

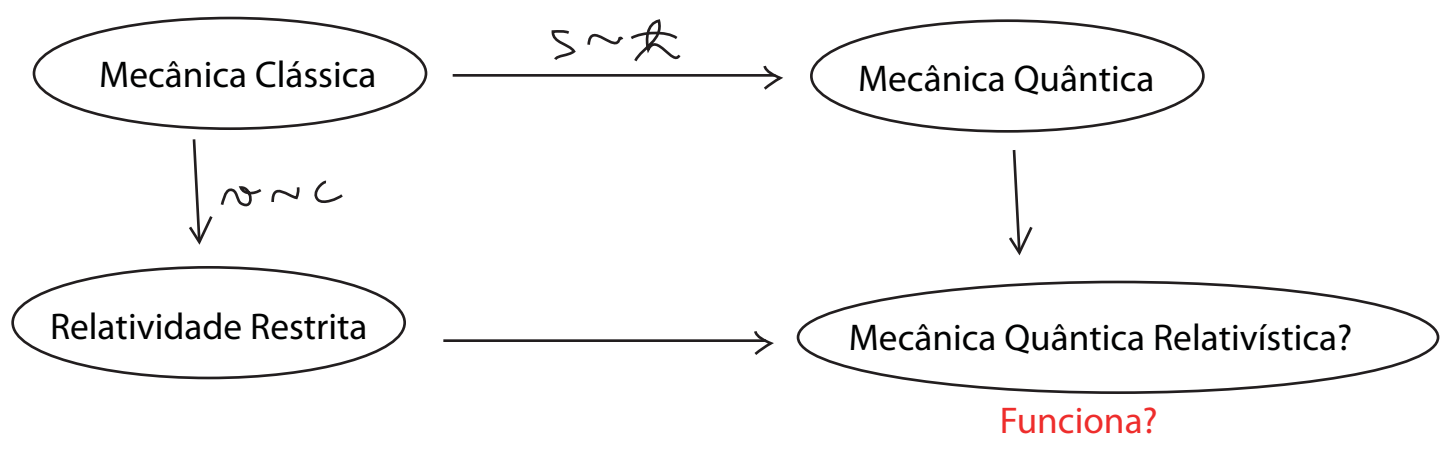
Teoria Quântica de Campos

(escopo do curso e um pouco de história)

(Weinberg cap 1, Peskin 2.1, Nastase 1)

Objetivo: uma teoria Quântica e Relativística (no sentido restrito)

Em se tratando de partículas(-onda):



Mecânica Clássica: "estado" definido por um conjunto de coordenadas canônicas $\{q_i, p_i\}$ e a evolução temporal deste estado é dado pela Hamiltoniana do sistema.

Quantizar é essencialmente transformar estas coordenadas em operadores, impondo:

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$$

Convenção! $\hbar = 1$
unidades naturais: $c = 1$

e os estados passam a ser determinados por vetores no espaço de Hilbert, onde agem estes operadores. Representando estes vetores em termos de funções de onda $\Psi(\vec{x}, t)$ os operadores são:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \\ \text{(partícula)} \\ (\hbar=1) \end{array} \right\} \begin{cases} \hat{p}^i = -i \nabla^i \\ \hat{x}^i = x^i \\ \hat{H} = i \frac{\partial}{\partial t} \end{cases}$$

(é importante notar que o tempo não é um operador, não é um observável, e sim um parâmetro. Logo há uma grande assimetria no tratamento do espaço e do tempo)

Podemos então obter a equação de Schrödinger para uma partícula livre:

Classicamente:

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

Versão quantizada:

$$\hat{H} \psi = \frac{\hat{p}^2}{2m} \psi \implies i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = - \frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(x,t) \quad (\text{eq. 1.1})$$

Primeira derivada no tempo, segundas derivadas no espaço, mau sinal \swarrow

Lembrando que a interpretação probabilística no diz que:

$$P(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2 \xrightarrow{\text{(eq. 1.1)}} \frac{dP(\vec{x}, t)}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = 0$$

(densidade de probabilidade) (esta é uma equação de continuidade)

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = -\frac{i}{2m} [\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*]$$

ρ é conservada e positivo definida!

Poderíamos fazer a mesma coisa com a Hamiltoniana relativística? (Klein, Gordon e Schrödinger tentaram:)

$$H^2 = \vec{p}^2 + m^2$$

C=1

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\vec{x}, t) = -\nabla^2 \psi + m^2 \psi$$

segundas derivadas para ambos

$$\square (\square^2 + m^2) \psi = 0 \quad \text{(eq. 2.1)}$$

Equação de Klein-Gordon

$$\psi(\vec{x}, t) = N e^{i\vec{p}\cdot\vec{x} - iEt}$$

solução (com $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$) (eq. 2.2)

$$\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

A segunda derivada no tempo, deixa a equação de continuidade na forma:

$$-i\psi^* (\text{2.1}) + i\psi (\text{2.1})^* = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[i \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[-i \left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right) \right] = 0$$

\vec{j} (essencialmente a mesma de antes)

$$j = 2E|N|^2$$

No entanto:

$$(eq. 2.2) \rightarrow E = \pm \sqrt{(\vec{p}^2 + m^2)}$$

Energia e densidade de probabilidades negativas!

O Dirac encontrou outra solução, envolvendo apenas primeiras derivadas:

$$\hat{H}^2 \psi = (\vec{p}^2 + m^2) \psi$$

$$\xrightarrow{\text{buscamos}} \hat{H} \psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) \psi$$

$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$
 $i \neq j \Rightarrow \{\alpha_i, \alpha_j\} = \{\alpha_i, \beta\} = 0$

$$\hat{H}^2 = \frac{1}{2} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \hat{p}_j \hat{p}_i + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \hat{p}_i m + \beta^2 m^2$$

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta\} \Rightarrow (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_\mu$$

(matrizes)

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (\text{eq. 3.1})$$

$$\begin{aligned} \gamma^0, \gamma^i &= 0 \\ \gamma^0, \gamma^0 &= 2 \\ \gamma^i, \gamma^j &= 0 \\ \gamma^i, \gamma^j &= -2 \end{aligned} \left. \begin{aligned} \gamma^0 = \beta \\ \gamma^i = \beta \alpha_i \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \\ \text{álgebra de Clifford} \end{aligned}$$

Equação de Dirac

$$\psi = u(\vec{p}) e^{-i p_\mu x^\mu}$$

Spinores que descrevem uma partícula de spin 1/2
(neste "approach" isto é um fortuito acidente)

$$\rho = |\psi|^2 \quad \checkmark$$

Probabilidades estão bem definidas

$$u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix} \begin{cases} \rightarrow E > 0 \\ \rightarrow E < 0 \end{cases}$$

Os estados de energia negativa ainda estão presentes, o que leva ao famoso mar de Dirac
(solução ruim para os férmions e **inútil para Bósons**)

Além disso a teoria assim obtida tem problemas de causalidade, o que pode ser visto se calcularmos:

$$U(t) = \langle \vec{x} | e^{-i \hat{H} t} | \vec{x}_0 \rangle = \langle \vec{x} | e^{-i t \sqrt{\hat{p}^2 + m^2}} | \vec{x}_0 \rangle =$$

$\uparrow H = \sqrt{p^2 + m^2}$
 $\uparrow \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}|$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{-i t \sqrt{p^2 + m^2}} e^{i \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)} =$$

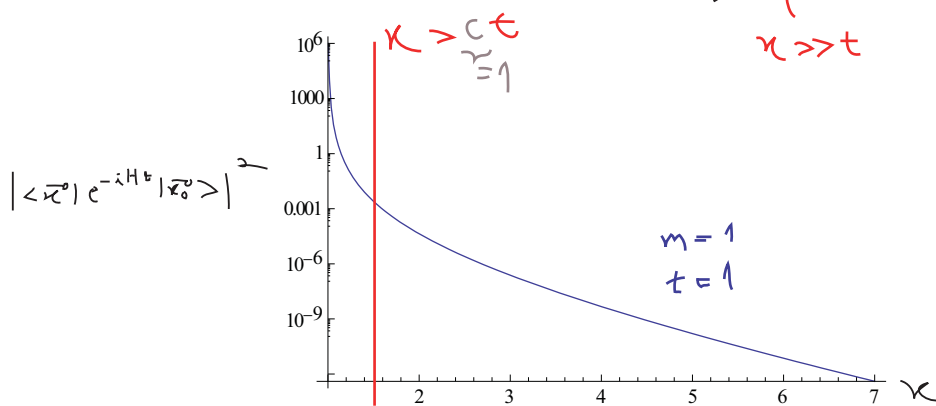
$e^{i |\vec{p}| |\vec{x} - \vec{x}_0| \cos(\theta)}$

$$\int |\vec{p}| d|\vec{p}| \int 2\pi \sin(\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 |\vec{x} - \vec{x}_0|} \int_0^\infty p dp \sin(p |\vec{x} - \vec{x}_0|) e^{-i t \sqrt{p^2 + m^2}} \quad \vec{x}_0 = 0$$

(Gradshteyn 6th ed., eq 3.914(6))

$$= \frac{1}{2\pi^2 x} \frac{i x t m^2}{x^2 - t^2} K_2(m \sqrt{x^2 - t^2}) = -\frac{t m^2}{2\pi^2 x^2} K_2(m x) \neq 0 !!$$



Poderíamos também aproximar esta integral usando a Saddle point approximation:

$$x_0: f'(x_0) = 0 \implies f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \dots$$

$$\int dx e^{f(x)} = e^{f(x_0)} \int dx e^{\frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0)} = e^{f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}}$$

$dx = d(\delta x)$ $f''(x_0) < 0$

A idéia é que para qualquer ponto $x_1 \neq x_0$

$e^{x_1} \ll e^{x_0}$ porque x_0 é um máximo

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}^0 | e^{-iHt} | \vec{x}^0 \rangle &= \frac{i}{2\pi^2 x} \int_0^\infty p dp \underbrace{\text{Sen}(px)}_{\text{estacionária}} e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2 x} \int_0^\infty p dp (e^{-ipx} - e^{ipx}) e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} \end{aligned}$$

Rigorosamente eu teria que rodar isso para o eixo real (em x_μ) e depois voltar mas existe um equivalente para exponenciais complexas, o método da fase estacionária

$$I_{\pm}(x,t) = \int_0^\infty p dp e^{\pm ipx} e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} = \pm i \frac{d}{dx} \int_0^\infty dp e^{\underbrace{\pm ipx - it\sqrt{p^2+m^2}}_{f(p)}}$$

$$f'(p_0) = 0 \implies \pm ix - it p_0 (p_0^2+m^2)^{-1/2} = 0 \iff p_0 = \pm \frac{ix}{\sqrt{x^2-t^2}}$$

$$f''(p_0) = -it (p_0^2+m^2)^{-3/2} + it p_0^2 (p_0^2+m^2)^{-3/2} = -im^2 t \left(-\frac{x^2-t^2}{m^2 t^2} \right)^{3/2} = -\frac{1}{mt^2} (x^2-t^2)^{3/2} < 0 \quad \text{p/ } x^2 > t^2$$

$$f(p_0) = \pm ix \left(\pm \frac{ix}{\sqrt{x^2-t^2}} \right) - it \sqrt{-\frac{m^2 t^2}{x^2-t^2}} = -\frac{mx^2}{\sqrt{x^2-t^2}} + \frac{mt^2}{\sqrt{x^2-t^2}} = -m \sqrt{x^2-t^2}$$

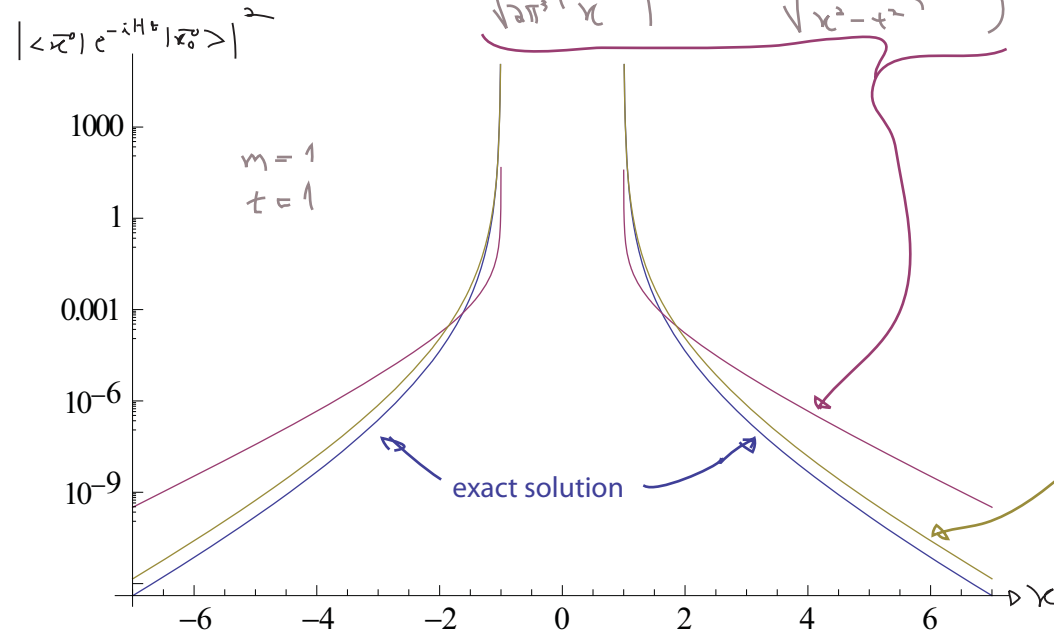
$$I_{\pm} = \pm i \frac{d}{dx} \left[e^{f(p_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(p_0)|}} \right]$$

$$\langle \vec{x}^0 | e^{-iHt} | \vec{x}^0 \rangle = -\frac{1}{4\pi^2 x} \left[I_-(x,t) - I_+(x,t) \right]$$

$$\langle \vec{x}_0 | e^{-iHt} | \vec{x}_0 \rangle = -\frac{1}{2\pi^{3/2}x} i \frac{d}{dx} \left[e^{p(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{p''(x_0)}} \right] = -\frac{\sqrt{m}t}{\sqrt{2\pi^{3/2}}x} \frac{d}{dx} \left[\frac{e^{-m\sqrt{x^2-t^2}}}{(x^2-t^2)^{3/2}} \right]$$

Ignorando esta parte, já que o comportamento é dominado pela exponencial

$$\approx -\frac{\sqrt{m}t}{\sqrt{2\pi^{3/2}}x} \left(-mx \frac{e^{-m\sqrt{x^2-t^2}}}{\sqrt{x^2-t^2}} \right)$$



Estes problemas estão intrinsicamente ligados ao fato de estarmos partindo de uma descrição quântica de UMA partícula e então introduzindo a relatividade. Esta teoria, que tem um número bem definido de partículas (UMA) não dá conta da possibilidade de que o número de partículas pode mudar dinamicamente, o que é um fato experimental uma vez que chegemos em energias comparáveis com as massas destas partículas (o regime relativístico). Olhando o problema deste ponto de vista, problemas eram mesmo esperados.

Uma forma encontrada para "concertar" estas teorias ficou conhecida como **Segunda Quantização** (muito cuidado com este nome):

$$(\square^2 + m^2) \psi(x,t) = 0 \quad (i\gamma^\mu d_\mu - m) \psi(x,t) = 0$$

Estas funções são re-interpretadas. Não mais como funções de onda de 1 partícula livre, mas como campos definidos em todo espaço e cuja amplitude está ligada ao número de partículas.

Para determinar o estado deste sistema (clássico!) em um dado momento, preciso dizer o valor do campo em todos os pontos e seu momento canonicamente conjugado:

$$\left\{ \psi(\vec{x}), \pi(\vec{x}) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\psi}} \right\}$$

Quantizar este sistema (a tal segunda quantização) consiste em transformar estas novas coordenadas canônicas em operadores, impondo:

$$[\hat{\Psi}(\vec{x}), \hat{\Pi}(\vec{y})]_{\pm} = i \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

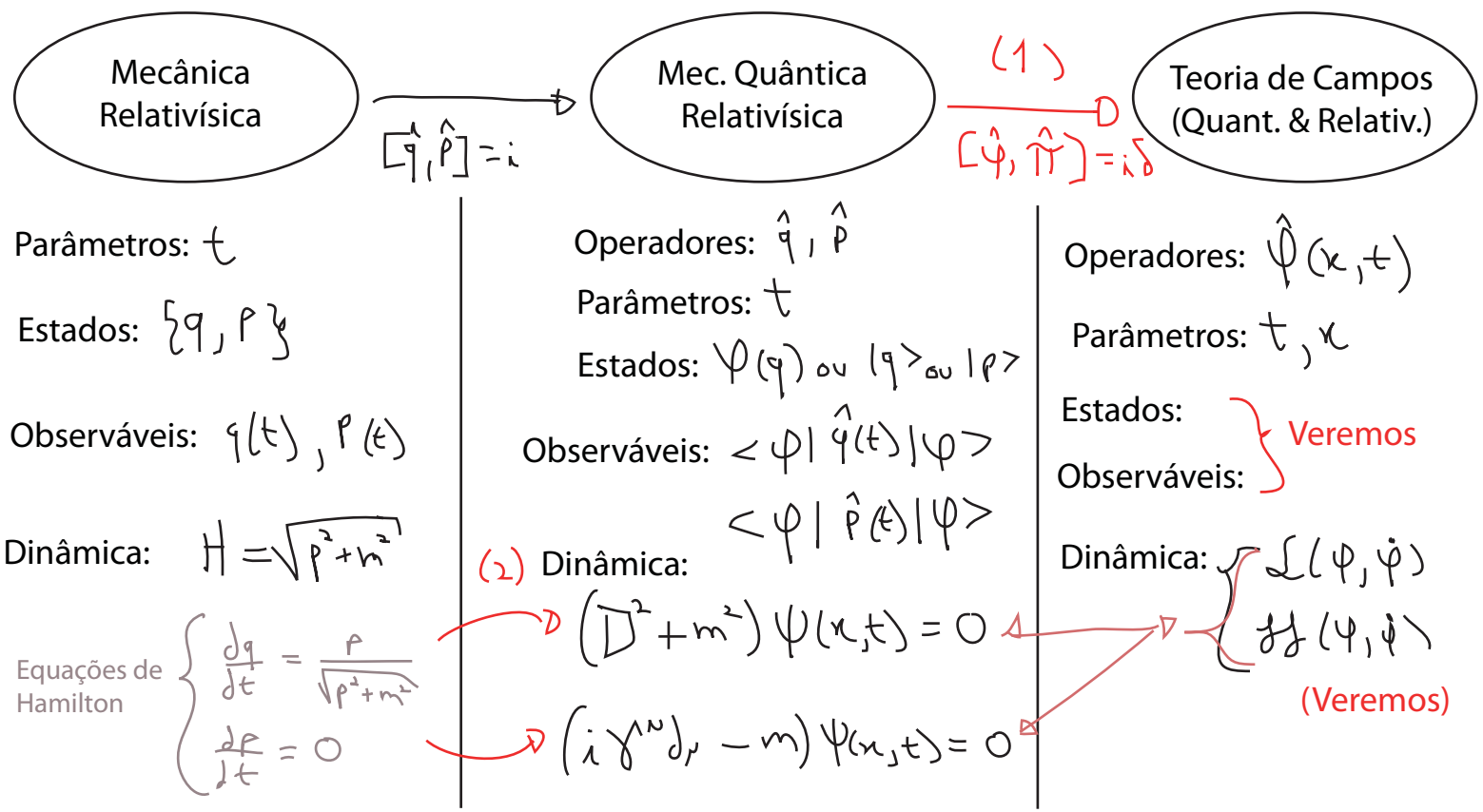
De forma que agora temos que especificar um estado $|\sigma\rangle$ e o valor esperado do campo naquele estado é um "observável": $\langle \sigma | \hat{\Psi}(\vec{x}) | \sigma \rangle$

Assim como antes, a evolução temporal deste sistema vai ser especificada pelo Hamiltoniano do campo, que pode ser obtido com um pouco de engenharia reversa a partir das equações de movimento.

Note que a posição "x" que aparece em $\psi(x,t)$ foi "rebaixada" para o mesmo status que o tempo tinha na MQ, é apenas um índice (contínuo) para o campo. Ela não é mais uma coordenada canônica do sistema e não há mais operador posição do campo. Faz tanto sentido querer medir a "posição do campo" quanto faria querer medir o "tempo do campo". Isto é bem mais promissor do ponto de vista de quem está querendo fazer uma teoria relativística.

Com esta re-interpretação passamos de fato a trabalhar com uma Teoria de Campos Relativística e Quantizada que, como veremos (ao longo do semestre), não tem problemas nem com energias e probabilidades negativas e não viola causalidade. Fomos forçados, no entanto, a abandonar a descrição da mecânica para uma descrição de campos.

Qual é problema com o nome Segunda Quantização? Note o caminho que fizemos:



No passo (1) o que estamos fazendo é quantizar (transformar em operadores) uma função definida em todo espaço (um campo) e cuja equação de movimento CLÁSSICA é de Dirac ou Klein-Gordon. Uma vez obtidas estas equações e abandonada a interpretação de ψ como amplitude de probabilidade, os operadores de posição e momento perdem todo significado. O que estamos realmente fazendo é pegar uma teoria clássica (relativística) de campos e a quantizando UMA VEZ. O nome segunda quantização portanto se refere mais ao fato de que ela veio depois historicamente do que ao fato que estamos quantizando de novo o mesmo sistema (não estamos).

De fato, parece que a única função da "primeira" quantização foi nos fornecer as equações de Dirac e Klein-Gordon no passo (2), existe alguma outra forma de obter estas equações?

A resposta é sim. Uma vez que aceitemos que o objeto básico da teoria deve ser um campo, podemos obter equações de movimento para estes campos baseado somente nas simetrias que o sistema deve ter. A primeira delas é a invariância por mudança entre referenciais inerciais, e de fato as equações de Dirac e Klein-Gordon podem ser obtidas se buscarmos todos os campos que tem uma transformação bem definida sob estas transformações (campos que pertencem à representação do grupo definido por estas transformações, o grupo de Poincaré). Aí basta quantizar esta teoria. Esta visão, que decorre mais diretamente de primeiros princípios, tem ainda a vantagem de nos fornecer outras equações clássicas, como por exemplo àquela para partículas de spin 1. É este caminho que faremos ao longo deste curso.

A obtenção destas equações de movimento é o domínio da teoria clássica de campos, sob a qual faremos agora uma (rápida) revisão, notando que estamos interessados sempre em teorias relativísticas:

	Ñ-Relativístico	Relativístico	
Clássico	Teoria de Campos (ñ-relativ)	Teoria Clássica de Campos	Revisão
Quântico	Teoria Quântica de Campos (ñ-relativ)	Teoria Quântica de Campos	Resto do curso

Teoria Clássica de Campos

(Ramond 1.1 - 1.7)

Em mecânica clássica:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}_{\text{Lagrangiana}} \quad (\text{eq. 7.1})$$

Ação

Coordenadas

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (\text{eq. 7.2})$$

Equações de Lagrange (equações do movimento)

Também podemos mudar para o formalismo Hamiltoniano:

$$H(P, q) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i) \quad (\text{eq. 8.1})$$

(transformada de Legendre)

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Neste caso as equações de movimento são as Equações de Hamilton:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad (\text{eq. 8.2})$$

A passagem para a teoria de campos pode ser feita imaginando um conjunto de infinitos q_i que agora não mais representam coordenadas de um partícula mas servem de índices para o campo (e no limite do contínuo trocamos $q_i \rightarrow \kappa$)

$$\{q_i(t)\} \Rightarrow \{\phi_i(t)\} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}, t)$$

Estamos interessados em teorias locais, nas quais a Lagrangeana pode ser escrita como:

$$L(t) = \int d^3\vec{x} \underbrace{\mathcal{L}(\vec{x}, t)}_{\text{Densidade Lagrangeana (mas que chamaremos de Lagrangeana)}}$$

o que equivale a dizer (no limite discretizado) que a dinâmica de um dos pontos não depende de pontos distantes deste. Também queremos teorias relativísticas, para tanto a densidade Lagrangeana será uma função invariante relativística, construída a partir de campos (e suas derivadas) com transformações bem determinadas:

$$\mathcal{L}(\vec{x}, t) = \mathcal{L}(\phi(\vec{x}, t), \partial_\nu \phi(\vec{x}, t))$$

E a ação (considerando que temos vários campos ϕ_a):

$$S = \int L dt = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\nu \phi_a) \quad (\text{eq. 8.3})$$

As equações de movimento para os campos são completamente análogas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi_a)} \right] = 0 \quad (\text{eq. 9.1})$$

Como já comentamos, construiremos estas Lagrangeanas com campos com transformações relativísticas bem determinadas:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Coordenadas antes e depois da transformação

Transformação de Lorentz

$$\phi'_i(x') = R_i^{\ j} \phi_j(x)$$

a coordenada foi transformada, mas a própria forma funcional do campo pode ter mudado

note que, em geral, a transformação pode misturar campos com índices diferentes (ϕ_1 e ϕ_2) - neste caso é claramente mais natural pensar nestes "campos" como componentes de um campo mais complicado que se misturam sob transformações de Lorentz.

$$A_\nu = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

Por definição, para um campo escalar:

$$\begin{cases} R = \hat{1} \\ \phi'(x') = \phi(x) \end{cases}$$

Podemos, por exemplo, usar este campo para escrever uma Lagrangiana invariante:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) = \\ &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \phi|^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \end{aligned}$$

Convenção!

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

As notas do professor Nastase usam o sinal oposto, lembre-se disso quando for comparar resultados

O momento canonicamente conjugado ao campo é (não confundir com o momento de uma partícula):

$$P(x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(x)} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)} \int d^3y \mathcal{L}(\phi(y), \dot{\phi}(y)) \equiv \Pi(x) d^3\vec{x}$$

$$\boxed{\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)}} \quad (\text{eq. 10.1})$$

Densidade de momento conjugado (mas que chamaremos de momento conjugado)

A Hamiltoniana:

$$H = \sum_{\vec{x}} P(x) \dot{\phi}(x) - L \rightarrow \int d^3\vec{x} [\Pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}] \equiv \int d^3\vec{x} \mathcal{H}(x)$$

$$\boxed{\mathcal{H}(x) = \Pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}} \quad \begin{array}{l} \text{Densidade Hamiltoniana} \\ \text{(advinhe como vamos chamar)} \end{array} \quad (\text{eq. 10.2})$$

Note a importância da suposição de localidade aqui também (quando trocamos p por π), essencialmente ela permite que trabalhem só com estas densidades em cada ponto, sem efeitos correlacionando pontos distantes.

Teorema de Noether

Outra importante consequência das simetrias impostas à Lagrangiana é a conservação de grandezas físicas. Segundo o Teorema de Noether:

“Para cada simetria contínua do sistema, há uma quantidade conservada ao longo do tempo”

Alguns exemplos:

Simetria \longleftrightarrow “Carga” Conservada (em geral só usamos a palavra carga para simetrias internas do sistema - como as que geram a carga elétrica ou a carga de cor da QCD - mas isso é puramente convencional)

Translação Temporal \longleftrightarrow Energia E
 $t \rightarrow t + \omega$

Translação Espacial \longleftrightarrow Momento \vec{p}
 $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a}$

Rotação \longleftrightarrow Momento Angular \vec{L}
 $x_i \rightarrow R_{ij} x_j$

Mudança de Fase U(1) \longleftrightarrow Carga Elétrica Q^{QED}
 $\phi(x_\mu) \rightarrow e^{i\theta} \phi(x_\mu)$

Uma forma conveniente de expressar essa conservação é em termos de **correntes conservadas** e **equações de continuidade** do tipo:

$$\partial_\nu j^\nu = 0$$

↓
corrente conservada

$$\partial_\alpha j^\alpha + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int d^3x j^0}_{Q} = - \oint d\vec{S} \cdot \vec{j}$$

Podemos obter a corrente conservada a partir da Lagrangeana. Suponha uma transformação que deixe a ação invariante (uma simetria):

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta \phi$$

A Lagrangeana muda no máximo de uma derivada total → versão infinitesimal de uma transformação contínua

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \alpha \partial_\nu J^\nu = \mathcal{L} + \alpha \Delta \mathcal{L} \quad (\text{eq. 11.1})$$

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \rightarrow S + \alpha \int d^4x \partial_\nu J^\nu$$

A ação fica invariante

$$\alpha \int d\sigma_\nu J^\nu = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{se considerarmos que } J \\ \text{é zero nas bordas de todo} \\ \text{o espaço tempo} \end{array} \right)$$

Considerando que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ podemos escrever a variação de \mathcal{L} na forma:

$$\begin{aligned} \alpha \Delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\alpha \Delta \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \underbrace{\alpha \Delta (\partial_\nu \phi)}_{\partial_\nu \phi' - \partial_\nu \phi = \partial_\nu (\phi' - \phi) = \partial_\nu (\Delta \phi)} = \\ &= \alpha \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \Delta \phi \right) + \alpha \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \right) \right]}_{=0 \text{ (Euler Lagrange)}} \Delta \phi = \end{aligned}$$

Por outro lado (eq 11.1): $\alpha \Delta \mathcal{L} = \alpha \partial_\nu J^\nu$

$$\partial_\nu J^\nu = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \Delta \phi \right) \Rightarrow \partial_\nu \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \Delta \phi - J^\nu}_{j^\nu} \right) = 0$$

Temos então a corrente conservada:

$$\dot{j}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - \mathcal{J}^\mu \quad (\text{eq. 12.1})$$

No caso de um campo com várias componentes, se a transformação for linear em ϕ , podemos escrever:

$$(\alpha \Delta \phi)^\mu \equiv \alpha^\nu (T^\mu)_\nu \phi^\delta$$

De forma que (se $\mathcal{J}^\mu = 0$):

$$\dot{j}^{\mu, \alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (T^\mu)_\nu \phi^\delta \quad (\text{eq. 12.2})$$

Um exemplo: $x^\mu \rightarrow x^\mu + \alpha^\mu \quad \alpha^\mu \ll 1$

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x + \alpha) = \phi(x) + \alpha^\nu \partial_\nu \phi(x)$$

$$\dot{j}^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L} \delta^\mu_\nu \equiv T^\mu_\nu \quad (\text{Tensor energia momento})$$

$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \alpha^\nu \partial_\nu \mathcal{L} = \mathcal{L} + \alpha^\nu \delta^\mu_\nu \partial_\mu \mathcal{L} = \mathcal{L} + \alpha^\nu \partial_\mu (\delta^\mu_\nu \mathcal{L})$

Representações do Grupo de Lorentz

O grupo de Lorentz é uma generalização das rotações para o espaço 4-dimensional de Minkowski, e é um SO(1,3) (determinante 1, ortogonal e 1,3 indica uma coordenada tipo tempo e 3 tipo espaço)

A representação fundamental é dada por:

$$dx^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$$

Λ^μ_ν Matrizes da representação \rightarrow obtidas pela propriedade

$$\eta_{\mu\nu} = \text{Diag}\{1, -1, -1, -1\} \Rightarrow \Lambda \eta \Lambda^T = \eta$$

O que é uma generalização da ortogonalidade: $\Lambda \Lambda^T = 1$
 que poderia ser escrita: $\Lambda 1 \Lambda^T = 1$ ou generalizada para: $\Lambda g \Lambda^T = g$
 com: $g = \text{Diag}\{ \underbrace{+1, \dots, +1}_{p \text{ vezes}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q \text{ vezes}} \} \Rightarrow \text{SO}(p, q)$

As matrizes da representação satisfazem às propriedades do grupo, em particular

$$\Lambda = \Lambda^1 \cdot \Lambda^2$$

$\in G \quad \in G \quad \in G$

Podemos encontrar uma representação agindo no espaço dos campos (neste caso um campo com componentes ϕ^a):

$$\phi'^a(x') = R(\Lambda)^a_b \phi^b(x)$$

$x'^i = \Lambda^i_j x^j$

$a, b = 1, \dots, N$

(note que R não é, em geral 4x4, mesmo que estejamos em 4D)

$$R(\Lambda_1) R(\Lambda_2) = R(\Lambda_1 \cdot \Lambda_2)$$

Pensando em uma transformação infinitesimal parametrizada por β^a , podemos representar os elementos do grupo como exponenciais:

$$R(\beta) = e^{i\beta^a t_a^{(R)}} \simeq 1 + i\beta^a t_a^{(R)}$$

Geradores da Álgebra de Lie (muitas vezes nos referimos a eles como geradores do grupo de Lie)

Álgebra de Lie $[t_a^{(R)}, t_b^{(R)}] = i f_{ab}^c t_c^{(R)}$

Constantes de Estrutura

Podemos encontrar algumas representações que satisfazem as propriedades acima:

Representações Bosônicas: se transformam como tensores com um número arbitrário de índices covariantes ou contravariantes:

$$B^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k}_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l}(\Lambda x) = (\Lambda_{\mu_1}^{\alpha_1} \Lambda_{\mu_2}^{\alpha_2} \dots \Lambda_{\mu_k}^{\alpha_k}) (\Lambda^{\nu_1}_{\beta_1} \Lambda^{\nu_2}_{\beta_2} \dots \Lambda^{\nu_l}_{\beta_l}) B^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l}(x)$$

As duas mais óbvias (e úteis):

Escalares: $\phi'(x') = \phi(x)$

Vetores: $A'_\mu(x') = \Lambda_\mu^\nu A_\nu(x)$

$$\Lambda_\mu^\nu = \eta_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha_\beta \eta^{\beta\nu}$$

Representações Fermiônicas: é possível mostrar que existem representações impossíveis de se obter através do simples produto de Λ 's. Em especial o objeto:

$$S^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{eq. 14.1})$$

Matrizes de Dirac

satisfaz a álgebra de Lie do grupo de Lorentz, e portanto temos uma representação do grupo de Lorentz em:

$$M_D = e^{-\frac{i}{2} \Theta_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} \quad \left(\Theta_{\mu\nu} \text{ e } S^{\mu\nu} \text{ são antissimétricos} \right)$$

Vale: $M_D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu M_D(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$

Assim, se definirmos um campo tal que: $\psi'(x') = M_D(\Lambda) \psi(x)$

O objeto $\gamma^\mu \partial_\mu \psi$ será covariante $(\gamma^\mu \partial'_\mu \psi'(x') \rightarrow M_D(\Lambda) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x))$

O que quer dizer que a equação de Dirac será também covariante e a Lagrangeana que leva a ela é invariante. Veremos isso com mais detalhes mais adiante. Os interessados podem estudar o material adicional: https://professores.ift.unesp.br/ricardo.matheus/files/courses/2015tqc1/V_Kaplunovsky_Dirac.pdf

Note que, assim como as transformações Lorentz são generalizações das rotações de vetores e escalares em 3D, a transformação dos Spinors é uma generalização da rotação de spins, e de fato o campo spinorial descreverá partículas de spin 1/2.

