in X$.

Vamos encerrar esta seção com um lema que será essencial para o que vem adiante! Antes, vamos introduzir uma notação para simplificar um pouco a nossa vida.

Definição 5.16. Dados um conjunto não vazio X e uma σ-álgebra $\mathscr{A} \subseteq \wp(X)$, definimos $\mathcal{M}^+(\mathscr{A}) = \{f : X \to [0,+\infty] \mid f \text{ é } \mathscr{A}\text{-mensurável}\}$. No caso específico em que $X = \mathbb{R}$ e $\mathscr{A} = \mathscr{M}$, adotaremos a convenção de escrever apenas $\mathcal{M}^+$ em vez de $\mathcal{M}^+(\mathscr{M})$.

Lema 5.17. Sejam X um conjunto não vazio, $\mathscr{A} \subseteq \wp(X)$ uma σ-álgebra e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Então $f \in \mathcal{M}^+(\mathscr{A})$ se, e somente se, existe uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções $\mathscr{A}$-simples de X em $\mathbb{R}$ satisfazendo $\varphi_n \overset{n}{\nearrow} f$ — isto é,[7] $\varphi_n(x) \overset{n}{\nearrow} f(x)$ para todo $x \in X$.

[7]Usamos aqui a notação $a_n \overset{n}{\nearrow} a$ para denotar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência não decrescente que converge para a.

Demonstração. A recíproca é uma consequência imediata do Exemplo 5.10 e da Proposição 5.14(*ii*).

Para a implicação direta, suponha que f é $\mathscr{A}$-mensurável. A ideia vai ser meio chata de escrever, mas ela é bastante razoável: φ_n será a função que olha para os pontos x tais que $f(x) < n$ e "arredonda" o valor de $f(x)$ para o maior número da forma $\dfrac{k}{2^n}$ que é menor que $f(x)$. Intuitivamente, φ_n vai ser uma função simples que "aproxima f por baixo" de modo a estar a uma distância sempre menor que $\dfrac{1}{2^n}$ de f (nos pontos em que f assume valores menores que n).

Vamos escrever isso!

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n, & \text{se } f(x) \geq n; \\ \dfrac{k}{2^n}, & \text{se } k \in \{0, 1, \ldots, n \cdot 2^n - 1\} \text{ é tal que } f(x) \in \left[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right[. \end{cases}$$

Temos que φ_n é $\mathscr{A}$-simples — pois, como f é $\mathscr{A}$-mensurável, então $f^{-1}\left[\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right] \in \mathscr{A}$.

Fixe, agora, $x \in X$ arbitrário.

Vejamos que $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Há três possibilidades:

- <u>Caso 1.</u> $f(x) < n$.

  Então, por construção,

$$\varphi_{n+1}(x) = \begin{cases} \varphi_n(x) + \dfrac{1}{2^{n+1}}, & \text{se } \varphi_n(x) + \dfrac{1}{2^{n+1}} \leq f(x); \\ \varphi_n(x), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- <u>Caso 2.</u> $n \leq f(x) < n + 1$.

  Novamente por construção, $\varphi_n(x) = n \leq \varphi_{n+1}(x) \leq f(x)$.

- <u>Caso 3.</u> $f(x) \geq n + 1$.

  Então claramente $\varphi_n(x) = n < n + 1 = \varphi_{n+1}(x)$.

Portanto, $(\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência não decrescente.

Notemos agora que $f(x) = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(x)$. Se $f(x) = +\infty$, a igualdade é válida pois, nesse caso, $\varphi_n(x) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos, então, que $f(x) < +\infty$, e seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) < n$. Decorre da construção que, para cada $k \geq n$, tem-se $\Big|\varphi_k(x) - f(x)\Big| < \dfrac{1}{2^k}$, donde $\varphi_k(x) \xrightarrow{k} f(x)$. $\square$

OK, agora podemos (finalmente!) falar de integrais de funções em espaços de medida!

6 Integrais de funções mensuráveis

Vamos usar tudo o que fizemos até agora para definir a integral de funções mensuráveis (ou, melhor dizendo, de *certas* funções mensuráveis — algumas não serão propriamente integráveis, como veremos mais adiante). Para isso — como é razoável supor —, vamos precisar não apenas de uma σ-álgebra sobre um conjunto não vazio (como era o caso na seção anterior), mas de um espaço de medida de fato.

Façamos isso primeiro para as funções mensuráveis não negativas. Vamos começar com o caso mais simples (literalmente):

Definição 6.1 (Integral de funções $\mathscr{A}$-simples)**.** Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida e $\varphi : X \to [0, +\infty]$ uma função $\mathscr{A}$-simples. A *integral de φ (com respeito a μ)* é o número real estendido

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu(A_i),$$

sendo $a_1, \ldots, a_n \in [0, +\infty]$ e $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ como no Lema 5.9 (logo $\varphi = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$).

No caso particular em que $(X, \mathscr{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$, dizemos que $\int \varphi \, dm$ é a *integral de Lebesgue de φ*.

Observação 6.2. Na definição anterior — bem como em qualquer situação em que isso possa vir a aparecer —, adotamos a convenção de que $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$.

Da Definição 6.1, já podemos extrair o primeiro exemplo de uma função que possui uma integral de Lebesgue mas que não é integrável no sentido de Riemann:

Exemplo 6.3. Para todo $A \in \mathscr{M}$, tem-se que a função simples χ_A satisfaz $\int \chi_A \, dm = m(A)$. Em particular, tomando-se $A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, tem-se que $\chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}$ é uma função que não é integrável segundo Riemann mas que satisfaz $\int \chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} \, dm = 1$.

Demonstração. Notemos que a representação de χ_A na forma do Lema 5.9 é $\chi_A = 1\chi_A + 0\chi_{\mathbb{R}\setminus A}$. Da Definição 6.1, temos então que

$$\int \chi_A \, d\mu = 1 \cdot m(A) + 0 \cdot m(\mathbb{R} \setminus A) = m(A) + 0 = m(A).$$

No caso particular $A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, como $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ é enumerável, então este é um conjunto de medida zero. Assim, pela Proposição 1.9(a), tem-se que $m([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = m([0, 1]) - m([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 1 - 0 = 1$, donde $\int \chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} \, dm = m([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = 1$. $\square$

Tendo a Definição 6.1, já estamos em condições de definir a integral de uma função qualquer em $\mathcal{M}^+(\mathscr{A})$. Mas, antes, vamos aproveitar que estamos falando de funções $\mathscr{A}$-simples para fazer um lema de que vamos precisar logo mais:

Lema 6.4. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $\varphi, \psi : X \to [0, +\infty]$ funções $\mathscr{A}$-simples e $c \in [0, +\infty]$. Então:

(a) $\displaystyle\int c\varphi \, d\mu = c \cdot \int \varphi \, d\mu$;

(b) se $\varphi \leq \psi$ (isto é, $\varphi(x) \leq \psi(x)$ para cada $x \in X$), então $\displaystyle\int \varphi \, d\mu \leq \int \psi \, d\mu$;

(c) $\displaystyle\int (\varphi + \psi) \, d\mu = \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu$.

Por ridículo que seja, vamos antes provar um lema auxiliar para ajudar na demonstração do lema acima:

Lema 6.5. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida e $\varphi : X \to [0, +\infty]$ uma função $\mathscr{A}$-simples cuja representação nos termos do Lema 5.9 é $\varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$. Suponha que $n' \in \mathbb{N}^*$, $A'_1, \ldots, A'_{n'} \in \mathscr{A}$ e $a'_1, \ldots, a'_{n'} \in [0, +\infty]$ sejam tais que $X = A'_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} A'_{n'}$ e $\varphi = \displaystyle\sum_{j=1}^{n'} a'_i \chi_{A'_i}$ (ou seja, entre os A'_j pode haver conjuntos vazios, e os a'_j podem não ser dois a dois distintos). Então $\displaystyle\int \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n'} a'_j \cdot \mu(A'_j)$.

[Em outras palavras: mesmo se tomarmos uma representação de uma função $\mathscr{A}$-simples como combinação linear de funções características de conjuntos em $\mathscr{A}$ que não venha a ser a "representação padrão" (entenda-se "aquela do Lema 5.9"), podemos usar essa outra representação na hora de calcularmos a integral da função e vai dar na mesma.]

Demonstração. Primeiramente, reordenando os A'_js (e, junto com eles, os a'_js) se necessário, podemos supor que $\{j \in \{1, \ldots, n'\} : A'_j \neq \emptyset\} = \{1, \ldots, p\}$ para um certo $p \in \mathbb{N}^*$ com $p \leq n'$. Escreva, agora, $\{a'_1, \ldots, a'_p\} = \{c_1, \ldots, c_q\}$, sendo $q \in \mathbb{N}^*$ com $q \leq p$ e de modo que $c_1, \ldots, c_q$ sejam dois a dois distintos. Para cada $k \in \{1, \ldots, q\}$, seja $J_k = \{j \in \{1, \ldots, p\} : a'_j = c_k\}$, e defina $C_k = \dot{\bigcup}_{j \in J_k} A'_j$.

Nestas condições, $\varphi = \sum_{k=1}^{q} c_k \chi_{C_k}$, sendo esta uma representação que satisfaz as condições do Lema 5.9. Pela unicidade de tal representação, devemos ter que $q = n$; além disso, reordenando os c_ks e os C_ks se preciso, podemos supor (também por conta dessa unicidade de representação) que $c_i = a_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\} = \{1, \ldots, q\}$. Disto obtemos

$$\begin{aligned}
\int \varphi \, d\mu &= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu(A_i) = \\
&= \sum_{k=1}^{q} c_k \cdot \mu(C_k) = \\
&= \sum_{k=1}^{q} c_k \cdot \sum_{j \in J_k} \mu(A'_j) = \\
&= \sum_{k=1}^{q} \sum_{j \in J_k} c_k \cdot \mu(A'_j) = \\
&= \sum_{k=1}^{q} \sum_{j \in J_k} a'_j \cdot \mu(A'_j) = \\
&= \sum_{j=1}^{p} a'_j \cdot \mu(A'_j) = \\
&= \sum_{j=1}^{n'} a'_j \cdot \mu(A'_j),
\end{aligned}$$

como desejado. □

OK, ao lema!

Demonstração do Lema 6.4. Escreva $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ e $\psi = \sum_{j=1}^{k} b_j \chi_{B_j}$, nas condições do Lema 5.9.

Para o item (a), a afirmação é imediata no caso em que $c = 0$, pois então $c\varphi$ é a função identicamente nula — cuja representação nos termos do Lema 5.9 é $c\varphi = 0\chi_X$ —, donde

$$\int c\varphi \, d\mu = \int 0\chi_X \, d\mu = 0 \cdot \mu(X) = 0 = 0 \cdot \int \varphi \, d\mu = c \cdot \int \varphi \, d\mu.$$

Já no caso em que $c > 0$, temos que $c\varphi = c\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i} = \sum_{i=1}^{n}(ca_i)\chi_{A_i}$, donde

$$\int c\varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n}(ca_i)\cdot\mu(A_i) = c\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\mu(A_i) = c\cdot\int \varphi \, d\mu.$$

(Note — exercício! — que a segunda igualdade acima vale mesmo no caso em que $c = +\infty$.)

Para os itens (b) e (c), notemos primeiro que $A_i = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} A_i \cap B_j$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$ e que $B_j = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i \cap B_j$ para todo $j \in \{1,\ldots,k\}$. Logo,

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\sum_{j=1}^{k}\mu(A_i\cap B_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_i\cdot\mu(A_i\cap B_j)$$

$$\text{e} \tag{$\dagger$}$$

$$\int \psi \, d\mu = \sum_{j=1}^{k} b_j\cdot\mu(B_j) = \sum_{j=1}^{k} b_j\cdot\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i\cap B_j) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} b_j\cdot\mu(A_i\cap B_j)$$

O item (b) decorre então da observação de que, se $\varphi \leq \psi$, então, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ e cada $j \in \{1,\ldots,k\}$, vale $\varphi\restriction_{A_i\cap B_j} \leq \psi\restriction_{A_i\cap B_j}$; assim, $a_i \leq b_j$ sempre que $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, e disto decorre que $a_i\cdot\mu(A_i\cap B_j) \leq b_j\cdot\mu(A_i\cap B_j)$ — o que implica que $\int \varphi \, d\mu \leq \int \psi \, d\mu$ em virtude de $(\dagger)$.

Quanto ao item (c), de $(\dagger)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_i\cdot\mu(A_i\cap B_j) + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} b_j\cdot\mu(A_i\cap B_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(a_i+b_j)\cdot\mu(A_i\cap B_j) = \\
&= \int (\varphi+\psi)\, d\mu,
\end{aligned}$$

sendo que a última igualdade é consequência do Lema 6.5 e da observação de que, se $i \in \{1,\ldots,n\}$ e $j \in \{1,\ldots,k\}$ são tais que $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, então $(\varphi+\psi)\restriction_{A_i\cap B_j}$ é a função constante de valor $a_i + b_j$. $\square$

Vamos à definição de integral de funções em $\mathcal{M}^+(\mathscr{A})$, então!

Definição 6.6 (Integral de funções $\mathscr{A}$-mensuráveis não negativas)**.** Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f \in \mathcal{M}^+(\mathscr{A})$.

- A *integral de f (com respeito a μ)* é o número real estendido

$$\int f \, d\mu = \sup\Big\{ \int \varphi \, d\mu : \varphi \text{ é uma função } \mathscr{A}\text{-simples e } \varphi \leq f \Big\}.$$

  No caso particular em que $(X, \mathscr{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$, dizemos que $\displaystyle\int f \, dm$ é a *integral de Lebesgue de f*.