Quantização por Integrais de Trajetória:

Integral de Trajetória de Feynman

(Ryder 5.1)

Uma quantidade que frequentemente queremos saber é, dado que uma partícula estava em uma posição q em um tempo t , qual é a probabilidade de a encontrarmos na posição q' no tempo t' . Em uma linguagem mais "quântica" dada a função de onda:

$$\psi(q, t)$$

Gostaríamos de conhecer o propagador F , definido por:

$$\psi(q', t') = \int F(q', t'; q, t) \psi(q, t) dq \quad (\text{eq. 14.2})$$

$|\psi(q', t')|^2$ é distribuição de probabilidades para q' no tempo t' , independente do que aconteceu antes de t'

A equação 14.2 é uma simples expressão da causalidade, considerando que a partícula pode ter começado em qualquer lugar. Claramente F é a amplitude de probabilidade de transição entre a função em (q,t) e a em (q',t') e:

$$P(q', t'; q, t) = |F(q', t'; q, t)|^2 \quad \text{é a probabilidade de transição}$$

Vejam como podemos expressar F em termos de grandezas familiares:

$$\Psi(q, t) = \langle q(t) | \Psi(t) \rangle_S \quad \text{Quadro de Schrödinger (estados evoluem no tempo, operadores não)}$$

$$|\Psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}t} |\Psi\rangle_H \quad \text{Quadro de Heisenberg (operadores evoluem no tempo, estados não)}$$

$\hat{q}_S |q(t)\rangle_S = q(t) |q(t)\rangle_S \quad \hat{q}_H(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{q}_S e^{-i\hat{H}t}$
 $\hat{q}_H(t) |q(t)\rangle_S = e^{i\hat{H}t} \hat{q}_S e^{-i\hat{H}t} e^{i\hat{H}t} |q(t)\rangle_S = e^{i\hat{H}t} q(t) |q(t)\rangle_S = q(t) |q(t)\rangle_H$
 $\therefore |q, t\rangle_H$ autoestado de $\hat{q}_H(t)$ no tempo t , autovalor: $q(t)$

Definamos o vetor:

$$|q, t\rangle_H = e^{i\hat{H}t} |q(t)\rangle_S \quad \text{(Moving Frame)}$$

$$\therefore \Psi(q, t) = \langle q(t) | e^{-i\hat{H}t} | \Psi \rangle_H = \langle q, t | \Psi \rangle_H$$

Dado: $\langle q', t' | \Psi \rangle_H = \int \langle q', t' | q, t \rangle \langle q, t | \Psi \rangle_H dq$

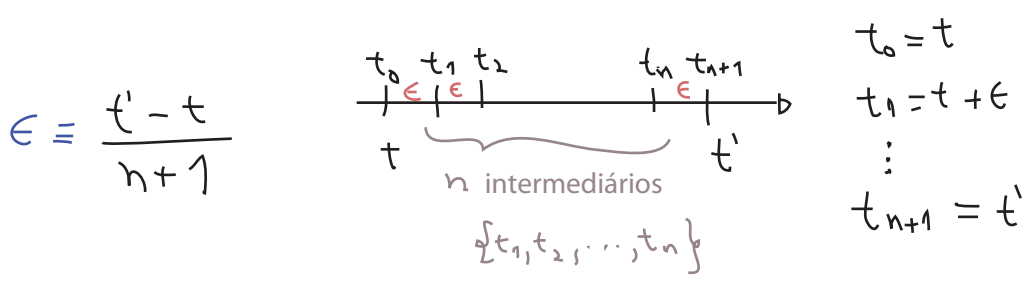
$\langle q', t' | \Psi \rangle_H = \Psi(q', t')$
 $\langle q, t | \Psi \rangle_H = \Psi(q, t)$
 $\hat{1} = \int |q, t\rangle \langle q, t| dq$

$$\Psi(q', t') = \int \langle q', t' | q, t \rangle \Psi(q, t) dq$$

Que, comparada com 14.2, nos dá: $F(q', t', q, t) = \langle q', t' | q, t \rangle = \langle q' | e^{-i\hat{H}(t'-t)} | q \rangle$

Vejam agora como expressar esta grandeza em termos da integral de trajetória:

Primeiramente, dividimos o tempo em $(n+1)$ pequenos intervalos ϵ :



Notando que o tempo é só um índice e para qualquer tempo fixo temos a relação de completudeza:

$$\forall t_i \Rightarrow \int dq_i(t_i) |q_i, t_i\rangle \langle q_i, t_i| = 1$$

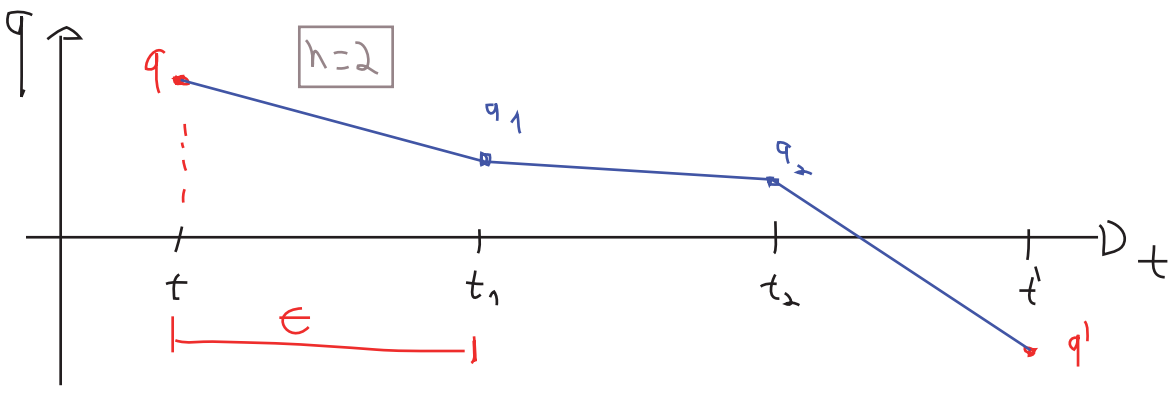
$|q_i, t_i\rangle$ autoestado de $\hat{q}_H(t_i)$ no tempo t_i
 com autovalor $q_i(t_i) \equiv q(t_i) \equiv q_i$

só para simplificar a notação, o mais rigoroso é $q_i(t_i)$

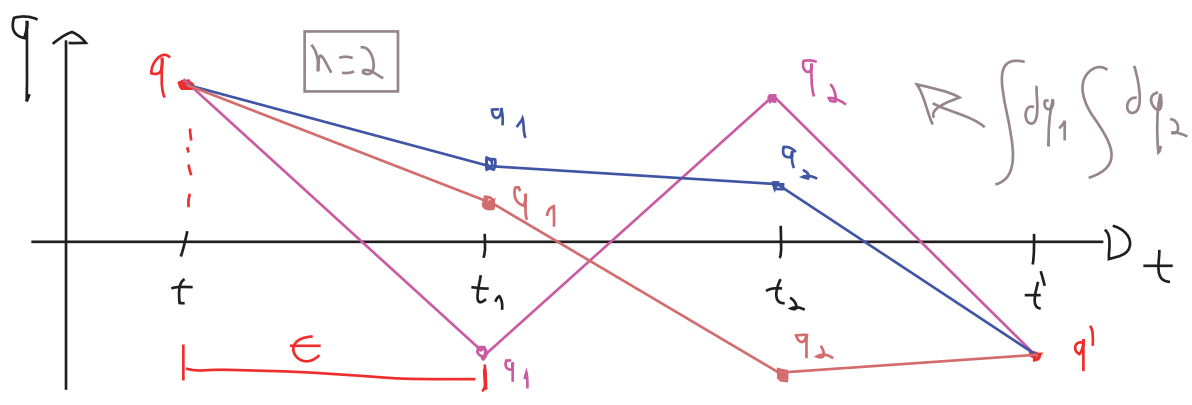
$$F(q', t', q, t) = \int \prod_{i=1}^n dq_i \dots dq_n \langle q', t' | q_n, t_n \rangle \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \dots \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q, t \rangle$$

(eq. 16.1)

Se esquecermos as integrais por um instante, percebemos que os elementos de matriz estão descrevendo um caminho:



Este caminho, no entanto, é bastante diferente do caminho clássico. Mesmo que façamos $\epsilon \rightarrow 0$, a diferença $q_{i+1} - q_i$ não é forçada a zero e acabamos com um caminho arbitrariamente descontínuo. De fato a expressão 16.1 indica que estamos levando em conta uma infinidade destas trajetórias:



A esta operação daremos o nome de "integral sobre todas as trajetórias" ou "integral de trajetória", e definimos o símbolo:

$$\mathcal{D}q(t) \equiv \prod_{i=1}^n dq(t_i) \quad \text{(eq. 16.2)}$$

$$\int \mathcal{D}q(t) \equiv \prod_{i=1}^n \int dq(t_i) \quad \text{(eq. 16.3)}$$

Podemos também obter uma expressão no espaço dos momentos:

$$\langle q | p \rangle = e^{ipq}$$

$$|q\rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} |p\rangle \langle p | q \rangle$$

$$|p\rangle = \int dq |q\rangle \langle q | p \rangle = \int dq \int \frac{dp'}{2\pi\hbar} |p'\rangle \langle p' | q \rangle \langle q | p \rangle = \int \frac{dp'}{2\pi\hbar} |p'\rangle \delta(p-p') = |p\rangle$$

Handwritten derivation of the momentum eigenstate completeness relation:

$$\int dq e^{iq(p-p')} = 2\pi\hbar \delta(p-p')$$

$$e^{-ip'q} e^{ipq}$$

$$q(t_i) \equiv q_i(t_i)$$

$$\langle q_i, t_i | q_{i-1}, t_{i-1} \rangle_H = \int \frac{dp_i(t_i)}{2\pi} \langle q(t_i) | e^{-i\epsilon \hat{H}} | q(t_{i-1}) \rangle = \int \frac{dp_i(t_i)}{2\pi} \langle q(t_i) | p_i(t_i) \rangle \langle p_i(t_i) | e^{-i\epsilon \hat{H}} | q(t_{i-1}) \rangle$$

É preciso ter cuidado com Hamiltonianas que tenham produtos entre os operadores \hat{p} e \hat{q} , neste caso é preciso "Weyl-ordenar" o Hamiltoniano antes de prosseguir - isto significa usar as relações de comutação até que tenhamos todos os operadores \hat{p} à esquerda dos operadores \hat{q} (ver Peskin pg 281). Assumindo que isto já foi feito e lembrando que, para ϵ pequeno, não precisamos nos preocupar com termos quadráticos em \hat{H} , vale:

$$\begin{aligned} \langle p(t_i) | e^{-i\epsilon \hat{H}(\hat{p}, \hat{q})} | q(t_{i-1}) \rangle &= \langle p(t_i) | 1 - i\epsilon \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) | q(t_{i-1}) \rangle = \\ &= \langle p(t_i) | 1 - i\epsilon H(p(t_i), q(t_{i-1})) | q(t_{i-1}) \rangle = e^{-i\epsilon H[p(t_i), q(t_{i-1})]} \langle p(t_i) | q(t_{i-1}) \rangle = \\ &= e^{-i\epsilon H[p(t_i), q(t_{i-1})]} e^{-i p(t_i) q(t_{i-1})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \langle q_i, t_i | q_{i-1}, t_{i-1} \rangle &= \int \frac{dp(t_i)}{2\pi} e^{i q(t_i) p(t_i)} e^{-i\epsilon H[p(t_i), q(t_{i-1})]} e^{-i p(t_i) q(t_{i-1})} = \\ &= \int \frac{dp(t_i)}{2\pi} e^{i p(t_i) [q(t_i) - q(t_{i-1})]} e^{-i\epsilon H[p(t_i), q(t_{i-1})]} \end{aligned}$$

Com isso, a eq. 16.1 fica:

$$\begin{aligned} t_0 &= t \\ t_{n+1} &= t' \\ q_0 &= q(t) \\ q_{n+1} &= q(t') \end{aligned}$$

$$F(q', t', q, t) = \int \left(\prod_i^n dq(t_i) \right) \underbrace{\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle}_{P_{n+1}} \dots \underbrace{\langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle}_{P_1} =$$

$$\begin{aligned} &= \int \left(\prod_i^n dq(t_i) \right) \left(\prod_j^{n+1} \frac{dp(t_j)}{2\pi} \right) e^{i \left\{ p(t_{n+1}) \frac{q(t_{n+1}) - q(t_n)}{\epsilon} + \dots + p(t_1) \frac{q(t_1) - q(t_0)}{\epsilon} \right\}} \\ &\quad \times e^{-i \epsilon \left\{ H[p(t_{n+1}), q(t_n)] + \dots + H[p(t_1), q(t_0)] \right\}} \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}}$$

$$= \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) \text{EXP} \left\{ i \int_{t_0}^{t_{n+1}} dt \left[p(t) \dot{q}(t) - H[p(t), q(t)] \right] \right\}$$

A equação 17.1 é bastante geral, mas é possível encontrar uma expressão mais simples (e mais útil) no caso de hamiltonianas que tenham a forma:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} + V(q) \quad (m=1) \quad (\text{eq. 18.1})$$

Neste caso temos: $F(q^1 t^1, q t) = \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) \text{EXP} \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[p(t) \dot{q}(t) - \frac{p(t)^2}{2} - V[q(t)] \right] \right\}$ (eq. 18.2)

E podemos fazer a integral em $p(t)$ como uma Gaussiana generalizada, para ver o que isso quer dizer façamos um interlúdio de matemática.

— // Gaussianas // —

A gaussiana que conhecemos é:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Elevando isto ao quadrado podemos obter:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy e^{-\alpha(x^2+y^2)} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} r dr e^{-\alpha r^2} = \frac{\pi}{\alpha}$$

Com n integrais multiplicadas (e trocando α por $\alpha_n/2$):

$$\int dx_1 \dots dx_n \text{EXP} \left[-\frac{1}{2} \sum_i \alpha_i x_i^2 \right] = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha_1}} \dots \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha_n}} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\prod_i \alpha_i^{1/2}}$$

podemos organizar os α 's em uma matriz, suponha:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Então o produto escalar:

$$(\vec{x}, A\vec{x}) = x_i A_{ij} x_j = \sum_i \alpha_i x_i^2 \quad \& \quad \text{DET } A = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = \prod_i \alpha_i$$

Logo, podemos re-escrever a integral:

$$\int d^n x e^{-\frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j} = (2\pi)^{n/2} (\text{DET } A)^{-1/2} \quad (\text{eq. 18.3})$$

que de fato vale para qualquer matriz (real) A que seja diagonalizável.

Podemos ainda considerar os casos em que o "quadrado não está completo":

$$S = \frac{1}{2} \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b}^T \cdot \vec{x}$$

Pensemos nele como uma ação (o que de fato será, quando voltarmos à física). A solução clássica dada pelo princípio da extrema ação seria (mesmo sem pensar nisso como ação, estamos buscando o mínimo de S):

$$\frac{\delta S}{\delta x_i} = 0 \quad \frac{\delta}{\delta x_k} \left(\frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + b_i x_i \right) = \frac{1}{2} \delta_{ik} A_{ij} x_j + \frac{1}{2} x_i A_{ik} \delta_{jk} + b_k = 0$$

$$\frac{1}{2} A_{kj} x_j + \frac{1}{2} A_{ik} x_i = -b_k$$

$$A_{ij} = A_{ji} \Rightarrow \vec{x}_c = -A^{-1} \vec{b}$$

← CLÁSSICO

$$S(\vec{x}_c) = \frac{1}{2} (-A^{-1} \vec{b})^T \cdot A \cdot (-A^{-1} \vec{b}) + \vec{b}^T (-A^{-1} \vec{b}) = -\frac{1}{2} \vec{b}^T A^{-1} \vec{b}$$

Podemos então escrever:

$$S = \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_c)^T \cdot A (\vec{x} - \vec{x}_c) - \frac{1}{2} \vec{b}^T A^{-1} \vec{b}$$

equação da parábola com mínimo em \vec{x}_c

$$\int d^n x e^{-\left(\frac{1}{2} \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b}^T \cdot \vec{x}\right)} = e^{-S(\vec{x}_c)} \int d^n x e^{-\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_c)^T \cdot A \cdot (\vec{x} - \vec{x}_c)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det A)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \vec{b}^T A^{-1} \vec{b}}$$

(eq. 19.1)



Voltando a física, podemos fazer a integral destacada abaixo:

$$F(q' t', q t) = \int \mathcal{D}q(t) \exp \left\{ -i \int_t^{t'} dt V[q(t)] \right\} \underbrace{\int \mathcal{D}p(t) \exp \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[p(t) \dot{q}(t) - \frac{p(t)^2}{2} \right] \right\}}_{\prod_i \frac{\hbar}{2\pi} \exp \left\{ i \in \left[p(t_i) \dot{q}(t_i) - \frac{1}{2} p(t_i)^2 \right] \right\}}$$

com: $x_i = p(t_i)$ $b = -i \in \dot{q}(t_i)$ $(A^{-1})_{ij} = -\frac{i}{\epsilon} \delta_{ij}$
 $A_{ij} = i \in \delta_{ij}$

podemos usar 19.1 diretamente, obtendo:

$$\int \mathcal{D}p(t) \text{EXP} \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[p(t) \dot{q}(t) - \frac{p(t)^2}{2} \right] \right\} = \frac{1}{(2\pi)^n} (2\pi)^{n/2} (i\epsilon)^{-n/2} \text{EXP} \left[\frac{1}{2} (+i\epsilon \dot{q}(t_i)) \left(\frac{1}{\epsilon} S_{ij} \right) (+i\epsilon \dot{q}(t_f)) \right]$$

$$= \underbrace{\frac{(i\epsilon)^{-n/2}}{(2\pi)^{n/2}}}_{\mathcal{N}} \text{EXP} \left[i \int_t^{t'} dt \frac{\dot{q}(t)^2}{2} \right] \quad (\text{eq. 20.1})$$

Com isso, nossa amplitude de transição fica em uma forma bastante reveladora:

$$F(q' t', q t) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \text{EXP} \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[\frac{\dot{q}(t)^2}{2} - V[q(t)] \right] \right\} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \text{EXP} \left\{ i \int_t^{t'} dt L(q, \dot{q}) \right\}$$

$$F(q' t', q t) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) e^{iS[q]} \quad (\text{eq. 20.2})$$

Paremos aqui um momento para notar duas coisas:

(1) As equações 17.1 e 20.2 nos dão formas bastante curiosas de calcular um objeto essencialmente quântico: a amplitude de probabilidade de transição. Curiosas porque, no lado direito da equação temos as funções Lagrangeana e Hamiltoniana clássicas do sistema (notem que trocamos os operadores \hat{q} e \hat{p} por seus valores esperados no meio da dedução). O comportamento quântico vem do facto de estarmos integrando sobre todas as trajetórias possíveis para $q(t)$ e $p(t)$ (a exponencial complexa também desempenha um papel)

(2) Na equação 20.2 fica claro que a soma sobre trajetórias é ponderada pela exponencial da ação, e diferentes trajetórias vão ter interferências construtivas ou destrutivas dependendo de diferença entre suas ações.

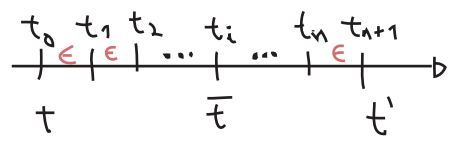
Temos então uma forma alternativa de quantizar um sistema, especialmente útil quando estamos falando de amplitudes de transição. Ao invés de definir operadores e relações de comutação, usamos as integrais de trajetória. Note que os dois métodos são **completamente equivalentes**, acima usamos a evolução temporal que se obtém como solução da equação de Schrödinger para chegar nas integrais de trajetória. Feynman fez o oposto, ele partiu de expressão 20.2 e mostrou que as funções de onda em 14.2 satisfazem a equação de Schrödinger (o que só vale para Hamiltonianas do tipo 18.1).

Funções de Correlação

Podemos também usar o método acima para obter outros observáveis, o mais simples sendo a função de um ponto:

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}) | q, t \rangle \quad t < \bar{t} < t'$$

É fácil imaginar como tratar este objeto no procedimento anterior. Discretizamos o tempo da mesma forma mas, assumindo que a discretização é "fina" o bastante, podemos identificar \bar{t} com um dos t_i intermediários:



Em meio aos diversos $\langle q_{i+1}, t_{i+1} | q_{i-1}, t_{i-1} \rangle$ que apareceram antes, vai haver um bracket diferente:

$$\langle q_{i+1}, t_{i+1} | \hat{q}(\bar{t}) | q_i, t_i \rangle \stackrel{t_i = \bar{t}}{=} \underbrace{q(\bar{t})}_{\text{não é mais um operador}} \langle q_{i+1}, t_{i+1} | q_i, t_i \rangle$$

isto é exatamente o que tínhamos antes. Então a conta procede normalmente, lembrando apenas que temos este $q(\bar{t})$ dentro das integrais.

$$\therefore \langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \ e^{iS[q]} \ q(\bar{t})$$

A função de dois (ou mais) pontos é similar, mas há uma sutileza:

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) | q, t \rangle \rightarrow \text{só sabemos tratar isso se de fato: } t < \bar{t}_1 < \bar{t}_2 < t'$$

$$\int \mathcal{D}q \ \langle q', t' | q_{n+1}, t_{n+1} \rangle \dots \langle q_{j+1}, t_{j+1} | \hat{q}(\bar{t}_2) | q_j, t_j \rangle \dots \langle q_{i+1}, t_{i+1} | \hat{q}(\bar{t}_1) | q_i, t_i \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q, t \rangle$$

$\bar{t}_2 = t_j \Rightarrow q(\bar{t}_2) < 1 >$ $\bar{t}_1 = t_i \Rightarrow q(\bar{t}_1) < 1 >$

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \ e^{iS[q]} \ q(\bar{t}_2) q(\bar{t}_1) \quad (\text{eq. 21.1})$$

Por outro lado, poderíamos ter calculado:

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}_1) \hat{q}(\bar{t}_2) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \ e^{iS[q]} \ q(\bar{t}_2) q(\bar{t}_1) \quad (\text{eq. 21.2})$$

desde que $t < \bar{t}_2 < \bar{t}_1 < t'$

note que são funções e comutam

Logo vemos que, tentando escrever 21.1 e 21.2 como uma única expressão, temos:

$$\int \mathcal{D}q \ e^{iS[q]} \ q(\bar{t}_2) \ q(\bar{t}_1) = \langle q', t' | T \{ \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) \} | q, t \rangle \quad (\text{eq. 22.1})$$

onde aparece o **Produto Temporalmente Ordenado**:

$$T \{ \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) \} \equiv \begin{cases} \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) & \leftrightarrow \bar{t}_2 < \bar{t}_1 \\ \hat{q}(\bar{t}_1) \hat{q}(\bar{t}_2) & \leftrightarrow \bar{t}_1 < \bar{t}_2 \end{cases} \quad (\text{eq. 22.2})$$

Tanto 22.1 e 22.2 são generalizados de forma direta para um número maior de operadores:

$$T \{ \hat{q}(\bar{t}_1), \dots, \hat{q}(\bar{t}_N) \} \equiv \hat{q}(\bar{t}_N) \dots \hat{q}(\bar{t}_1) \quad \leftrightarrow \quad \bar{t}_N < \dots < \bar{t}_1$$

ordenados temporalmente

$$G_n(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) = \langle q', t' | T \{ \hat{q}(\bar{t}_1) \dots \hat{q}(\bar{t}_n) \} | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \ e^{iS[q]} \ q(\bar{t}_1) \dots q(\bar{t}_n)$$

Função de n-pontos ou **Função de Correlação** (de n pontos) ou **Correlator**.

(eq. 22.3)

Em breve veremos em que contexto estes correlatores aparecem e porque estamos interessados neles. Definamos um outro objeto que nos será útil, lembrando que para qualquer conjunto $\{a_n\}$ podemos definir a **função geradora** $F(x)$:

$$F(x) \equiv \sum_n \frac{1}{n!} a_n x^n$$

tal que: $a_n = \left. \frac{d^n}{dx^n} F(x) \right|_{x=0}$

(conhecer esta função nos permite obter qualquer elemento do conjunto, bastando fazer o número apropriado de derivações)

O equivalente para o conjunto de todos os correlatores $\{G_n\}$ seria o **funcional gerador**:

$$Z[J] \equiv \sum_{N \geq 0} \int dt_1 \dots \int dt_N \frac{i^N}{N!} G_N(t_1, \dots, t_N) J(t_1) \dots J(t_N)$$

convencional

(eq. 22.4)

A diferença é que os elementos do conjunto em questão são funções (de vários t 's) e por isso a variável em que derivaremos deve ser também uma função (os J 's) e o gerador vira um funcional.

Podemos escrever ele em uma forma mais conveniente substituindo G_n de 22.3:

$$\begin{aligned}
 Z[\mathcal{J}] &= \sum_{N>0} \int dt_1 \dots \int dt_N \frac{i^N}{N!} \mathcal{J}(t_1) \dots \mathcal{J}(t_N) \int \mathcal{D}q e^{iS[q]} q(t_1) \dots q(t_N) = \\
 &= \int \mathcal{D}q e^{iS[q]} \sum_{N>0} \frac{1}{N!} \left[\int dt i q(t) \mathcal{J}(t) \right]^N = \int \mathcal{D}q e^{i \underbrace{[S[q] + \int dt q(t) \mathcal{J}(t)]}_{S[q, \mathcal{J}]}}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{Z[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}q e^{iS[q, \mathcal{J}]}} \quad (\text{eq. 23.1})$$

Para ver como podemos obter qualquer G_n , basta fazer as **derivadas funcionais**:

$$\frac{\delta^N}{i \delta \mathcal{J}(t_1) \dots i \delta \mathcal{J}(t_N)} Z[\mathcal{J}] \Big|_{\mathcal{J}=0} = \int \mathcal{D}q e^{iS[q]} q(t_1) \dots q(t_N) = G_N(t_1, \dots, t_N)$$

(eq. 23.2)

Para um tratamento um pouco mais longo de derivação funcional, chequem o material adicional [d] no site do curso (<http://professores.ift.unesp.br/ricardo.matheus/files/courses/2016tqc2/func%20deriv.pdf>), e as referências lá citadas. Para os nossos fins basta saber que:

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x-y) \quad \frac{\delta g(p(x))}{\delta f(y)} = \delta(x-y) \frac{dg}{dp} \Big|_{p=p(x)}$$

De forma que:

$$\frac{\delta^2}{i \delta \mathcal{J}(t_1) i \delta \mathcal{J}(t_2)} Z[\mathcal{J}] = \frac{\delta}{i \delta \mathcal{J}(t_1)} \left\{ \frac{\delta}{i \delta \mathcal{J}(t_2)} \int \mathcal{D}q e^{i[S[q] + \int dt q(t) \mathcal{J}(t)]} \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}q \frac{\int}{i\delta J(t_1)} \left\{ e^{i[S[q] + \int dt q(t) J(t)]} \frac{\int}{i\delta J(t_2)} \left[i(S[q] + \int dt q(t) J(t)) \right] \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}q \frac{\int}{i\delta J(t_1)} \left\{ e^{i[S[q] + \int dt q(t) J(t)]} \int dt q(t) \delta(t - t_2) \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}q q(t_2) \underbrace{\frac{\int}{i\delta J(t_1)} e^{i[S[q] + \int dt q(t) J(t)]}}_{q(t_1) e^{i[\dots]}} = \int \mathcal{D}q q(t_2) q(t_1) e^{iS[q, J]}$$

$$\therefore \frac{\int}{i\delta J(t_1) i\delta J(t_2)} \frac{\delta Z[J]}{\delta J} \Big|_{J=0} = \int \mathcal{D}q q(t_2) q(t_1) e^{iS[q]} \Big|_{J=0} = G_2(t_1, t_2) //$$

Com este conjunto de idéias e ferramentas podemos atacar um sistema bem conhecido: o oscilador harmônico.

O Oscilador Harmônico

(Ramond cap2, Nastase 2)

Dada a Lagrangeana de um oscilador harmônico (com $m = 1$):

$$\boxed{m=1} \Rightarrow L = \frac{\dot{q}^2}{2} - \omega^2 \frac{q^2}{2} \quad \Rightarrow H = p\dot{q} - \left(\frac{\dot{q}^2}{2} - \omega^2 \frac{q^2}{2} \right) =$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} \quad = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2)$$

É conveniente definir:

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega q + ip)$$

$$a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega q - ip)$$

$\hbar = 1$

(eq. 24.1)

$$p = -i \sqrt{\frac{\omega}{2}} (a - a^\dagger)$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a + a^\dagger)$$

(eq. 25.1)

$$H = \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega}{2} (a - a^\dagger)^2 + \frac{\omega}{2} (a + a^\dagger)^2 \right) = \frac{\omega}{2} (a a^\dagger + a^\dagger a)$$

(eq. 25.2)

poderíamos juntar isso pois ainda não quantizamos

Definimos os Brackets de Poisson como:

$$\left. \begin{array}{l} f = f(p, q) \\ g = g(p, q) \end{array} \right\} \rightarrow \{f, g\}_{PB} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

(eq. 25.3)

$$\therefore \{p_i, q_j\}_{PB} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}_0 \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_0 - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_k}}_{\delta_{kj}} \right) = -\delta_{ij}$$

$\delta_{ik} \cdot \delta_{kj} = \delta_{ij}$

Podemos escrever as equações de Hamilton na forma:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\}_{PB} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_0 \frac{\partial H}{\partial q_k} \right)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\}_{PB} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}_0 \frac{\partial H}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{\delta_{ik}} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right)$$

(eq. 25.4)

Quantização Canônica do Oscilador Harmônico

O que chamamos de quantização canônica consiste em transformar q e p em operadores \hat{q} e \hat{p} , substituindo os Brackets de Poisson por comutadores:

$$q, p \rightarrow \hat{q}, \hat{p} \quad \{, \}_{PB} \rightarrow -\frac{i}{\hbar} [,]$$

$\hbar = 1$

$$\{p_i, q_j\}_{PB} = -\delta_{ij} \rightarrow -i [p_i, \hat{q}_j] = -\delta_{ij}$$

$$[p_i, \hat{q}_j] = -i \delta_{ij}$$

(eq. 26.1)

$$[p, \hat{q}] = -i$$

(eq. 25.1)

$$[p, \hat{q}] = \left[-i \sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \right] =$$

$$= -\frac{i}{2} \left\{ [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] - [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \right\} = -i [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = -i$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

(eq. 26.2)

Podemos usar a mesma substituição nas equações de Hamilton (5.4) para obter a evolução destes operadores no quadro de Heisenberg:

$$\dot{\hat{q}}_i = \{q_i, H\}_{PB} \rightarrow \frac{d\hat{q}_i}{dt} = -i [\hat{q}_i, \hat{H}]$$

$$\dot{\hat{p}}_i = \{p_i, H\}_{PB} \rightarrow \frac{d\hat{p}_i}{dt} = -i [\hat{p}_i, \hat{H}]$$

(eq. 26.3)

E o hamiltoniano pode ser obtido de (5.2)

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2} \left(\underbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}}_{1 + \hat{a}^\dagger\hat{a}} \right) = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

(eq. 26.4)

se tivéssemos acompanhado os h's corretamente

Os autoestados deste hamiltoniano são definidos em termos de um número de ocupação n e os operadores a^\dagger e a são operadores de criação e aniquilação:

$$a^\dagger |n\rangle = A_n |n+1\rangle \quad ; \quad a |n\rangle = A'_n |n-1\rangle$$

(eq. 26.5)

normalizações

$$a^\dagger a |n\rangle \equiv \hat{N} |n\rangle = n |n\rangle$$

(eq. 26.6)

Operador Número

No estado fundamental, ou vácuo, definido por $a|\Omega\rangle = 0$

$$\therefore N|\Omega\rangle = 0$$

$$|\Omega\rangle = |n=0\rangle$$

a energia é:

$$\hat{H} = \omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\hat{H}|n=0\rangle = E_0|n=0\rangle$$

$$E_0 = \frac{\omega}{2} \quad \text{Energia de ponto zero ou do vácuo}$$

Podemos definir um hamiltoniano sem esta energia de ponto zero, definindo o **ordenamento normal**:

$$: a^\dagger a + a a^\dagger + a a + a^\dagger a^\dagger : = a^\dagger a + a^\dagger a + a a + a^\dagger a^\dagger$$

Coloca todos os a^\dagger 's a esquerda dos a 's

$$:\hat{H}: = \omega a^\dagger a = \omega \hat{N}$$

vejamos agora um caso um pouco mais complicado (o oscilador forçado), no qual aplicaremos a integral de trajetória.

O oscilador Harmônico forçado

(Nastase 7 e 8, Ramond 2.3)

Quando definimos o gerador funcional (eqs. 22.4 e 23.1):

$$\mathbb{Z}[J] = \int \mathcal{D}q \, e^{iS[q; J]} = \int \mathcal{D}q \, e^{iS[q] + i \int dt \, q(t) J(t)}$$

a partir do qual obtemos os correlatores (16.2):

$$G_N(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) = \frac{\delta}{i \delta J(\bar{t}_1)} \dots \frac{\delta}{i \delta J(\bar{t}_n)} \mathbb{Z}[J] \Big|_{J=0}$$

Não discutimos o significado da função $J(t)$, que não passava de um artifício matemático, introduzida apenas para definir o funcional gerador e igualada a zero assim que possível. No entanto podemos nos perguntar o que acontece se não fizemos $J(t) = 0$. A ação definida com a inclusão do termo com J é:

$$S[q; J] = S[q] + \int dt \, J(t) q(t)$$

que, pelo princípio da extrema ação: $\frac{\delta S[q; J]}{\delta q} = \frac{\delta S[q]}{\delta q} + J(t) = 0$

Se $L(q) = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) \Rightarrow$ $- \omega^2 q - \ddot{q} + J(t) = 0$ (eq. 28.1)
 Oscilador Harmônico Forçado

Note que $J(t)$ é uma força externa ao sistema descrito por esta eq. de movimento, no sentido de que sua dinâmica não é influenciada pelo valor de $q(t)$ (ou suas derivadas). Todo o comportamento desta "Fonte" é estabelecido a priori por fatores externos e o que resolvemos é a resposta do oscilador a isto. Neste sentido vemos que os correlatores da teoria descrevem o comportamento do sistema isolado, na ausência de fontes.

A ação $S[q; J] = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) + qJ$ é quadrática em q e portanto podemos fazer a integral de trajetória usando o resultado da pg 19.1 para integrais gaussianas. Há, no entanto, um sutil problema ligado às condições de contorno de $q(t)$, vamos primeiro fingir que não notamos este problema (ou de fato ser honestos a respeito):

$$S[q] = \int dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 - \frac{\omega^2 q^2}{2} + Jq \right] = \int dt \left[-\frac{1}{2} q \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) q + Jq \right]$$

$$\int \frac{dq}{dt} \frac{dq}{dt} = \int \cancel{\frac{1}{2} \left(q \frac{dq}{dt} \right)} - \int q \frac{d^2 q}{dt^2}$$

O que leva à integral de trajetória:

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}q \exp \left\{ \left[-\frac{1}{2} q \cdot \Delta^{-1} q + i J \cdot q \right] \right\} \quad \Delta^{-1} = i \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right)$$

$$J \cdot q = \int dt J(t) q(t)$$

Comparando com 19.1:

$$\int d^n x e^{-\left(\frac{1}{2} \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b}^T \cdot \vec{x} \right)} = (2\pi)^{n/2} (D_{ET} A)^{-1/2} e^{\frac{1}{2} \vec{b}^T \cdot A^{-1} \vec{b}} \Rightarrow \begin{aligned} \mathcal{L} &= -i J(t) \\ A &= \Delta^{-1} \end{aligned}$$

$$\mathcal{Z}[J] = \mathcal{N} e^{-\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$$

(por enquanto usaremos este resultado, mas cuidado!
 Veja eq 31.2 para a versão correta)

$$\underbrace{\left(D_{ET} \Delta^{-1} \right)^{-1/2}}_{\text{(não depende de J)}}$$

$$\mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J} = \int dt \int dt' \mathcal{J}(t) \Delta(t, t') \mathcal{J}(t')$$

$$\Delta^{-1} \Delta(t, t') = i \left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right] \overbrace{i \int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2 - \omega^2}}^{\text{ANSATZ } p/\Delta} = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{-p^2 + \omega^2}{p^2 - \omega^2} e^{-ip(t-t')} = \delta(t-t')$$

$$\Delta(t, t') = i \int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2 - \omega^2} \quad (\text{eq. 29.1})$$

➤ No entanto temos uma singularidade aqui, que seria evitada escolhendo caminhos apropriados no plano complexo (o que veremos mais adiante).

Esta singularidade invalida a inversão que fizemos de Δ^{-1} ? A pergunta só pode ser respondida pensando em que espaço de funções Δ^{-1} está agindo, pois neste caso podemos pensar no operador como uma matriz e ver que, se existem funções que satisfaçam:

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right] q_0(t) = 0 \quad (\text{eq. 29.2})$$

isto significaria que o operador tem autovalores iguais a zero e é singular, **não pode ser invertido!** Para piorar, estes modos de autovalor zero são justamente as soluções clássicas do oscilador livre.

$$q_0(t) = C_{\pm} e^{\pm i\omega t}$$

Para conseguir inverter Δ^{-1} , portanto, precisamos excluir estas soluções do espaço em que Δ^{-1} está agindo, o que quer dizer que precisamos que elas não sejam varidas pela integral de trajetória. Lembre-se que para definir a integral de trajetória, temos que também escolher os pontos inicial e final da trajetória, que estão fixos. Note ainda que a equação só tem soluções $q(t), t \in [t_i, t_f]$ não triviais se:

$$q(t_i) \neq 0 \quad \text{ou} \quad q(t_f) \neq 0$$

$$q_0(t) = C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t}$$

$$q_0(t_i) = 0 \Rightarrow (C_+ e^{i\omega t_i} + C_- e^{-i\omega t_i}) = 0$$

$$q_0(t_f) = 0 \Rightarrow (C_+ e^{i\omega t_f} + C_- e^{-i\omega t_f}) = 0$$

$$\left. \begin{matrix} (C_+ - C_-) \sin\left[\frac{\omega(t_f + t_i)}{2}\right] \cos\left[\frac{\omega(t_f - t_i)}{2}\right] = 0 \\ (C_+ + C_-) \cos\left[\frac{\omega(t_f + t_i)}{2}\right] \cos\left[\frac{\omega(t_f - t_i)}{2}\right] = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow C_+ = C_- = 0$$

Vamos então fazer uma mudança de variável e escrever:

$$q(t) = q_{cl}(t) + \tilde{q}(t) \rightarrow \boxed{\tilde{q}(t_i) = \tilde{q}(t_f) = 0} \quad (\text{eq. 30.1})$$

↳ Trajetória clássica, com condições de contorno não triviais

Do ponto de vista da integral de trajetória, mudar a integração de q para \tilde{q} é o mesmo que uma mudança de variável dada pela adição de uma constante em uma integral usual, estamos apenas somando um caminho fixo. Então:

$$\int \mathcal{D}q e^{iS[q_{cl}(t) + \tilde{q}; J]} = \int \mathcal{D}\tilde{q} e^{iS[q_{cl}(t) + \tilde{q}; J]}$$

De fato, isto decorre da definição da integral de trajetória de um modo trivial:

$$\prod_i dq_i = \prod_i d(q_{cl,i} + \tilde{q}_i) = \prod_i d\tilde{q}_i$$

↳ número

Lembrando que (pg 19), se achamos um extremo q_0 de $S[q; J]$, podemos escrever:

$$S[q; J] = \frac{1}{2} A q^2 + J q = S[q_0; J] + \frac{1}{2} A (q - q_0)^2 = S[q; J] + S[q - q_0; 0]$$

↳ justamente a ação para $J = 0$

↳ potencial quadrático em torno deste mínimo

↳ valor de S no mínimo q_0

↳ $\left. \frac{\delta S}{\delta q} [q; J] \right|_{q=q_0} = 0$

Acontece que q_{cl} é justamente um extremo da ação, de forma que:

$$\boxed{S[q; J] = S[q_{cl}; J] + S[q - q_{cl}; 0]} \Rightarrow S[q; J] = S[q_{cl}; J] + S[\tilde{q}; 0]$$

(eq. 30.2)

$$\therefore Z[J] = e^{iS[q_{cl}; J]} \int \mathcal{D}\tilde{q} e^{iS[\tilde{q}; 0]}$$

(eq. 30.3)

esta integral agora está bem definida, mas não interessa o seu resultado pois ela independe de J e pode ser absorvida na constante que acompanha Z . O importante é que a Δ que vai parar no determinante é obtida invertendo o operador Δ^{-1} numa base em que não há modos com autovalor zero

$$\therefore Z[J] = \mathcal{N} e^{iS[q_{cl}; J]}$$

(eq. 30.4)

E a equação de movimento para q_α é

$$\Delta^{-1} q_\alpha(t; \mathcal{J}) = i \mathcal{J}(t) \quad (\text{eq. 31.1})$$

E a solução:

$$q_\alpha(t; \mathcal{J}) = q_\alpha(t; 0) + i (\Delta \cdot \mathcal{J})(t)$$

$$\hookrightarrow \Delta^{-1} q_\alpha(t; 0) = 0$$

(estas são as funções problemáticas que satisfazem a eq. 29.2, posso inverter Δ porque ele agora age em $q_\alpha(t; \mathcal{J})$, o segundo termo acima conserta o problema)

Note que:

$$\frac{\delta_{\text{FULL}} S[q_\alpha; \mathcal{J}]}{\delta_{\text{FULL}} \mathcal{J}(t)} = \int dt' \left[\frac{\delta S}{\delta q(t')} \Big|_{q=q_\alpha} \frac{\delta q_\alpha(t'; \mathcal{J})}{\delta \mathcal{J}(t)} + \frac{\delta S[q_\alpha; \mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}} \right] =$$

$$\int d\mathcal{J} \left(\frac{\delta_{\text{FULL}} S[q_\alpha; \mathcal{J}]}{\delta_{\text{FULL}} \mathcal{J}(t)} = q_\alpha(t; \mathcal{J}) = q_\alpha(t; 0) + i (\Delta \cdot \mathcal{J})(t) \right)$$

$$S[q_\alpha(\mathcal{J}); \mathcal{J}] = S[q_\alpha(0); 0] + q_\alpha(0) \cdot \mathcal{J} + \frac{i}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J}$$

cada produto escalar deste é uma integral em t (por isso suprimi as dep. em t)

$$Z[\mathcal{J}] = \mathcal{N} e^{i S[q_\alpha; \mathcal{J}]} = \mathcal{N} e^{-\frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J} + i q_\alpha(0) \cdot \mathcal{J}}$$

(eq. 30.4)

(eq. 31.2)

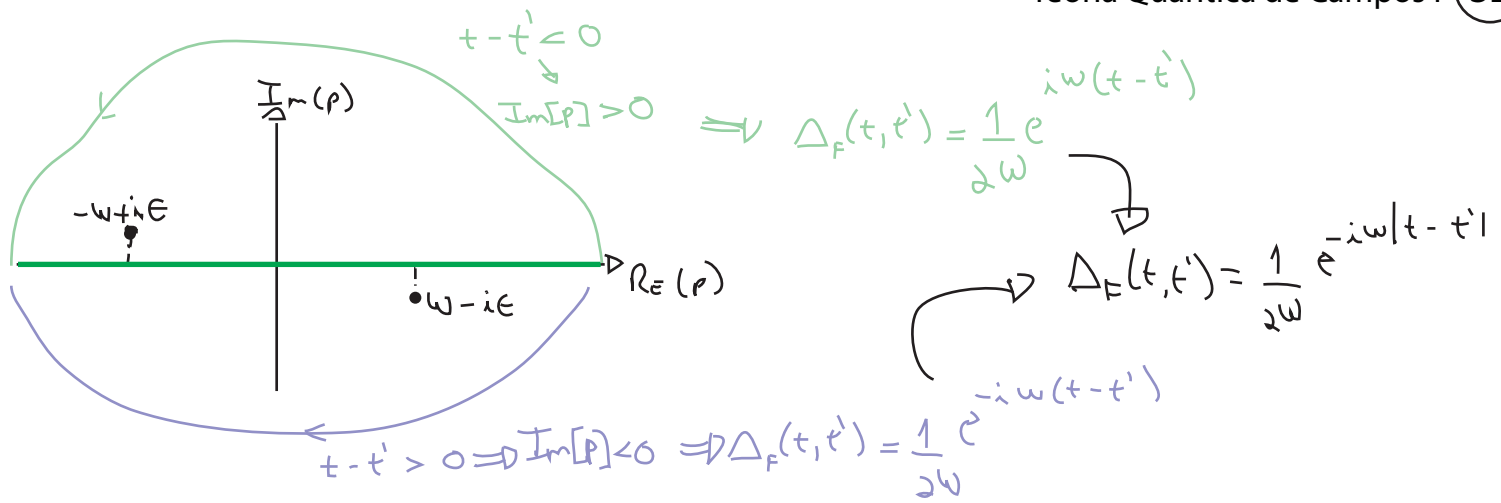
Ainda resta saber qual é a forma deste Δ e quais condições de contorno usamos para $q_\alpha(t; \mathcal{J})$ na eq. 31.1

Uma opção que temos para evitar os polos em 29.1 é tirá-los do eixo real, faremos isto segundo a prescrição:

$$\omega^2 \rightarrow \omega^2 - i\epsilon \quad (\text{eq. 31.3})$$

$$\Delta_F(t, t') = i \int \frac{dP}{2\pi} \frac{e^{-iP(t-t')}}{P^2 - \omega^2 + i\epsilon} = i \int \frac{dP}{2\pi} \frac{e^{-i \text{Re}[P](t-t')} e^{-\text{Im}[P](t-t')}}{(P+\omega-i\epsilon)(P-\omega+i\epsilon)}$$

polos em:
 $P = \pm(\omega - i\epsilon)$



Voltemos então a equação 31.1:

$$\Delta^{-1} q_\alpha(t; J) = iJ(t) \Rightarrow i \left(\frac{d^2}{dt^2} + w^2 \right) q_\alpha(t, J) = iJ(t)$$

E lembrando que:

$$\underbrace{i \left(\frac{d^2}{dt^2} + w^2 \right)}_{\Delta^{-1}} \underbrace{\left(i \int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2 - w^2 + i\epsilon} \right)}_{\Delta_F(t-t')} = \delta(t-t')$$

Fica fácil deduzir que:

$$q_\alpha(t, J) = i \int dt' \Delta_F(t-t') J(t')$$

Assumindo que $J(t) \rightarrow 0 / t \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \int dt' \rightarrow \int_{-T}^T dt'$ algum número finito, pois fora desta região $J(t) = 0$

Então: $t \rightarrow \infty \Rightarrow q_\alpha(t, J) = e^{-i\omega t} \underbrace{i \int_{-T}^T dt' \frac{e^{i\omega t'}}{2w} J(t')}_{\text{const.}} = A e^{-i\omega t}$

$t \rightarrow -\infty \Rightarrow q_\alpha(t, J) = e^{+i\omega t} \int_{-T}^T dt' \frac{e^{-i\omega t'}}{2w} J(t') = B e^{+i\omega t}$

Vemos que a prescrição 31.3 (chamada de **prescrição de Feynman**) é equivalente a resolver 31.1 com as condições de contorno:

$$q_\alpha(t \rightarrow \infty, J) = A e^{-i\omega t}$$

$$q_\alpha(t \rightarrow -\infty, J) = B e^{+i\omega t}$$

(atente para os sinais, que serão importantes mais adiante)

(eq. 32.1)

e estas condições exigem que $J(t)$ seja limitado no tempo. Além disso, como estas condições não permitem soluções não triviais da equação 29.2, vemos que a integral de trajetória original em $q(t)$ está bem definida (com a trajetória clássica satisfazendo 32.1 e a quântica satisfazendo 30.1).

Espaço de Fase Harmônico

Vejamos agora como podemos tratar este oscilador forçado de forma mais rigorosa. Começando com o oscilador livre, temos:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [a(t) + a^\dagger(t)] \\ p(t) &= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} [a(t) - a^\dagger(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [\omega q - i p] = a(0) e^{-i\omega t} \\ a^\dagger(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [\omega q + i p] = a^\dagger(0) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (\text{eq. 33.1})$$

↓ (quantizando)

$$H(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

Espaço de Fock: $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$

Até aqui, nada de novo, mas podemos também definir um outro conjunto de estados os **estados coerentes**:

$$|\alpha\rangle \equiv e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \quad (\text{eq. 33.2})$$

Estas combinações lineares dos estados no espaço de Fock são autoestados de \hat{a} :

$$\begin{aligned} \hat{a} |\alpha\rangle &= \hat{a} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle + \underbrace{e^{\alpha \hat{a}^\dagger} \hat{a} |0\rangle}_0 = [\hat{a}, e^{\alpha \hat{a}^\dagger}] |0\rangle \\ [\hat{a}, e^{\alpha \hat{a}^\dagger}] &= \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^n}{n!} \left(\underbrace{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]}_1 (\hat{a}^\dagger)^{n-1} + \hat{a}^\dagger \underbrace{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]}_1 (\hat{a}^\dagger)^{n-2} + \dots + (\hat{a}^\dagger)^{n-1} \underbrace{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]}_1 \right) = \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^n}{(n-1)!} (\hat{a}^\dagger)^{n-1} = \alpha \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} (\hat{a}^\dagger)^{n-1} = \alpha e^{\alpha \hat{a}^\dagger} \end{aligned}$$

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (\text{eq. 33.3})$$

Da mesma forma: $\left\{ \begin{aligned} \langle \alpha^* | &\equiv \langle 0 | e^{-\alpha^* \hat{a}} \\ \langle \alpha^* | \hat{a}^\dagger &= \langle \alpha^* | \alpha^* \end{aligned} \right. \quad (\text{eq. 33.4})$

Note que:

$$\langle \alpha^* | \alpha \rangle = \langle 0 | e^{\alpha^* \hat{a}^\dagger} | \alpha \rangle = e^{\alpha^* \alpha} \quad \langle 0 | \alpha \rangle = e^{\alpha^* \alpha} \quad (\text{eq. 34.1})$$

$$\langle 0 | e^{\alpha^* \hat{a}^\dagger} | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle = 1$$

$$\langle 0 | 1 + \frac{\hat{a}^\dagger}{1} + \frac{(\hat{a}^\dagger)^2}{2} + \dots$$

E temos a identidade (provar que isto é a identidade vai para lista de exercícios):

$$1 = \int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i} e^{-\alpha \alpha^*} | \alpha \rangle \langle \alpha^* |$$

Usemos agora estes estados para calcular a amplitude de transição entre estados:

$$F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \langle \alpha^*, t' | \alpha, t \rangle_H = \langle \alpha^* | e^{-i\hat{H}(t'-t)} | \alpha \rangle$$

estados no quadro de Heisenberg, assim como no moving frame (pg 15)

Mudando para o oscilador forçado:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2 \hat{q}^2}{2} - \hat{q} J = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [J \hat{a} + \frac{J}{L} \hat{a}^\dagger] \quad \gamma(t) \equiv \frac{J(t)}{\sqrt{2\omega}}$$

$L \in \mathbb{R}$

$$H(\hat{a}^\dagger, \hat{a}; t) = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} - \gamma(t) \hat{a}^\dagger - \bar{\gamma}(t) \hat{a} \quad (\text{eq. 34.2})$$

dependem ou não do tempo de acordo com o quadro, neste caso não pois estamos no q. de Schrödinger

Vale que:

$$\langle \alpha^* | \hat{H}(\hat{a}^\dagger, \hat{a}; t) | \beta \rangle = H(\alpha^*, \beta; t) \langle \alpha^* | \beta \rangle = H(\alpha^*, \beta; t) e^{\alpha^* \beta} \quad (\text{eq. 34.3})$$

Agora seguimos o procedimento usual para transformar a transição F em uma integral de trajetória, dividindo o tempo entre t e t' em n+1 intervalos de tamanho ε:

$$\epsilon = \frac{t' - t}{N+1} \quad \{t_0 = t, t_1, t_2, \dots, t_n, t' = t_{n+1}\}$$

das n identidades inseridas

$$F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \int \prod_{i=1}^n \left[\frac{d\alpha(t_i) d\alpha^*(t_i)}{2\pi i} e^{-\alpha^*(t_i) \alpha(t_i)} \right] \langle \alpha^*(t') | e^{-i\epsilon \hat{H}} | \alpha(t_n) \rangle \times$$

$$\times \langle \alpha^*(t_n) | e^{-i\epsilon \hat{H}} | \alpha(t_{n-1}) \rangle \dots \langle \alpha^*(t_1) | e^{-i\epsilon \hat{H}} | \alpha(t) \rangle$$

como:

$$\langle \alpha^*(t_{i+1}) | e^{-i\epsilon \hat{H}} | \alpha(t_i) \rangle = e^{-i\epsilon H(\alpha^*(t_{i+1}), \alpha(t_i); t_i)} e^{\alpha^*(t_{i+1}) \alpha(t_i)}$$

(aqui está a vantagem dos estados coerentes, se tentássemos fazer o mesmo no espaço de Fock apareceriam problemas pois o termo com fontes mistura níveis de Fock diferentes)

$$F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \int \prod_{i=1}^n \left[\frac{d\alpha(t_i) d\alpha^*(t_i)}{2\pi i} \right] \text{EXP} \left[-i \sum_{i=0}^n \epsilon H(\alpha^*(t_{i+1}), \alpha(t_i); t_i) \right] \times$$

$$\times \text{EXP} \left[\sum_{i=1}^n -\alpha^*(t_i) \alpha(t_i) \right] \text{EXP} \left[\sum_{i=0}^n +\alpha^*(t_{i+1}) \alpha(t_i) \right]$$

$$\text{EXP} \left[\underbrace{\alpha^*(t') \alpha(t_n) - \alpha^*(t_n) \alpha(t_n)}_{\epsilon} + \underbrace{\alpha^*(t_n) \alpha(t_{n-1}) - \alpha^*(t_{n-1}) \alpha(t_{n-1})}_{\epsilon} \dots \underbrace{\alpha^*(t_1) \alpha(t_1) + \alpha^*(t_1) \alpha(t)}_{\text{"órfão"} \epsilon} \right]$$

No limite $\epsilon \rightarrow 0$ $\epsilon \frac{\alpha^*(t') - \alpha^*(t_n)}{\epsilon} \alpha(t_n) \rightarrow d\tau \dot{\alpha}^*(\tau) \alpha(\tau)$

$$F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\alpha^* \text{EXP} \left\{ i \int_t^{t'} d\tau \left[\frac{\dot{\alpha}^*(\tau)}{i} \alpha(\tau) - H \right] + \alpha^*(t) \alpha(t) \right\} \quad (\text{eq. 35.1})$$

Para resolver esta integral precisamos pensar um pouco sobre as condições de contorno. É tentador dizer que α^* e α estão ambos fixos nas "bordas" (t' e t), mas temos um problema, pois estes são autovalores de operadores diferentes (\hat{a}^\dagger e \hat{a} respectivamente) e estes dois operadores não comutam. Sabemos que, em mecânica quântica, a nossa capacidade de especificar autovalores **em um mesmo estado** está limitada por:

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{1}{2} | \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle | \quad (\text{Griffiths de Mec. Quant., sec 3.4})$$

$$\sigma_{\hat{Q}}^2 = \langle \psi | (\hat{Q} - \langle \hat{Q} \rangle)^2 | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{Q}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{Q} | \psi \rangle^2$$

$$\langle \hat{Q} \rangle = \langle \psi | \hat{Q} | \psi \rangle$$

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \rightarrow \sigma_q \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Como estamos no quadro de Schrödinger e os estados evoluem no tempo, não podemos especificar α^* e α ao mesmo tempo no estado inicial e nem no final, mas podemos fazer:

$t \Rightarrow$	$\alpha(t) = \alpha$	$\alpha^*(t)$ é livre	$(\sigma_{\alpha^*} = \infty)$
$t' \Rightarrow$	$\alpha^*(t') = \alpha^*$	$\alpha(t)$ é livre	$(\sigma_{\alpha} = \infty)$

este objeto vai aparecer exponenciado em todas as integrais da trajet. p/F ou Z $i\tilde{S}[\alpha, \alpha^*]$

Note que a equação 35.1 está na forma: $F = \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\alpha^* e^{i\tilde{S}[\alpha, \alpha^*]}$

e portanto podemos usar o princípio da extrema ação para achar a equação de movimento para as

soluções clássicas do sistema. Podemos re-escrever a ação de duas formas:

$$\tilde{S} = \int_t^{t'} d\tau \left[\frac{\dot{\tilde{z}}^*(\tau)}{i} \alpha(\tau) - H \right] + \alpha^*(t) \alpha(t) = \int_t^{t'} d\tau \left[-\frac{\alpha^*(\tau) \dot{\tilde{z}}(\tau)}{i} - H \right] + \alpha(\tau) \alpha^*(\tau) \Big|_t^{t'} + \alpha^*(t) \alpha(t)$$

+ $\alpha(t') \alpha^*(t')$

As equações de movimento obtidas (no interior do intervalo [t,t']) são:

$$\delta \alpha(\tau) \left(\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \alpha(\tau)} \right) + \delta \alpha^*(\tau) \left(\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \alpha^*(\tau)} \right) = 0$$