- Ainda, fixado $E \in \mathscr{A}$ arbitrário, define-se a *integral de f em E (com respeito a μ)* por

$$\int_E f \, d\mu = \int f \chi_E \, d\mu.$$

Observação 6.7. Cabe notar que, pelo Lema 6.4(b), as definições de integral para uma função $\mathscr{A}$-simples $\varphi : X \to [0, +\infty]$ dadas nas Definições 6.1 e 6.6 coincidem. Note, ainda, que $\displaystyle\int_X f \, d\mu = \int f \, d\mu$ para toda $f \in \mathcal{M}^+(\mathscr{A})$.

Antes de vermos exemplos e algumas propriedades fundamentais da integral, vamos provar o Teorema da Convergência Monótona (Teorema 6.9), que é uma ferramenta poderosa que vai facilitar bastante alguns argumentos. Mas, primeiro, dois leminhas (pra variar):

Lema 6.8. Seja $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida.

(a) Se $f, g \in \mathcal{M}^+(\mathscr{A})$ são tais que $f \leq g$, então $\displaystyle\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

(b) Se $f \in \mathcal{M}^+(\mathscr{A})$ e $E, F \in \mathscr{A}$ são tais que $E \subseteq F$, então $\displaystyle\int_E f \, d\mu \leq \int_F f \, d\mu$.

Demonstração. Para (a), basta notar que toda função $\mathscr{A}$-simples φ tal que $\varphi \leq f$ também satisfaz $\varphi \leq g$. E (b) decorre de (a) uma vez que $f\chi_E \leq f\chi_F$. □

Lema 0'. Dados $x, y \in [0, +\infty]$ quaisquer, são equivalentes:

(i) $x \leq y$;

(ii) $\forall \beta \in \,]1, +\infty[\; (x \leq \beta \cdot y)$;

(iii) $\forall \beta \in]0,1[$ $(\beta \cdot x \leq y)$.

Demonstração. Exercício (de análise real, na verdade). $\square$

Eis o teorema!

Teorema 6.9 (Teorema da Convergência Monótona)**.** Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f \in \mathcal{M}^+(\mathscr{A})$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $\mathcal{M}^+(\mathscr{A})$ satisfazendo $f_n \overset{n}{\nearrow} f$. Então $\displaystyle\int f_n \, d\mu \xrightarrow{n} \int f \, d\mu$. (Ou, dito de outra maneira, $\displaystyle\int \lim_n f_n \, d\mu = \lim_n \int f_n \, d\mu$.)

Demonstração. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se por hipótese que $f_n \leq f$; logo, o Lema 6.8(a) nos diz que $\displaystyle\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$. Portanto, $\displaystyle\lim_n \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$.

Para a outra desigualdade, tome uma função $\mathscr{A}$-simples $\varphi : X \to [0, +\infty]$ arbitrária com $\varphi \leq f$. Vamos mostrar que $\displaystyle\int \varphi \, d\mu \leq \lim_n \int f_n \, d\mu$ — o que implicará $\displaystyle\int f \, d\mu \leq \lim_n \int f_n \, d\mu$ pela definição de $\displaystyle\int f \, d\mu$. Para tanto, usaremos a equivalência $(i) \leftrightarrow (iii)$ do Lema 0'.

Fixe, então, $\beta \in]0,1[$ arbitrário; queremos concluir que

$$\beta \cdot \int \varphi \, d\mu \leq \lim_n \int f_n \, d\mu. \tag{$\dagger$}$$

Seja $\varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$ a representação de φ dada pelo Lema 5.9. Considere, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ e cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $A_i^n = \{x \in A_i : \beta \cdot a_i \leq f_n(x)\}$, que é um elemento de $\mathscr{A}$ (por quê?).

Considere agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\mathscr{A}$-simples $\varphi_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (\beta \cdot a_i) \chi_{A_i^n}$; como, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, vale que $f_n(x) \geq \beta \cdot a_i = \varphi_n(x)$ para todo $x \in A_i^n$ (pela definição de A_i^n), tem-se então que $f_n \geq \varphi_n$ (pela definição de φ_n). Assim, dos Lemas 6.8(a) e 6.5, obtemos

$$\int f_n \, d\mu \geq \int \varphi_n \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} (\beta \cdot a_i) \cdot \mu(A_i^n). \tag{$\ddagger$}$$

Notemos, agora, o seguinte:

<u>*Afirmação.*</u> Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, tem-se que $(A_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de conjuntos satisfazendo $A_i = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_i^n$.

De fato, tome $x \in A_i$ qualquer. Se $a_i = 0$, então é imediato que $x \in A_i^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos, então, que $a_i > 0$. Como $\beta \cdot a_i < a_i = \varphi(x) \leq f(x)$ e $f_n(x) \overset{n}{\nearrow} f(x)$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_{n_0}(x) \in]\beta \cdot a_i, f(x)]$, e portanto $x \in A_i^{n_0}$.

Em vista da Proposição 1.9(c), decorre da Afirmação que $\mu(A_i) = \lim_n \mu(A_i^n)$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Assim, obtemos de (‡) que

$$\begin{aligned}
\lim_n \int f_n \, d\mu &\geq \lim_n \sum_{i=1}^{k} (\beta \cdot a_i) \cdot \mu(A_i^n) = \\
&= \sum_{i=1}^{k} (\beta \cdot a_i) \cdot \lim_n \mu(A_i^n) = \\
&= \sum_{i=1}^{k} (\beta \cdot a_i) \cdot \mu(A_i) = \\
&= \beta \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \mu(A_i) = \\
&= \beta \cdot \int \varphi \, d\mu,
\end{aligned}$$

como desejado em (†). □

Note que o Teorema da Convergência Monótona já mostra que a integral de Lebesgue é muito mais "bem comportada" com relação à convergência pontual do que a integral de Riemann — o que é, num certo sentido, a principal vantagem de uma sobre a outra. Considere, por exemplo:

Exemplo 6.10. Fixada uma enumeração $\mathbb{Q} = \{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ para $\mathbb{Q}$, considere $\varphi_n = \chi_{\{q_k : k \leq n\}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Temos que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de funções que são integráveis no sentido de Riemann — e a integral de Riemann de cada uma delas é igual a 0 —, mas cujo limite (na convergência pontual) $\chi_{\mathbb{Q}}$ não é integrável no sentido de Riemann. Já no sentido de Lebesgue, o limite $\chi_{\mathbb{Q}}$ é integrável e sua integral é também igual a 0 — o que, naturalmente, está de acordo com o Teorema da Convergência Monótona.

Vejamos mais um exemplo, agora mostrando como a teoria de integração baseada em espaços de medida é abrangente e nos permite dar um tratamento unificado a certos conceitos matemáticos que, numa primeira abordagem, pareciam bastante diferentes!

Exemplo 6.11. Considere o espaço de medida $(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}), \#)$, em que $\#$ é a medida de contagem — isto é, a medida definida por

$$\#(A) = \begin{cases} |A|, & \text{se } A \text{ é finito} \\ +\infty, & \text{se } A \text{ é infinito} \end{cases}$$

para todo $A \subseteq \mathbb{N}$. Dada uma função $f : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$, o que viria a ser a sua integral $\displaystyle\int f \, d\#$? Vejamos...

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a função $\varphi_n = f\chi_{\{0,\ldots,n\}}$ — ou seja, $\varphi_n : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ é a função definida por

$$\varphi_n(k) = \begin{cases} f(k), & \text{se } k \leq n \\ 0, & \text{se } k > n \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Note que cada φ_n é uma função $\wp(\mathbb{N})$-simples, que pode ser escrita como $\varphi_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)\chi_{\{k\}}$; assim, tem-se do Lema 6.5 que

$$\int \varphi_n \, d\# = \sum_{k=0}^{n} f(k) \cdot \#(\{k\}) = \sum_{k=0}^{n} f(k) \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} f(k).$$

Agora, como $\varphi_n \overset{n}{\nearrow} f$, tem-se do Teorema da Convergência Monótona (Teorema 6.9) que

$$\int f \, d\# = \lim_n \int \varphi_n \, d\# = \lim_n \sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k).$$

Se tomarmos $a_k = f(k) \in [0, +\infty]$ para cada k, podemos pensar em f como uma sequência $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de reais estendidos não negativos — afinal, uma função de domínio $\mathbb{N}$ nada mais é que uma sequência, certo? —, de modo que

$$\int f \, d\# = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Ou seja: a integral de f é nada mais que a série infinita que soma a sequência de valores assumidos por f. (Pois é: *uma série infinita é um caso particular de integral de uma função*!)

Vamos agora mostrar algumas propriedades importantes sobre integrais.[8]

[8] Que, tendo em vista o Exemplo 6.11, também valem para séries infinitas, aliás...

Proposição 6.12. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f, g \in \mathcal{M}^+(\mathscr{A})$ e $c \in [0, +\infty]$. Então:

(a) $\displaystyle\int cf \; d\mu = c \cdot \int f \, d\mu$;

(b) $\displaystyle\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.

Demonstração. Usando o Lema 5.17, tome sequências $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções $\mathscr{A}$-simples tais que $\varphi_n \overset{n}{\nearrow} f$ e $\psi_n \overset{n}{\nearrow} g$. Para o item (a), note que $(c\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções $\mathscr{A}$-simples satisfazendo $c\varphi_n \overset{n}{\nearrow} cf$; assim, do Teorema da Convergência Monótona (Teorema 6.9) e do Lema 6.4(a), decorre que

$$\int cf \, d\mu \overset{\text{TCM}}{=} \lim_n \int c\varphi_n \, d\mu \overset{6.4(a)}{=} \lim_n \Big(c \cdot \int \varphi_n \, d\mu \Big) = c \cdot \lim_n \int \varphi_n \, d\mu \overset{\text{TCM}}{=} c \cdot \int f \, d\mu.$$

Para o item (b), basta notar que $(\varphi_n + \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções $\mathscr{A}$-simples satisfazendo $\varphi_n + \psi_n \overset{n}{\nearrow} f + g$; logo, usando o Teorema da Convergência Monótona (Teorema 6.9) e o Lema 6.4(c), obtemos

$$\begin{aligned}
\int (f+g) \, d\mu &\overset{\text{TCM}}{=} \lim_n \int (\varphi_n + \psi_n) \, d\mu = \\
&\overset{6.4(c)}{=} \lim_n \Big(\int \varphi_n \, d\mu \; + \; \int \psi_n \, d\mu \Big) = \\
&= \lim_n \int \varphi_n \, d\mu \; + \; \lim_n \int \psi_n \, d\mu = \\
&\overset{\text{TCM}}{=} \int f \, d\mu \; + \; \int g \, d\mu.
\end{aligned}$$

□

Vejamos agora uma outra consequência importante do Teorema da Convergência Monótona, que vai nos ajudar a lidar com sequências de funções não necessariamente crescentes e que não necessariamente convergem para um limite na convergência pontual.

Lema 6.13 (Lema de Fatou)**.** Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $\mathcal{M}^+(\mathscr{A})$. Então $\displaystyle\int \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu$.

Demonstração. Seja $f = \liminf_n f_n \; \Big(= \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\geq k}} f_n \Big)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina $g_k = \inf_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\geq k}} f_n$. Note que $g_k \overset{k}{\nearrow} f$; logo, pelo Teorema da Convergência Monótona (Teorema 6.9), temos que

$$\int f \, d\mu = \lim_{k\in\mathbb{N}} \int g_k \, d\mu = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int g_k \, d\mu. \tag{†}$$

Fixe, agora, $k \in \mathbb{N}$ arbitrário. Para cada $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq k$, temos que $g_k \leq f_n$, e portanto $\displaystyle\int g_k \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu$ (pelo Lema 6.8(a)). Assim, $\displaystyle\int g_k \, d\mu$ é um limitante inferior do conjunto $\left\{ \displaystyle\int f_n \, d\mu : n \in \mathbb{N} \wedge n \geq k \right\}$, de modo que $\displaystyle\int g_k \, d\mu \leq \inf_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq k}} \int f_n \, d\mu$. Combinando com (†) o fato de que esta desigualdade vale para todo $k \in \mathbb{N}$ — e usando a monotonicidade do supremo —, obtemos

$$\int f \, d\mu \;=\; \sup_{k \in \mathbb{N}} \int g_k \, d\mu \;\leq\; \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq k}} \int f_n \, d\mu \;=\; \liminf_{n} \int f_n \, d\mu,$$

como desejado. □

Este talvez seja um bom momento para introduzirmos uma terminologia bastante utilizada em teoria da medida:

Definição 6.14 (Quase todo ponto)**.** Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida e $\mathbf{P}(x)$ uma afirmação a respeito de pontos de X — que cada ponto $x \in X$ pode ou não satisfazer. Dizemos que $\mathbf{P}$ é válida em *quase todo ponto* se $\{x \in X : \mathbf{P}(x) \text{ é falsa}\} \subseteq Z$ para algum $Z \in \mathscr{A}$ com $\mu(Z) = 0$, e escreveremos "$\mathbf{P}$ q.t.p." para denotar esse fato. (Note que, se $(X, \mathscr{A}, \mu)$ é um espaço de medida completo, então $\mathbf{P}$ q.t.p. se, e somente se, $\mu(\{x \in X : \mathbf{P}(x) \text{ é falsa}\}) = 0$.)

Em posse dessa terminologia, podemos agora enunciar consequências mais gerais do Teorema da Convergência Monótona. Antes, uma proposição importante:

Proposição 6.15. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f \in \mathcal{M}^+(\mathscr{A})$. Então $\displaystyle\int f \, d\mu = 0$ se, e somente se, $f = 0$ q.t.p. (isto é, $\{x \in X : f(x) > 0\}$ está contido num conjunto de medida zero).