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \alpha(\tau)} = \frac{\dot{\tilde{z}}^*(\tau)}{i} - \frac{\partial H}{\partial \alpha(\tau)} = 0$$

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \alpha^*(\tau)} = -\frac{\dot{\tilde{z}}(\tau)}{i} - \frac{\partial H}{\partial \alpha^*(\tau)} = 0$$

$$H(\alpha^*, \alpha; \tau) = \omega \alpha^* \alpha - \gamma \alpha^* - \bar{\gamma} \alpha$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_\alpha^* - i \omega \alpha_\alpha^* + i \bar{\gamma} &= 0 \\ \dot{\alpha}_\alpha + i \omega \alpha_\alpha - i \gamma &= 0 \end{aligned}$$

(eq. 36.1)

com as condições:

$$\begin{cases} \delta \alpha^*(\tau) \Big|_{\tau=t'} = 0 \\ \delta \alpha(\tau) \Big|_{\tau=t} = 0 \end{cases}$$

Que tem como solução:

$$\begin{aligned} \alpha_\alpha(\tau) &= \alpha e^{i\omega(t-\tau)} + i \int_t^\tau e^{i\omega(s-\tau)} \gamma(s) ds \\ \alpha_\alpha^*(\tau) &= \alpha^* e^{i\omega(\tau-t')} + i \int_\tau^{t'} e^{i\omega(\tau-s)} \bar{\gamma}(s) ds \end{aligned}$$

(eq. 36.2)

Note que:

$$\alpha_\alpha(t) = \alpha$$

$$\alpha_\alpha^*(t') = \alpha^*$$

Usando estas soluções (ou as equações de movimento), dá para mostrar que (exercício):

$$\begin{aligned} i \int_t^{t'} d\tau \left[\frac{\dot{\tilde{z}}^*(\tau)}{i} \alpha_\alpha(\tau) - H(\alpha_\alpha^*, \alpha_\alpha) \right] + \alpha_\alpha^*(t) \alpha_\alpha(t) &= \alpha_\alpha^*(t) \alpha_\alpha(t) + i \int_t^{t'} d\tau \gamma(\tau) \alpha_\alpha^*(\tau) = \\ &= \alpha^* \alpha e^{-i\omega(t'-t)} + i \int_t^{t'} ds \left[\alpha e^{i\omega(t-s)} \bar{\gamma}(s) + \alpha^* e^{i\omega(s-t')} \gamma(s) \right] + \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_t^{t'} ds \int_t^{t'} ds' \gamma(s) \bar{\gamma}(s') e^{-i\omega|s'-s|} \end{aligned}$$

(eq. 36.3)

Compare 36.3 com 31.2: mais uma vez temos um termo independente das fontes (que em 31.2 foi absorvido na normalização) um termo linear na fonte e um termo quadrático, de onde podemos obter o propagador. Vamos usar o mesmo método que antes, fazendo:

$$\alpha(t) = \alpha_q(t) + \tilde{\alpha}(t)$$

$$\alpha^*(t) = \alpha_q^*(t) + \tilde{\alpha}^*(t)$$

De novo, podemos mostrar que:

$$\tilde{S}[\alpha(t), \alpha^*(t); \delta, \bar{\delta}] = \tilde{S}[\alpha_q(t), \alpha_q^*(t); \delta, \bar{\delta}] + \tilde{S}[\tilde{\alpha}(t), \tilde{\alpha}^*(t); 0, 0]$$

e obter, de forma análoga a 30.4, que:

$$\tilde{Z} = \mathcal{N} e^{i\tilde{S}[\alpha_q, \alpha_q^*; \delta, \bar{\delta}]}$$

Para relacionar este resultado com o anterior, temos que escolher os estados iniciais e finais como o vácuo:

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow |\alpha\rangle = |0\rangle$$

$$\alpha^* = 0 \rightarrow \langle \alpha^* | = \langle 0 |$$

E então tomamos

$$\begin{cases} t \rightarrow -\infty \\ t' \rightarrow +\infty \end{cases}$$

De 36.3 obtemos:

$$Z[J] \equiv \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle_J = \mathcal{N} \text{EXP} \left\{ \underbrace{\alpha^* \alpha}_{\rightarrow 0} e^{-i\omega(t'-t)} + i \int_t^{t'} d\alpha \left[\underbrace{\alpha}_{\rightarrow 0} e^{i\omega(t-s)} \bar{\gamma}(s) + \underbrace{\alpha^*}_{\rightarrow 0} e^{i\omega(s-t')} \gamma(s) \right] \right\} +$$

(funcional gerador das transições vácuo-vácuo)

$$- \frac{1}{2} \int_t^{t'} ds \int_t^{t'} ds' \underbrace{\gamma(s)}_{J/\sqrt{2\omega}} \underbrace{\bar{\gamma}(s')}_{J/\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega|s-s'|} \left. \right\} = \mathcal{N} \text{EXP} \left[-\frac{1}{2} J \cdot \Delta_F \cdot J \right] \quad (\text{eq. 37.1})$$

Note que: $\mathcal{N} = \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle_0$ (eq. 37.2)

$$\Delta_F = \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega|s-s'|} \quad (\text{eq. 37.3})$$

Que é o mesmo resultado obtido na pg 32. Note também que a condição de contorno:

$\left. \begin{array}{l} t \rightarrow -\infty \\ \alpha(t) = 0 \\ \alpha^*(t) \text{ livre} \end{array} \right\} \Rightarrow$ só temos a parte de criação no passado

$\alpha^*(t)$ é autovalor de a^\dagger

$t \rightarrow +\infty$
 $\alpha^*(t) = 0$
 $\alpha(t)$ livre

\Rightarrow só temos a parte de aniquilação no futuro
 $\alpha(t)$ é autovalor de a

$$\text{Como } \hat{\phi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[\hat{a} e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t} \right]$$

$\langle 0, -\infty | \hat{\phi}(t) | 0, -\infty \rangle = \frac{\alpha^*}{\sqrt{2\omega}} e^{i\omega t}$
 $\langle 0, +\infty | \hat{\phi}(t) | 0, +\infty \rangle = \frac{\alpha(t)}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t}$

verificamos que isto é o mesmo que as condições 32.1.

O que ganhamos fazendo de novo este caminho? Para começar ele é mais limpo, não houve uso de prescrição alguma. Adicionalmente vimos que o resultado final só pôde ser obtido escolhendo os estados inicial e final como o vácuo, este passo não ficou explícito no caso anterior. De fato a projeção no vácuo estava escondida no único lugar em que poderia, na prescrição de Feynman que, como já veremos, está intrinsecamente ligada a projeção no vácuo assintótico (para tempos grandes) da teoria.

Rotação de Wick para o tempo Euclideano

Até agora viemos fazendo integrais que tipicamente envolviam exponenciais do tipo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i\alpha x^2}$$

que exige que α ou x sejam tomados ligeiramente complexos para que a integral convirja, ou seja, estas integrais só estão definidas via sua continuação analítica. Este tipo de integral aparece com frequência em teoria de campos, pois em geral podemos expandir as integrais da ação em torno da solução clássica usando a [Saddle Point Approximation](#):

$$S = S[q_{cl}] + \frac{1}{2} \delta q_i S_{,ij} \delta q_j + \mathcal{O}(\delta q^3)$$

$$\frac{\delta S}{\delta q} \Big|_{q=q_{cl}} = 0$$

se a ação já é quadrática em q (e.g. no caso livre) este termo é zero e o resultado da SPA é exato.

Uma outra forma de olhar a continuação analítica é fazendo uma rotação para o Espaço Euclideano, este procedimento é também bastante instrutivo pois revela paralelos interessantes entre a Mecânica Quântica e a Mecânica Estatística. Pois bem, analisemos o seguinte caso:

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle$$

$$E_n > 0$$

$$\hat{1} = \sum |n\rangle \langle n|$$

Uma amplitude de transição seria escrita como:

$$\begin{aligned} \langle q', t' | q, t \rangle_H &= \langle q' | e^{-\frac{i\hat{H}(t'-t)}{\hbar}} | q \rangle_H = \sum_n \sum_m \langle q' | n \rangle \underbrace{\langle n | e^{-\frac{i\hat{H}(t'-t)}{\hbar}} | m \rangle}_{\delta_{mn} e^{-iE_n(t'-t)}} \langle m | q \rangle = \\ &= \sum_n \langle q' | n \rangle \langle n | q \rangle e^{-i\frac{E_n(t'-t)}{\hbar}} = \sum_n \psi_n(q') \psi_n^*(q) e^{-i\frac{E_n(t'-t)}{\hbar}} \end{aligned}$$

Que é uma função analítica em $\Delta t \equiv (t' - t)$ e portanto admite a continuação:

$\Delta t = -i t_E$

Rotação de Wick
(eq. 39.1)

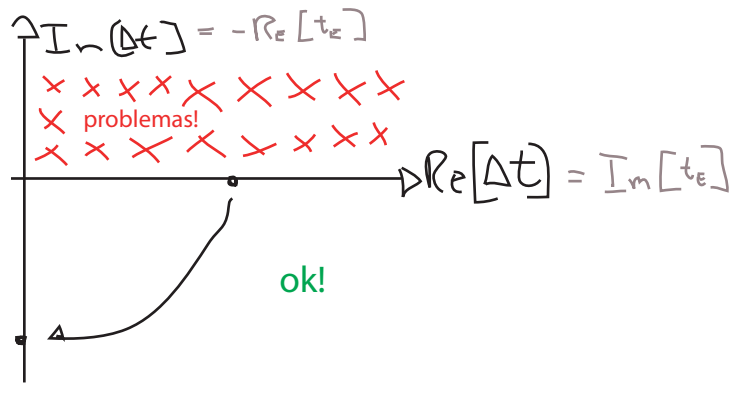
A razão pela qual "rodamos" nesta direção é a seguinte, considere o operador de evolução "para o futuro" (estamos especializando para o caso $\Delta t > 0$):

$$U(t) = e^{-\frac{i\hat{H}\Delta t}{\hbar}} = \sum_n e^{-i\frac{E_n \text{Re}[\Delta t]}{\hbar}} e^{\frac{E_n \text{Im}[\Delta t]}{\hbar}} |n\rangle \langle n|$$

\nearrow propagação p/ futuro ($\Delta t > 0$)
 $E_n > 0$

$\left\{ \begin{array}{l} > 1 \quad \text{Im}[\Delta t] > 0 \\ < 1 \quad \text{Im}[\Delta t] < 0 \end{array} \right.$

O que acontece se fizermos a continuação analítica para o plano complexo em Δt ? - U só é limitado para valores negativos de $\text{Im}[t]$:



$$\langle \Psi | U^\dagger U | \Psi \rangle \leq C \langle \Psi | \Psi \rangle$$

$$\begin{aligned} \Delta t &= -i t_E \\ \text{Re}[\Delta t] + i \text{Im}[\Delta t] &= \text{Im}[t_E] - i \text{Re}[t_E] \end{aligned}$$

Com esta rotação temos:

$$\langle q', t_E | q, 0 \rangle_H = \sum_n \psi_n(q') \psi_n^*(q) e^{-\frac{t_E E_n}{\hbar}} \quad (\text{eq. 39.2})$$

Note que: $\int dq \langle q, \tau | q, 0 \rangle_H = \sum_n e^{-\frac{\tau E_n}{\hbar}} = \text{Tr} \left\{ e^{-\frac{\tau \hat{H}}{\hbar}} \right\} = Z\left(\frac{\tau}{\hbar}\right)$

note que o estado inicial e final são iguais e estamos integrando sobre eles também

$$\int dq |\psi_n(q)|^2 = 1$$

também temos $k = 1$ em unidades naturais

é a função de partição canônica do sistema para uma temperatura

$$k T_Q = \frac{\hbar}{\tau} \equiv \frac{1}{\beta}$$

$\tau = \hbar \beta$

(eq. 39.3)

O valor esperado de qualquer observável \hat{O} é dado por:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\beta} = \text{Tr}(\hat{\rho}_{\beta} \cdot \hat{O}) \quad (\text{eq. 41.1})$$

A matriz de densidade é proporcional ao próprio operador de evolução no espaço Euclidiano:

$$U(t) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \rightarrow \hat{U}(-i\tau) = e^{-\frac{\tau}{\hbar} \hat{H}} = e^{-\beta \hat{H}}$$

$\tau = \hbar \beta$

$$\tau = \hbar \beta = \frac{\hbar}{k_B T_0}$$

$$k_B T_0 = \frac{\hbar}{k_B \tau}$$

$$\hat{\rho}_{\beta} = \frac{1}{Z} \hat{U}(-i\tau) \quad Z = \text{Tr}[\hat{U}(-i\tau)]$$

Vemos que a "evolução" de um sistema neste "tempo imaginário" serve para descrever as propriedades deste mesmo sistema em equilíbrio com um banho térmico.

Recapitulando:

Partícula (quântica) em eq. com banho de temperatura T

$$\hat{\rho}_{\beta} (e^{-\beta \hat{H}}), \quad Z = \text{Tr}[e^{-\beta \hat{H}}]$$

Partícula (quântica) isolada em tempo imaginário

$$\hat{U}(-i\tau)$$

isto é tudo que preciso saber, e posso obtê-lo daqui

(41.2)

Além disso, a métrica agora é de um espaço Euclidiano:

$$ds^2 = dt^2 - dq^2$$

$$\downarrow t = -i t_E$$

$$-ds_E^2 = -(dt_E^2 + dq^2) \Rightarrow \text{distância Euclidiana em } \mathbb{R}^{n+1}$$

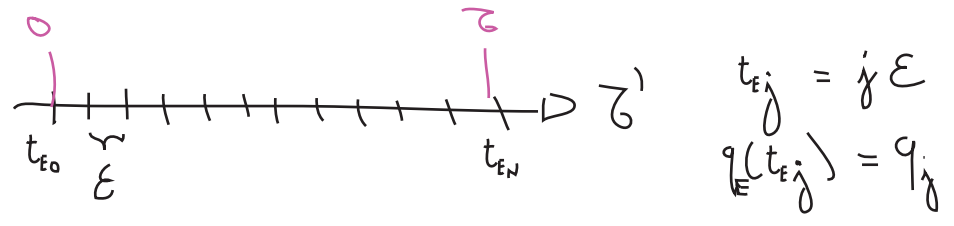
$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e portanto, t_E é uma variável tipo espaço. Vejamos o que acontece se pensarmos na variável de integração t_E como uma distância, além disso, consideraremos um sistema simples (oscilador harmônico):

$$S_E[q_E] = \int_0^{\tau} dt_E \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq_E}{dt_E} \right)^2 + V(q_E) \right]$$

$$V(q_E) = \frac{\omega^2}{2} q_E^2$$

Discretizando o "tempo Euclideo":



$$\int \mathcal{D}q_E \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\tau_0} dt_E \left[\frac{\dot{q}_E^2}{2} + \frac{1}{2} \omega^2 q_E^2 \right] \right\}$$

$$\downarrow$$

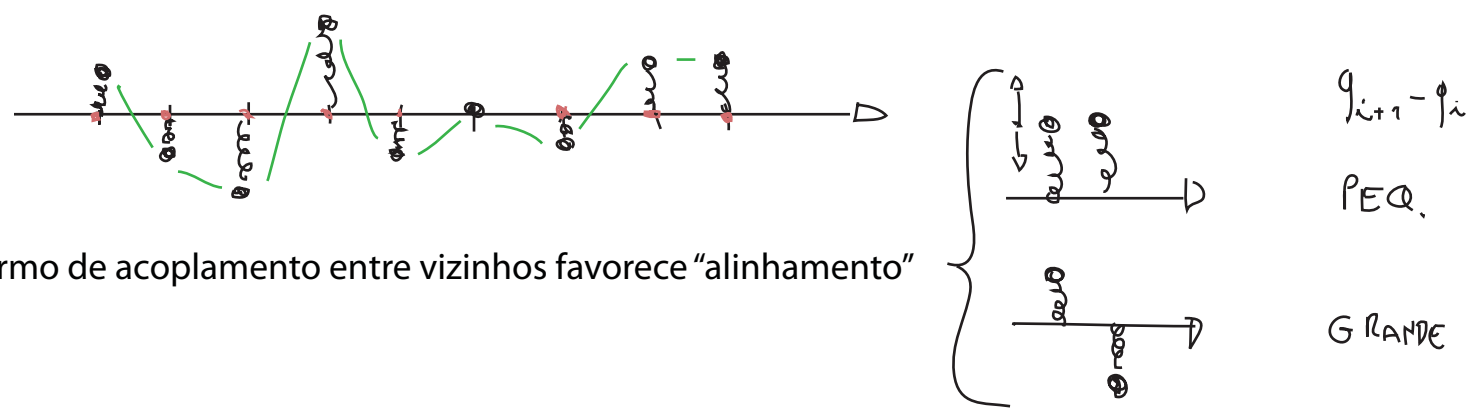
$$\int \prod dq_j \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_j \epsilon \left[\frac{1}{2} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q_j^2 \right] \right\}$$

Isso é exatamente a função de partição de um sistema clássico em temperatura T_S

$$Z = \underbrace{\int \prod dq_j}_{\text{"soma" todas as configurações } \{q_i\}} \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_j \epsilon \left[\underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} \right)^2}_{\text{energia total}} + \underbrace{\frac{1}{2} \omega^2 q_j^2}_{\text{energia potencial de um oscilador clássico}} \right] \right\}$$

1 / k_B T_S

Na prática temos um sistema de "osciladores" (notem que não temos mais tempo):



O termo de acoplamento entre vizinhos favorece "alinhamento"

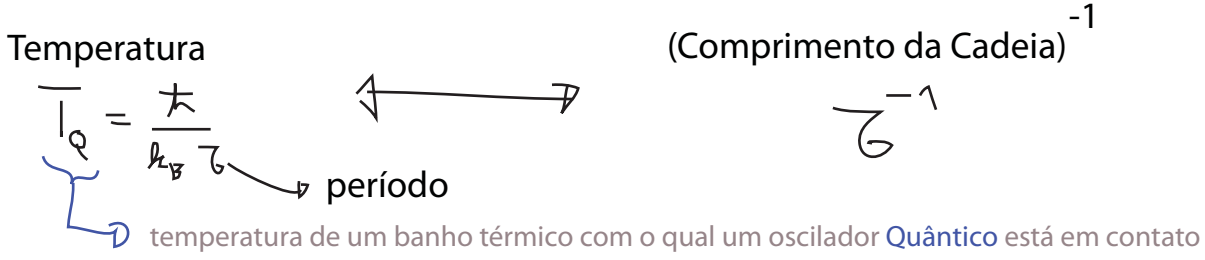
1 Oscilador Quântico (em tempo imaginário) \longleftrightarrow Cadeia de "osciladores" clássicos acoplados

Futuações quânticas \longleftrightarrow Futuações térmicas

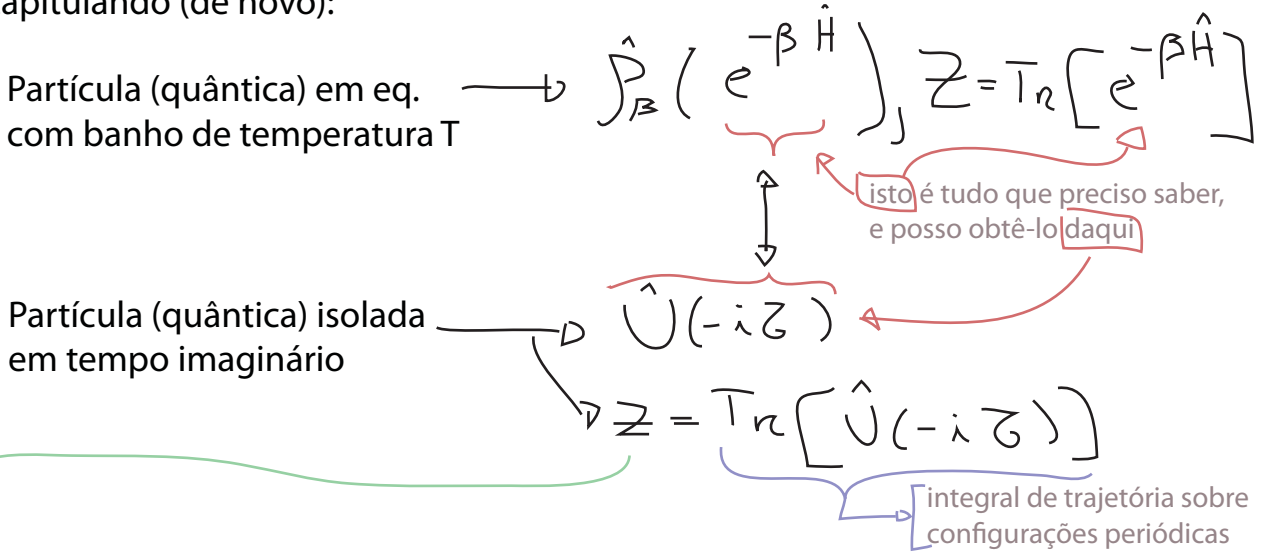
\hbar \longleftrightarrow $k_B T_S$ } temperatura do Sistema de objetos clássicos

1 grau de liberdade \longleftrightarrow número grande graus de liberdade clássicos

Lembrando ainda que uma partícula quântica em tempo imaginário pode ser interpretada como uma partícula quântica em contato com um banho T_Q :



Recapitulando (de novo):



É também a função de partição de um sistema clássico (de fato de muitos objetos clássicos acoplados aos "primeiros vizinhos") \rightarrow Mecânica Estatística

(43.1)

Até agora vimos a relação entre o operador de evolução e a função de partição. E os observáveis?

$\hat{A}(q) \xrightarrow{(41.1) \text{ quântica em T}} \langle \hat{A}(q_E) \rangle_{\mathcal{B}} = \text{Tr} [\hat{\rho}_{\mathcal{B}} \cdot \hat{A}(q_E)] = \frac{\text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}} \hat{A}(q_E)]}{Z}$

$\beta = \frac{1}{k_B T_Q}$

$= \frac{\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau) \hat{A}(q_E)]}{\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau)]}$

$\hat{U}_E(\tau)$

$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau)] = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q_E]}$ (40.1)

$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau) \hat{A}(q_E)] = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q_E]} A(q_E(\tau_1))$

$\hat{A}(q_E) |q_E(\tau_1)\rangle = A(q_E(\tau_1)) |q_E(\tau_1)\rangle$

(em caminhos periódicos)

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q_E]} \hat{A}(q_E(\tau_1))}{\int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q_E]}}$$

Note que qualquer fator multiplicativo indeterminado vindo da integral de trajetória (tal como o volume do espaço) vai ser cancelado

(eq. 44.1)

Notem que, pensando em $\int \mathcal{D}q_E$ como a soma sobre as configurações de uma cadeia clássica, esta mesma definição dá o valor esperado em Mecânica Estatística para observáveis de um sistema de temperatura $T_s = \frac{\hbar}{k_B \tau}$

$$T_Q = \frac{\hbar}{\tau k_B}$$

O que acontece quando fazemos $T_Q \rightarrow 0$?

$$\tau = \hbar \beta = \frac{\hbar}{k_B T_Q}$$

$$T_Q \rightarrow 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau)] = \sum_n e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_n}$$

$$\tau \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_0} \gg e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_1} \gg e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_2}$$

Seleciono a configuração de menor energia

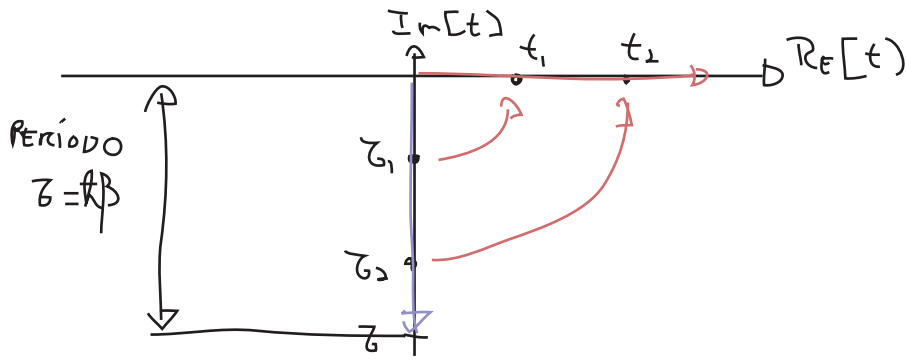
$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau \rightarrow \infty)] = \langle 0 | e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_0} | 0 \rangle$$

$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau) \hat{A}(q_E)] = \langle 0 | \hat{A}(q_E) | 0 \rangle e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_0}$$

$$\langle 0 | \hat{A}(q_E) | 0 \rangle = \langle \hat{A} \rangle_{\beta \rightarrow \infty}$$

Mandar a temperatura para zero **projeta os operadores no vácuo da teoria**. Com isso podemos entender outra forma de obter as funções de Green de interesse (a função de dois pontos abaixo é um exemplo dos chamados **Propagadores de Feynman** cuja relevância veremos mais adiante):

$$\Delta_F(t_1 - t_2) = \langle 0 | T \{ \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \} | 0 \rangle$$



Podemos obter primeiro o valor $\langle \hat{q}_E(z_1) \hat{q}_E(z_2) \rangle = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{i}{\hbar} S_E} q_E(z_1) q_E(z_2)$

$(z_1 < z_2) \Rightarrow (t_1 < t_2)$

e então voltar ao tempo real fazendo: $z_1 \rightarrow i t_1$
 $z_2 \rightarrow i t_2 \Rightarrow \langle \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_1) \rangle_{\beta}$

Se tivéssemos calculado a mesma coisa com $z_2 < z_1$ (note que na integral de trajetória não há diferença), teríamos voltado para: $\langle \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \rangle_{\beta}$

ou seja, voltamos sempre no produto temporalmente ordenado:

$$\langle T \{ \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \} \rangle_{\beta}$$

Para projetar no vácuo basta tomar temperatura zero

$$\left. \begin{matrix} \beta \rightarrow \infty \\ T \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \langle 0 | T \{ \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \} | 0 \rangle$$

Podemos também obter uma expressão para o propagador/correlator livre em temperaturas finitas:

$$\Delta_{\text{FREE}}^E(t_E) = \langle T \{ \hat{q}(-i t_E) \hat{q}(0) \} \rangle_{\beta}$$

considerando a equação de movimento (Oscilador Harmônico):

$$\left[\frac{d^2}{dt_1^2} + \omega^2 \right] \Delta_{\text{FREE}}^E(t_{E1} - t_{E2}) = \delta(t_{E1} - t_{E2}) \quad (\text{eq. 45.1})$$

$$-\frac{d^2}{dt_{E1}^2} + \omega^2$$

1 (já podemos voltar para unidades naturais)

Lembrando que, como o espaço Euclideo é cíclico de período $\tau = \hbar\beta$, vale:

$$\Delta_{\text{FREE}}^E(t_E \pm \beta) = \Delta_{\text{FREE}}^E(t_E)$$

A eq. 45.1 tem somente uma solução para $(t_{E1} - t_{E2}) \in [0, \beta]$:

$$\Delta_{F \neq E} (t_E) = \frac{1}{2\omega} \left[(1 + n(\omega)) e^{-\omega t_E} + n(\omega) e^{\omega t_E} \right] \quad (\text{eq. 46.1})$$

onde:

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\beta|\omega|} - 1} \quad (\text{eq. 46.2})$$

é a distribuição de Bose-Einstein. E no limite de temperatura zero:

$$\begin{aligned} T=0 & \quad n(\omega) \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow \infty & \quad \Delta_{F \neq E} \rightarrow \Delta_F(t_E) = \frac{e^{-\omega t_E}}{2\omega} = \frac{e^{-i\omega t}}{2\omega} \end{aligned} \quad (\text{compare com 37.3})$$

↑ voltando para Minkowski

O oscilador Harmônico forçado (de novo)

Vejamos como fica o oscilador no espaço Euclideano. Partindo da ação:

$$i S[q] = i \int dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 - \frac{\omega^2}{2} q^2 + J q \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Wick} & \left\{ \begin{aligned} t &= -it_E \\ q(t) &= q(-it_E) = q_E(t_E) \\ J(t) &= J(-it_E) = J_E(t_E) \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 = \left(\frac{1}{-i} \right)^2 \left(\frac{dq_E}{dt_E} \right)^2$$

$$-S_E[q] = \int dt_E \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{dq_E}{dt_E} \right)^2 - \frac{\omega^2}{2} q_E^2 + J_E q_E \right]$$

Suprimindo todos os índices "E" para simplificar a notação, obtemos a seguinte função de partição:

$$Z_E[J] = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int dt \left[\left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \omega^2 q^2 \right] + \int dt J(t) q(t) \right\} \quad (\text{eq. 46.2})$$

A vantagem agora é que estamos fazendo esta integral em trajetórias fechadas, por isso não há problema com bordas quando integramos por partes (compare com a pg 28):

$$\begin{aligned} Z_E[J] &= \int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_1+\beta} dt q \left[-\left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \omega^2 q \right] + \int_{z_1}^{z_1+\beta} dt J(t) q(t) \right\} = \\ &= N \exp \left\{ \frac{1}{2} \int ds \int ds' J(s) \Delta_E(s, s') J(s') \right\} \end{aligned} \quad (\text{eq. 46.3})$$

$z_1 \rightarrow -\infty$
 $z_1 + \beta \rightarrow \infty \iff \beta \rightarrow \infty$
 $J(t) \neq 0 \quad -T < t < T$
 $J(t) = 0 \quad |t| > |T|$

note que este Δ é a função de Green que soluciona o problema clássico:

$$-\frac{d^2 q_\mu}{dt^2} + \omega^2 q_\mu = J(t)$$

$$q_\mu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \Delta_\mu(t, t') J(t')$$

$$\Delta_E(s, s') \equiv \left(-\frac{d^2}{ds^2} + \omega^2\right)^{-1}(s, s') = \int \frac{dE_E}{2\pi} \frac{e^{-i E_E (s-s')}}{E_E^2 + \omega^2} \quad (\text{eq. 47.1})$$

$$\left(-\frac{d^2}{ds^2} + \omega^2\right) \Delta_E(s, s') = \int \frac{dE_E}{2\pi} \left(-(-i E_E)^2 + \omega^2\right) \frac{e^{-i E_E (s-s')}}{E_E^2 + \omega^2} = \delta(s-s')$$

Note que a integral feita da primeira para a segunda linha de 46.3 é uma Gaussiana tradicional (nenhuma exponencial complexa por ali). Além disso o propagador Euclidiano em 47.1 não tem pólos para E_E real e portanto não precisamos falar nada sobre o caminho de integração. Os polos foram movidos para o eixo complexo pela rotação de Wick:

polos de Δ_E : $E_E = \pm i \omega$

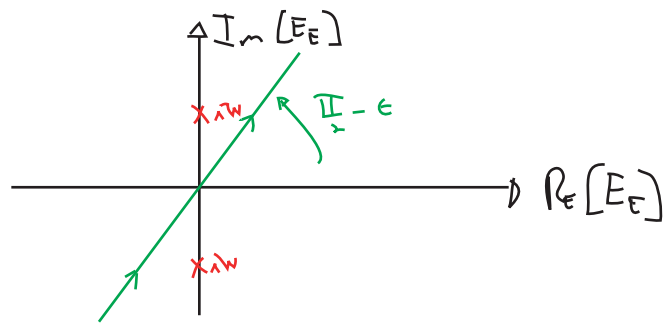
Queremos, finalmente, voltar para o espaço de Minkowski. Já sabemos que $t = -i t_E$ mas como rodamos E_E ? Primeiramente exigimos que $E t = E_E t_E$, então:

$$E \approx i E_E \approx e^{i \frac{\pi}{2}} E_E \quad E t = (i E_E)(-i t_E) = E_E t_E$$

(o que é arbitrário, mas vai garantir que ondas planas se propagem na mesma direção espacial com t ou t_E crescente quando passarmos para mais dimensões, uma vez que:

$$e^{i p_\mu x^\mu} = e^{-i(E t - \vec{p} \cdot \vec{x})} = e^{-i(E_E t_E - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

Além disso, para que a extensão analítica seja válida, não podemos cruzar os polos, portanto não podemos rodar totalmente para $E_E = -i E$ mas sim parar antes de chegar no polo:



$$E = e^{i(\frac{\pi}{2} - \epsilon)} E_E = i(E_E - i \epsilon)$$

ou

$$E_E = e^{-i(\frac{\pi}{2} - \epsilon)} E = -i(E + i \epsilon)$$

Com esta rotação temos:

$$(\text{eq. 47.1}) \Rightarrow \Delta_E(t_E = i t) = \int \frac{dE_E}{2\pi} \frac{e^{-i E_E t_E}}{E_E^2 + \omega^2} = \int \frac{i dE}{2\pi} \frac{e^{-i E t}}{E^2 - \omega^2 + i \epsilon} = \Delta_F(t)$$

$$E_E^2 = [-i(E + i \epsilon)]^2 = -(E^2 + i \epsilon E + \epsilon^2)$$

compare com o fim da pg 31 (lembrando que lá $p = p^0 = E$)

De forma que, mais uma vez, somos levados à prescrição de Feynman.

Quantização Canônica do Campo Escalar

(Peskin 2.3, Nastase 3)

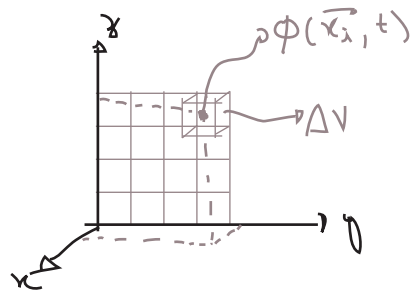
Queremos agora fazer a quantização do campos mais "simples" a disposição, o campo escalar. A lagrangeana mais geral, invariante de lorentz, para um campo escalar real é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - V(\phi, \partial^\mu \phi) \quad (\text{eq. 48.1})$$

Para generalizar a quantização para o caso dos campos precisamos primeiro obter os Brackets de Poisson da teoria. Uma vez que sabemos como fazer isto no caso de partículas (pontos), discretizaremos o espaço, definindo:

$$q_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V} \phi_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V} \phi(\vec{x}_i, t)$$

$$p_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V} \pi_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V} \pi(\vec{x}_i, t)$$



$$\frac{1}{\Delta V} \frac{\delta p_i(t)}{\delta \phi_j(t)} \xrightleftharpoons[\text{discretização}]{\text{contínuo}} \frac{\delta \int (\phi(\vec{x}_i, t), \pi(\vec{x}_i, t))}{\delta \phi(\vec{x}_j, t)}$$

$\Delta V \longleftrightarrow d^3x$

Com isso transformamos o espaço em um conjunto de coordenadas discretas, com o seguinte Bracket de Poisson:

$$\{p_i, q_j\}_{P.B.} = \sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_i} \frac{\delta q_j}{\delta p_i} - \frac{\partial p_i}{\partial p_i} \frac{\delta q_j}{\delta q_i} \right) = \sum_i \frac{1}{\Delta V} \left(\frac{\partial p_i}{\partial \phi_i} \frac{\delta q_j}{\delta \pi_i} - \frac{\partial p_i}{\partial \pi_i} \frac{\delta q_j}{\delta \phi_i} \right) = \int d^3x \left[\frac{\delta p}{\delta \phi} \frac{\delta q}{\delta \pi} - \frac{\delta p}{\delta \pi} \frac{\delta q}{\delta \phi} \right]$$

Handwritten notes: $\frac{\partial}{\partial q_i} = \frac{1}{\sqrt{\Delta V}} \frac{\partial}{\partial \phi_i}$, $\frac{\partial}{\partial p_i} = \frac{1}{\sqrt{\Delta V}} \frac{\partial}{\partial \pi_i}$. Arrows indicate the mapping from discrete to continuous variables.

$$\{\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)\}_{P.B.} = \int d^3y \left[\frac{\delta \phi(\vec{x}, t)}{\delta \phi(\vec{y}, t)} \frac{\delta \pi(\vec{x}', t)}{\delta \pi(\vec{y}, t)} - 0 \right] = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\{\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)\}_{P.B.} = \{\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)\}_{P.B.} = 0$$

relações para tempos iguais

A partir destas relações, fica fácil fazer a **quantização canônica** do campo escalar:

$$\{, \}_{P.B.} \rightarrow -\frac{i}{\hbar} [,]$$

$$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] = [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = 0$$

(eq. 49.1)

relações de comutação para tempos iguais

Note que, no caso em que $V(\phi, \partial^\mu \phi) = 0$ a equação de movimento para o campo dado pela eq. 48.1 é a equação de Klein-Gordon:

$$V(\phi, \partial_\mu \phi) = 0 \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2$$

CAMPO ESCALAR LIVRE

$$\text{eq 9.1} \Rightarrow \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi)} \right] = 0 \Rightarrow -m^2 \phi + \partial_\mu [-\partial^\mu \phi] = 0$$

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0 \quad \text{Equação de Klein-Gordon}$$

(eq. 49.2)

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{d^2}{dt^2} - \nabla^2 = \square^2 \Rightarrow (\square^2 + m^2) \phi = 0 \quad (\text{eq. 2.1})$$

Se passarmos para o espaço dos momentos:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{x} \cdot \vec{p}} \phi(\vec{p}, t) \longrightarrow \phi(\vec{p}, t) = \int d^3 x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \phi(\vec{x}, t)$$

$$\pi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{x} \cdot \vec{p}} \pi(\vec{p}, t) \longrightarrow \pi(\vec{p}, t) = \int d^3 x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \pi(\vec{x}, t)$$

note que, para o campo real: $\phi^+(x, t) = \phi(x, t)$ só é verdade se: $\phi^+(p, t) = \phi(-p, t)$
 $\pi^+(x, t) = \pi(x, t)$ $\pi^+(p, t) = \pi(-p, t)$

Eq K-G (49.2):

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{x} \cdot \vec{p}} \phi(\vec{p}, t) = 0$$

$$\nabla^2 e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}} = \vec{\nabla} \cdot (i\vec{p}) e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}} = -|\vec{p}|^2 e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}$$

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}} \left(\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + |\vec{p}|^2 + m^2 \right) \phi(\vec{p}, t) = 0 \right)$$

$$\hookrightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\vec{p}|^2 + m^2) \right] \phi(\vec{p}, t) = 0$$

K-G no espaço dos momentos

(eq. 50.1)

Esta equação tem como solução:

$$\phi(\vec{p}, t) = F(\vec{p}) e^{\mp i\omega t} \quad (\text{LEMBRE QUE } \hbar = 1)$$

$$\hookrightarrow \left((\pm i\omega)^2 + p^2 + m^2 \right) F(\vec{p}) = 0 \quad \omega^2 = \omega_p^2 \equiv |\vec{p}|^2 + m^2$$

que é justamente o comportamento de um oscilador harmônico simples. Ou seja, pelo menos na versão em que o "potencial" V é zero, cada modo do campo satisfaz uma equação de oscilador com frequência:

$$\omega_p \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \quad (\text{eq. 50.2})$$

É claro que o caso com potencial é mais complicado, mas vamos usar esta informação e definir operadores em analogia com o oscilador harmônico:

$$\begin{aligned} a(\vec{k}, t) &= \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \phi(\vec{k}, t) + \frac{i}{\sqrt{2\omega_k}} \pi(\vec{k}, t) \\ a^\dagger(\vec{k}, t) &= \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \phi^\dagger(\vec{k}, t) - \frac{i}{\sqrt{2\omega_k}} \pi^\dagger(\vec{k}, t) \end{aligned} \quad (\text{eq. 50.3})$$

Notando que: $\omega_k = \omega(|\vec{k}|)$

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left[a(\vec{p}, t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger(\vec{p}, t) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right]$$

$$\int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_p}} a^\dagger(\vec{p}, t) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} = \int \int \int \frac{(+d^3p)}{\sqrt{2\omega_p}} a^\dagger(-\vec{p}, t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} = \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_p}} a^\dagger(-\vec{p}, t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

$\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$
 $\omega_p \rightarrow \omega_p$

temos:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \left[a(\vec{p}, t) + a^\dagger(-\vec{p}, t) \right] \\ \Pi(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(-i\sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \right) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \left[a(\vec{p}, t) - a^\dagger(-\vec{p}, t) \right]\end{aligned}\quad (\text{eq. 51.1})$$

Colocando estas expressões em 49.1, obtemos as relações de comutação para os a 's:

$$\begin{aligned}[a(\vec{p}, t), a^\dagger(\vec{p}', t)] &= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \\ [a(\vec{p}, t), a(\vec{p}', t)] &= [a^\dagger(\vec{p}, t), a^\dagger(\vec{p}', t)] = 0\end{aligned}\quad (\text{eq. 51.2})$$

Checando: $[\phi(\vec{x}, t), \widehat{\Pi}(\vec{x}', t)] =$

$$\begin{aligned}&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \left(+i\sqrt{\frac{\omega_p \omega_{p'}}{\omega_p \omega_{p'}}} \right) \left(\underbrace{[a(\vec{p}, t), a^\dagger(-\vec{p}', t)]}_{\delta^3(\vec{p} + \vec{p}')} + \underbrace{[a^\dagger(-\vec{p}, t), a(\vec{p}', t)]}_{\delta^3(\vec{p} + \vec{p}')} \right) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} \\ &= i \int d^3 p \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}'} = i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\end{aligned}$$

$\vec{p}' = -\vec{p}$
 $\omega_{p'} = \omega_p$

Usando estas definições, vamos calcular o operador Hamiltoniano:

$$H = \int d^3 \vec{x} \left[\underbrace{\Pi(\vec{x}, t) \dot{\phi}(\vec{x}, t)}_{\mathcal{H}} - \mathcal{L} \right]$$

$$\widehat{\Pi}(\vec{x}, t) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}} = \frac{\delta}{\delta \dot{\phi}} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi} \dot{\phi} + \dots \right) = \dot{\phi}(\vec{x}, t)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2$$

$$H = \int d^3 x \left\{ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2} (-i)^2 \sqrt{\frac{\omega_p \omega_{p'}}{4}} [a(\vec{p}, t) - a^\dagger(-\vec{p}, t)] [a(\vec{p}', t) - a^\dagger(-\vec{p}', t)] e^{i(\vec{p} + \vec{p}')\cdot\vec{x}} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4\omega_p \omega_{p'}}} \left[a(\vec{p}, t) + a^\dagger(-\vec{p}, t) \right] \left[a(\vec{p}, t) + a^\dagger(-\vec{p}, t) \right] (\vec{\nabla} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \cdot (\vec{\nabla} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}}) \\
 & + \frac{1}{2} \frac{m^2}{\sqrt{4\omega_p \omega_{p'}}} \left[a(\vec{p}, t) + a^\dagger(-\vec{p}, t) \right] \left[a(\vec{p}, t) + a^\dagger(-\vec{p}, t) \right] e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}}
 \end{aligned}$$

= $-\vec{p}\cdot\vec{p}' e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}}$

$$H = \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}} \times$$

$$\times \left\{ \underbrace{-\frac{\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}}{4} \left[a(\vec{p}, t) - a^\dagger(-\vec{p}, t) \right] \left[a(\vec{p}', t) - a^\dagger(-\vec{p}', t) \right]}_{\text{I}} + \right.$$

$$\left. + \frac{-\vec{p}\cdot\vec{p}' + m^2}{4\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}} \left[a(\vec{p}, t) + a^\dagger(-\vec{p}, t) \right] \left[a(\vec{p}', t) + a^\dagger(-\vec{p}', t) \right] \right\}$$

II

fazemos a integral $\int d^3p' \rightarrow \int \frac{d^3p'}{2\pi^3} \delta^3(\vec{p}+\vec{p}') = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}+\vec{p}')$

$\vec{p}' = -\vec{p}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}}{4} \rightarrow -\frac{\omega_p}{4} \\ \frac{-\vec{p}\cdot\vec{p}' + m^2}{4\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}} \rightarrow \frac{\omega_p^2}{4\omega_p} = \frac{\omega_p}{4} \end{cases}$$

suprimi t só para encurtar a notação

I $\rightarrow [a(\vec{p}, t) - a^\dagger(-\vec{p}, t)] [a(-\vec{p}, t) - a^\dagger(\vec{p}, t)] = a(\vec{p})a(-\vec{p}) - a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}) - a^\dagger(-\vec{p})a(-\vec{p}) + a^\dagger(-\vec{p})a^\dagger(\vec{p})$

II $\rightarrow [a(\vec{p}, t) + a^\dagger(-\vec{p}, t)] [a(-\vec{p}, t) + a^\dagger(\vec{p}, t)] = a(\vec{p})a(-\vec{p}) + a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}) + a^\dagger(-\vec{p})a(-\vec{p}) + a^\dagger(-\vec{p})a^\dagger(\vec{p})$

$-\text{I} + \text{II} = 2a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}) + 2a^\dagger(-\vec{p})a(-\vec{p})$

posso fazer $p \rightarrow -p$ na integral

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega_p}{2} \left[a^\dagger(\vec{p}, t) a(\vec{p}, t) + a(\vec{p}, t) a^\dagger(\vec{p}, t) \right] \quad (\text{eq. 52.1})$$

E aqui fica bem claro que estamos somando sobre um conjunto infinito (e contínuo) de osciladores harmônicos. Podemos obter as dependências temporais dos operadores a :

$$i \frac{d}{dt} a(\vec{r}, t) = [a, H]$$

$$[a, a' a'^{\dagger}] = a a' a'^{\dagger} - a' \underbrace{a'^{\dagger} a}_{a} = a a' a'^{\dagger} - a' (-(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}^0 - \vec{p}^{\prime}) + a a'^{\dagger}) =$$

$$a = a(\vec{p}^0) \quad a' = a(\vec{p}^{\prime})$$

$$= \cancel{a a' a'^{\dagger}} + a' (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}^0 - \vec{p}^{\prime}) - \cancel{a' a a'^{\dagger}}$$

$$[a, a'^{\dagger} a'] = \underbrace{a a'^{\dagger} a'}_{a a'^{\dagger} a'} - a'^{\dagger} a' a = ((2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}^0 - \vec{p}^{\prime}) + a'^{\dagger} a) a' - a'^{\dagger} a' a =$$

$$= a' (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}^0 - \vec{p}^{\prime}) + \cancel{a'^{\dagger} a a'} - \cancel{a'^{\dagger} a' a}$$

$$i \frac{d}{dt} a(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{p'}}{\cancel{\omega_{p'}}} \cancel{a(\vec{p}^{\prime}, t)} \cancel{(2\pi)^3} \delta^3(\vec{p}^0 - \vec{p}^{\prime}) = \omega_p a(\vec{p}^0, t) \quad (\text{eq. 53.1})$$

Cuja solução é:

$$a(\vec{r}, t) = a_{\vec{p}} e^{-i\omega_p t}$$

$$a^{\dagger}(\vec{r}, t) = a_{\vec{p}}^{\dagger} e^{i\omega_p t} \quad (\text{eq. 53.2})$$

$$\therefore \phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} a_{\vec{p}} e^{-i\omega_p t} + e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} a_{\vec{p}}^{\dagger} e^{i\omega_p t} \right)$$

$$E_p \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \omega_p \quad \vec{p} \cdot \vec{x} = p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\vec{p}} e^{-i p x} + a_{\vec{p}}^{\dagger} e^{+i p x} \right) \Big|_{p^0 = E_p} \quad (\text{eq. 53.3})$$

$$\Pi(\vec{x}, t) = \frac{d}{dt} \phi(\vec{x}, t) \quad (\text{eq. 53.4})$$

Discretização

Para ter uma imagem física mais clara do que sistema que estamos lidando aqui, vamos imaginar uma situação onde o campo esteja restrito a um volume finito V . O efeito disto é discretizar o momento, já que em uma direção z de comprimento L_z , somente existirão modos com:

$$k_{z,n} = \frac{2\pi n}{L_z}$$

$$\text{e aí fazemos: } \int d^3 k \rightarrow \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \quad \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \rightarrow V \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$$

definimos também: $a_{\vec{k}} \rightarrow \sqrt{V(2\pi)^3} \alpha_{\vec{k}}$

de forma que: $[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \rightarrow V(2\pi)^3 [\alpha_{\vec{k}}, \alpha_{\vec{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 V \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$

$$[\alpha_{\vec{k}}, \alpha_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \quad (\text{eq. 54.1})$$

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} \left[a^\dagger(\vec{k}, t) a(\vec{k}, t) + a(\vec{k}, t) a^\dagger(\vec{k}, t) \right]$$

$$\begin{matrix} a_{\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_{\vec{k}}t} & a_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t} \end{matrix}$$

$$H = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} V (2\pi)^3 [\alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^\dagger] = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} (\alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^\dagger) \quad (\text{eq. 54.2})$$

$$\equiv \sum_{\vec{k}} h_{\vec{k}}$$

$$h_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}} \left(N_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad \text{Hamiltoniano de um oscilador de frequência } \omega_{\vec{k}}$$

$$N_{\vec{k}} \equiv \alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} \quad \text{Operador Número para o modo } \vec{k} \quad (\text{eq. 54.3})$$

Consideremos os autoestados deste operador: $N_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle = n_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle$

Vale toda a análise usual para osciladores harmônicos:

$\alpha_{\vec{k}}^\dagger$ operador "levantamento" $n_{\vec{k}} \in \mathbb{N}_+$ número de ocupação

$\alpha_{\vec{k}}$ operador "abaixamento"

$$\begin{aligned} \alpha_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle &= \sqrt{n_{\vec{k}}} |n_{\vec{k}} - 1\rangle & |n_{\vec{k}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}!}} (\alpha_{\vec{k}}^\dagger)^{n_{\vec{k}}} |0\rangle \\ \alpha_{\vec{k}}^\dagger |n_{\vec{k}}\rangle &= \sqrt{n_{\vec{k}} + 1} |n_{\vec{k}} + 1\rangle & \langle n_{\vec{k}} | n_{\vec{k}} \rangle &= \delta_{nn} \\ h_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle &= \omega_{\vec{k}} \left(n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) |n_{\vec{k}}\rangle \\ \alpha_{\vec{k}} |0\rangle &= 0 & \langle 0 | N_{\vec{k}} |0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (\text{eq. 54.4})$$

No contexto da teoria quântica de campos, usamos a terminologia:

$\alpha_{\vec{k}}^\dagger, \alpha_{\vec{k}}$ operadores de criação e aniquilação

$n_{\vec{k}}$ número de partículas

pois veremos que cada um destes modos de excitação do campo corresponde a uma partícula (de momento \vec{k})

Espaço de Fock

O espaço de Hilbert construído com os autoestados do operador número é conhecido como **Espaço de Fock**, a representação do espaço de Fock para um único oscilador é dada por:

$$\{ |n_{\vec{k}}\rangle \}$$

Como o Hamiltoniano total é dado pela soma dos Hamiltonianos de cada modo, o espaço de Hilbert é o produto direto dos espaços de cada modo:

$$|\{n_{\vec{k}}\}\rangle \in \bigotimes_{\vec{k}} \{ |n_{\vec{k}}\rangle \}$$

$$|\{n_{\vec{k}}\}\rangle = \prod_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}!}} (\alpha_{\vec{k}}^{\dagger})^{n_{\vec{k}}} |0\rangle$$

↳ mesmo vácuo para todos os modos

Ordenamento Normal

Assim como no caso do oscilador harmônico temos uma energia de modo zero para cada um dos modos permitidos:

$$\langle 0 | h_{\vec{k}} | 0 \rangle = \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2}$$

No caso do campo, **mesmo dentro de um volume finito**, a energia total dada pela soma de todos estes modos zero é infinita:

$$E = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2} = \infty$$

O que não pode ser um observável. Portanto definiremos a energia acima desta como a energia observável física do sistema e o estado em que todos os modos estão no estado fundamental fica definido como $E = 0$. Uma forma de operacionalizar esta redefinição da energia é usando **Ordenamento Normal** definido na pg 27:

$$:H: = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} (\alpha_{\vec{k}}^{\dagger} \alpha_{\vec{k}} + \underbrace{\alpha_{\vec{k}}^{\dagger} \alpha_{\vec{k}}}_{\alpha_{\vec{k}}^{\dagger} \alpha_{\vec{k}} = \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^{\dagger} - 1}) = H - \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} N_{\vec{k}}$$

(compare com 54.2)

↳ infinito subtraído

$$\langle 0 | :H: | 0 \rangle = 0$$

Nós vamos generalizar este procedimento, dizendo que somente operadores normalmente ordenados são observáveis:

$$\langle \Omega | : \hat{O} : | \Omega \rangle$$

Notamos, finalmente, que:

$$\phi \sim \left(a_{\vec{p}} e^{-i p x} + a_{\vec{p}}^{\dagger} e^{+i p x} \right) \quad \left| \begin{array}{l} \vec{p}^0 = E_{\vec{p}} \\ E_{\vec{p}} = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} > 0 \end{array} \right.$$

$$e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

Onda plana se propagando na direção $\vec{\pi}$ com frequência ω
 $\omega > 0$

No entanto o segundo termo tem o "sinal errado" em frente à evolução temporal: $a_{\vec{p}}^{\dagger} e^{+i E_{\vec{p}} t}$ por isso é comum a seguinte denominação:

$$a_{\vec{p}} e^{-i p x} = a_{\vec{p}} e^{i \vec{p} \cdot \vec{x}} e^{-i E_{\vec{p}} t} \quad \leftrightarrow \text{solução de frequência (ou energia) positiva}$$

$$a_{\vec{p}}^{\dagger} e^{+i p x} = a_{\vec{p}}^{\dagger} e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x}} e^{+i E_{\vec{p}} t} \quad \leftrightarrow \text{solução de frequência (ou energia) negativa}$$

Note, no entanto, que o operador hamiltoniano: $H = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} N_{\vec{k}} \rightarrow \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}} \underbrace{a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}}}_{N_{\vec{k}}^{\text{CONT.}}}$

só tem autovalores maiores ou iguais a zero. Portanto não há mais o problema de energia negativa (não há nenhum estado com energia menor que zero).

Interpretação de Partícula

Lembrando que a quantidade conservada quando fazemos translações espaço-temporais é o tensor energia momento: $T^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \phi)} \partial_{\nu} \phi - \mathcal{L} \delta^{\mu}_{\nu}$

E que podemos pensar nas componentes conservadas só por translações espaciais ou temporais:

$$t: H = \int T^{00} d^3 x = \int (\pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}) d^3 x = \int \mathcal{H} d^3 x$$

$$x^i: P^i = \int T^{0i} d^3 x = \int \pi \partial^i \phi d^3 x \quad \vec{P} = - \int \pi \vec{\nabla} \phi d^3 x$$

$$\vec{P} = - \int \pi \vec{\nabla} \phi d^3 x = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \vec{p} a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}} \quad (\text{eq. 56.1})$$

Isto nos mostra que o operador $a_{\vec{p}}^{\dagger}$ age no vácuo para criar um estado com momento \vec{p} e energia $E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ por isso interpretaremos estes estados como partículas de massa m

Note que definimos o **momento total do estado** em termos da **carga conservada pela invariância sob translações**, e não como o momento canonicamente conjugado.

Estatística de Bose-Einstein

Uma vez que: $[a_{\vec{k}}^+, a_{\vec{k}'}^+] = 0$ temos que:

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle &= \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \Psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) a_{\vec{k}_1}^+ a_{\vec{k}_2}^+ |0\rangle = \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \Psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) a_{\vec{k}_2}^+ a_{\vec{k}_1}^+ |0\rangle \\
 &= \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \Psi(\vec{k}_2, \vec{k}_1) a_{\vec{k}_1}^+ a_{\vec{k}_2}^+ |0\rangle
 \end{aligned}$$

comutam!

Estado qualquer definido pela função de onda $\Psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$

Vemos que este estado é simétrico sobre a troca $\vec{k}_1 \leftrightarrow \vec{k}_2$ portanto, se interpretarmos cada criação como uma partícula (e neste caso são todas idênticas) de momento k , estas estarão satisfazendo uma estatística de Bose-Einstein:

$$\Psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \Psi(\vec{k}_2, \vec{k}_1)$$

Propagador do Campo Escalar Livre

(Peskin 2.3-2.4, Nastase 4)

Vamos nos preocupar agora em achar expressões relativisticamente invariantes para as soluções da equação de Klein-Gordon e então abordar a questão da causalidade.

Vimos que, na versão discretizada, os estados são normalizados da seguinte forma (eq 54.3):

$$|n_{\vec{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}!}} (a_{\vec{k}}^+)^{n_{\vec{k}}} |0\rangle \quad \langle n|m\rangle = \delta_{mn}$$

Lembrando que a relação entre o discreto e o contínuo é:

$$\begin{cases} a_{\vec{k}} \leftrightarrow \sqrt{V(2\pi)^3} a_{\vec{k}} \\ \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \leftrightarrow V \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \end{cases}$$

$$n_{\vec{k}} = 1 \quad |1_{\vec{k}}\rangle \equiv |\vec{k}\rangle = a_{\vec{k}}^+ |0\rangle$$

Normalização no contínuo: $\langle \vec{p} | \vec{k} \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k})$

↪ não é invariante

Considere um boost na direção 3:

$$\begin{cases} p'_3 = \gamma(p_3 + \beta E_p) \\ E'_p = \gamma(E_p + \beta p_3) \\ k'_3 = \gamma(k_3 + \beta E_k) \\ E'_k = \gamma(E_k + \beta k_3) \end{cases} \Rightarrow \int \rho(x) - \rho(x_0) = \frac{1}{|\rho'(x_0)|} \delta(x - x_0)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \beta = \frac{v}{c} = v \quad \text{unidades naturais}$$

$$\delta^3(\vec{p}' - \vec{k}') = \delta^3(\vec{p}' - \vec{k}') \delta(p'_3 - k'_3)$$

$$p'_3 = p(p_3) = \sqrt{p_3^2 + \beta \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2}} \quad k'_3 = p(k_3) \quad \left(\begin{array}{l} p_3 = \nu \\ k_3 = \nu_0 \end{array} \right)$$

$$\delta^3(\vec{p}' - \vec{k}') = \delta^3(\vec{p}' - \vec{k}') \frac{1}{\frac{d p(p_3)}{d p_3} \Big|_{\vec{p}' = \vec{k}'}} \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow \vec{p}' = \vec{k}' \rightarrow E_{p'} = E_{k'} = E \end{array} \right\}$$

$$\delta^3(\vec{p}' - \vec{k}') = \delta^3(\vec{p}' - \vec{k}') \delta\left(1 + \beta \frac{dE}{d p_3}\right) \left\{ \begin{array}{l} E = \sqrt{\vec{p}'^2 + m^2} \\ \frac{dE}{d p_3} = \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}'^2 + m^2}} 2 p_3 = \frac{p_3}{E} \end{array} \right.$$

$$\delta^3(\vec{p}' - \vec{k}') = \delta^3(\vec{p}' - \vec{k}') \frac{E'}{E} (E + \beta p_3)$$

$$\delta^3(\vec{p}' - \vec{k}') = \delta^3(\vec{p}' - \vec{k}') \frac{E'}{E}$$

Fica óbvio então que o objeto: $E \delta^3(\vec{p}' - \vec{k}') = E' \delta^3(\vec{p}' - \vec{k}')$

é invariante. Por isso usaremos a **normalização relativística** a seguir:

$$\langle \vec{p}' | \vec{q}' \rangle = 2 E_{\vec{p}'} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}' - \vec{q}') \quad (\text{eq. 58.1})$$

Que, para um número arbitrário de excitações, fica:

$$\langle \{ \vec{k}_i \} | \{ \vec{q}_j \} \rangle = \sum_{\pi(j)} \prod_i 2\omega_{\vec{k}_i} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_i - \vec{q}_{\pi(j)}) \quad (\text{eq. 58.2})$$

↳ permutações de $\{ \vec{q}_j \}$

Se colocarmos um fator adicional de $\sqrt{2\omega_{\vec{k}'}}$ na normalização do estado, obtemos as relações acima:

$$|n_{\vec{k}'}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}'!}}} \left(\alpha_{\vec{k}'}^{\dagger} \right)^{n_{\vec{k}'}} |0\rangle \quad \xrightarrow{\text{redefino}} \quad |n_{\vec{k}'}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}'!}}} \left(\sqrt{2\omega_{\vec{k}'}} \alpha_{\vec{k}'}^{\dagger} \right)^{n_{\vec{k}'}} |0\rangle$$

$$|\{ n_{\vec{k}'} \} \rangle = \prod_{\vec{k}'} \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}'!}}} \left(\sqrt{2\omega_{\vec{k}'}} \alpha_{\vec{k}'}^{\dagger} \right)^{n_{\vec{k}'}} |0\rangle$$

Que passando para o contínuo:

$$|\{ \vec{k}_i \} \rangle = \prod_{\vec{k}'} \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}'!}}} \left(\sqrt{2\omega_{\vec{k}'}} \alpha_{\vec{k}'}^{\dagger} \right)^{n_{\vec{k}'}} |0\rangle \quad \xrightarrow{\text{redefino}} \quad \left[\prod_{\vec{k}'} \left(\sqrt{V(2\pi)^3} \right)^{n_{\vec{k}'}} \right] |\{ n_{\vec{k}'} \} \rangle \quad (\text{eq. 58.3})$$

$$|\vec{p}'\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}'}} \alpha_{\vec{p}'}^{\dagger} |0\rangle$$