Demonstração. Provemos primeiro a recíproca. Fixe $Z \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(Z) = 0$ e $\{X \in X : f(x) > 0\} \subseteq Z$. Seja $\varphi \in \mathcal{M}^+(\mathscr{A})$ uma função $\mathscr{A}$-simples tal que $\varphi \leq f$, e escreva essa função como $\varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ nos termos do Lema 5.9. Se $j \in \{1, \ldots, n\}$ é tal que $a_j > 0$, então todo $x \in A_j$ é tal que $0 < a_j \leq f(x)$, logo $x \in Z$; assim, $A_j \subseteq Z$, e portanto (como $A_j \in \mathscr{A}$) tem-se que $\mu(A_j) = 0$. Disto decorre que $\displaystyle\int \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu(A_i) = 0$, pois cada parcela desta soma é igual a 0. Assim, pela definição de $\displaystyle\int f \, d\mu$, segue-se que $\displaystyle\int f \, d\mu = 0$.

Suponhamos, agora, que $\displaystyle\int f\,d\mu = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $A_n = f^{-1}\left[\left[\frac{1}{2^n}, +\infty\right]\right] \in \mathscr{A}$. Note que $\{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$. Afirmamos que $\mu(A_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ — o que implicará, portanto, que $\mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) = 0$. De fato, basta notar que $\frac{1}{2^n}\chi_{A_n} \leq f$, donde (pelo Lema 6.8($a$))

$$0 \leq \int \frac{1}{2^n}\chi_{A_n}\,d\mu \leq \int f\,d\mu = 0,$$

de modo que $\displaystyle\int \frac{1}{2^n}\chi_{A_n}\,d\mu = 0$. Mas (pelo Lema 6.5) $\displaystyle\int \frac{1}{2^n}\chi_{A_n}\,d\mu = \frac{1}{2^n}\cdot\mu(A_n)$, e disto decorre que $\mu(A_n) = 0$. $\square$

Corolário 6.16. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f \in \mathcal{M}^+(\mathscr{A})$. Então a função

$$\begin{array}{rcl} \nu : \mathscr{A} & \to & [0, +\infty] \\ A & \mapsto & \displaystyle\int_A f\,d\mu \end{array}$$

é uma medida em $\mathscr{A}$ tal que $\{A \in \mathscr{A} : \mu(A) = 0\} \subseteq \{A \in \mathscr{A} : \nu(A) = 0\}$.[9]

Demonstração. Claramente $\nu(\emptyset) = \displaystyle\int_\emptyset f\,d\mu = \int f\chi_\emptyset\,d\mu = \int 0\,d\mu = 0$. Seja, agora, $\mathscr{A}_0 = \{A_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{A}$ tal que $A_k \cap A_l = \emptyset$ para quaisquer $k, l \in \mathbb{N}$ distintos, e defina $\widetilde{A} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$. Como $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de conjuntos cuja união é $\widetilde{A}$, segue-se que $\chi_{B_n} \overset{n}{\nearrow} \chi_{\widetilde{A}}$, e portanto $f\chi_{B_n} \overset{n}{\nearrow} f\chi_{\widetilde{A}}$. Logo, pelo Teorema da Convergência Monótona (Teorema 6.9) e pela

[9]Este resultado possui uma espécie de recíproca, que é o *Teorema de Radon–Nikodym*: se μ e ν são medidas σ-finitas em $\mathscr{A}$ tais que $\{A \in \mathscr{A} : \mu(A) = 0\} \subseteq \{A \in \mathscr{A} : \nu(A) = 0\}$, então existe $f \in \mathcal{M}^+(\mathscr{A})$ tal que $\nu(A) = \displaystyle\int_A f\,d\mu$ para todo $A \in \mathscr{A}$. (Esse é um resultado que vocês verão na disciplina de Probabilidade.)

Proposição 6.12(b), tem-se que

$$\begin{aligned}
\nu(\widetilde{A}) &= \int_{\widetilde{A}} f\,d\mu = \\
&= \int f\chi_{\widetilde{A}}\,d\mu \\
&\overset{\text{TCM}}{=} \lim_{n\in\mathbb{N}} \int f\chi_{B_n}\,d\mu \\
&= \lim_{n\in\mathbb{N}} \int f \sum_{k=0}^{n} \chi_{A_k}\,d\mu \\
&= \lim_{n\in\mathbb{N}} \int \sum_{k=0}^{n} f\chi_{A_k}\,d\mu \\
&\overset{6.12}{=} \lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \int f\chi_{A_k}\,d\mu \\
&= \lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \int_{A_k} f\,d\mu \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} f\,d\mu \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \nu(A_k);
\end{aligned}$$

assim, ν é uma medida.

Suponha, agora, que $A \in \mathscr{A}$ é tal que $\mu(A) = 0$. Então $f\chi_A = 0$ q.t.p., e decorre então da Proposição 6.15 que

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu = \int f\chi_A\,d\mu \overset{6.15}{=} 0,$$

como requerido. □

A seguinte proposição é uma versão mais geral do Teorema da Convergência Monótona (Teorema 6.9):

Proposição 6.17. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f \in \mathcal{M}^+(\mathscr{A})$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $\mathcal{M}^+(\mathscr{A})$ tais que $f_n \overset{n}{\nearrow} f$ q.t.p. Então $\displaystyle\int f\,d\mu = \lim_n \int f_n\,d\mu$.

Demonstração. Seja $Z \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(Z) = 0$ e $\{x \in X : \neg(f_n(x) \overset{n}{\nearrow} f(x))\} \subseteq Z$. Então $f_n\chi_{X\setminus Z} \overset{n}{\nearrow} f\chi_{X\setminus Z}$; logo, pelo Teorema da Convergência Monótona (Teorema

6.9),

$$\int f\chi_{X\setminus Z}\,d\mu = \lim_n \int f_n\chi_{X\setminus Z}\,d\mu. \tag{†}$$

Mas, para toda $g \in \mathcal{M}^+(\mathscr{A})$, tem-se que $g = g\chi_Z + g\chi_{X\setminus Z}$, logo

$$\int g\,d\mu = \int g\chi_Z\,d\mu + \int g\chi_{X\setminus Z}\,d\mu = \int g\chi_{X\setminus Z}\,d\mu \tag{‡}$$

— sendo que a primeira igualdade decorre da Proposição 6.12(b), e a segunda igualdade decorre da Proposição 6.15 (uma vez que $g\chi_Z = 0$ q.t.p.).

Combinando (†) e (‡), obtemos o resultado. □

Corolário 6.18. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f \in \mathcal{M}^+(\mathscr{A})$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $\mathcal{M}^+(\mathscr{A})$ tais que $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ q.t.p. Então $\int f\,d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n\,d\mu$.

Demonstração. Basta notar que, definindo-se $g_k = \sum_{n=0}^{k} f_n$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tem-se que $g_k \overset{k}{\nearrow} f$ q.t.p.; aplicando-se então a Proposição 6.17, obtemos o desejado. □

Vamos agora tratar de funções com contradomínio $\overline{\mathbb{R}}$, e não apenas $[0, +\infty]$! Para isso, definamos o seguinte:

Definição 6.19 (Parte positiva e parte negativa de uma função)**.** Dados um conjunto não vazio X e uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, definimos a *parte positiva de f* e a *parte negativa de f* como sendo, respectivamente, as funções $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = \max\{-f, 0\}$.

Notemos que, se f é $\mathscr{A}$-mensurável, então $f^+, f^- \in \mathcal{M}^+(\mathscr{A})$ (pelo Corolário 5.15). Além disso, $f = f^+ - f^-$.

Agora sim, podemos definir a integral de uma função que não necessariamente é não negativa:

Definição 6.20 (Funções integráveis)**.** Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função $\mathscr{A}$-mensurável.

- Se as integrais $\int f^+\,d\mu$ e $\int f^-\,d\mu$ não são ambas iguais a $+\infty$, definimos a *integral de f (com respeito a μ)* como sendo $\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu$.

- Como já havíamos convencionado anteriormente, no caso particular em que $(X, \mathscr{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$, dizemos que $\displaystyle\int f\, dm$ é a *integral de Lebesgue de* f.
- Também estendendo a notação que já tínhamos, fixado $E \in \mathscr{A}$ arbitrário, define-se a *integral de* f *em* E *(com respeito a* μ*)* por
$$\int_E f\, d\mu = \int f\chi_E\, d\mu.$$
- No caso em que $\displaystyle\int f^+\, d\mu$ e $\displaystyle\int f^-\, d\mu$ são ambas finitas, dizemos que f é *integrável (com respeito a* μ*).*

Uma propriedade muito importante das funções integráveis é a seguinte:

Proposição 6.21. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função $\mathscr{A}$-mensurável. Então f é integrável se, e somente se, $|f|$ é integrável. Nesse caso, tem-se que $\displaystyle\left|\int f\, d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu$.

Demonstração. Note que $|f| = f^+ + f^-$, e portanto $|f|^+ = f^+ + f^-$ e $|f|^- = 0$, sendo f^+ e f^- funções $\mathscr{A}$-mensuráveis. Como $\displaystyle\int |f|^-\, d\mu = 0$, tem-se que $|f|$ é integrável se, e somente se, $\displaystyle\int (f^+ + f^-)\, d\mu < +\infty$. Tendo em vista o Lema 6.8(a) e a Proposição 6.12(b), isto é equivalente a $\displaystyle\int f^+\, d\mu$ e $\displaystyle\int f^-\, d\mu$ serem ambas finitas — o que, por sua vez, é o mesmo que f ser integrável.

Nesse caso, teremos
$$\begin{aligned}
\left|\int f\, d\mu\right| &= \left|\int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu\right| \leq \\
&\leq \left|\int f^+\, d\mu\right| + \left|\int f^-\, d\mu\right| = \\
&= \int f^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu = \\
&= \int (f^+ + f^-)\, d\mu = \\
&= \int |f|^+\, d\mu = \\
&= \int |f|^+\, d\mu - \int |f|^-\, d\mu = \\
&= \int |f|\, d\mu,
\end{aligned}$$

como desejado. $\square$

O próximo resultado estabelece que a integral tem um comportamento linear com relação às funções integráveis. (Aqui vamos nos limitar às funções que assumem valores em $\mathbb{R}$, para que tenhamos de fato uma estrutura de espaço vetorial.)

Proposição 6.22. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções integráveis e $c \in \mathbb{R}$. Então:

(a) cf é integrável e $\displaystyle\int cf \; d\mu = c \cdot \int f \, d\mu$;

(b) $f + g$ é integrável e $\displaystyle\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.

Em outras palavras: as funções integráveis de X em $\mathbb{R}$ formam um espaço vetorial (com as operações efetuadas ponto a ponto), e a integral é uma transformação linear deste espaço em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Façamos primeiro o item (a). Se $c = 0$, então $cf = 0$, e o resultado é imediato. Se $c > 0$, então $(cf)^+ = c(f^+)$ e $(cf)^- = c(f^-)$; logo, como $\displaystyle\int f^+ \, d\mu$ e $\displaystyle\int f^- \, d\mu$ são ambas finitas, tem-se que

$$\int (cf)^+ \, d\mu = \int c(f^+) \, d\mu = c \cdot \int f^+ \, d\mu < +\infty$$

e

$$\int (cf)^- \, d\mu = \int c(f^-) \, d\mu = c \cdot \int f^- \, d\mu < +\infty,$$

de modo que cf é, portanto, integrável, e

$$\begin{aligned} \int cf \, d\mu &= \int (cf)^+ \, d\mu - \int (cf)^- \, d\mu = \\ &= c \cdot \int f^+ \, d\mu - c \cdot \int f^- \, d\mu = \\ &= c \cdot \Big(\int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \Big) = \\ &= c \cdot \int f \, d\mu. \end{aligned}$$

O caso em que $c < 0$ é análogo — basta notar que $(cf)^+ = -c(f^-)$ e $(cf)^- = -c(f^+)$, e o restante do argumento prossegue similarmente.

Para o item (b), usaremos a Proposição 6.21. Como f e g são integráveis, então $|f|$ e $|g|$ também são integráveis. E, como $|f|$ e $|g|$ são não negativas e têm integral finita, decorre da Proposição 6.12(b) que $\displaystyle\int (|f|+|g|)\,d\mu = \int |f|\,d\mu + \int |g|\,d\mu < +\infty$. Mas então, como $|f+g| \leq |f|+|g|$, tem-se que a função $\mathscr{A}$-mensurável não negativa $|f+g|$ satisfaz $\displaystyle\int |f+g|\,d\mu \leq \int (|f|+|g|)\,d\mu < +\infty$, logo é também integrável. Assim, novamente pela Proposição 6.21, $f+g$ é integrável.

Para mostrarmos que $\displaystyle\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$, façamos primeiro um leminha (que diz que, para calcularmos a integral de uma função, a sua representação como diferença de duas funções não negativas não precisa necessariamente ser aquela da definição da integral):

Lema 6.23. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $f_1, f_2 : X \to [0, +\infty[$ funções $\mathscr{A}$-mensuráveis com integrais finitas e tais que $f = f_1 - f_2$. Então $\displaystyle\int f\,d\mu = \int f_1\,d\mu - \int f_2\,d\mu$.

Demonstração. Como $f_1 - f_2 = f = f^+ - f^-$, então $f_1 + f^- = f^+ + f_2$. Como estas são somas de funções $\mathscr{A}$-mensuráveis não negativas, decorre da Proposição 6.12(b) que

$$\int f_1\,d\mu + \int f^-\,d\mu = \int (f_1 + f^-)\,d\mu = \int (f^+ + f_2)\,d\mu = \int f^+\,d\mu + \int f_2\,d\mu;$$

logo, como estas integrais são todas finitas, podemos reescrever a igualdade acima obtida como

$$\int f_1\,d\mu - \int f_2\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu,$$

isto é, $\displaystyle\int f_1\,d\mu - \int f_2\,d\mu = \int f\,d\mu$. $\triangle$

OK, voltemos à demonstração!