Temos também que tomar cuidado em mudar esta normalização em todos os lugares:

$$\hat{1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} |p\rangle \langle p|$$

Transformação de Lorentz: $|\Lambda \vec{p}\rangle = U(\Lambda) |\vec{p}\rangle$ \leftarrow unitária $\langle \Lambda \vec{q} | \Lambda \vec{p} \rangle = \langle \vec{q} | \vec{p} \rangle$

Importante: note que agora que quantizamos o campo (transformando o mesmo em um operador) o requisito para que ele seja ESCALAR muda:

$$\phi'_\alpha(x' = \Lambda x) = R(\Lambda) \phi_\alpha(x) \Rightarrow \phi_\alpha(x) \xleftrightarrow{\text{equivalência}} \langle \Psi | \hat{\phi}(x) | \Psi \rangle$$

$$\parallel \phi'_\alpha(x) \xleftrightarrow{\text{equivalência}} \langle \Psi | U^\dagger(\Lambda) U(\Lambda) \hat{\phi}(x) U(\Lambda) U^\dagger(\Lambda) | \Psi \rangle$$

$$|\Lambda \vec{p}\rangle = \sqrt{2E_{\Lambda p}} a_{\Lambda \vec{p}}^\dagger |0\rangle = U(\Lambda) \sqrt{2E_p} a_p^\dagger \overset{U^\dagger(\Lambda)U(\Lambda)}{|0\rangle} \xrightarrow{U(\Lambda)|0\rangle = |0\rangle}$$

$$U(\Lambda) a_{\vec{p}}^\dagger U^\dagger(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda p}}{E_p}} a_{\Lambda \vec{p}}^\dagger$$

 (eq. 59.1)

Outro objeto que gostaríamos de ter em uma forma explicitamente relativística é a expansão do campo escalar:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{+ipx}) \Big|_{p^0=E_p} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sqrt{2} (\sqrt{E_p} a_{\vec{p}} e^{-ipx} + \sqrt{E_p} a_{\vec{p}}^\dagger e^{+ipx}) \Big|_{p^0=E_p}$$

$= U^\dagger(\Lambda) \sqrt{E_p} a_{\vec{p}}^\dagger U(\Lambda)$

Para que: $\phi(x) = U^\dagger(\Lambda) \phi'(x') U(\Lambda)$ este pedaço deve ser invariante

De fato:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 - m^2) \Big|_{p^0 > 0}$$

só tenho invariantes

$$\begin{aligned} \delta(p^2 - m^2) &= \delta(+p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2) = \delta(p_0^2 - E_p^2) \\ \delta(p(p^0) - p(E_p)) &= \frac{1}{|p'(p^0)|} \delta(p^0 - E_p) = \frac{1}{2p^0} \delta(p^0 - E_p) \end{aligned}$$

o que mostra que esta é uma integral no tri-momento invariante de Lorentz, de forma que:

$$f(p) \xrightarrow{\text{Lorenz}} f(p) \Rightarrow \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{f(p)}{2E_p} \rightarrow \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{f(p)}{2E_p}$$

Podemos enfim escrever:

$$\phi(x) \equiv \phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 - m^2) \Big|_{p^0 > 0} (\sqrt{E_p} a_{\vec{p}} e^{-ipx} + \sqrt{E_p} a_{\vec{p}}^\dagger e^{+ipx}) \Big|_{p^0 = E_p}$$

(eq. 59.2)

redundante pois é garant. pela $\delta(p^2 - m^2)$

Finalmente consideremos:

$$\phi(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{p}\rangle$$

$[\hat{a}_p, \hat{H}] = \omega_p \hat{a}_p$
 $\hat{H} \hat{a}_p = \hat{a}_p (\hat{H} - E_p)$
 $\hat{H} \hat{a}_p^\dagger = \hat{a}_p^\dagger (\hat{H} + E_p)$
 $e^{-i\hat{H}t} \hat{a}_p e^{i\hat{H}t} = \hat{a}_p e^{+iE_p t}$
 $e^{-i\hat{H}t} \hat{a}_p^\dagger e^{i\hat{H}t} = \hat{a}_p^\dagger e^{-iE_p t}$

operador na representação de Schödinger, basta partir de 59.2 e usar $\phi_{\vec{x}}(\vec{x}) = e^{-i\hat{H}t} \phi_{\vec{x}}(\vec{x}) e^{+i\hat{H}t}$ lembrando que:

É uma superposição de vários estados de uma partícula (cada um deles com momento bem definido), muito similar aos auto-estados da posição em MQ (a diferença vem do fator $1/E_p$). De fato:

$$\langle 0 | \phi(\vec{x}) | \vec{p} \rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{p'}} e^{+i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

"< x |" $2E_{p'} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$

Da mesma forma que na MQ tínhamos $\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle \sim e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$

Por isso podemos interpretar esta função como a função de onda no espaço das posições da partícula criada com momento p , e dizemos que $\phi(x)$ cria uma partícula na posição x .

Campo Escalar Complexo

Para entender melhor a propagação (a evolução temporal) destes estados, nós passaremos à quatização do campo escalar complexo:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* \phi - U(|\phi|^2)$$

Esta Lagrangeana é simétrica sobre: $\phi \rightarrow \phi e^{i\alpha}$ ↳ NÚMERO

que é uma simetria **U(1) Global**. Há várias formas de falar sobre ϕ : dizemos que ϕ é "carregado sobre U(1) Global", "tem carga de U(1) global" ou se "transforma sobre U(1) global".

Notem que temos um fator 1/2 faltando aí: $\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \leftrightarrow \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^*$

Isso porque um campo complexo tem dois graus de liberdade e trataremos ϕ e ϕ^* como campos independentes (poderíamos usar $\phi_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Re}(\phi)$ e $\phi_I = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Im}(\phi)$, mas é mais simples trabalhar com ϕ e ϕ^*)

EOM FOR ϕ : $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi^* = -\frac{\partial U}{\partial \phi}$

FOR ϕ^* : $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = -\frac{\partial U}{\partial \phi^*}$

Seguimos um procedimento análogo ao do campo real, só que agora com o dobro dos graus de liberdade:

$$\phi(\vec{x}, t) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left[a_+(\vec{p}, t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_-(\vec{p}, t) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right]$$

$$\phi^\dagger(\vec{x}, t) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left[a_+^\dagger(\vec{p}, t) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_-^\dagger(\vec{p}, t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right] \quad (\text{eq. 60.1})$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}(\vec{x}, t) &\equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(-i\sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \right) \left[a_-(\vec{p}, t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_+^\dagger(\vec{p}, t) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right] \\ \tilde{\Pi}^\dagger(\vec{x}, t) &\equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(i\sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \right) \left[a_+^\dagger(\vec{p}, t) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_-(\vec{p}, t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right]\end{aligned}\quad (\text{eq. 61.1})$$

Podemos repetir todo o procedimento do campo real para mostrar que que a dependência temporal é a mesma e que:

$$\omega_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

$$[a_\pm(\vec{p}, t), a_\pm^\dagger(\vec{p}', t)] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

(qualquer outro comutador é zero)

A carga conservada pela simetria U(1) é (exercício):

$$Q = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\underbrace{a_{+\vec{k}}^\dagger a_{+\vec{k}}}_{N_{+\vec{k}}} - \underbrace{a_{-\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}}_{N_{-\vec{k}}} \right]$$

$N_{+\vec{k}}$

$N_{-\vec{k}}$

→ Número de partículas com carga negativa

→ Número de partículas com carga positiva

$a_+^\dagger \rightarrow$ cria carga +

$a_-^\dagger \rightarrow$ cria carga -

$a_+ \rightarrow$ aniquila carga +

$a_- \rightarrow$ aniquila carga -

$\phi \rightarrow$ aniquila carga + e cria carga - (de qualquer forma ele diminui a carga em 1)

$\phi^\dagger \rightarrow$ aniquila carga - e cria carga + (de qualquer forma ele aumenta a carga em 1)

Temos dois estados distintos de uma partícula: $|p, +\rangle \sim a_+^\dagger |0\rangle$
 $|p, -\rangle \sim a_-^\dagger |0\rangle$

ambos tem funções de onda de uma partícula, de mesma massa m e cargas opostas. Assim introduzimos o conceito de **antipartícula** e vemos que o mesmo campo complexo descreve tanto a partícula quanto a antipartícula, de forma indissociável (pense quão mais elegante isto é do que a história do mar de Dirac). Ademais, para este campo:

$$\vec{P} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{k} [N_{+\vec{k}} + N_{-\vec{k}}]$$

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k [N_{+\vec{k}} + N_{-\vec{k}}]$$

De forma que o momento e a energia (que é positiva) se comportam como esperaríamos de dois conjuntos de partículas (só a carga é subtraída). O campo real pode ser visto como um caso particular, onde as partículas são a própria antipartícula (já que tem carga zero).

Consideremos agora o objeto:

$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$
 cria um estado em y
 aniquila um estado em x



$\langle q', t' | q, t \rangle$
 $(q, t) \rightarrow (q', t')$

$y^\mu = (t_y, \vec{y}) \rightarrow x^\mu = (t_x, \vec{x})$
 Note que esta é a função de dois pontos da teoria (compare com a pg 21 - aqui os estados "fixos" $|q\rangle$ e $|q'\rangle$ são o vácuo da teoria em um tempo não especificado - que mais tarde veremos ser infinito passado e infinito futuro)

Note que: $\langle q', t' | q, t \rangle = \langle q' | e^{iH(t-t')} | q \rangle$ (pg 15)

O que é o mesmo objeto que calculamos na pg 3:
 $U(t) = \langle \vec{x} | e^{-iHt} | \vec{x}_0 \rangle \quad \left(\begin{matrix} y = \vec{x} & q = \vec{x}_0 \\ t' = t & t = 0 \end{matrix} \right)$

E que mostramos ter problemas com probabilidade não nula para propagação fora do cone de luz.

Voltemos por um instante para o campo real: $\phi^+(x) = \phi(x)$

53.3 $\Rightarrow \phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx}) \Big|_{p^0 = E_p}$

$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \sim \langle 0 | (a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx}) (a_{\vec{q}} e^{-iqy} + a_{\vec{q}}^\dagger e^{iqy}) | 0 \rangle =$
 $\langle 0 | a_{\vec{p}}^\dagger = 0 \quad a_{\vec{q}} | 0 \rangle = 0$

$= \langle 0 | a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger | 0 \rangle e^{-ipx + iqy}$
 $\hookrightarrow a a^\dagger = [a, a^\dagger] + a^\dagger a$
 $(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$
 $\langle 0 | a^\dagger a | 0 \rangle = 0$

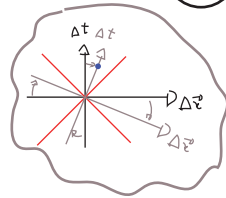
$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) e^{-ipx + iqy}$
 $\hookrightarrow \vec{p} = \vec{q} \Rightarrow E_p = E_q, p_0 = q_0$

$D(x-y) \equiv \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p}$ (eq. 62.1)

Vamos ver o que acontece com este objeto sobre transformações de Lorentz. Temos que analisar dois casos:

- (1) $(x-y)$ é tipo-tempo $\rightarrow (x-y)^2 > 0$ dentro do cone de luz
- (2) $(x-y)$ é tipo-espaco $\rightarrow (x-y)^2 < 0$ fora do cone de luz

No caso (1) (tipo-tempo), podemos escolher um referencial em que: $\begin{cases} t = t_x = t_y \\ \vec{x} - \vec{y} = 0 \end{cases}$



E fazer a integral, usando: $d^3p = d\Omega p^2 dp$

$$p = \sqrt{E^2 - m^2}$$

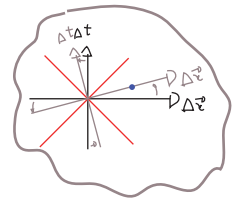
$$\frac{dE}{dp} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \Rightarrow \frac{p dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} = dE \Rightarrow \frac{p^2 dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} = \sqrt{E^2 - m^2} dE$$

$$D(x-y) = \int d\Omega \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-iE_p t} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dE \sqrt{E^2 - m^2} e^{-iEt} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-imt}$$

método da fase estacionária (ver material adicional)

A probabilidade é oscilatória (não vai a zero), mas como estamos olhando $\vec{x} = \vec{y}$, isto não é um problema.

No caso (2) (tipo-espaço), podemos escolher um referencial em que: $\begin{cases} t_x = t_y \\ \vec{x} - \vec{y} = \vec{r} \end{cases}$

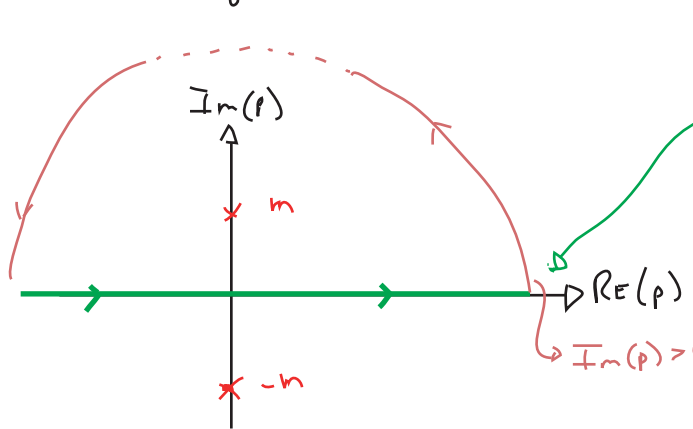


Neste caso:

$$D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} = 2\pi \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2E_p (2\pi)^3} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{i p r \cos\theta} =$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2E_p (2\pi)^3} \frac{e^{i p r} - e^{-i p r}}{i p r} = \frac{-i}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} p dp \frac{e^{i p r}}{\sqrt{p^2 + m^2}}$$

POLOS: $|\vec{p}| = \pm i m$



$$Im(p) > 0 \Rightarrow e^{i p r} = e^{i Re(p) r} e^{-Im(p) r} \rightarrow 0$$

$$D(x-y) = 2\pi i \times \left(\frac{i}{(2\pi)^2 r} \right) (i m) e^{-m r} = \frac{i m}{4\pi^2 r} e^{-m r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{-m r}$$

(muito fora do cone de luz)

Ops! Parece que temos (qualitativamente) o mesmo problema que antes! Acontece que ainda não definimos apropriadamente os observáveis desta teoria de campos. Será que este problema afeta quantidades observáveis? Veremos em breve que o que realmente importa são comutadores

do tipo: $[\phi(x), \phi(y)]$

(outra forma de pensar é a de que estamos construindo uma teoria quântica e ainda não definimos bem qual tipo de experiência ou observável queremos descrever. Então, por enquanto, estamos apenas verificando quais objetos na teoria violam causalidade ou não, e depois passaremos ao trabalho de mostrar quais destes objetos que aparecem nas grandezas observáveis)

Notemos então que:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \left[(a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx}), (a_{\vec{q}} e^{-iqy} + a_{\vec{q}}^\dagger e^{iqy}) \right]$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(e^{-ip(x-y)} - e^{-ip(y-x)} \right) = D(x-y) - D(y-x)$$

$e^{ipx+iqy} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] + e^{-ipx-iqy} [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{q}}]$

 $(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}-\vec{q})$ $-(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}-\vec{q})$

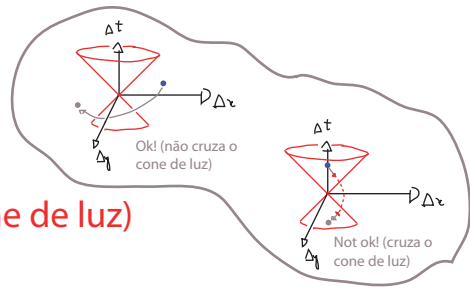
Note que o comutador de dois campos (operadores) é uma função, por isso: $\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle [\phi(x), \phi(y)]$

Note também que é a primeira vez que estamos falando em comutadores para tempos diferentes, veja a eq. 49.1

Veja que, para separações **tipo-espaço**: $(x-y) = (0, \vec{x} - \vec{y})$ e podemos fazer uma rotação $x-y \rightarrow -(x-y)$ que é uma transformação de Lorentz. Acontece que D é um invariante por transformações de Lorentz e portanto:

$$(x-y)^2 < 0 \rightarrow D(x-y) = D(y-x)$$

$$\therefore [\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad \text{(fora do cone de luz)}$$



Por outro lado, para separações **tipo-tempo** temos: $\begin{cases} (x-y) = (t_x - t_y, 0) \\ (y-x) = (t_y - t_x, 0) \end{cases}$

e não há transformação de Lorentz que leve um vetor no outro (de fato seria necessária uma transformação discreta, a inversão temporal), logo:

$$(x-y)^2 > 0 \rightarrow D(x-y) \neq D(y-x)$$

$$\therefore [\phi(x), \phi(y)] \neq 0 \quad \text{(dentro do cone de luz)}$$

Esse resultado é importantíssimo. Ele mostra que, nestes comutadores, a contribuição que causaria violações de causalidade na transição de $x^\mu \rightarrow y^\mu$ é cancelada por uma outra transição na direção oposta $y^\mu \rightarrow x^\mu$ (**inclusive no eixo temporal**). Note também que fizemos esta conta para um campo escalar real, cujas partículas (excitações) são a **própria anti-partícula**, e que a contribuição que caminha na direção contrária também poderia ser lida como uma **solução de frequência negativa, andando na direção certa $x^\mu \rightarrow y^\mu$** .

Para deixar isto mais claro, vamos olhar estes comutadores com mais cuidado.

Propagador de Klein-Gordon

Considere o número complexo: $[\phi(x), \phi(y)] = \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle =$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left[e^{-i p(x-y)} - e^{+i p(x-y)} \right] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2E_p} e^{-i p(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p} + \frac{1}{-2E_p} e^{-i p(x-y)} \Big|_{p^0 = -E_p} \right]$$

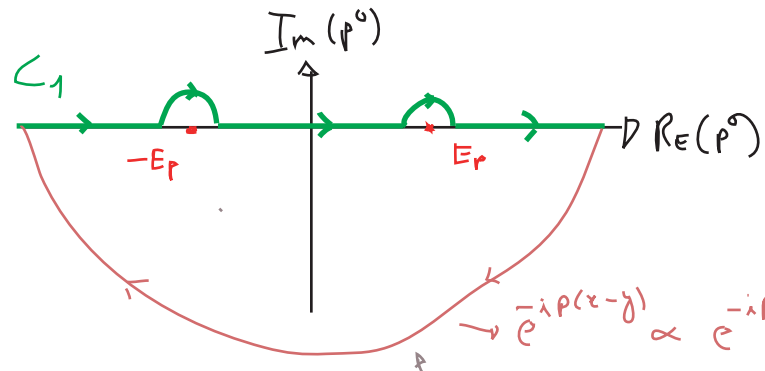
$p^0 = E_p \Rightarrow \bar{p}^0 = -E_p$
 $\bar{p}^0 \Rightarrow -p^0$
 $e^{+i p(x-y)} \Rightarrow e^{-i p(x-y)}$

Transições na mesma direção no tempo
 (em ambos tempos: $e^{-i p^0 (t_x - t_y)}$)

É possível reescrever isto em termos de uma integral em p^0 :

$x^0 > y^0 \Rightarrow [\phi(x), \phi(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int_{C_1} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-i p(x-y)}$

POLOS: $(p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 = 0$
 $-E_p^2$
 $p^0 = \pm E_p$



$e^{-i p(x-y)} \propto e^{-i p^0 (x^0 - y^0)} \propto e^{-\text{Im}(p^0) (x^0 - y^0)}$
 $\text{Im}(p^0) < 0 \rightarrow 0$

a curva está no sentido horário

$$\int_{C_1} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-i p(x-y)} = - \left(\text{RES}(E_p) + \text{RES}(-E_p) \right) = \frac{1}{2E_p} e^{-i p(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p} - \frac{1}{2E_p} e^{+i p(x-y)} \Big|_{p^0 = -E_p}$$

$p^2 - m^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 = (p^0)^2 - E_p^2 = (p^0 - E_p)(p^0 + E_p)$

$\frac{-1}{p^0 - E_p} \frac{1}{p^0 + E_p} e^{-i p(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p} \Rightarrow -\frac{1}{2E_p} e^{-i p(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p}$
 $\frac{-1}{p^0 + E_p} \frac{1}{p^0 - E_p} e^{-i p(x-y)} \Big|_{p^0 = -E_p} \Rightarrow \frac{1}{2E_p} e^{+i p(x-y)} \Big|_{p^0 = -E_p}$

Esta mesma integral $\left(\int_{C_1} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-i p(x-y)} \right)$ se calculada para $x^0 < y^0$ dá zero. Isto porque seremos forçados a fechar o contorno por cima, sem pegar nenhum polo.

$e^{-i p(x-y)} \propto e^{-i p^0 (x^0 - y^0)} \propto e^{-\text{Im}(p^0) (y^0 - x^0)}$
 $\text{Im}(p^0) > 0 \rightarrow 0$

Assim, definiremos o **propagador retardado**:

$$D_R(x-y) \equiv \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_{c_1} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-i p(x-y)} \quad (\text{eq. 66.1})$$

igualdade garantida pela função θ

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-i p(x-y)} \quad (\text{eq. 66.2})$$

Fazendo uma transformada de Fourier, temos:

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} D_R(p) \Rightarrow D_R(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}$$

Considere o operador de Klein-Gordon: $\mathcal{O}_{KG}(x) = (\square^2 + m^2) = (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)$

mostramos que (eq 50.1) no espaço dos (tri-)momentos: $\mathcal{O}_{KG}(t, \vec{p}) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \vec{p}^2 + m^2 \right)$

de forma análoga, poderíamos mostrar que: $\mathcal{O}_{KG}(p) = (p^2 - m^2)$

Vemos então que: $\mathcal{O}_{KG}(p) D_R(p) = i$ (eq. 66.3)

Voltando para as posições:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} \mathcal{O}_{KG}(p) D_R(p) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} \delta(x-y)$$

$$(p^2 - m^2) e^{-i p(x-y)} = (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2) e^{-i p(x-y)}$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) D_R(x-y) = -i \delta(x-y) \quad (\text{eq. 66.4})$$

(quer sejam derivadas em x ou y, o resultado é o mesmo)

O que mostra que este **propagador retardado** é uma **função de Green** do operador de KG.

De forma totalmente análoga, poderíamos definir o **propagador avançado** usando um contorno que passasse abaixo de ambos os polos. Este seria zero para $x^0 > y^0$ e seria também uma função de Green do operador de KG.

Propagador de Feynman

Consideremos agora uma forma diferente de definir o caminho no plano complexo. Ao invés de deformar o caminho no eixo real de p^0 , deslocamos um pouco os polos. Além disso passamos "por cima" (eixo imaginário positivo) de um deles e "por baixo" do outro.



$$D_F(x-y) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)} \quad (\text{eq. 67.1})$$

o caminho para integração em p^0 é simplesmente o eixo real
 a informação da posição dos polos em relação ao caminho está aqui

não é o mesmo ϵ , mas é um número pequeno > 0

$$p^2 - m^2 + i\epsilon = (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon = (p^0 + \underbrace{E_p}_{E_p} - \frac{i\epsilon}{2}) (p^0 - \underbrace{E_p}_{E_p} + \frac{i\epsilon}{2})$$

Assim como no caso anterior, ao fazer a integral em p^0 , temos que decidir como fechar o caminho de integração.

- $x^0 > y^0 \Rightarrow e^{-i p(x-y)} \sim e^{i \text{Im}(p^0)(x^0 - y^0)} \xrightarrow{\text{Im}(p^0) \rightarrow -\infty} 0$ Fechamos por baixo (C_-)
- $x^0 < y^0 \Rightarrow e^{-i p(x-y)} \sim e^{i \text{Im}(p^0)(x^0 - y^0)} \xrightarrow{\text{Im}(p^0) \rightarrow +\infty} 0$ Fechamos por cima (C_+)

$x^0 < y^0$
 $D_F(x-y) = 2\pi i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{i}{-2E_p + i\epsilon} e^{-i p(x-y)} \Big|_{p^0 = -E_p} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i p(x-y)} \Big|_{p^0 = -E_p} =$
 $= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{+i E_p(x^0 - y^0)} e^{-i \vec{p}(\vec{x} - \vec{y})} = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i p(y-x)} \Big|_{p^0 = E_p} = D(y-x)$
 $x^0 > y^0$
 $D_F(x-y) = -2\pi i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{i}{2E_p - i\epsilon} e^{-i p(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p} = D(x-y)$
 (eq. 62.1)

$$\therefore D_F(x-y) = \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \Theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle$$

importante notar que o propagador de Feynman não é causal (ele é muito útil, mas não estará diretamente ligado aos observáveis da teoria), isto é uma correlação e não uma propagação de informação.

$$D_F(x-y) = \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle \quad (\text{eq. 68.1})$$

$$(\not{\partial}^n \not{\partial}_n + m^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(i)(-p^2 + m^2)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)}$$

$$(\not{\partial}^n \not{\partial}_n + m^2) D_F(x-y) = -i \not{\Delta}(x-y) \quad (\text{eq. 68.2})$$

E o campo escalar complexo? Muitas das expressões acima são diretamente generalizáveis e não adicionam nada de novo. A questão da causalidade, no entanto, é interessante. No caso do campo complexo:

$\phi \rightarrow$ aniquila carga + e cria carga -

$\phi^\dagger \rightarrow$ aniquila carga - e cria carga +

Os comutadores de interesse serão: $[\phi(x), \phi^\dagger(y)]$

$$\int \begin{cases} \langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle & \begin{array}{c} + \\ \xrightarrow{\quad} \\ y \quad x \end{array} \\ -\langle 0 | \phi^\dagger(y) \phi(x) | 0 \rangle & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ x \quad y \\ - \end{array} \end{cases}$$

O resultado é que teremos um termo representando uma partícula de carga positiva fazendo a transição de $y^\mu \rightarrow x^\mu$ menos um outro representando uma carga negativa na direção oposta $x^\mu \rightarrow y^\mu$ (que também pode ser interpretada como uma carga positiva e frequência negativa andando na direção certa $y^\mu \rightarrow x^\mu$). Estas duas contribuições se cancelam exatamente fora do cone de luz, mas não dentro dele. Isto deixa bem claro que a teoria precisa de antipartículas com a mesma massa e carga oposta (na verdade todos os números quânticos) para ser causal.

O próximo passo é tratar o campo escalar na presença de um potencial, o campo escalar interagente, mas antes vamos ver como obtemos observáveis desta teoria.



Seções de Choque e Matriz S

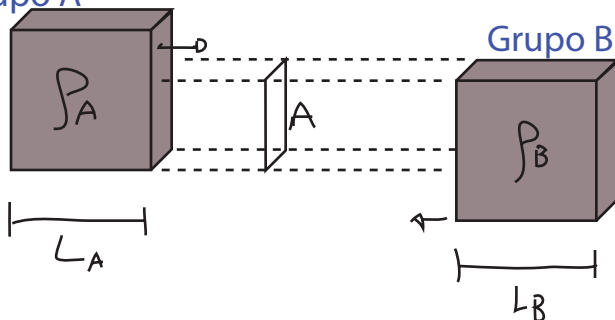
(Nastase 19; Peskin 4.5)

Chegamos em fim ao ponto em que formalizaremos a conexão entre as funções de n-pontos das teorias de campos com espalhamentos envolvendo estados assintóticos com n partículas. Começamos com a idéia por trás do que esperamos observar em experimentos envolvendo partículas ou quasi-partículas:

Seção de Choque

A situação que temos em mente é um espalhamento entre dois “amontoados” de partículas (ou quasi-partículas, enfim, excitações do campo), quer seja um projétil atirado em um alvo ou a colisão de dois objetos (o que é o mesmo, dependendo de referencial). Cada um destes grupos tem um número grande de partículas e dimensões finitas:

Grupo A

 $\rho_A, \rho_B \rightarrow$ densidade numéricas $A \rightarrow$ área de impacto $L_A, L_B \rightarrow$ comprimento ao longo da direção do impacto

Assumindo que ambos os grupos são rarefeitos e que as interações internas são desprezíveis, é razoável dizer que o número total de colisões (eventos) é proporcional a todas as grandezas definidas acima:

$$\# \text{EVENTOS} \propto \rho_A L_A \rho_B L_B A$$

A esta “constante” de proporcionalidade damos o nome de **seção de choque**:

$$\sigma \equiv \frac{\# \text{EVENTOS}}{\rho_A L_A \rho_B L_B A} \quad (\text{eq. 69.1})$$

Que tem dimensão de área: $[\sigma] = \frac{1}{L^{-3} L L^{-3} L L^2} = L^2$

E pode ser interpretada como o “tamanho de interação” da partícula, ou seja, a área em torno do “alvo” na qual um “projétil” seria espalhado (note, no entanto, que isto depende também do projétil). Outra forma de ver como devemos definir a seção de choque é pensando em um modelo clássico, o espalhamento por um potencial $V(r) = \frac{Ze^2}{r}$

Neste caso temos apenas um alvo, pontual, produzindo o potencial. Se temos um feixe de partículas sendo lançado neste alvo o número de espalhamentos por unidade de tempo é proporcional ao fluxo:

$$\text{Fluxo} \leftarrow \phi_0 = \frac{\Delta N_{\text{in}}}{A \cdot \Delta t} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \# \text{ partículas incidentes} \\ \rightarrow \text{unidade. de tempo} \\ \rightarrow \text{unidade. de área} \end{array} \quad \Delta N_{\text{EV}} \leftrightarrow \# \text{ partículas espalhadas (eventos)}$$

$$\frac{\Delta N_{EV}}{\Delta t} \propto \phi_0$$

E a proporcionalidade entre os dois vai ser, de novo, a seção de choque:

$$\sigma = \frac{\Delta N_{EV} / \Delta t}{\phi_0} = \frac{\Delta N_{EV}}{\underbrace{\Delta N_{IN} / A}_{n_B \text{ densidade por área}}} = \frac{\Delta N_{EV}}{n_B} \quad (\text{eq. 70.1})$$

(unidades de área, consistentemente)

Também podemos escrever:

$$\phi_0 = \frac{\Delta N_{IN}}{A \cdot \Delta t} = \frac{\rho_B (\underbrace{v \Delta t}_{\text{velocidade relativa}}) A}{A \cdot \Delta t} = \rho_B \cdot v$$

volume incidente em um tempo Δt

Podemos então considerar o caso de N alvos independentes onde $N = \int_A L_A A$ então a seção de choque **por alvo** (e essa é a definição de seção de choque) é:

$$\sigma = \frac{\Delta N_{EV} / \Delta t}{\phi_0 N} = \frac{\Delta N_{EV}}{\underbrace{\rho_B (v \Delta t)}_{L_B} \rho_A L_A A} = \frac{\Delta N_{EV}}{\rho_B L_B \rho_A L_A A} \quad \text{como vimos antes}$$

A seção do choque definida acima é chamada de **Seção de Choque Total**, pois mede a intensidade do espalhamento sem colocar condições sobre a energia das partículas espalhadas nem o seu momento (o que inclui a direção em que foram espalhadas). Tipicamente tanto a energia quanto o momento (ou no mínimo a direção) são medidos em experimentos e muita informação física pode ser tirada daí sobre a interação que está gerando os espalhamentos. Para um dado modelo estamos interessados em saber por exemplo, qual é a taxa de espalhamentos em uma certa direção, ou para estados finais com energia e momento acima de um certo valor. A grandeza que nos permite obter estas distribuições é a **Seção de Choque Diferencial**:

$$\frac{d\sigma}{d^3p_1 \dots d^3p_n}$$

↪ momentos dos estados finais

O exemplo mais útil é o espalhamento $2 \rightarrow 2$ (duas partículas iniciais e duas finais, elástico ou inelástico). Nesse caso temos dois estados finais, logo dois **tri-momentos**¹. Tenho quatro deltas de Dirac (da conservação total de momento e energia), o que me deixa com duas variáveis independentes, que posso escolher como sendo dois ângulos θ (de 0 a π em relação ao momento inicial / direção do feixe) e ϕ (azimutal, vai de 0 a 2π em torno do momento inicial). Estes dois ângulo definem um ângulo sólido Ω , e é comum definir:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

¹Está embutida a suposição (razoável) de que os estados finais estão "on-shell" (vale a relação relativística entre momento e energia), de forma que a energia não é livre uma vez que conhecemos o momento. Ainda precisamos provar que os estados assintóticos na teoria interagente têm essa propriedade.

Taxa de Decaimento

Outro exemplo de interesse é o de processos $1 \rightarrow n$, onde começamos com uma partícula

instável que decaí em um numero maior de outras partículas. Dada uma amostra de partículas deste tipo, o número de decaimentos por unidade de tempo vai ser proporcional ao número de partículas na amostra: (mais uma vez assumindo que a amostra seja rarefeita ou com pouca interação, para evitar reações em cadeia)

$$\frac{\# \text{DECAIMENTOS}}{\Delta t} \propto \# \text{PARTICULAS}$$

Definimos então:

$$\Gamma \equiv \frac{\# \text{DECAIMENTOS}}{\Delta t \# \text{PARTICULAS}} = \frac{dN}{N dt}$$

Taxa (ou Largura) de Decaimento
 (eq. 71.1)

Uma mesma partícula pode ter vários decaimentos possíveis, como larguras diferentes em cada um destes canais. A vida média da partícula, neste caso, é dada por:

$$\tau = \frac{1}{\sum_i \Gamma_i}$$

 (eq. 71.2)
soma sobre os canais

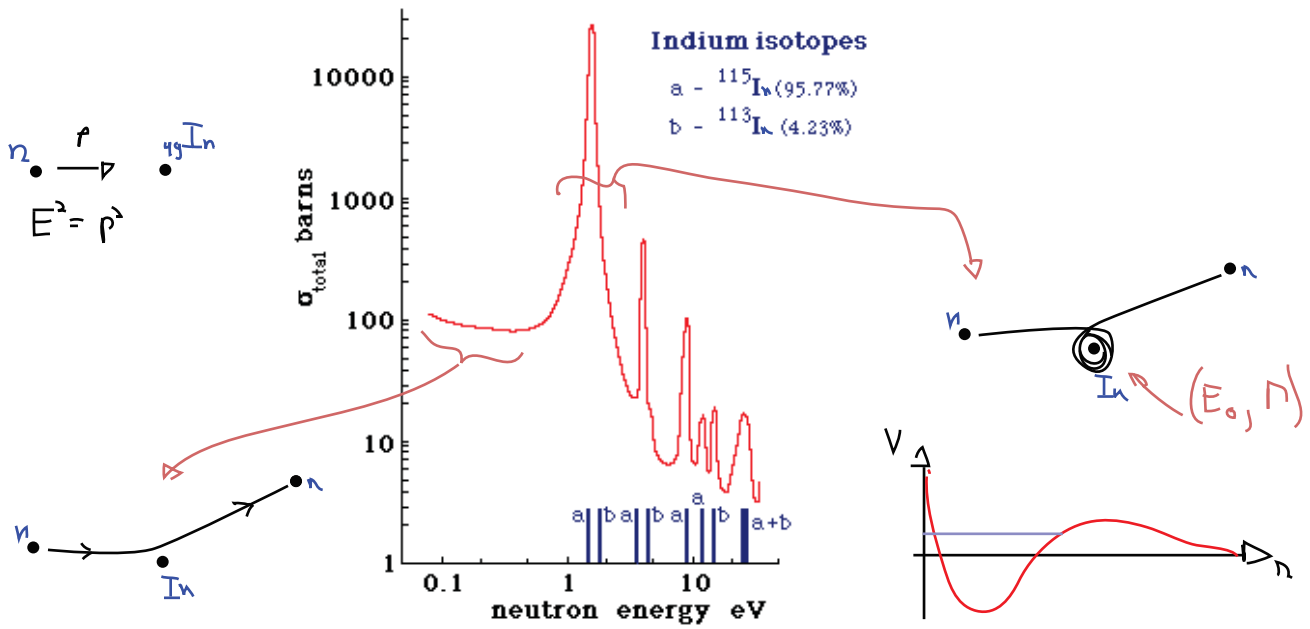
Sabemos que estados atômicos ou nucleares instáveis (ressonâncias) aparecem, segundo a MQ não relativística, como distribuições de Breit-Wigner no espalhamento, cuja amplitude é:

$$f(E) \propto \frac{1}{E - E_0 + i\Gamma/2}$$

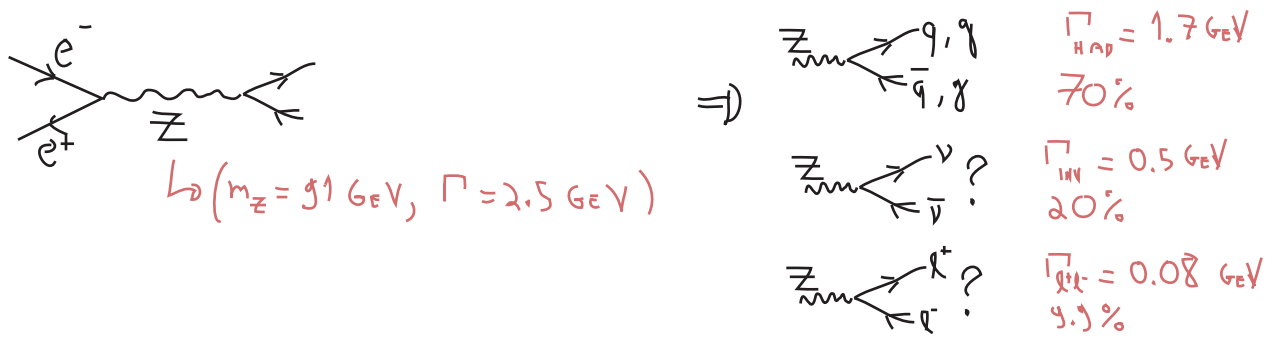
e (densidade de) probabilidade:

$$\sigma \propto \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$
 Distribuição de Breit-Wigner
 (eq. 71.3)

energia do espalhamento no centro de massa Pico da distribuição Largura



Em espalhamentos relativísticos o mesmo ocorre, as partículas iniciais podem se combinar para formar estados instáveis, que então decaem em outros, por exemplo:



Na amplitude de espalhamento isso vai aparecer como uma generalização relativística da distribuição de Breit-Wigner, lembrando que uma partícula em movimento relativístico vai ter uma taxa de decaimento (por conta da dilatação temporal): $\frac{m}{E_p} \Gamma$

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i m \Gamma} \approx \frac{1}{2 E_p (p^0 - E_p + \frac{i m}{E_p} \frac{\Gamma}{2})}$$

$p^2 \sim m^2$
 $p^0 \sim E_p$

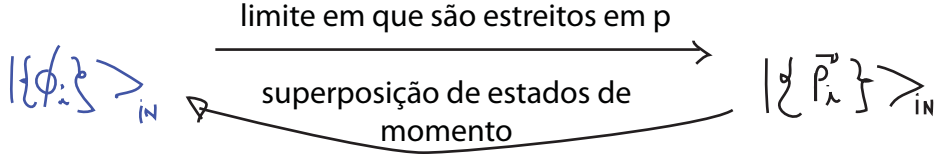
distribuição perto do pico

$$p^2 - m^2 = (p^0)^2 - \frac{|p^0|^2 - m^2}{-E_p^2} = \underbrace{(E_p + p^0)}_{\sim 2E_p} (p^0 - E_p)$$

A matriz S

Começamos o cálculo do espalhamento definindo os estados inicial e final.

Estados iniciais: consideramos um número finito de pacotes que, em $t = -\infty$, estão isolados entre si. Estes estados, definidos na representação de Heisenberg, são chamados de **in-states**:



Para tempos finitos $-T < t < +T$, estes pacotes de onda vão se sobrepor e interagir (elastica ou inelasticamente) dando origem a um outro conjunto de pacotes de onda que se afastam e acabam por ficar mutuamente isolados. Definiremos estes estados em $t = +\infty$, e os chamamos de **out-states**:

$$|\{\phi_i\}\rangle_{out} \rightleftharpoons |\{\vec{p}_i\}\rangle_{out}$$

O conjunto de autoestados de momento in (out) é completo:

$$\sum |\{\vec{p}_i\}\rangle_{in} \langle \{\vec{p}_i\}| = \sum |\{\vec{p}_i\}\rangle_{out} \langle \{\vec{p}_i\}| = 1$$

Mas são autoestados do operador momento em pontos diferentes do tempo (uma vez que este evolui, portanto a projeção de um no outro não é trivial).

Vamos então, definir os pacotes de onda. O caso de uma partícula é trivial, pois ela está sempre isolada, então:

$$|\phi\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \phi(\vec{k}) |\vec{k}\rangle \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle \phi | \phi \rangle = 1 \\ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\phi(\vec{k})|^2 = 1 \end{array} \right.$$

$$|\vec{p}\rangle_{in} = |\vec{p}\rangle_{out} = |\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle$$

↳ teoria livre apenas

E podemos escolher a distribuição de momentos, por ex.: $\phi(\vec{k}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

No caso de duas partículas temos que tomar cuidado com a possibilidade de que, mesmo que elas "colidam" (interajam), os centros das duas distribuições espaciais nunca tenham se encontrado.

$$|\phi_A \phi_B\rangle_{in} = \int \frac{d^3k_A}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_B}{(2\pi)^3} \frac{\phi_A(\vec{k}_A) \phi_B(\vec{k}_B)}{\sqrt{2E_A} \sqrt{2E_B}} e^{-i\vec{k}_A \cdot \vec{k}_B} |\vec{k}_A, \vec{k}_B\rangle_{in} \quad (\text{eq. 73.1})$$

↳ para deixar a possível separação \vec{b} entre os pacotes explícita. \vec{b} , transverso a direção do impacto, é o parâmetro de impacto

Os estados finais são definidos da forma usual:

$$\langle \phi_1, \phi_2, \dots | = \prod_k \int \frac{d^3p_k}{(2\pi)^3} \frac{\phi_k(p_k)}{\sqrt{2E_k}} \langle p_1, p_2, \dots | \quad (\text{eq. 73.2})$$

O que queremos saber é (duas partículas iniciais, n finais):

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots |_{out} |\vec{k}_A, \vec{k}_B\rangle_{in} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots; T | \vec{k}_A, \vec{k}_B; -T \rangle_H = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | e^{-iHT} | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle_S \quad (\text{eq. 73.3}) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | e^{-iHT} | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle_S \end{aligned}$$

(podemos tomar T como o tempo em que os dois quadros são iguais)

Com isso, definimos a **matriz S**:

$$\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | S | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle \equiv \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots |_{out} |\vec{k}_A, \vec{k}_B\rangle_{in} \quad (\text{eq. 73.4})$$

Os elementos da matriz S serão dados por: $S_{\alpha\beta} = \langle \beta_{out} | \alpha_{in} \rangle$

As equações 73.3 e 73.4 mostram que S é um operador de evolução, portanto devemos **exigir**:

$$S S^\dagger = S^\dagger S = 1$$

Mas em S está também contida a possibilidade das partículas iniciais não interagirem, de forma que os estado final seja igual ao inicial, ou seja S contém a identidade. Para separar esses eventos dos espalhamentos propriamente ditos, definimos:

$$S \equiv 1 + i T \quad (\text{eq. 74.1})$$

↳ puramente convencional

Além disso, sabemos que o momento e a energia totais se conservam, o que é implementado por meio de uma delta de Dirac. Definimos então o **Elemento de Matriz Invariante**:

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | i T | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta^4(k_A + k_B - \sum p_k) i \mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow p_k) \quad (\text{eq. 74.2})$$

Fórmula de Redução de LSZ

A formula que relaciona os elementos da matriz S (o que queremos calcular) com as funções de Green da teoria (o que sabemos calcular) é chamada de Fórmula de Redução de LSZ. Ela será provada em TQCII, aqui nos limitaremos a enunciá-la. Dada a função de Green no espaço dos momentos:

$$\tilde{G}_{n+m}(p_i^N, k_j^N) = \int \prod_{i=1}^n d^4x_i e^{i p_i x_i} \int \prod_{j=1}^m d^4y_j e^{-i k_j y_j} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(y_1) \dots \phi(y_m) \} | \Omega \rangle$$

↳ # partículas iniciais
↳ # partículas finais

temos:

$$\langle \{ p_i \}_n | \{ k_j \}_m \rangle_{in} = \lim_{\substack{p_i^2 \rightarrow m_i^2 \\ k_j^2 \rightarrow m_j^2}} \frac{1}{(i\sqrt{Z})^{m+n}} \prod_{i=1}^n (p_i^2 - m_i^2 + i\epsilon) \prod_{j=1}^m (k_j^2 - m_j^2 + i\epsilon) \tilde{G}_{n+m}(p_i^N, k_j^N)$$

(eq. 74.3)

veremos que as funções de Green no espaço dos momentos têm um propagador para cada linha externa. Estes serão cancelados por **estes termos** entre parênteses, que nada mais são que os inversos dos propagadores (no espaço dos momentos). Essencialmente vemos que o elemento da matriz S se trata do resíduo da função de Green quando todos os momentos das partículas espalhadas (estados assintóticos) estão em seus polos.

Note que esta expressão é para a função de Green completa, da teoria interagente e não da livre, em TQCII veremos que este fator Z que aparece aí está ligado às correções ao propagador livre. As massas também não são as mesmas que aparecem na teoria livre e sim as massas corrigidas pela interação do campo (massas físicas). A função de Green completa de 2 pontos, próximo ao polo, tem a forma:

$$G_2^c(p) = \int d^4x e^{-i p x} \langle \Omega | T \{ \phi(x), \phi(y) \} | \Omega \rangle \sim \frac{i Z}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Em contraste com o propagador da teoria livre:

$$G_2(p) = \frac{i}{p^2 - \underbrace{m_0^2}_{\text{massa "nua" (a que aparece na Lagrangeana, e que é física na teoria livre)} + i\epsilon}$$

O que significa que, em primeira aproximação: $\begin{cases} Z = 1 \\ m = m_0 \end{cases}$
(nível árvore, que explicaremos adiante)

Com esta fórmula conseguimos obter os elementos M a partir das funções de Green. Resta saber como obtemos σ . A probabilidade de, dado um estado inicial $|\phi_A \phi_B\rangle$, produzirmos n partículas com momentos no intervalo $d^3p_1 \dots d^3p_n$ é:

$$P(A, B \rightarrow 1, 2, \dots, n) = \left(\frac{\prod d^3p_k}{f (2\pi)^3 dE_k} \right) \left| \langle \underbrace{p_1, p_2, \dots, p_n}_{\text{normalização}} | \phi_A \phi_B \rangle_{\text{IN}} \right|^2$$

Suponha que tenhamos apenas uma partícula A (alvo) e um monte de partículas B, com n_B partículas por unidade de área transversa, e diferentes parâmetros de impacto b . O número de partículas espalhadas é:

$$\Delta N_{ev} = \sum_{i = \text{partículas B incidentes}} P_i = \int d^2b \underbrace{n_B}_{\text{distribuição uniforme}} P(\vec{b})$$

Então, de 70.1, temos:

$$d\sigma = \frac{\Delta N_{ev}}{n_B} = \int d^2b P(\vec{b}) \quad (\text{eq. 75.1})$$

porque estamos considerando a versão infinitesimal

$$\langle \{p_f\} | \phi_A \phi_B \rangle \langle \{p_f\} | \phi_A \phi_B \rangle^*$$

$\downarrow \int d^3k_A \int d^3k_B \quad \downarrow \int d^3k_A \int d^3k_B$

$$d\sigma = \int d^2b \left(\frac{\prod d^3p_k}{f (2\pi)^3 dE_k} \right) \left| \langle \{p_f\} | \phi_A \phi_B \rangle_{\text{IN}} \right|^2 =$$

$$\int d^2b \left(\frac{\prod d^3p_k}{f (2\pi)^3 dE_k} \right) \prod_{i=A, B} \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i(\vec{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} \int \frac{d^3\bar{k}_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i^*(\vec{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} e^{i\vec{b} \cdot (\vec{k}_B - \vec{k}_B)} \times$$

$$\times \langle \{p_f\} | \{k_i\} \rangle_{\text{IN}} \langle \{p_f\} | \{\bar{k}_i\} \rangle_{\text{IN}}^* =$$

(eq. 75.2)

Podemos fazer a integral no parâmetro de impacto:

$$\int d^2b e^{i\vec{b} \cdot (\vec{k}_B - \vec{k}_B)} = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\vec{k}_B^\perp - \vec{k}_B^\perp)$$

$\hookrightarrow \vec{b} = \vec{b}^\perp$

$$(3) + (4) \Rightarrow k_A^z + k_B^z = \bar{k}_A^z + \bar{k}_B^z \Rightarrow (6) \bar{k}_B^z = k_A^z + k_B^z - \bar{k}_A^z$$

$$(1) + (5) \Rightarrow \bar{E}_A + \bar{E}_B = E_A + E_B$$

$$\sqrt{k_A^z{}^2 + k_A^{\perp 2} + m_A^2} + \sqrt{k_B^z{}^2 + k_B^{\perp 2} + m_B^2} = \sqrt{\bar{k}_A^z{}^2 + k_A^{\perp 2} + m_A^2} + \sqrt{\bar{k}_B^z{}^2 + k_B^{\perp 2} + m_B^2}$$

$$\sqrt{k_A^z{}^2 + A^2} + \sqrt{k_B^z{}^2 + B^2} = \sqrt{\bar{k}_A^z{}^2 + A^2} + \sqrt{(k_A^z + k_B^z - \bar{k}_A^z)^2 + B^2}$$

Que obviamente tem como solução $k_A^z = \bar{k}_A^z$

(se tentar isolar o k_A^z acaba encontrando outra solução, mas está é "estranha", não é solução da equação com radicais)

$$\therefore k_A^z = \bar{k}_A^z \quad (7)$$

$$(7) + (6) \Rightarrow k_B^z = \bar{k}_B^z \quad \bar{E}_A = E_A \quad \bar{E}_B = E_B \quad (8)$$

Voltando a $d\sigma$:

$$d\sigma = \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \right) \prod_{i=A,B} \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \frac{|\phi_i(\vec{k}_i)|^2}{2E_i} \frac{1}{|v_A - v_B|} |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_{A,B} k_i - \sum p_f\right) \quad (\text{eq. 77.1})$$

Especializando para o caso em que as distribuições de momento são estreitas:

$$|\phi_A(\vec{k}_A)|^2 \sim (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_A - \vec{p}_A)$$

$$|\phi_B(\vec{k}_B)|^2 \sim (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_B - \vec{p}_B)$$

(na verdade uma distribuição estreita, mas de largura finita)

temos:

$$d\sigma = \frac{1}{2E_A 2E_B |v_A - v_B|} \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \right) |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum p_f) \quad (\text{eq. 77.2})$$

Note que a razão pela qual essa última expressão é útil consiste no fato de que, experimentalmente, tanto os estados que preparamos para a colisão quanto aqueles que medimos, se parecem muito com estados de momento bem determinado, mas não são ondas planas. Isso ocorre porque tanto na produção quanto na medida temos uma certa precisão FINITA na determinação do momento. Isso significa que sobra uma pequena incerteza no momento e o pacote não fica totalmente delocalizado. "Estreito" na definição acima quer dizer "menor que a precisão experimental".

Das grandezas em 77.2, todas abaixo são invariantes de Lorentz (desde que integremos nos momentos):

$$\left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \right) \& \mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_f\}) \& (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum p_f)$$

De fato chamamos:

$$\int d\Omega_n = \left(\int \prod_k \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^4 \delta(\mathbf{P}_A + \mathbf{P}_B - \sum \mathbf{P}_k) \quad (\text{eq. 78.1})$$

de Espaço de Fase Invariante para n corpos. No entanto temos um fator que muda sobre boosts:

$$\frac{1}{E_A E_B |\mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B|} = \frac{1}{|E_B \mathbf{P}_A^z - E_A \mathbf{P}_B^z|} = \frac{1}{|E_{\nu \times \gamma \nu} \mathbf{P}_A^\nu \mathbf{P}_B^\nu|} = A^{\nu \gamma}$$

(área transversa a z , e se transforma como tal. Invariante a boosts na direção z)

Se $\vec{P}_A \parallel \vec{P}_B$ (referencial do centro de massa ou do laboratório, que de fato é o que assumimos até agora, por exemplo na integral em b) podemos escrever:

$$\frac{1}{E_A E_B |\mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B|} = \frac{1}{F} \quad \text{Fator de fluxo invariante de Møller}$$

$$F^2 = (\mathbf{P}_A \cdot \mathbf{P}_B)^2 - m_A^2 m_B^2 = |E_A \vec{P}_B - E_B \vec{P}_A|^2 - |\vec{P}_1 \times \vec{P}_2|^2$$

O que nos fornece uma expressão invariante de Lorentz para a seção de choque total (note que a seção de choque diferencial não é invariante em geral, embora possamos definir algumas que são, a chamada rapidity é um exemplo):

$$\sigma = \frac{1}{4 \sqrt{(\mathbf{P}_A \cdot \mathbf{P}_B)^2 - m_A^2 m_B^2}} \left(\int \prod_k \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3} \right) |\mathcal{M}(P_A, P_B \rightarrow \{P_k\})|^2 (2\pi)^4 \delta(\mathbf{P}_A + \mathbf{P}_B - \sum \mathbf{P}_k) \quad (\text{eq. 78.2})$$

esta integral exige cuidado quando temos partículas idênticas no estado final, para que não contemos múltiplas vezes o mesmo espalhamento temos que dividir por $1/n!$ (onde n é o # de partículas ident.)

Um caso específico bastante relevante é o espalhamento $2 \rightarrow 2$, no referencial do centro de massa ($\vec{P}_{TOT} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$), o espaço de fase fica:

$$\int d\Omega_2 = \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6 4 E_1 E_2} (2\pi)^4 \delta(\mathbf{P}_A + \mathbf{P}_B - \sum \mathbf{P}_k) \delta(E_A + E_B - E_1 - E_2) =$$

$\underbrace{E_{cm}}_{E_A + E_B}$
 $\underbrace{\vec{P}_1 = -\vec{P}_2}_0$

$$= \int \frac{d\Omega P_1^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta(E_{cm} - E_1 - E_2) \bigg|_{\vec{P}_1 = -\vec{P}_2} = \int \frac{d\Omega P_1^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \frac{1}{\left| \frac{P_1}{E_1} + \frac{P_2}{E_2} \right|} \bigg|_{\vec{P}_1 = -\vec{P}_2} =$$

mesma coisa que fizemos na pg 76

$E_1 + E_2 = E_{cm}$

$$= \int \frac{d\Omega P_1}{16\pi^2 E_{cm}} \quad (\text{eq. 78.3})$$

$$\therefore \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm} = \frac{1}{2 E_A 2 E_B |\mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B|} \frac{|\vec{P}_1|}{16\pi^2 E_{cm}} |\mathcal{M}(P_A, P_B \rightarrow P_1, P_2)|^2 \quad (\text{eq. 78.4})$$

Se todas as partículas tiverem massas idênticas, então:

$$E_A = E_B = E_{cm}/2 \quad |\vec{p}_A| = |\vec{p}_B| = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}|$$

$$E_A E_B / |v_A - v_B| = |E_A p_B - p_A E_B| = E_{cm} |\vec{p}|$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm} = \frac{|M|^2}{64 \pi^2 E_{cm}^2}$$

(eq. 79.1)

Espalhamento com quatro estados de massa idêntica



Decaimento

Também podemos especializar as contas acima para o caso de uma partícula inicial decaindo (o caso $1 \rightarrow n$), basta voltar na eq. 75.2 e remover todas as integrais em k_B e \vec{k}_B (além do parâmetro de impacto) e incluir um fator $1/T$ que vem da eq. 71.1 (temos em mente que #decaimentos/#partículas também é a chance de uma partícula decair, e portando o dP aqui): $d\Gamma = \frac{dP}{T}$

$$d\Gamma = \frac{1}{\Delta T} \left(\prod \frac{\delta^3 p_f}{(2\pi)^3 dE_f} \right) \int \frac{\delta^3 k_A}{(2\pi)^3} \frac{\phi_A(\vec{k}_A)}{\sqrt{2E_A}} \int \frac{\delta^3 \bar{k}_A}{(2\pi)^3} \frac{\phi_A^*(\vec{k}_A)}{\sqrt{2E_A}} \underbrace{\langle \{p_f\} | \{k_A\} \rangle}_{OUT} \underbrace{\langle \{p_f\} | \{\bar{k}_A\} \rangle^*}_{IN}$$

em termos de δ , temos aqui: $(2\pi)^4 \delta^3(\vec{p}_f - \vec{k}_A) \delta(E_A - \sum E_f) (2\pi)^4 \delta^3(\vec{p}_f - \vec{k}_A) \delta(E_A - \sum E_f)$

$a + b \Rightarrow \vec{k}_A = \vec{k}_A \Rightarrow E_A = E_A(c)$

$(c) \Rightarrow (d) + (e) \Rightarrow \delta(E_A - \sum E_f)^2 = \delta(0) \delta(E_A - \sum E_f) = \frac{\Delta T}{(2\pi)} \delta(E_A - \sum E_f)$

$(2\pi) \delta(E - E) = \int dt e^{i(E-E)t}$

Esse "fator de tempo" cancela com o da definição da largura e discutiremos ele abaixo. Note que também não temos o fator de fluxo F Assumindo de novo que o estado inicial é um pacote estreito e indo para o referencial do centro de massa (que neste caso coincide com o referencial de repouso da partícula inicial, que é onde definimos Γ de qualquer forma):

$$d\Gamma = \frac{1}{2 m_A} \left(\prod \frac{\delta^3 p_f}{(2\pi)^3 dE_f} \right) |M(m_A \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - \sum p_f)$$

(eq. 79.2)

Aonde cabe a ressalva de que, uma vez que não é possível pensar em uma partícula INSTÁVEL no passado infinito, o que estamos assumindo aqui é que o tempo da vida τ , é tal que:

$\tau \gg \Delta T$

$\Delta E \simeq \frac{1}{\Delta T} \gg \frac{1}{\tau}$

↑ tempo da "interação"

↑ energia total envolvida (neste caso ~ massa)

} lembrando que estas duas grandezas estão ligadas pelo princípio da incerteza

ou seja, quando a largura é pequena em relação a massa (estado estreito) ou de vida longa. Neste caso podemos pensar que nada ocorre por um longo tempo (estado livre) e toda a interação está contida em um "intervalo de tempo" finito, em torno do momento em que a partícula decai, o que faz sentido perturbativamente.

Quadro de Interação e o Teorema de Wick

(Nastase 5, Peskin 4.2 e 4.3, Stermann Appendix A)

Os "quadros" da MQ:

Dado um elemento de matriz: $\langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle$
 $\hookrightarrow \hat{A} = \hat{A}(Q, P)$ (no que segue estou forçando minha letra a diferenciar $\frac{d}{dt}$ de $\frac{d}{dt}$)

a evolução temporal é dada por: $i \frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle = \langle \psi | [\hat{A}, \hat{H}] | \phi \rangle$ (eq. 80.1)
calculado em t

A equação 80.1 tem toda a informação sobre a evolução, mas gostaríamos de separar a evolução dos operadores e estados, definindo:

$$i \frac{d\hat{A}}{dt} \equiv [\hat{A}, \hat{M}] \quad i \frac{d|\psi\rangle}{dt} \equiv \hat{N}|\psi\rangle \quad -i \frac{d\langle\psi|}{dt} \equiv \hat{N}^+ \langle\psi|$$

$$\hat{M}^+ = M \quad \hat{N}^+ = N$$

$$i \frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle = i \left(\frac{d\langle \psi |}{dt} \right) \hat{A} | \phi \rangle + i \langle \psi | \frac{d\hat{A}}{dt} | \phi \rangle + i \langle \psi | \hat{A} \left(\frac{d|\phi\rangle}{dt} \right)$$

$$= - \langle \psi | \hat{N}^+ \hat{A} | \phi \rangle + \langle \psi | [\hat{A}, \hat{M}] | \phi \rangle + \langle \psi | \hat{A} \hat{N} | \phi \rangle =$$

$$\stackrel{N^+ = N}{\downarrow} \langle \psi | [\hat{A}, \hat{N}] | \phi \rangle + \langle \psi | [\hat{A}, \hat{M}] | \phi \rangle = \langle \psi | [\hat{A}, \hat{H}] | \phi \rangle$$

$$\hat{N} + \hat{M} = \hat{H} \quad (\text{eq. 80.2})$$

Um "quadro" consiste em uma escolha de \hat{M} e \hat{N} :

Quadro de Schrödinger: $\left. \begin{array}{l} \hat{M} = 0 \\ \hat{N} = \hat{H} \end{array} \right\} \begin{array}{l} i \frac{d}{dt} |\psi_S(t)\rangle = \hat{H} |\psi_S(t)\rangle \\ i \frac{d}{dt} \hat{A}_S(t) = 0 \end{array}$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \frac{d\hat{H}}{dt} \equiv 0 \\ \text{não dependem explicitamente do tempo} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \hat{A}_S(t) = \hat{A}(t_0) \\ |\psi_S(t)\rangle = e^{-i\hat{H}(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle \end{array} \right\} (\text{eq. 80.3})$$

Quadro de Heisenberg:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M} = \hat{H} \\ \hat{N} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} i \frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = [\hat{A}_H(t), \hat{H}] \\ \frac{d}{dt} |\Psi_H(t)\rangle = 0 \end{array}$$

$$\hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)} \hat{A}(t_0) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \quad (\text{eq. 81.1})$$

$$|\Psi_H(t)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle$$

Para o tempo fixo t_0 os dois quadros coincidem:

$$|\Psi_S(t_0)\rangle = |\Psi_H(t_0)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle \quad \hat{A}_H(t_0) = \hat{A}_S(t_0) = \hat{A}(t_0) \quad (\text{eq. 81.2})$$

Podemos mudar entre os dois quadros fazendo uma transformação unitária:

$$|\Psi_W\rangle = \hat{W} |\Psi\rangle \quad \hat{W}^\dagger = \hat{W}^{-1}$$

$$\hat{A}_W = \hat{W} \hat{A} \hat{W}^\dagger = \hat{W} \hat{A} \hat{W}^{-1}$$

Definindo W como a transformação "Q. Schrödinger" \rightarrow "Q. Heisenberg", vemos que:

$$\hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)} \hat{A}(t_0) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \quad \leftrightarrow \quad \hat{W} = e^{i\hat{H}(t-t_0)}$$

O que também poderia ter sido obtido de:

$$|\Psi_H(t)\rangle = \hat{W} |\Psi_S(t)\rangle \Rightarrow |\Psi_S(t)\rangle = \hat{W}^{-1} |\Psi_H(t)\rangle = \underbrace{e^{-i\hat{H}(t-t_0)}}_{U_S(t,t_0)} |\Psi(t_0)\rangle \quad (\text{eq. 80.3})$$

$$\hat{W} = U_S^{-1}(t, t_0) = U_S(t_0, t) \quad (\text{eq. 81.3})$$

De onde vemos que esta transformação é quase o próprio operador evolução (o seu inverso).