Note que

$$f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-);$$

logo, como $f^+ + g^+$ e $f^- + g^-$ são funções $\mathscr{A}$-mensuráveis não negativas que têm integrais finitas (já que f^+, f^-, g^+ e g^- têm integrais finitas por hipótese), decorre do

Lema 6.23 e da Proposição 6.12(b) que

$$\begin{aligned}
\int (f+g)\,d\mu &= \int (f^+ + g^+)\,d\mu - \int (f^- + g^-)\,d\mu = \\
&= \int f^+\,d\mu + \int g^+\,d\mu - \Big(\int f^-\,d\mu + \int g^-\,d\mu\Big) = \\
&= \int f^+\,d\mu + \int g^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu - \int g^-\,d\mu = \\
&= \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu + \int g^+\,d\mu - \int g^-\,d\mu = \\
&= \int f\,d\mu + \int g\,d\mu,
\end{aligned}$$

como queríamos. □

Como consequência do fato de que as funções integráveis a valores reais formam um espaço vetorial, podemos mostrar o seguinte lema (que estende o Lema 6.8):

Lema 6.24. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções integráveis e $A \in \mathscr{A}$ tal que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in A$. Então $\displaystyle\int_A f\,d\mu \leq \int_A g\,d\mu$.

Demonstração. Pela Proposição 6.22, temos que $g - f : X \to \mathbb{R}$ é uma função integrável. Além disso, da hipótese de que $f\restriction_A \leq g\restriction_A$ decorre que $f\chi_A \leq g\chi_A$, e portanto $g\chi_A - f\chi_A \in \mathcal{M}^+(\mathscr{A})$. Do Lema 6.8, e novamente da Proposição 6.22, tem-se então que

$$0 \overset{6.8}{\leq} \int (g\chi_A - f\chi_A)\,d\mu \overset{6.22}{=} \int g\chi_A\,d\mu - \int f\chi_A\,d\mu = \int_A g\,d\mu - \int_A f\,d\mu,$$

logo $\displaystyle\int_A f\,d\mu \leq \int_A g\,d\mu$. □

Usando o lema acima, vejamos como a integral se relaciona com a propriedade de duas funções serem iguais em quase todo ponto:

Proposição 6.25. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções integráveis. São equivalentes:

(a) $\displaystyle\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$ para todo $A \in \mathscr{A}$;

(b) $\displaystyle\int |f - g|\,d\mu = 0$;

(c) $f = g$ q.t.p.

Demonstração. Pela Proposição 6.15, tem-se que $\int |f-g|\,d\mu = 0$ é equivalente a $|f-g| = 0$ q.t.p., o que por sua vez é equivalente a $f = g$ q.t.p. Assim, $(b) \leftrightarrow (c)$.

Mostremos que $(b) \to (a)$. Supondo que $\int |f-g|\,d\mu = 0$, e fixado $A \in \mathscr{A}$, temos das Proposições 6.21 e 6.8 que

$$\begin{aligned}
\Big|\int_A f\,d\mu - \int_A g\,d\mu\Big| &= \Big|\int f\chi_A\,d\mu - \int g\chi_A\,d\mu\Big| = \\
&= \Big|\int (f\chi_A - g\chi_A)\,d\mu\Big| = \\
&= \Big|\int (f-g)\chi_A\,d\mu\Big| \overset{6.21}{\leq} \\
&\leq \int |(f-g)\chi_A|\,d\mu = \\
&= \int |f-g||\chi_A|\,d\mu \overset{6.8}{\leq} \\
&= \int |f-g|\,d\mu = \\
&= 0,
\end{aligned}$$

logo $\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$.

Finalmente, mostremos que $(\neg(c)) \to (\neg(a))$. Note que

$$\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = (f-g)^{-1}\Big[]-\infty, 0[\Big] \cup (f-g)^{-1}\Big]0, +\infty[\Big]$$

e que os dois conjuntos na união acima são elementos de $\mathscr{A}$, uma vez que $f-g$ é uma função mensurável. Se ambos os conjuntos

$$(f-g)^{-1}\Big[]-\infty, 0[\Big] \in \mathscr{A} \qquad \text{e} \qquad (f-g)^{-1}\Big]0, +\infty[\Big] \in \mathscr{A}$$

tivessem medida zero, teríamos que $f = g$ q.t.p.; logo, supondo $\neg(c)$, devemos ter que pelo menos um desses dois conjuntos tem medida positiva.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\mu\Big((f-g)^{-1}\Big]0, +\infty[\Big)\Big) > 0$. Como $(f-g)^{-1}\Big]0, +\infty[\Big] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (f-g)^{-1}\left[\Big]\frac{1}{2^n}, +\infty\Big[\right]$, e esta união tem medida positiva, então algum dos conjuntos envolvidos nela deve ter medida positiva. Seja então $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu\left((f-g)^{-1}\left[\Big]\frac{1}{2^{n_0}}, +\infty\Big[\right]\right) > 0$. Afirmamos que, para $A = (f-g)^{-1}\left[\Big]\frac{1}{2^{n_0}}, +\infty\Big[\right] \in \mathscr{A}$, tem-se que $\int_A f\,d\mu \neq \int_A g\,d\mu$ — e, portanto, vale $\neg(a)$.

De fato, notemos que, para todo $x \in A$, tem-se que $f(x) \geq g(x) + \dfrac{1}{2^{n_0}}$; logo, do Lema 6.24 e da Proposição 6.22, tem-se que

$$\int_A f\,d\mu \overset{6.24}{\geq} \int_A \Big(g + \frac{1}{2^{n_0}}\Big)\,d\mu \overset{6.22}{=} \int_A g\,d\mu + \int_A \frac{1}{2^{n_0}}\,d\mu = \int_A g\,d\mu + \frac{1}{2^{n_0}} \cdot \mu(A) > \int_A g\,d\mu,$$

provando o desejado. □

Vamos agora mostrar o importantíssimo:

Teorema 6.26 (Teorema da Convergência Dominada)**.** Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função $\mathscr{A}$-mensurável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis de X em $\mathbb{R}$ satisfazendo $f_n \xrightarrow{n} f$ q.t.p. Suponha que exista uma função integrável $g : X \to [0, +\infty[$ tal que $|f_n| \leq g$ q.t.p. para todo $n \in \mathbb{N}$. Então f é integrável e $\displaystyle\int f\,d\mu = \lim_n \int f_n\,d\mu$.

Demonstração. Modificando as funções num conjunto de medida zero se for preciso, podemos supor que as hipóteses são satisfeitas sem a condição "q.t.p." (por quê, exatamente?). Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $-g \leq f_n \leq g$. Disto tiramos duas consequências:

(i) $-g \leq f \leq g$ (ou seja, $|f| \leq g$);

(ii) para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $g + f_n \geq 0$ e $g - f_n \geq 0$.

Como g é integrável, tem-se de (i) que $|f| = |f|^+ \leq g^+$; assim, $|f|$ é integrável, e portanto f é integrável (pela Proposição 6.21). Agora, decorre de (ii), do Lema de Fatou (Lema 6.13) e da Proposição 6.22 que

$$\int \liminf_n (g + f_n)\,d\mu \leq \liminf_n \int (g + f_n)\,d\mu \tag{†}$$

e

$$\int \liminf_n (g - f_n)\,d\mu \leq \liminf_n \int (g - f_n)\,d\mu. \tag{‡}$$

Mas

$$\int \liminf_n (g + f_n)\,d\mu = \int \Big(g + \liminf_n f_n\Big)\,d\mu = \int g\,d\mu + \int \Big(\liminf_n f_n\Big)\,d\mu$$

e

$$\liminf_n \int (g + f_n)\,d\mu = \liminf_n \Big(\int g\,d\mu + \int f_n\,d\mu\Big) = \int g\,d\mu + \liminf_n \Big(\int f_n\,d\mu\Big),$$

logo (†) se torna $\int g\,d\mu + \int \Big(\liminf_n f_n\Big)\,d\mu \leq \int g\,d\mu + \liminf_n \Big(\int f_n\,d\mu\Big)$, e portanto

$$\int f\,d\mu = \int \Big(\liminf_n f_n\Big)\,d\mu \leq \liminf_n \Big(\int f_n\,d\mu\Big). \tag{††}$$

Analogamente, como

$$\int \liminf_n (g - f_n)\,d\mu = \int \Big(g - \limsup_n f_n\Big)\,d\mu = \int g\,d\mu - \int \Big(\limsup_n f_n\Big)\,d\mu$$

e

$$\liminf_n \int (g - f_n)\,d\mu = \liminf_n \Big(\int g\,d\mu - \int f_n\,d\mu\Big) = \int g\,d\mu - \limsup_n \Big(\int f_n\,d\mu\Big),$$

(‡) se torna $\int g\,d\mu - \int \Big(\limsup_n f_n\Big)\,d\mu \leq \int g\,d\mu - \limsup_n \Big(\int f_n\,d\mu\Big)$, de modo que

$$\limsup_n \Big(\int f_n\,d\mu\Big) \leq \int \Big(\limsup_n f_n\Big)\,d\mu = \int f\,d\mu \tag{‡‡}$$

Combinando (††) e (‡‡), obtemos então

$$\int f\,d\mu \leq \liminf_n \Big(\int f_n\,d\mu\Big) \leq \limsup_n \Big(\int f_n\,d\mu\Big) \leq \int f\,d\mu,$$

donde $\int f\,d\mu = \liminf_n \Big(\int f_n\,d\mu\Big) = \limsup_n \Big(\int f_n\,d\mu\Big)$. Assim, $\int f\,d\mu = \lim_n \int f_n\,d\mu$. □

Uma consequência relevante do Teorema da Convergência Dominada é:

Proposição 6.27. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis de X em $\mathbb{R}$ satisfazendo $\sum_{n=0}^{\infty} \int |f_n|\,d\mu < +\infty$. Então existe uma função integrável $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ q.t.p., e $\int f\,d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n\,d\mu$. (Dito de outra maneira, $\int \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\Big)\,d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n\,d\mu$.)

Demonstração. Pelo Corolário 6.18, $\int \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|\Big)\,d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int |f_n|\,d\mu < +\infty$. Logo, $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n| < +\infty$ q.t.p. (por quê?); seja então $T \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(X \setminus T) = 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty$ para todo $x \in T$, e defina $g = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|\Big)\chi_T$.

Note que $g : X \to [0, +\infty[$ é uma função integrável, pois, como $g = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ q.t.p., tem-se da Proposição 6.25 que $\int g \, d\mu = \int \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|\Big) \, d\mu < +\infty$. Assim, como

$$\Big|\sum_{n=0}^{k} f_n \chi_T\Big| \leq \sum_{n=0}^{k} |f_n \chi_T| = \sum_{n=0}^{k} |f_n||\chi_T| \leq \sum_{n=0}^{k} |f_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| = g$$

q.t.p. para cada $k \in \mathbb{N}$, decorre do Teorema da Convergência Dominada (Teorema 6.26) e das Proposições 6.25 e 6.22 que a função $f = \lim_k \Big(\sum_{n=0}^{k} f_n \chi_T\Big) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \chi_T\Big)$ é integrável e

$$\begin{aligned}
\int f \, d\mu &= \lim_k \int \Big(\sum_{n=0}^{k} f_n \chi_T\Big) \, d\mu = \\
&= \lim_k \int \Big(\sum_{n=0}^{k} f_n\Big) \chi_T \, d\mu = \\
&\overset{6.25}{=} \lim_k \int \Big(\sum_{n=0}^{k} f_n\Big) \, d\mu = \\
&\overset{6.22}{=} \lim_k \sum_{n=0}^{k} \int f_n \, d\mu = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n \, d\mu,
\end{aligned}$$

como desejado. □

Vejamos agora um exemplo de como o Teorema da Convergência Dominada pode ser útil para lidar com limites de integrais num contexto de continuidade:

Proposição 6.28. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $n \in \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Suponha que $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ é tal que:

(i) para todo $y \in Y$, a função

$$\begin{array}{rcccl} F_y & : & X & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & F(x, y) \end{array}$$

é integrável;

(ii) para todo $x \in X$, o limite $\lim_{y \to a} F(x, y)$ existe; e

(*iii*) existem $\delta > 0$ e uma função integrável $g : X \to \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in X$ e todo $y \in Y$ com $\|y - a\| < \delta$, tem-se $|F(x, y)| \leq g(x)$.

Então a função

$$\begin{array}{rcl} f & : & X \to \mathbb{R} \\ & & x \mapsto \lim\limits_{y \to a} F(x, y) \end{array}$$

é integrável e $\displaystyle\int f \, d\mu = \lim_{y \to a} \int F(x, y) \, d\mu(x)$ — ou, dito de outra maneira,

$$\int \lim_{y \to a} F(x, y) \, d\mu(x) = \lim_{y \to a} \int F(x, y) \, d\mu(x).$$

Demonstração. Antes de mais nada, vamos nos lembrar do seguinte fato de análise real — ou, neste caso, de análise no $\mathbb{R}^n$ (mas vide Observação 6.29 ao término da demonstração):

<u>Fato.</u> Se $b \in \mathbb{R}^n$ é ponto de acumulação de $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $h : A \to \mathbb{R}$ é uma função e $L \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{y \to b} h(y) = L$ se, e somente se, para toda sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de A satisfazendo $y_n \xrightarrow{n} b$ tem-se que $\lim\limits_{n} h(y_n) = L$.

Pois bem, à demonstração!

Tome uma sequência arbitrária $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de Y satisfazendo $y_n \xrightarrow{n} a$ e $\|y_n - a\| < \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e defina $f_n = F_{y_n}$ — isto é,

$$\begin{array}{rcl} f_n & : & X \to \mathbb{R} \\ & & x \mapsto F(x, y_n) \end{array}$$

— para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que, para cada $x \in X$, aplicando o Fato à função $y \mapsto F(x, y)$ obtemos $\lim\limits_{n} f_n(x) = f(x)$. Além disso, por (*iii*), temos que $|f_n(x)| = |F(x, y_n)| \leq g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$; logo, do Teorema da Convergência Dominada (Teorema 6.26), tem-se que $f = \lim\limits_{n} f_n$ é integrável e

$$\int f \, d\mu = \lim_{n} \int f_n \, d\mu = \lim_{n} \int F(x, y_n) \, d\mu(x)$$

— e, como a sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é arbitrária, a igualdade

$$\int f \, d\mu = \lim_{y \to a} \int F(x, y) \, d\mu(x)$$

decorre do Fato aplicado à função $y \mapsto \displaystyle\int F(x, y) \, d\mu(x)$. $\square$

Observação 6.29. Leitores e leitoras sagazes devem ter notado que, fazendo-se as adaptações necessárias, a Proposição 6.28 permaneceria válida se supuséssemos apenas que Y é um espaço métrico — ou mesmo um espaço topológico que satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade —, pois tudo o que usamos de $\mathbb{R}^n$ na demonstração está expresso no Fato enunciado no início dela.

Corolário 6.30. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $n \in \mathbb{N}^*$ e $a \in Y \subseteq \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de Y. Suponha que $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ é tal que:

(i) para todo $y \in Y$, a função

$$\begin{array}{rcccl} F_y & : & X & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & F(x,y) \end{array}$$

é integrável;

(ii) para todo $x \in X$, a função

$$\begin{array}{rcccl} F^x & : & Y & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & F(x,y) \end{array}$$

é contínua no ponto a; e

(iii) existem $\delta > 0$ e uma função integrável $g : X \to \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in X$ e todo $y \in Y$ com $\|y - a\| < \delta$, tem-se $|F(x,y)| \leq g(x)$.

Então a função

$$\begin{array}{rcccl} S & : & Y & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & \displaystyle\int F(x,y)\, d\mu(x) \end{array}$$

é contínua no ponto a.

Demonstração. Exercício. □

Uma instância específica (e bastante útil) da Proposição 6.28 é:

Corolário 6.31. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio e $a \in I$. Suponha que $F : X \times I \to \mathbb{R}$ é tal que:

(i) para todo $y \in I$, a função

$$\begin{array}{rcl} F_y & : & X \to \mathbb{R} \\ & & x \mapsto F(x,y) \end{array}$$

é integrável;

(ii) para todo $x \in X$, a função

$$\begin{array}{rcl} F^x & : & I \to \mathbb{R} \\ & & y \mapsto F(x,y) \end{array}$$

é derivável no ponto a; e

(iii) existem $\delta > 0$ e uma função integrável $g : X \to \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in X$ e todo $y' \in I$ com $|y' - a| < \delta$, tem-se $\left| \frac{\partial}{\partial y} F(x,y) \Big|_{y=y'} \right| \leq g(x)$.

Então

$$\frac{d}{dy}\Big(\int F(x,y)\, d\mu(x)\Big)\Big|_{y=a} = \int \Big(\frac{\partial}{\partial y} F(x,y)\Big|_{y=a}\Big)\, d\mu(x).$$

Demonstração. Por um lado,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}\Big(\int F(x,y)\, d\mu(x)\Big)\Big|_{y=a} &= \lim_{y\to a} \frac{\int F(x,y)\, d\mu(x) - \int F(x,a)\, d\mu(x)}{y-a} = \\ &\overset{6.22}{=} \lim_{y\to a} \int \frac{F(x,y) - F(x,a)}{y-a}\, d\mu(x). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int \Big(\frac{\partial}{\partial y} F(x,y)\Big|_{y=a}\Big)\, d\mu(x) = \int \lim_{y\to a} \frac{F(x,y) - F(x,a)}{y-a}\, d\mu(x).$$

Assim, basta mostrarmos que

$$\lim_{y\to a} \int \frac{F(x,y) - F(x,a)}{y-a}\, d\mu(x) = \int \lim_{y\to a} \frac{F(x,y) - F(x,a)}{y-a}\, d\mu(x).$$

Para tanto, usaremos a Proposição 6.28.

Para cada $x \in X$ e cada $y \in I \setminus \{a\}$, seja

$$Q(x,y) = \frac{F(x,y) - F(x,a)}{y-a}.$$

Devemos mostrar que

$$\lim_{y\to a}\int Q(x,y)\,d\mu(x) = \int \lim_{y\to a} Q(x,y)\,d\mu(x). \tag{$\dagger$}$$

Note que $Q(x,y) = \dfrac{1}{y-a}(F_y(x) - F_a(x))$ para todo $x \in X$ e todo $y \in I \setminus \{a\}$; logo, como a hipótese (i) garante que F_y e F_a são ambas integráveis, temos da Proposição 6.22 que $x \mapsto Q(x,y)$ é integrável para todo $y \in I \setminus \{a\}$. Além disso, pela hipótese (ii), o limite $\lim\limits_{y\to a} Q(x,y)$ existe para todo $x \in X$. Para concluirmos ($\dagger$) a partir da Proposição 6.28, basta então verificar que a terceira hipótese desta proposição está também satisfeita, ou seja:

existem $\tilde{\delta} > 0$ e uma função integrável $\tilde{g} : X \to \mathbb{R}$ tais que,
para todo $x \in X$ e todo $y \in I \setminus \{a\}$ com $|y-a| < \tilde{\delta}$, tem-se
$$|Q(x,y)| \le \tilde{g}(x).$$

Verifiquemos que $\tilde{\delta} = \delta$ e $\tilde{g} = g$ de nossa hipótese (iii) satisfazem a condição acima.

De fato, tome $x \in X$ e $y \in I \setminus \{a\}$ tal que $|y-a| < \delta$. Como F^x é derivável (em virtude da hipótese (ii)), decorre do Teorema do Valor Médio que existe $c \in I$ com c entre y e a tal que $\dfrac{F^x(y) - F^x(a)}{y-a} = (F^x)'(c)$, isto é,

$$Q(x,y) = \frac{F(x,y) - F(x,a)}{y-a} = \frac{\partial}{\partial y}F(x,y)\Big|_{y=c}.$$

Mas então, pela nossa hipótese (iii), temos

$$|Q(x,y)| = \left|\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)\Big|_{y=c}\right| \le g(x),$$

como requerido. □

O enunciado do Corolário 6.31 tem bastante apelo, *contanto que a gente saiba como determinar aquelas integrais.* O contraste entre as propriedades que estamos obtendo a respeito da integral de Lebesgue (no caso da reta real) e as propriedades que já conhecíamos sobre a integral de Riemann só é significativo se essa "nova" integral de fato representar algo que corresponda à interpretação que temos da integral de Riemann — senão vão ser apenas duas coisas diferentes que possuem propriedades diferentes e que não se conversam, e daí as propriedades da "nova" integral talvez não tenham nada de mais (porque comparar as duas nem faria muito sentido).

Vamos agora ver que esse não é o caso: a integral de Lebesgue de fato estende a integral de Riemann!

6.1 A relação entre a integral de Lebesgue e a integral de Riemann

Lembremo-nos de que a integral (própria) de Riemann é definida para funções limitadas da forma $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, sendo $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Estas serão as funções de que nos ocuparemos nesta seção, pois.

Vamos começar com um lema de análise real:

Lema 6.32. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Considere as funções

$$\begin{array}{rcl} c : [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sup\limits_{\delta>0}\Big(\inf\limits_{\substack{y\in[a,b]\\|y-x|<\delta}} f(y)\Big) \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} T : [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \inf\limits_{\delta>0}\Big(\sup\limits_{\substack{y\in[a,b]\\|y-x|<\delta}} f(y)\Big). \end{array}$$

Então $c \leq f \leq T$. Além disso, dado $x \in [a, b]$ arbitrário, tem-se que f é contínua em x se, e somente se, $c(x) = T(x)$.

Demonstração. Exercício. □

O lema acima será usado juntamente com o lema a seguir, que define as funções em escada que usaremos para relacionar a integral de Lebesgue com a integral de Riemann.

Lema 6.33. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e

$$\mathcal{P} = \{(x_0, \ldots, x_n) : n \in \mathbb{N}^*,\ x_0 = a,\ x_n = b \text{ e } x_i < x_{i+1} \text{ para todo natural } i < n\}.$$

Para cada $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathcal{P}$, defina $\operatorname{diam}(\bar{x}) = \max\limits_{0\leq i<n}(x_{i+1} - x_i)$, e considere as funções

$$c_{\bar{x}} = \sum_{i=0}^{n-1}\Big(\inf_{y\in\,]x_i,x_{i+1}[} f(y)\Big)\chi_{]x_i,x_{i+1}[}.$$

e

$$T_{\bar{x}} = \sum_{i=0}^{n-1}\Big(\sup_{y\in\,]x_i,x_{i+1}[} f(y)\Big)\chi_{]x_i,x_{i+1}[}.$$

Então, sendo $(\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $\mathcal{P}$ com $\operatorname{diam}(\bar{x}_k) \xrightarrow{k} 0$, tem-se que $c_{\bar{x}_k} \xrightarrow{k} c$ q.t.p. e $T_{\bar{x}_k} \xrightarrow{k} T$ q.t.p. — sendo c e T as funções definidas no Lema 6.32.

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$, escreva $\bar{x}_k = (x_0^k, \ldots, x_{n_k}^k)$. Sendo

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x_0^k, \ldots, x_{n_k}^k\} \subseteq [a, b],$$

temos que E é enumerável, logo $E \in \mathscr{N}$. Afirmamos que

$$c_{\bar{x}_k}(x) \xrightarrow{k} c(x) \qquad \text{e} \qquad T_{\bar{x}_k}(x) \xrightarrow{k} T(x)$$

para todo $x \in [a, b] \setminus E$, o que acarreta o desejado.

Mostremos isso para T — o argumento para c é análogo. Fixe então $x \in [a, b] \setminus E$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Para cada $k \in \mathbb{N}$, tome $i_k \in \{0, \ldots, n_k - 1\}$ tal que $x \in]x_{i_k}^k, x_{i_k+1}^k[$, e seja $\delta_k = \min\{x - x_{i_k}^k, x_{i_k+1}^k - x\} > 0$; nestas condições,

$$T_{\bar{x}_k}(x) \;=\; \sup_{y \in]x_{i_k}^k, x_{i_k+1}^k[} f(y) \;\geq\; \sup_{\substack{y \in [a,b] \\ |y-x| < \delta_k}} f(y) \;\geq\; \inf_{\delta > 0} \Big(\sup_{\substack{y \in [a,b] \\ |y-x| < \delta}} f(y) \Big) \;=\; T(x). \qquad (\dagger)$$

Como $T_{\bar{x}_k}(x) \geq T(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (vide (†)), devemos mostrar que

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}\, \forall k \in \mathbb{N}\, (k \geq k_0 \to T_{\bar{x}_k}(x) < T(x) + \varepsilon). \qquad (\ddagger)$$

Da definição de $T(x)$, tem-se que existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que $\sup\limits_{\substack{y \in [a,b] \\ |y-x| < \tilde{\delta}}} f(y) < T(x) + \varepsilon$. Note agora que, como $\operatorname{diam}(\bar{x}_k) \xrightarrow{k} 0$, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq k_0$, tem-se $\operatorname{diam}(\bar{x}_k) < \tilde{\delta}$. Mas então todo $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq k_0$ satisfaz $]x_{i_k}^k, x_{i_k+1}^k[\subseteq]x - \tilde{\delta}, x + \tilde{\delta}[$, e portanto

$$T_{\bar{x}_k}(x) \;=\; \sup_{y \in]x_{i_k}^k, x_{i_k+1}^k[} f(y) \;\leq\; \sup_{\substack{y \in [a,b] \\ |y-x| < \tilde{\delta}}} f(y) \;<\; T(x) + \varepsilon.$$

Assim, temos que vale (‡), como queríamos. □

Lembremo-nos ainda de que, nas condições do lema anterior, definem-se a integral inferior de f e a integral superior de f (no sentido de Riemann) respectivamente por

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\Big\{ \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\inf_{y \in]x_i, x_{i+1}[} f(y) \Big) \cdot (x_{i+1} - x_i) : (x_0, \ldots, x_n) \in \mathcal{P} \Big\}$$

e

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf\Big\{ \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\sup_{y \in]x_i, x_{i+1}[} f(y) \Big) \cdot (x_{i+1} - x_i) : (x_0, \ldots, x_n) \in \mathcal{P} \Big\},$$

e que f é integrável segundo Riemann se, e somente se, $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ — e, nesse caso, sua integral de Riemann é definida como sendo o número real

$$\int_a^b f(x)\,dx := \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Assim, combinando o Lema 6.33 com o Teorema da Convergência Dominada, obtemos:

Proposição 6.34. Nas hipóteses do Lema 6.32, temos que as funções c e T são integráveis; além disso,

$$\int c\,dm = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \int T\,dm = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Demonstração. Mostraremos o resultado para c; o argumento para T é análogo.

Note que todas as funções da forma $c_{\bar{x}}$ para $\bar{x} \in \mathcal{P}$ são funções $\mathscr{M}$-simples definidas em $[a, b]$ e limitadas; logo, são integráveis. Ainda, sendo $M \in [0, +\infty[$ tal que $\operatorname{im}(f) \subseteq [-M, M]$ (um tal M existe, pois f é limitada por hipótese), tem-se que a função constante $g \equiv M$ é integrável no intervalo $[a, b]$ (sua integral é $M \cdot (b - a) < +\infty$) e é tal que $|c_{\bar{x}}| \leq g$ para todo $\bar{x} \in \mathcal{P}$.

Usando agora a definição de $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ mencionada antes desta proposição, tome uma sequência $(\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{P}$ tal que $\operatorname{diam}(\bar{x}_k) \xrightarrow{k} 0$ e

$$\sum_{i=0}^{n_k-1} \Big(\inf_{y \in]x_i^k, x_{i+1}^k[} f(y) \Big) \cdot (x_{i+1}^k - x_i^k) \xrightarrow{k} \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

(sendo $\bar{x}_k = (x_0^k, \ldots, x_{n_k}^k)$), decorre do Lema 6.33 e do Teorema da Convergência Dominada (Teorema 6.26) que c é uma função integrável e satisfaz

$$\int c_{\bar{x}_k}\,dm \xrightarrow{k} \int c\,dm,$$

ou seja,

$$\sum_{i=0}^{n_k-1} \Big(\inf_{y \in]x_i^k, x_{i+1}^k[} f(y) \Big) \cdot (x_{i+1}^k - x_i^k) \xrightarrow{k} \int c\,dm.$$

Assim, da unicidade do limite em $\mathbb{R}$, tem-se que $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int c\,dm$. $\square$

OK, ao teorema principal!

Teorema 6.35. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então f é integrável no sentido de Riemann se, e somente se,

$$\{x \in [a, b] : f \text{ não é contínua em } x\} \in \mathscr{N}$$

— e, nesse caso, $\displaystyle\int f\, dm = \int_a^b f(x)\, dx$.

Demonstração. Por definição, f é integrável segundo Riemann se, e somente se, vale $\underline{\displaystyle\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\displaystyle\int_a^b} f(x)\, dx$ — o que, pela Proposição 6.34, é equivalente à igualdade $\overline{\displaystyle\int} c\, dm = \displaystyle\int T\, dm$. Mas, como $c \leq T$, decorre das Proposições 6.22 e 6.25 que

$$\int c\, dm = \int T\, dm \overset{6.22}{\longleftrightarrow} \int (T - c)\, dm = 0 \overset{c \leq T}{\longleftrightarrow} \int |T - c|\, dm = 0 \overset{6.25}{\longleftrightarrow} T = c \text{ q.t.p.}$$

— e, pelo Lema 6.32, isto é equivalente a

$$f \text{ é contínua q.t.p.},$$

ou seja, $\{x \in [a, b] : f \text{ não é contínua em } x\} \in \mathscr{N}$.

Para a segunda parte, veja que acabamos de mostrar que f é integrável no sentido de Riemann se, e somente se, $T = c$ q.t.p. Mas $c \leq f \leq T$ pelo Lema 6.32 (na verdade, pela própria definição de c e T), de modo que, se f é integrável segundo Riemann, então $c = f = T$ q.t.p. Como c e T são integráveis pela Proposição 6.34, isto implica que f é integrável (por quê, exatamente?); assim, decorre da Proposição 6.25 que

$$\int f\, dm = \int c\, dm = \int T\, dm$$

— o que, novamente pela Proposição 6.34, é o mesmo que

$$\int f\, dm = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

Logo, da definição de integral de Riemann, obtemos

$$\int f\, dm = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad \square$$

Vamos agora em direção a mais um teorema essencial da teoria de integração: o Teorema de Fubini–Tonelli.

6.2 Produtos de espaços de medida

Nesta seção, veremos como definir o produto de dois espaços de medida — e como a integração de funções neste novo espaço de medida se relaciona com a integração nos espaços originais.

Antes de mais nada, uma definição:

Definição 6.36. Sejam X e X' conjuntos não vazios, $\mathscr{B} \subseteq \wp(X)$ e $\mathscr{B}' \subseteq \wp(X')$. Denotamos por $\mathscr{B} \otimes \mathscr{B}'$ a σ-álgebra gerada pela família de todos os conjuntos da forma $B \times B'$ com $B \in \mathscr{B}$ e $B' \in \mathscr{B}'$.

Comecemos percebendo uma dessas coisas que parecem naturais e que, por "sorte", de fato funcionam bem:

Proposição 6.37. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ e $(X', \mathscr{A}', \mu')$ espaços de medida e

$$\mathscr{R} = \{A \times A' : A \in \mathscr{A} \text{ e } A' \in \mathscr{A}'\}.$$

Então o conjunto $\widehat{\mathscr{R}}$ de todas as uniões disjuntas de uma quantidade finita de elementos de $\mathscr{R}$ é uma álgebra sobre $X \times X'$, e a função

$$\begin{array}{rccl} \hat{\mu} & : & \widehat{\mathscr{R}} & \to & [0, +\infty] \\ & & \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} (A_k \times A'_k) & \mapsto & \sum_{k=1}^{n} (\mu(A_k) \cdot \mu'(A'_k)) \end{array}$$

é uma medida em $\widehat{\mathscr{R}}$.

Demonstração. É imediato que $\widehat{\mathscr{R}} \neq \emptyset$, pois $X \times X' \in \widehat{\mathscr{R}}$. Além disso, dados $A_1 \times A'_1, A_2 \times A'_2 \in \mathscr{R}$, tem-se que $(A_1 \times A'_1) \cap (A_2 \times A'_2) = (A_1 \cap A_2) \times (A'_1 \cap A'_2) \in \mathscr{R}$, e disto decorre que $\widehat{\mathscr{R}}$ é fechado por intersecções finitas não vazias (por quê, exatamente?). À luz desta última afirmação, para concluirmos que $\widehat{\mathscr{R}}$ é uma álgebra, é suficiente mostrarmos que o complementar de todo elemento de $\mathscr{R}$ em $X \times X'$ é um elemento de $\widehat{\mathscr{R}}$ (por quê?). Para tanto, basta notar que, dado $A \times A' \in \mathscr{R}$ arbitrário, tem-se que

$$(X \times X') \setminus (A \times A') = ((X \setminus A) \times X') \,\dot{\cup}\, (A \times (X' \setminus A')) \in \widehat{\mathscr{R}}.$$

O fato de que $\hat{\mu}$ é uma medida decorre da seguinte:

<u>*Afirmação.*</u> Se $(A_n \times A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de $\mathscr{R}$ (possivelmente vazios) tal que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \times A'_n) = A \times A' \in \mathscr{R}, \tag{$\dagger$}$$

então $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\mu(A_n)\cdot\mu'(A'_n)) = \mu(A)\cdot\mu'(A')$.

De fato, note que, por (†), temos

$$\chi_A\chi_{A'} = \chi_{A\times A'} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\chi_{A_n\times A'_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\chi_{A_n}\chi_{A'_n});$$

logo, para cada $x\in X$ fixado, decorre do Corolário 6.18 que

$$\int(\chi_A(x)\cdot\chi_{A'}(x'))\,d\mu'(x') = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int(\chi_{A_n}(x)\cdot\chi_{A'_n}(x'))\,d\mu'(x'),$$

ou seja,

$$\chi_A(x)\cdot\int\chi_{A'}\,d\mu' = \sum_{n\in\mathbb{N}}\Big(\chi_{A_n}(x)\cdot\int\chi_{A'_n}\,d\mu'\Big),$$

o que é o mesmo que

$$\chi_A(x)\cdot\mu'(A') = \sum_{n\in\mathbb{N}}\Big(\chi_{A_n}(x)\cdot\mu'(A'_n)\Big).$$

Assim, novamente pelo Corolário 6.18,

$$\int(\chi_A(x)\cdot\mu'(A'))\,d\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int(\chi_{A_n}(x)\cdot\mu'(A'_n))\,d\mu(x),$$

isto é,

$$\Big(\int\chi_A\,d\mu\Big)\cdot\mu'(A') = \sum_{n\in\mathbb{N}}\Big(\Big(\int\chi_{A_n}\,d\mu\Big)\cdot\mu'(A'_n)\Big),$$

donde

$$\mu(A)\cdot\mu'(A') = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\mu(A_n)\cdot\mu'(A'_n)),$$

como desejado.

Como a Afirmação se aplica tanto a somas infinitas quanto a somas finitas (se, a partir de um certo n_0, todos os termos da sequência forem vazios), tem-se como consequências dela que a função $\hat{\mu}$ está bem definida e que ela é, de fato, uma medida — por um argumento análogo ao utilizado no Exemplo 1.6. (Preencher os detalhes fica como exercício!) □

Combinando esta proposição com o Teorema da Extensão de Hahn–Kolmogorov, obtemos como consequência imediata o seguinte resultado, que define o produto de medidas no caso em que ambas são σ-finitas:

Proposição 6.38 (Produto de medidas)**.** Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ e $(X', \mathscr{A}', \mu')$ espaços de medida. Então existe uma medida $\pi : \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}' \to [0, +\infty]$ tal que $\pi(A \times A') = \mu(A) \cdot \mu'(A')$ para quaisquer $A \in \mathscr{A}$ e $A' \in \mathscr{A}'$. Além disso, se ambas as medidas μ e μ' são σ-finitas, então a medida π é única.

Demonstração. O resultado decorre diretamente da Proposição 6.37 e do Teorema da Extensão de Hahn–Kolmogorov (Teorema 3.7); para tanto — nas notações da Proposição 6.37 —, note que $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}' = \sigma(\widehat{\mathscr{R}})$ e que, se μ e μ' são ambas σ-finitas, então a medida $\hat{\mu}$ também o é. $\square$

Para podermos relacionar a integração num produto de espaços de medida com a integração em cada um desses espaços, precisamos primeiro garantir que as funções que conseguimos integrar no produto estão relacionadas a funções que conseguimos integrar em cada um dos espaços. Mais precisamente:

Lema 6.39. Considere as mesmas hipóteses da Proposição 6.38.

(a) Para todo $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}'$, tem-se que

- $E_{x'} = \{x \in X : (x, x') \in E\} \in \mathscr{A}$ para todo $x' \in X'$; e
- $E^x = \{x' \in X' : (x, x') \in E\} \in \mathscr{A}'$ para todo $x \in X$.

(b) Para toda função $f : X \times X' \to \overline{\mathbb{R}}$ que é $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}'$-mensurável, tem-se que

- a função
$$\begin{array}{rcl} f_{x'} : X & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & f(x, x') \end{array}$$
é $\mathscr{A}$-mensurável para todo $x' \in X'$; e
- a função
$$\begin{array}{rcl} f^x : X' & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x' & \mapsto & f(x, x') \end{array}$$
é $\mathscr{A}'$-mensurável para todo $x \in X$.

Demonstração. Para o item (a), fixe $x' \in X'$ arbitrário. Afirmamos que o conjunto

$$\mathscr{E}_{x'} = \{E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}' : E_{x'} \in \mathscr{A}\}$$

é uma σ-álgebra que contém $\mathscr{R}$ — e disto decorrerá que $\mathscr{E}_{x'} = \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}'$.

Primeiramente, notemos que $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{E}_{x'}$, pois, dado $E = A \times A' \in \mathscr{R}$ arbitrário, tem-se que

$$E_{x'} = \begin{cases} A, & \text{se } x' \in A'; \\ \emptyset, & \text{se } x' \notin A', \end{cases}$$

e portanto $E_{x'} \in \mathscr{A}$ — isto é, $E \in \mathscr{E}_{x'}$. O fato de que $\mathscr{E}_{x'}$ é fechado por complementares e por uniões enumeráveis decorre da observação de que

$$((X \times X') \setminus E)_{x'} = X \setminus E_{x'} \in \mathscr{A} \text{ para todo } E \in \mathscr{E}_{x'}$$

e

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big)_{x'} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n)_{x'} \in \mathscr{A} \text{ para toda sequência } (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ em } \mathscr{E}_{x'}.$$

Analogamente, mostra-se que

$$\mathscr{E}^x = \{E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}' : E^x \in \mathscr{A}'\}$$

é igual a $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}'$ para todo $x \in X$.

Para o item (b), fixe $x' \in X'$ arbitrário. Então, para cada $a \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$\begin{aligned} f_{x'}^{-1}\Big[[a, +\infty]\Big] &= \{x \in X : f_{x'}(x) \geq a\} = \\ &= \{x \in X : f(x, x') \geq a\} = \\ &= \{(x, x') \in X \times X' : f(x, x') \geq a\}_{x'} = \\ &= \Big(f^{-1}\Big[[a, +\infty]\Big]\Big)_{x'} \in \mathscr{A}, \end{aligned}$$

Logo $f_{x'}$ é $\mathscr{A}$-mensurável pelo Lema 5.6. (A demonstração de que f^x é $\mathscr{A}'$-mensurável para todo $x \in X$ é análoga.) $\square$

Mais um lema antes do teorema!

Lema 6.40. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ e $(X', \mathscr{A}', \mu')$ espaços de medida tais que μ e μ' são σ-finitas, e seja $\pi : \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}' \to [0, +\infty]$ a (única) medida satisfazendo as condições da Proposição 6.38. Então, fixado $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}'$ arbitrário, tem-se que as funções

$$\begin{array}{rcl} f^E : X & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & \mu'(E^x) \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} g_E : X' & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x' & \mapsto & \mu(E_{x'}) \end{array}$$

são, respectivamente, $\mathscr{A}$- e $\mathscr{A}'$-mensuráveis; além disso,

$$\int f^E \, d\mu = \pi(E) = \int g_E \, d\mu'.$$

Demonstração. Tratemos primeiro o caso em que μ e μ' são finitas.

Considere o conjunto

$$\mathcal{M} = \{E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}' : f^E \text{ e } g_E \text{ são mensuráveis e } \int f^E \, d\mu = \pi(E) = \int g_E \, d\mu'\}.$$

Primeiramente, notemos que — na notação da Proposição 6.37 — $\mathscr{R} \subseteq \mathcal{M}$, pois, dado $E = A \times A' \in \mathscr{R}$, tem-se que f^E e g_E são funções simples (logo, mensuráveis) e

$$\int f^E \, d\mu = \int \mu'(A')\chi_A \, d\mu = \mu'(A') \cdot \int \chi_A \, d\mu = \mu'(A') \cdot \mu(A) = \pi(A \times A')$$

e

$$\int g_E \, d\mu' = \int \mu(A)\chi_{A'} \, d\mu' = \mu(A) \cdot \int \chi_{A'} \, d\mu' = \mu(A) \cdot \mu'(A') = \pi(A \times A').$$

Da observação acima, e também da aditividade da medida e da integral, tem-se que $\widehat{\mathscr{R}} \subseteq \mathcal{M}$ (por quê, exatamente?).

Vamos mostrar que $\mathcal{M}$ é uma classe monótona[10]; pelo Exercício III.11 da Lista 1, disto decorrerá então que

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}' = \sigma(\widehat{\mathscr{R}}) = \mathfrak{m}(\widehat{\mathscr{R}}) \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}',$$

logo $\mathcal{M} = \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}'$.

- Seja $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{M}$ tal que $E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Devemos concluir que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$.

  Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $E_n \in \mathcal{M}$, temos que f^{E_n} e g_{E_n} são mensuráveis e $\int f^{E_n} \, d\mu = \pi(E_n) = \int g_{E_n} \, d\mu'$. Note agora que, da Proposição 1.9(c), tem-se para cada $x \in X$ que

  $$\lim_n f^{E_n}(x) = \lim_n \mu'((E_n)^x) = \mu'\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n)^x\Big) = \mu'\Big(\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big)^x\Big) = \mu'(E^x) = f^E(x);$$

  logo, pelo Teorema da Convergência Monótona (Teorema 6.9), tem-se que f^E é $\mathscr{A}$-mensurável e

  $$\int f^E \, d\mu = \lim_n \int f^{E_n} \, d\mu = \lim_n \pi(E_n) = \pi(E),$$

  sendo que a última igualdade decorre também da Proposição 1.9(c). (E analogamente para g_E.)

[10] Vide Lista 1.

- Seja $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{M}$ tal que $E_n \supseteq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Devemos concluir que $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$.

  Isto decorre de um argumento análogo ao anterior: como μ é uma medida finita, tem-se da Proposição 1.9(d) que

  $$\lim_n f^{E_n}(x) = \lim_n \mu'((E_n)^x) = \mu'\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E_n)^x\Big) = \mu'\Big(\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big)^x\Big) = \mu'(E^x) = f^E(x),$$

  e então a $\mathscr{A}$-mensurabilidade de f^E e a cadeia de igualdades

  $$\int f^E\, d\mu = \lim_n \int f^{E_n}\, d\mu = \lim_n \pi(E_n) = \pi(E)$$

  decorrem do Teorema da Convergência Dominada (Teorema 6.26) — uma vez que, como μ e μ' são ambas finitas, então f^{E_0} é uma função integrável — e da Proposição 1.9(d) aplicada à medida finita π. (E, novamente, o argumento para g_E é análogo.)

Assim, $\mathcal{M}$ é uma classe monótona, como queríamos!

Tratemos agora o caso em que μ e μ' são σ-finitas.

Sejam $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de conjuntos de medida finita em $\mathscr{A}$ e $\mathscr{A}'$ respectivamente tais que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e $X' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n$; substituindo os termos destas sequências pela união dos termos anteriores se for preciso, podemos supor que ambas as sequências são crescentes. Nestas condições, $(A_n \times A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de elementos de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}'$ satisfazendo $X \times X' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \times A'_n)$ e $\pi(A_n \times A'_n) = \mu(A_n) \cdot \mu'(A'_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como anteriormente, mostremos o resultado para f^E; o argumento para g_E é análogo. Pelo caso anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $f^{E\cap(A_n\times A'_n)}$ é $\mathscr{A}$-mensurável e $\int f^{E\cap(A_n\times A'_n)}\, d\mu = \pi(E \cap (A_n \times A'_n))$. Fixado $x \in X$ arbitrário, como μ' é uma medida e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E \cap (A_n \times A'_n)) = E$, decorre da Proposição 1.9(c) que

$$\mu'((E \cap (A_n \times A'_n))^x) \overset{n}{\nearrow} \mu'(E^x),$$

ou seja, $f^{E\cap(A_n\times A'_n)}(x) \overset{n}{\nearrow} f^E(x)$. Assim, do Teorema da Convergência Monótona (Teorema 6.9), obtemos

$$\int f^E\, d\mu = \lim_n \int f^{E\cap(A_n\times A'_n)}\, d\mu = \lim_n \pi(E \cap (A_n \times A'_n)) = \pi(E)$$

— sendo que a última igualdade é novamente uma consequência da Proposição 1.9(c), uma vez que π é uma medida. $\square$

Podemos agora, finalmente, demonstrar o principal resultado desta seção:

Teorema 6.41 (Teorema de Fubini–Tonelli)**.** Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ e $(X', \mathscr{A}', \mu')$ espaços de medida tais que μ e μ' são σ-finitas, e seja $\pi : \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}' \to [0, +\infty]$ a (única) medida satisfazendo as condições da Proposição 6.38.

(a) Dada uma função $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}'$-mensurável $f : X \times X' \to [0, +\infty]$, tem-se que as funções

$$\begin{array}{rcl} F : X & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int f(x, x')\, d\mu'(x') \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} G : X' & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x' & \mapsto & \displaystyle\int f(x, x')\, d\mu(x) \end{array}$$

são, respectivamente, $\mathscr{A}$- e $\mathscr{A}'$-mensuráveis; além disso,

$$\int F\, d\mu = \int f\, d\pi = \int G\, d\mu'$$

— ou, dito de outra maneira:

$$\int \Big(\int f(x, x')\, d\mu'(x') \Big)\, d\mu(x) = \int f\, d\pi = \int \Big(\int f(x, x')\, d\mu(x) \Big)\, d\mu'(x').$$

(b) Dada uma função π-integrável $f : X \times X' \to \overline{\mathbb{R}}$, tem-se que, se $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e $G : X' \to \overline{\mathbb{R}}$ são funções definidas por

$$F(x) = \int f(x, x')\, d\mu'(x') \qquad \text{e} \qquad G(x') = \int f(x, x')\, d\mu(x)$$

q.t.p., então F e G são integráveis e

$$\int F\, d\mu = \int f\, d\pi = \int G\, d\mu'$$

— ou, dito de outra maneira:

$$\int \Big(\int f(x, x')\, d\mu'(x') \Big)\, d\mu(x) = \int f\, d\pi = \int \Big(\int f(x, x')\, d\mu(x) \Big)\, d\mu'(x').$$

Demonstração. Vamos começar provando que o item (a) é válido no caso em que f é uma função simples. Suponha, então, que $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$, nas condições do Lema 5.9. Note que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se que

- todo $x \in X$ satisfaz

$$\int \chi_{E_i}(x,x')\,d\mu'(x') = \int (\chi_{E_i})^x\,d\mu' = \int \chi_{(E_i)^x}\,d\mu' = \mu'((E_i)^x)$$

e

- todo $x' \in X'$ satisfaz

$$\int \chi_{E_i}(x,x')\,d\mu(x) = \int (\chi_{E_i})_{x'}\,d\mu = \int \chi_{(E_i)x'}\,d\mu = \mu((E_i)_{x'});$$

assim, decorre do Lema 6.40 que as funções

$$x \mapsto \int \chi_{E_i}(x,x')\,d\mu'(x') \qquad \text{e} \qquad x' \mapsto \int \chi_{E_i}(x,x')\,d\mu(x)$$

são mensuráveis e satisfazem

$$\int \Big(\int \chi_{E_i}(x,x')\,d\mu'(x')\Big)\,d\mu(x) = \int \mu'((E_i)^x)\,d\mu(x) = \pi(E_i) \tag{†}$$

e

$$\int \Big(\int \chi_{E_i}(x,x')\,d\mu(x)\Big)\,d\mu'(x') = \int \mu((E_i)_{x'})\,d\mu'(x') = \pi(E_i). \tag{††}$$

Como as igualdades (†) e (††) acima valem para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, decorre da linearidade da integral (Proposição 6.12) que

$$\begin{aligned}
\int \Big(\int f(x,x')\,d\mu'(x')\Big)\,d\mu(x) &= \int \Big(\int \Big(\sum_{i=1}^n a_i\chi_{E_i}\Big)\,d\mu'(x')\Big)\,d\mu(x) = \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \cdot \int \Big(\int \chi_{E_i}(x,x')\,d\mu'(x')\Big)\,d\mu(x) = \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \cdot \pi(E_i) = \\
&= \int f\,d\pi
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int \Big(\int f(x,x')\,d\mu(x)\Big)\,d\mu'(x') &= \int \Big(\int \Big(\sum_{i=1}^n a_i\chi_{E_i}\Big)\,d\mu(x)\Big)\,d\mu'(x') = \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \cdot \int \Big(\int \chi_{E_i}(x,x')\,d\mu(x)\Big)\,d\mu'(x') = \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \cdot \pi(E_i) = \\
&= \int f\,d\pi,
\end{aligned}$$

provando o resultado nesse caso.

Façamos agora o restante do item (a), ou seja, o caso geral $f \in \mathcal{M}^+(\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}')$. Pelo Lema 5.17, existe uma sequência de funções $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}'$-simples $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\varphi_n \overset{n}{\nearrow} f$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$\begin{array}{rcl} \Phi_n : X & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int \varphi_n(x,x')\,d\mu'(x') \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} \Psi_n : X' & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x' & \mapsto & \displaystyle\int \varphi_n(x,x')\,d\mu(x); \end{array}$$

pelo caso anterior, estas funções são mensuráveis e satisfazem

$$\int \Phi_n\,d\mu = \int \varphi_n\,d\pi = \int \Psi_n\,d\mu'. \tag{‡}$$

Agora, como $\varphi_n \overset{n}{\nearrow} f$, decorre do Teorema da Convergência Monótona (Teorema 6.9) e do Lema 6.8 que

$$\int \varphi_n(x,x')\,d\mu'(x') \overset{n}{\nearrow} \int f(x,x')\,d\mu'(x') \quad \text{e} \quad \int \varphi_n(x,x')\,d\mu(x) \overset{n}{\nearrow} \int f(x,x')\,d\mu(x),$$

isto é,

$$\Phi_n \overset{n}{\nearrow} F \qquad \text{e} \qquad \Psi_n \overset{n}{\nearrow} G;$$

logo, novamente pelo Teorema da Convergência Monótona (Teorema 6.9), tem-se

$$\int \Phi_n\,d\mu \xrightarrow{n} \int F\,d\mu \qquad \text{e} \qquad \int \Psi_n\,d\mu' \xrightarrow{n} \int G\,d\mu'. \tag{‡‡}$$

Finalmente, como também (mais uma vez pelo Teorema da Convergência Monótona)

$$\int \varphi_n\,d\pi \xrightarrow{n} \int f\,d\pi,$$

decorre de (‡) e de (‡‡) que

$$\int F\,d\mu = \int f\,d\pi = \int G\,d\mu',$$

como queríamos.

Agora, para o item (b), suponha que $f : X \times X' \to \overline{\mathbb{R}}$ é π-integrável. Aplicando o resultado do item (a) às funções $f^+ : X \times X' \to [0,+\infty]$ e $f^- : X \times X' \to [0,+\infty]$, obtemos que as funções

$$\begin{array}{rcl} F_1 : X & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int f^+(x,x')\,d\mu'(x'), \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} F_2 : X & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int f^-(x,x')\,d\mu'(x'), \end{array}$$

são mensuráveis e têm integral finita — pois

$$\int F_1 \, d\mu = \int f^+ \, d\pi < +\infty \qquad \text{e} \qquad \int F_2 \, d\mu = \int f^- \, d\pi < +\infty. \tag{$\star$}$$

Assim, cada uma dessas funções é finita q.t.p. (por quê?), e portanto a função F do enunciado satisfaz $F = F_1 - F_2$ q.t.p.

Logo, tem-se por ($\star$) e pelas Proposições 6.22 e 6.25 que

$$\begin{aligned} \int f \, d\pi &= \int f^+ \, d\pi - \int f^- \, d\pi = \\ &\overset{(\star)}{=} \int F_1 \, d\mu - \int F_2 \, d\mu = \\ &\overset{6.22}{=} \int (F_1 - F_2) \, d\mu = \\ &\overset{6.25}{=} \int F \, d\mu. \end{aligned}$$

(A demonstração para a igualdade envolvendo G é análoga.) □

Para um exemplo que mostra a necessidade das hipóteses neste último teorema, faça o Exercício 25 da Lista 4!

6.3 Modos de convergência

Nesta (última) seção, vamos explorar melhor algumas noções de convergência de sequências de funções no contexto de medida, para além da convergência pontual e da convergência (pontual) q.t.p. — e da convergência uniforme[11] vista nas disciplinas *Sequências e séries* e *Análise real II*. Nossa primeira observação é um tanto imediata:

Proposição 6.42. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções de X em $\mathbb{R}$. Considere as afirmações a seguir:

(*a*) $f_n \overset{n}{\rightrightarrows} f$;

(*b*) $f_n \overset{n}{\to} f$;

[11] Lembrando: dados um conjunto não vazio X, uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções de X em $\mathbb{R}$ e uma função $f : X \to \mathbb{R}$, dizemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente* para f (notação: $f_n \overset{n}{\rightrightarrows} f$) se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \; (n \geq n_0 \to \forall x \in X \; (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)).$$

(c) $f_n \overset{n}{\to} f$ q.t.p.

Então $(a) \to (b) \to (c)$.

Demonstração. Exercício. $\square$

Uma motivação inicial para isso é explorarmos alguns exemplos que mostram a necessidade das hipóteses no Teorema da Convergência Monótona e no Teorema da Convergência Dominada.

Exemplo 6.43. Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, as seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

$$f_n = \frac{1}{n+1}\chi_{[0,n+1]}, \qquad g_n = \chi_{[n,n+1]}, \qquad g'_n = \chi_{[n,+\infty[} \quad \text{e} \quad h_n = (n+1)\chi_{[0,\frac{1}{n+1}]}.$$

Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\displaystyle\int f_n\,dm = \int g_n\,dm = \int h_n\,dm = 1$ e $\displaystyle\int g'_n\,dm = +\infty$. Assim, representando simplesmente por 0 a função real identicamente nula, temos que

- $f_n \overset{n}{\rightrightarrows} 0$, mas $\displaystyle\int f_n\,dm \overset{n}{\not\to} \int 0\,dm$;
- $g_n \overset{n}{\to} 0$, mas $\displaystyle\int g_n\,dm \overset{n}{\not\to} \int 0\,dm$;
- $g'_n \overset{n}{\to} 0$, mas $\displaystyle\int g'_n\,dm \overset{n}{\not\to} \int 0\,dm$;
- $h_n \overset{n}{\to} 0$ q.t.p., mas $\displaystyle\int h_n\,dm \overset{n}{\not\to} \int 0\,dm$.

Cabe explicitar que:

- nenhuma das sequências $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, logo o Teorema da Convergência Monótona (Teorema 6.9) não se aplica (a sequência $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, aliás, mostra que não vale a "versão decrescente" desse teorema);
- o Teorema da Convergência Dominada (Teorema 6.26) também não se aplica, pois nenhuma das funções $f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$, $g = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |g_n|$, $g' = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |g'_n|$ e $h = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |h_n|$ é integrável (as quatro têm integral igual a $+\infty$).

Vejamos agora um novo tipo de convergência, que está relacionada à convergência das integrais. (A partir deste ponto, é razoável limitarmos nosso escopo ao espaço vetorial das funções integráveis.)

Definição 6.44 (Convergência em L_1)**.** Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis de X em $\mathbb{R}$. Dizemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* f *em* L_1 se $\displaystyle\int |f_n - f|\, d\mu \xrightarrow{n} 0$ (na convergência usual de sequências em $\mathbb{R}$).

Notemos, antes de mais nada, o seguinte:

Lema 6.45. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis de X em $\mathbb{R}$. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f em L_1, então $\displaystyle\int f_n\, d\mu \xrightarrow{n} \int f\, d\mu$.

Demonstração. Supondo que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f em L_1, temos da Proposição 6.21 que

$$0 \leq \left|\int (f_n - f)\, d\mu\right| \leq \int |f_n - f|\, d\mu \xrightarrow{n} 0,$$

logo $\displaystyle\left|\int (f_n - f)\, d\mu\right| \xrightarrow{n} 0$. Assim, $\displaystyle\int (f_n - f)\, d\mu \xrightarrow{n} 0$, e segue da Proposição 6.22 que $\displaystyle\left(\int f_n\, d\mu - \int f\, d\mu\right) \xrightarrow{n} 0$, ou seja, $\displaystyle\int f_n\, d\mu \xrightarrow{n} \int f\, d\mu$. □

Portanto, o Exemplo 6.43 mostra, em particular, que *convergência uniforme (e, com maior razão, convergência pontual e convergência q.t.p.) não implica convergência em* L_1 em geral. No entanto, isso de fato ocorre no caso de medida finita:

Proposição 6.46. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < +\infty$, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis de X em $\mathbb{R}$. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f, então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f em L_1.

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$ arbitrário; devemos mostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$ satisfaz $\displaystyle\int |f_n - f|\, d\mu \leq \varepsilon$.

Se $\mu(X) = 0$, nada há a se provar; suponhamos, então, que $\mu(X) > 0$. Como $f_n \overset{n}{\rightrightarrows} f$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$, tem-se que $\forall x \in X \left(|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{\mu(X)}\right)$. Sendo assim, em vista do Lema 6.8, todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ satisfaz

$$\int |f_n - f|\, d\mu \leq \int \frac{\varepsilon}{\mu(X)}\, d\mu = \frac{\varepsilon}{\mu(X)} \cdot \mu(X) = \varepsilon,$$

como desejado. □

O Exemplo 6.43 — ou, mais precisamente, o comentário feito logo antes da Proposição 6.46 — pode dar a impressão de que convergência em L_1 é um tipo de convergência "mais difícil" de se conseguir, e portanto mais forte que os outros (no sentido lógico de implicar os demais). Vejamos que não é esse o caso, mesmo num espaço de medida finita:

Exemplo 6.47. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $k(n) = \max\{j \in \mathbb{N} : 2^j \leq n+1\}$ e $r(n) = n + 1 - 2^{k(n)}$. Defina então $A_n = \left[\frac{r(n)}{2^{k(n)}}, \frac{r(n)+1}{2^{k(n)}}\right]$ para cada $n \in \mathbb{N}$ — assim, a sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é

$$\left([0,1], \left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, 1\right], \left[0, \frac{1}{8}\right], \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right], \dots\right).$$

Finalmente, seja $f_n = \chi_{A_n}$ para todo $n \in N$. Então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a função identicamente nula em L_1, pois $\displaystyle\int |f_n|\, dm = \frac{1}{2^{k(n)}} \xrightarrow{n} 0$. No entanto, não ocorre que $f_n \xrightarrow{n} 0$ q.t.p. — e, portanto, não ocorre $f_n \xrightarrow{n} 0$ nem $f_n \overset{n}{\rightrightarrows} 0$ —, pois para cada $x \in [0,1]$ tem-se que os conjuntos $\{n \in \mathbb{N} : f_n(x) = 0\}$ e $\{n \in \mathbb{N} : f_n(x) = 1\}$ são ambos infinitos.

Vamos agora introduzir mais dois modos de convergência, para enriquecer a análise que estamos fazendo dessas situações:

Definição 6.48. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis de X em $\mathbb{R}$.

(a) Dizemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge quase uniformemente para* f se para todo $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathscr{A}$ com $\mu(A) < \varepsilon$ tal que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em $X \setminus A$.

(b) Dizemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* f *em medida* se, para todo $a > 0$, tem-se que

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq a\}) \xrightarrow{n} 0.$$

De imediato, já podemos notar três coisas a respeito desses novos modos de convergência.

A primeira é que convergência em L_1 implica convergência em medida:

Proposição 6.49. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis de X em $\mathbb{R}$. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f em L_1, então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f em medida.

Demonstração. Fixe $a > 0$ arbitrário. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sendo $A_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq a\}$, temos

$$\int |f_n - f|\, d\mu \geq \int_{A_n} |f_n - f|\, d\mu \geq \int_{A_n} a\, d\mu \geq a \cdot \mu(A_n) \geq 0;$$

logo, como $\displaystyle\int |f_n - f|\, d\mu \xrightarrow{n} 0$, segue-se que $a \cdot \mu(A_n) \xrightarrow{n} 0$, donde $\mu(A_n) \xrightarrow{n} 0$. $\square$

A segunda é que convergência quase uniforme também implica convergência em medida:

Proposição 6.50. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis de X em $\mathbb{R}$. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quase uniformemente para f, então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f em medida.

Demonstração. Fixe $a > 0$ arbitrário. Devemos mostrar que

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq a\}) \xrightarrow{n} 0. \tag{$\dagger$}$$

Para tanto, tome $\varepsilon > 0$ qualquer. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quase uniformemente para f, então existe $A \in \mathscr{A}$ com $\mu(A) < \varepsilon$ tal que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em $X \setminus A$. Em particular,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, (n \geq n_0 \to \forall x \in X \setminus A\, (|f_n(x) - f(x)| < a)).$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$, tem-se que $\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq a\} \subseteq A$, donde $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq a\}) \leq \mu(A) < \varepsilon$. Com isso, obtemos ($\dagger$). $\square$

E a terceira é que convergência quase uniforme também implica convergência q.t.p.:

Proposição 6.51. Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis de X em $\mathbb{R}$. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quase uniformemente para f, então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f q.t.p.

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $A_k \in \mathscr{A}$ com $\mu(A_k) < \dfrac{1}{2^k}$ tal que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em $X \setminus A_k$. Note que o conjunto $Z = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathscr{A}$ satisfaz $\mu(Z) = 0$ — uma vez que $Z \subseteq A_k$, e portanto $\mu(Z) \leq \mu(A_k) < \dfrac{1}{2^k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que $f_n(x) \xrightarrow{n} f(x)$ para todo $x \in X \setminus Z$. De fato, fixe $x \in X \setminus Z$ arbitrário, e tome $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin A_k$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em $X \setminus A_k$, em particular $f_n(x) \xrightarrow{n} f(x)$. Da arbitrariedade de x, segue o desejado. □

Observação 6.52. Cabe ainda notar que, mesmo no caso de medida finita, convergência em medida não implica convergência q.t.p.— e, portanto, não implica convergência quase uniforme —, como mostra o Exemplo 6.47, e também não implica convergência em L_1, como mostra a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ do Exemplo 6.43.

Além disso, convergência quase uniforme não implica convergência pontual, como mostra a sequência $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ do Exemplo 6.43.

Ainda, convergência pontual não implica convergência em medida, como mostram as sequências $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ do Exemplo 6.43. No entanto, isso ocorre para espaços de medida finita — na verdade, temos algo ainda mais forte:

Teorema 6.53 (Teorema de Egorov–Severini)**.** Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < +\infty$, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis de X em $\mathbb{R}$. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f q.t.p., então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quase uniformemente para f.

Demonstração. Seja $Z \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(Z) = 0$ e $\forall x \in X \setminus Z$ $(f_n(x) \xrightarrow{n} f(x))$.

Fixe $\varepsilon > 0$ arbitrário. Para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $i \in \mathbb{N}$, defina

$$\begin{aligned} A_i^k &= \left\{x \in X : \exists j \in \mathbb{N} \text{ tal que } j \geq i \text{ e } |f_j(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^k}\right\} = \\ &= \bigcup_{j=i}^{\infty} \left\{x \in X : |f_j(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^k}\right\} \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

Note que, se $x \in X$ é tal que $f_n(x) \xrightarrow{n} f(x)$, então $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists i \in \mathbb{N}\ (x \notin A_i^k)$. Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado, temos que $(A_i^k)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de

elementos de $\mathscr{A}$ satisfazendo $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i^k \subseteq Z$; logo, como $\mu(X) < +\infty$ e $\mu(Z) = 0$, decorre da Proposição 1.9(a, d) que $\mu(A_i^k) \xrightarrow{i} 0$, de modo que existe $i_k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_{i_k}^k) < \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}$.

Seja, agora, $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{i_k}^k$. Note que, pela Proposição 1.9(a, b),

$$\mu(A) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_{i_k}^k) < \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

Vamos mostrar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em $X \setminus A$, o que concluirá a demonstração.

Fixe $\delta > 0$ abitrário, e tome $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2^{k_0}} < \delta$. Afirmamos que, para todo $i \in \mathbb{N}$ com $i \geq i_{k_0}$, tem-se

$$\forall x \in X \setminus A \; (|f_i(x) - f(x)| < \delta).$$

De fato, fixados $i \in \mathbb{N}$ com $i \geq i_{k_0}$ e $x \in X \setminus A$ arbitrários, temos que $x \notin A_{i_{k_0}}^{k_0}$, logo $x \notin A_i^{k_0}$. Assim, da definição de $A_i^{k_0}$, temos que

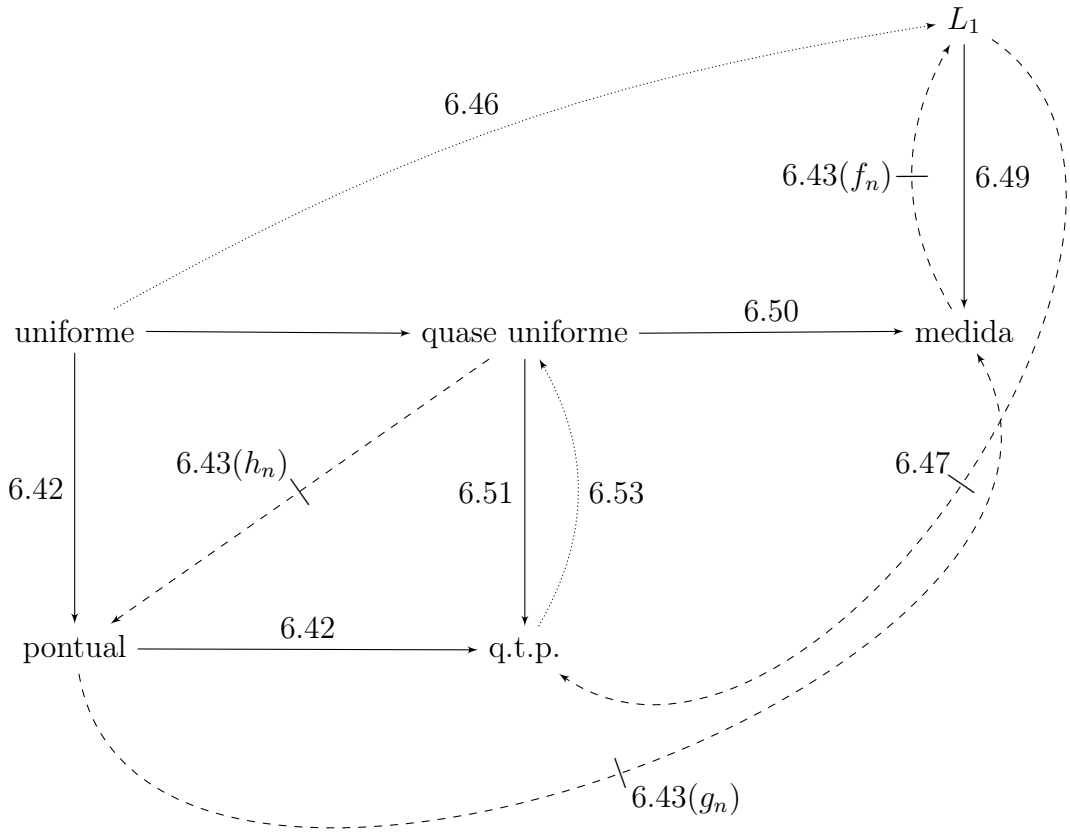
$$\forall j \in \mathbb{N} \left(j \geq i \to |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{2^{k_0}} \right);$$

em particular,

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{2^{k_0}} < \delta,$$

como queríamos. □

As implicações e não implicações entre os diversos modos de convergência que mencionamos podem ser sintetizadas no diagrama da próxima página. (As retas tracejadas cortadas representam não implicações, e as retas pontilhadas significam que a implicação em questão vale sob a hipótese adicional de medida finita.)


L_1
6.46
6.43(f_n)
6.49
uniforme
quase uniforme
6.50
medida
6.42
6.43(h_n)
6.51
6.53
6.47
pontual
6.42
q.t.p.
6.43(g_n)