Quadro de Interação (ou de Dirac):

Suponha que tenhamos um hamiltoniano do tipo:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$$

\hat{H}_0 → parte livre (quadrática nos campos)
 \hat{H}_1 → parte interagente (potências maiores)

o quadro interação equivale à escolha:

$$\hat{M} = \hat{H}_0 \quad \hat{N} = \hat{H}_1$$

$$i \frac{d\hat{A}_I(t)}{dt} = [\hat{A}_I(t), \hat{H}_0] \quad (\text{eq. 82.1})$$

$$i \frac{d}{dt} |\Psi_I(t)\rangle = \hat{H}_1 |\Psi_I(t)\rangle \quad (\text{eq. 82.2})$$

Mais uma vez, todos os quadros são iguais em t_0 :

$$\hat{A}_I(t_0) = \hat{A}_S(t_0) = \hat{A}_H(t_0) = \hat{A}(t_0) \quad |\Psi_I(t_0)\rangle = |\Psi_S(t_0)\rangle = |\Psi_H(t_0)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle$$

A evolução dos operadores se dá como no quadro de Heisenberg da teoria livre:

$$i \frac{d\hat{H}_0}{dt} = 0 \quad \hat{H}_{0I}(t) = \hat{H}_{0S}(t) = \hat{H}_0$$

$$i \frac{d\hat{A}_I(t)}{dt} = [\hat{A}_I(t), \hat{H}_0] \quad \hat{A}_I(t) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{A}(t_0) e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}$$

E o próprio hamiltoniano de interação depende do tempo:

$$i \frac{d\hat{H}_1}{dt} = [\hat{H}_1, \hat{H}_0] \quad \hat{H}_1 \equiv \hat{H}_{1I}(t) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{H}_1(t_0) e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}$$

A evolução dos estados é um pouco mais complicada:

$$|\Psi_I(t)\rangle = \hat{U}_I(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$$

quero encontrar U, que satisfaça:

$$\left. \begin{aligned} \hat{U}(t, t) &= 1 \\ \hat{U}(t, t') \hat{U}(t', t_0) &= \hat{U}(t, t_0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{eq. 82.3})$$

Substituindo isto em 82.2

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}_I(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle = \hat{H}_{1I}(t) \hat{U}_I(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle$$

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}_I(t, t_0) = \hat{H}_{1I}(t) \hat{U}_I(t, t_0) \quad (\text{eq. 83.1})$$

Uma solução simples para esta equação é:

$$\hat{U}_I(t, t_0) = e^{i \hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i \hat{H}_S(t-t_0)}$$

\hat{H}_S : hamiltoniano completo ($\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$) no quadro de Schrödinger

(eq. 83.2)
(vou suprimir os símbolos de operador daqui para frente)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U_I(t-t_0) &= i H_0 e^{i H_0(t-t_0)} e^{-i H_S(t-t_0)} + e^{i H_0(t-t_0)} (-i H_S) e^{-i H_S(t-t_0)} \\ &= -i e^{i H_0(t-t_0)} (H_S - H_0) e^{-i H_S(t-t_0)} = -i H_{1I} e^{i H_0(t-t_0)} e^{-i H_S(t-t_0)} \\ &= -i H_{1I} \hat{U}_I(t, t_0) \end{aligned}$$

$H_{1I} = H_S - H_0 = H_1(t_0)$

$$H_{1I} = e^{i H_0(t-t_0)} H_1(t_0) e^{-i H_1(t-t_0)} \Rightarrow H_1(t_0) = e^{-i H_0(t-t_0)} H_{1I} e^{i H_0(t-t_0)}$$

Gostaríamos de uma solução similar a $e^{-i H_{1I} t}$, mas isso requer mais cuidado pois H_{1I} na eq. 83.1 depende do tempo. Notemos que a expressão:

$$U_I(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_{1I}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) + (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \dots \quad (\text{eq. 83.3})$$

NOTE

$$\frac{d}{dt} \textcircled{I} = -i H_{1I}(t) \textcircled{I}$$

$$\frac{d}{dt} \textcircled{II} = -i \int_{t_0}^t dt_2 H_{1I}(t) H_{1I}(t_2) = -i H_{1I}(t) \textcircled{I}$$

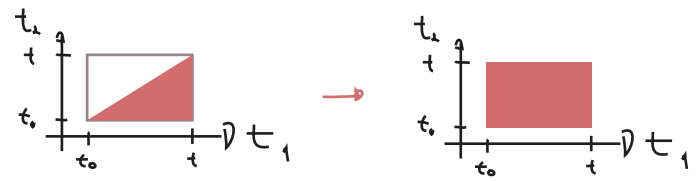
$$\left(\frac{d}{dt} \textcircled{III} = -i H_{1I}(t) \textcircled{II} \right)$$

e assim por diante

$$\therefore \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) = -i H_{1I}(t) U_I(t, t_0)$$

// o que prova que 83.3 é solução de 83.1

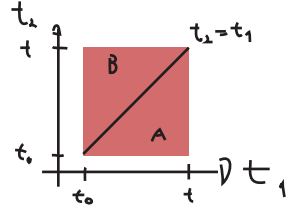
Para simplificar mais o Ansatz 83.3, podemos trocar os limites de integração



tomando o cuidado de notar que $[H_{1I}(t_1), H_{1I}(t_2)] \neq 0$

de fato:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} = \underbrace{\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2)}_A + \underbrace{\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H(t_1) H(t_2)}_B = 2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2)$$



$$T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} = \begin{cases} H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) & \text{se } \{t_1, t_2\} \in A \\ H_{1I}(t_2) H_{1I}(t_1) & \text{se } \{t_1, t_2\} \in B \end{cases}$$

Analogamente:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \dots dt_n T \{ H_{1I}(t_1) \dots H_{1I}(t_n) \} = n! \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{1I}(t_1) \dots H_{1I}(t_n)$$

De forma que:

$$\hat{U}_I(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 T \{ H_{1I}(t_1) \} + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} + \frac{(-i)^3}{3!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_3 T \{ \dots \}$$

$$U_I(t, t_0) = T \left\{ \text{Exp} \left[-i \int_{t_0}^t dt' H_{1I}(t') \right] \right\}$$

(eq. 84.1)

Esta separação entre a teoria livre e a parte interagente exige um cuidado adicional. Anteriormente usamos a definição para o vácuo como:

$$H_0 |0\rangle \equiv E_0^L |0\rangle = 0$$

Assumindo H_0 normalmente ordenado
 Menor autovalor de H_0
 Hamiltoniano do sistema

Faremos o mesmo para o Hamiltoniano com a interação: $H | \Omega \rangle = (H_0 + H_1) | \Omega \rangle \equiv E_0 | \Omega \rangle$
 Menor autovalor de $H = H_0 + H_1$

e, em geral: $|0\rangle \neq |\Omega\rangle$. Gostaríamos de expressar este novo vácuo em termos de grandezas conhecidas.

Construindo um conjunto completo com os autoestados do hamiltoniano total temos:

$$H | n \rangle = E_n | n \rangle$$

$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{n \neq 0} |n\rangle\langle n|$$

Tomemos um estado que começou no vácuo "livre" da teoria e está evoluindo com o Hamiltoniano completo:

$$e^{-i\hat{H}T} |0\rangle = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_n T} |n\rangle\langle n|0\rangle$$

e façamos o limite $T \rightarrow \infty(1 - \lambda \epsilon)$

$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\epsilon E_0 T} \gg e^{-\epsilon E_1 T} \gg e^{-\epsilon E_2 T} \gg \dots$
 "mata" os estados excitados: $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\epsilon E_n T} \gg \dots$
 $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\epsilon E_n T} = 0$

e ficamos só com o zero-ésimo termo da soma do lado direito:

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1 - \lambda \epsilon)} \left[e^{-i\hat{H}T} |0\rangle \right] = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle$$

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - \lambda \epsilon)} \frac{e^{-i\hat{H}(T+t_0)} |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle\Omega|0\rangle} = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - \lambda \epsilon)} \frac{e^{-i\hat{H}(T+t_0)} e^{i\hat{H}_0(T+t_0)} |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle\Omega|0\rangle}$$

$H_0|0\rangle = 0$

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - \lambda \epsilon)} \frac{U_I(t_0, -T) |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle\Omega|0\rangle} \quad (\text{eq. 85.1})$$

$$(\text{eq. 83.2}) \Rightarrow U_I(-T, t_0) = e^{i\hat{H}_0(-T-t_0)} e^{-i\hat{H}(-T-t_0)} \quad U_I(t_0, -T) = e^{+i\hat{H}(-T-t_0)} e^{-i\hat{H}_0(-T-t_0)}$$

$$U_I(-T, t_0) U_I(t_0, -T) = 1$$

De forma semelhante:

$$\langle\Omega| = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - \lambda \epsilon)} \frac{\langle 0| U_I(T, t_0)}{e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0|\Omega\rangle} \quad (\text{eq. 85.2})$$

Esse é um bom ponto para para e fazer a pertinente pergunta: o que diabos estamos fazendo? Para que serve este quadro de interação?

Pois bem, a imagem que temos em mente é a de experiências aonde temos objetos quânticos e relativísticos: partículas se movendo e interagindo em altas energias. As situações típicas em que conseguimos estudar partículas relativísticas (Raios Cósmicos ou Aceleradores de Partículas) envolvem três "momentos":

(I) Duas ou mais partículas iniciais se aproximam da região de espalhamento a partir de distâncias que podem ser consideradas bem grandes se comparadas com a "região de interação". Estas partículas se movem em linhas retas e são livres (no sentido em que não interagem entre si - pode haver um campo externo que guia sua trajetória, mas ele é tratado classicamente e modifica a geodésica seguida pela partícula).

(II) Ocorre um choque/espalhamento praticamente instantâneo e pontual, no sentido quântico: o tamanho da região de interação e o tempo de duração da mesma estão protegidos pelo princípio da incerteza: não temos como determinar com exatidão aonde nem quando ela aconteceu.

(III) Um número n de partículas deixa a pequena região de interação. Podem ser as mesmas que entraram (no caso de um choque elástico) ou em número e tipo diferente (no caso inelástico). Estas estão novamente livres (no mesmo sentido do momento I) e se movem por uma distância grande antes de chegar aos detectores, onde são medidas (o que é uma nova interação, completamente independente da anterior).

O quadro de interação, por um lado, faz a evolução dos operadores acontecer segundo a Hamiltoniana livre, o que nos permitirá explorar o fato de o sistema é assintoticamente livre no início e no fim do espalhamento. Além disso a parte de interação do Hamiltoniano depende do tempo, o que nos permitirá restringir sua duração.

Uma expressão que deixa bem clara a utilidade do quadro é a 85.1:

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{U_I(t_0, -T) |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle}$$

Vemos que (a menos de um fator de normalização) o vácuo interagente da teoria é criado a partir do vácuo livre pelo operador de evolução no quadro de interação. Este operador é entre um ponto infinito no passado e t_0 , o que só quer dizer um tempo grande se comparado com o tempo de interação.

Vejamos como ficam as funções de green da teoria interagente neste quadro, primeiro notemos que:

$$\phi(x) = \phi(t, \vec{x}) = \phi_H(t, \vec{x}) \quad (\text{definimos nossos operadores de campo no quadro de Heisenberg})$$

$$\phi_H(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH(t-t_0)}$$

$$\phi_I(t, \vec{x}) = e^{iH_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)} =$$

$$= \underbrace{e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}}_{U_I(t, t_0)} \phi_H(x) \underbrace{e^{+iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)}}_{U_I^+(t, t_0)} \quad 83.2$$

$$\phi_H(x) = U_I^+(t, t_0) \phi_I(x) U_I(t, t_0) \quad (\text{eq. 86.1})$$

Podemos então escrever a função de dois pontos:

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | U_I(T, t_0) U_I^\dagger(x^0, t_0) \phi_I(x) U_I(x^0, t_0) \times U_I^\dagger(y^0, t_0) \phi_I(y) U_I(y^0, t_0) \frac{U_I(t_0, -T) | 0 \rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle}}{e^{-i\lambda E_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle^2} = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{1}{e^{-i\lambda E_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle^2} \langle 0 | U_I(T, x^0) \phi_I(x) U_I(x^0, y^0) \phi_I(y) U_I(y^0, -T) | 0 \rangle$$

$$U_I^\dagger(t_1, t_2) = e^{-iH_0(t_1-t_2)} e^{iH(t_1, -t_2)} = U_I(t_2, t_1)$$

$$U_I(t_1, t') U_I(t', t_2) = U_I(t_1, t_2)$$

(eq. 87.1)

Por outro lado, sabemos que:

$$1 = \langle \Omega | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | U_I(T, t_0) \overbrace{U_I(t_0, -T)}^{U_I(T, -T)} | 0 \rangle}{e^{-i\lambda E_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle^2}$$

Podemos dividir 87.1 por esta unidade, obtendo:

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | U_I(T, x^0) \phi_I(x) U_I(x^0, y^0) \phi_I(y) U_I(y^0, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | U_I(T, -T) | 0 \rangle}$$

(eq. 87.2)

Note que, para $x^0 > y^0$, ambos os lados da equação estão temporalmente ordenados. Poderíamos ter também calculado:

$$\langle \Omega | \phi(y) \phi(x) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | U_I(T, y^0) \phi_I(y) U_I(y^0, x^0) \phi_I(x) U_I(x^0, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | U_I(T, -T) | 0 \rangle}$$

E esta estaria ordenada para $y^0 > x^0$. De forma que podemos escrever:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(y) \phi(x) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ U_I(T, y^0) \phi_I(y) U_I(y^0, x^0) \phi_I(x) U_I(x^0, -T) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | U_I(T, -T) | 0 \rangle}$$

dentro do produto T podemos comutar a vontade

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_I(y) \phi_I(x) U_I(T, -T) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | U_I(T, -T) | 0 \rangle}$$

$$\langle \Omega | T \{ \phi(y) \phi(x) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-\lambda\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_I(y) \phi_I(x) \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_I(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_I(t)] \} | 0 \rangle}$$

Esta expressão é trivialmente generalizada para um número arbitrário de operadores:

$$\langle \Omega | T \{ \mathcal{O}_H(x_1) \dots \mathcal{O}_H(x_n) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \mathcal{O}_I(x_1) \dots \mathcal{O}_I(x_n) \text{Exp} \left[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \text{Exp} \left[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right] \} | 0 \rangle}$$

(eq. 88.1)

Teorema de Wick

Na prática, obter $\langle \Omega | T \{ \mathcal{O}_H(x_1) \dots \mathcal{O}_H(x_n) \} | \Omega \rangle$ envolve calcular:

$$\langle 0 | T \{ \mathcal{O}_I(x_1) \dots \mathcal{O}_I(x_n) \left(\int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t) \right)^m \} | 0 \rangle$$

→ pode parecer que teremos que calcular infinitos elementos deste tipo, para todos n's. Isto é verdade para o resultado exato. Mas veremos que, em teoria de perturbação, poderemos truncar a expansão da exponencial

Como tanto os operadores $\mathcal{O}_I(x)$ quanto o Hamiltoniano de interação são produtos de campos, este problema se reduz a calcular elementos de matriz do tipo:

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) \} | 0 \rangle$$

Para isto faremos a divisão do operador de campo:

$$\phi_I = \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_I^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}} e^{-i p \cdot x} \\ \phi_I^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{+i p \cdot x} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} x^0 = t - t_0 \\ p^0 = E_p \\ x^0 = t - t_0 \\ p^0 = E_p \end{array} \right.$$

pg 86

$$\phi_I(x) = e^{i H_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-i H_0(t-t_0)}$$

$$\phi_I(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\vec{p}} e^{i p \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i p \cdot x})$$

$$e^{i H_0(t-t_0)} \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i H_0(t-t_0)} = \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i E_p(t-t_0)}$$

$$e^{i H_0(t-t_0)} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i H_0(t-t_0)} = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{+i E_p(t-t_0)}$$

De forma que:

$$\phi_I^+ | 0 \rangle = 0 = \langle 0 | \phi_I^-$$

(eq. 88.3)

Definiremos também uma nova notação para o produto normal: $:\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n: \equiv N[\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n]$

Imagine que $x^0 > y^0$

$$T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \} = \phi_I^+(x) \phi_I^+(y) + \phi_I^-(x) \phi_I^-(y) + \phi_I^+(x) \phi_I^-(y) + \phi_I^-(x) \phi_I^+(y) =$$

$$= \underbrace{\phi_{\mathbb{I}}^+(x)\phi_{\mathbb{I}}^+(y) + \phi_{\mathbb{I}}^-(x)\phi_{\mathbb{I}}^-(y)}_{\text{estão normal. ordenados}} + [\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] + \underbrace{\phi_{\mathbb{I}}^-(y)\phi_{\mathbb{I}}^+(x) + \phi_{\mathbb{I}}^-(x)\phi_{\mathbb{I}}^+(y)}_{\text{estão normal. ordenados}} =$$

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)] + [\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] \quad x^0 > y^0 \quad (\text{eq. 89.1})$$

Poderia ter feito o mesmo para $y^0 > x^0$ e obteríamos:

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)] + [\phi_{\mathbb{I}}^+(y), \phi_{\mathbb{I}}^-(x)] \quad y^0 > x^0 \quad (\text{eq. 89.2})$$

SIMÉTRICO

Definimos a **contração**:

$$\overbrace{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)} \equiv \begin{cases} [\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] & x^0 > y^0 \\ [\phi_{\mathbb{I}}^+(y), \phi_{\mathbb{I}}^-(x)] & y^0 > x^0 \end{cases} \quad (\text{eq. 89.3})$$

Notem que como o comutador é um número, podemos fazer:

$$[\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] \langle 0|0 \rangle = \langle 0| \phi_{\mathbb{I}}^+ \phi_{\mathbb{I}}^- - \phi_{\mathbb{I}}^- \phi_{\mathbb{I}}^+ |0 \rangle = \langle 0| \phi_{\mathbb{I}}^+ \phi_{\mathbb{I}}^- |0 \rangle = D(x-y)$$

$$[\phi_{\mathbb{I}}^+(x), \phi_{\mathbb{I}}^-(y)] = D(y-x)$$

Isso quer dizer que (pg 68):

$$\overbrace{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)} = D_F(x-y) \quad (\text{eq. 89.4})$$

Pelo mesmo motivo posso incluí-lo no ordenamento normal:

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y) + \overbrace{\phi_{\mathbb{I}}(x)\phi_{\mathbb{I}}(y)}] \quad (\text{eq. 89.5})$$

A generalização desta relação para um número m de campos é chamada de **Teorema de Wick** e é dada por:

$$\mathcal{T}\{\phi_{\mathbb{I}}(x_1) \dots \phi_{\mathbb{I}}(x_m)\} = \mathcal{N}[\phi_{\mathbb{I}}(x_1) \dots \phi_{\mathbb{I}}(x_m) + \text{todas as contrações possíveis}]$$

Veja que "todas contrações possíveis" inclui contrações parciais:

$$T\{\underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4}_{\phi_{\pm}(x_i)}\} = + \dots + N[\underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4}_{\mathcal{D}_F(x_1-x_3) N[\phi_2 \phi_4]}] + \dots + N[\underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4}_{\mathcal{D}_F(x_1-x_3) \mathcal{D}_F(x_2-x_4)}]$$

Em que o teorema de Wick nos ajuda? Note que o que queremos calcular é:

$$\langle 0 | T\{\phi_1 \dots \phi_n\} | 0 \rangle = \langle 0 | N[\phi_1 \dots \phi_n + \text{CONTRAÇÕES}] | 0 \rangle$$

Neste caso, qualquer produto normal que sobre depois da aplicação do teorema dá zero. Ex:

$$\langle 0 | N[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4] | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | \mathcal{D}_F(x_1 - x_3) N[\phi_2 \phi_4] | 0 \rangle = \mathcal{D}_F(x_1 - x_3) \langle 0 | N[\phi_2 \phi_4] | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | 0 \rangle \mathcal{D}_F(x_1 - x_3) \mathcal{D}_F(x_2 - x_4) \neq 0$$

$$\langle 0 | T\{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4\} | 0 \rangle = \mathcal{D}_F(x_1 - x_2) \mathcal{D}_F(x_3 - x_4) + \mathcal{D}_F(x_1 - x_3) \mathcal{D}_F(x_2 - x_4) + \mathcal{D}_F(x_1 - x_4) \mathcal{D}_F(x_2 - x_3)$$

A prova do teorema de Wick é feita por indução. Nós provamos o caso com dois campos, é possível provar o para 3 campos usando o de 2 campos, e então o passo n sabendo que o n-1 vale. Isto estará na lista de exercícios.

Regras de Feynman para $\lambda\phi^4$

(Nastase 6; Peskin 4.4)

Voltemos agora para a eq. 88.1:

$$\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{1}{N} \langle 0 | T\{\phi_{\pm}(x_1) \dots \phi_{\pm}(x_n) \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t)]\} | 0 \rangle$$

denominador no lado direito de 88.1

E vamos assumir que $\langle H_1 \rangle$ é (em todos os sentidos) pequeno.

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \hat{H}_1 = \lambda \hat{\mathcal{O}}(\phi) \Rightarrow \langle \hat{H}_1 \rangle &= \lambda \langle \hat{\mathcal{O}}(\phi) \rangle \Rightarrow \langle \hat{H}_1^2 \rangle \ll \langle \hat{H}_1 \rangle \ll \langle \hat{1} \rangle \\ \hookrightarrow \lambda \sim 0 \quad \langle \hat{H}_1^2 \rangle &= \lambda^2 \langle \hat{\mathcal{O}}(\phi)^2 \rangle \quad \langle \phi_1 \dots \phi_n \hat{H}_1^2 \rangle \ll \langle \phi_1 \dots \phi_n \hat{H}_1 \rangle \ll \langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle \end{aligned}$$

Neste caso podemos calcular o produto temporalmente ordenado em uma **aproximação perturbativa**, expandindo as exponenciais em H_1 , e tomando tantos termos quantos necessários (dependendo da precisão necessária):

$$\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{1}{N} \left\{ \langle 0 | T\{\phi_{\pm}(x_1) \dots \phi_{\pm}(x_n)\} | 0 \rangle + \dots \right\}$$

$$+ \langle 0 | T \{ \underbrace{\phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n)}_{\mathcal{O}(\lambda)} \underbrace{\left(-i \int_{-T}^T dt H_{int}(t) \right)}_{\text{"inserções de } H_{int}} \} | 0 \rangle + \langle 0 | T \{ \underbrace{\phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} \underbrace{\left(-i \int_{-T}^T dt H_{int}(t) \right)^2}_{\text{"inserções de } H_{int}} \} | 0 \rangle + \dots$$

Analisando o produto de quatro campos: $\langle \Omega | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | \Omega \rangle$

$$\phi_i = \phi_I(x_i)$$

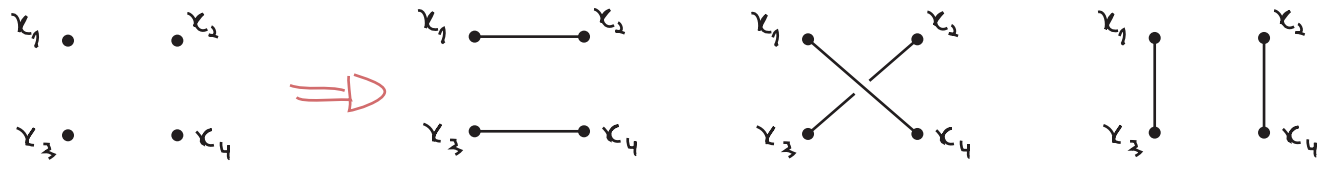
temos em ordem 0 de perturbação (que de fato é a teoria livre):

$\mathcal{O}(\lambda^0)$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | 0 \rangle = D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3) + \dots$$

Wick

Este tipo de lógica combinatória imposta pelo teorema de Wick pode ser enormemente agilizada e sistematizada usando um recurso gráfico que ganhou o nome de **Diagramas de Feynman**. No caso simples acima (onde o ganho de usar grafos não é evidente, mas avançaremos rapidamente para casos mais complicados, onde o ganho é enorme), temos quatro pontos no espaço-tempo e os conectamos de todas as formas possíveis:



$$\boxed{x_1 \text{ --- } x_2} \equiv D_F(x_1 - x_2) \quad \text{Propagador (eq. 91.1)}$$

Lembrando também que podemos interpretar $\phi(x_1)|0\rangle$ como a criação de uma partícula em x_1 e $\langle 0|\phi(x_2)$ como a aniquilação de uma partícula em x_2 , e que o propagador de Feynman dá conta de todas as possibilidades de ordenamentos temporais, é comum "ler" o diagrama do propagador com esta imagem física em mente: a partícula foi criada em x_1 (x_2) e aniquilada em x_2 (x_1) (ela não é perfeita, no entanto, como veremos mais adiante).

Considere agora o produto de dois campos: $\langle \Omega | T \{ \phi_1 \phi_2 \} | \Omega \rangle$

o primeiro termo é trivial:

$\mathcal{O}(\lambda^0)$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \} | 0 \rangle = x_1 \text{ --- } x_2$$

e o segundo (primeira correção perturbativa) é dado por:

$\mathcal{O}(\lambda^1)$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \left(-i \int dt H_{int}(t) \right) \} | 0 \rangle$$

$$H_{int}(t) = \int d^3x \mathcal{H}_{int}(x)$$

Tomemos uma interação específica, conhecida com **Teoria $\lambda\phi^4$** : $\mathcal{H}_{int} = \frac{\lambda}{4!} \phi^4$

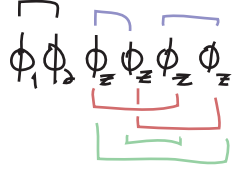
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \frac{m^2 \phi^2}{2} - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \iff \mathcal{L} = \mathcal{L}(\chi)$$


$$\int dt H_{I, \mathbb{R}} = \int dt \int d^3z \mathcal{H}_{I, \mathbb{R}}(z) = \int d^4z \frac{\lambda}{4!} \phi_{\mathbb{R}}(z) \phi_{\mathbb{R}}(z) \phi_{\mathbb{R}}(z) \phi_{\mathbb{R}}(z) \leftarrow \text{todos no mesmo ponto}$$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 (-i \int dt H_{I, \mathbb{R}}(t)) \} | 0 \rangle = -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \} | 0 \rangle$$

Temos que fazer todas as contrações possíveis destes 6 campos, e dividimos isto em dois casos:

- (1) contraímos $\phi(x_1)$ com $\phi(x_2)$ e os $\phi(z)$ só entre si.
- (2) contraímos $\phi(x_1)$ com um dos $\phi(z)$ e $\phi(x_2)$ com outro (os dois $\phi(z)$ que restam são contraídos entre si).

(1) \Rightarrow  $\Rightarrow 3 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4z D_F(z - \tilde{z}) D_F(\tilde{z} - \tilde{z})$
 as 3 formas de contrair os $\phi(z)$ dão o mesmo resultado (mas eu devo somar sobre elas)

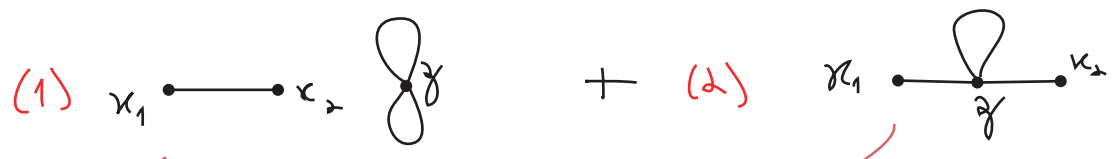
(2) \Rightarrow  \Rightarrow quatro formas de contrair $\phi(x_1)$, e uma vez feito isto, temos três formas de contrair $\phi(x_2)$ e nenhuma ambiguidade nos $\phi(z)$ que restam

$$\therefore 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z)$$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 (-i \int dt H_{I, \mathbb{R}}(t)) \} | 0 \rangle = 3 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4z D_F(z - \tilde{z}) D_F(\tilde{z} - \tilde{z}) + 12 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z) \quad (\text{eq. 92.1})$$

A versão diagramática seria:

$x_1 \cdot \tilde{z} \cdot x_2 \Rightarrow$ lembrando que temos 4 campos em z logo 4 linhas devem sair/entrar ali



$\leftarrow 3 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4z D_F(z - \tilde{z}) D_F(\tilde{z} - \tilde{z})$ \leftarrow a resposta não é função de z
 $\leftarrow 12 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z)$
 \leftarrow como advinho estes fatores!?

Vejam os um caso mais complicado:

$\mathcal{O}(\lambda^3)$

expansão da exponencial

$$\langle 0 | T \left\{ \phi_x \phi_y \left[\frac{1}{3!} \left(-i \frac{\Delta}{4!} \right)^3 \int d^4 z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \int d^4 w \phi_w \phi_w \phi_w \phi_w \int d^4 u \phi_u \phi_u \phi_u \phi_u \right] \right\} | 0 \rangle \quad (\text{eq. 93.1})$$

para esta contração

$$= \frac{1}{3!} \left(-i \frac{\Delta}{4!} \right)^3 \int d^4 z \int d^4 w \int d^4 u D_F(x-z) D_F(y-w) D_F(z-w) D_F(z-z) D_F(z-w) D_F^2(w-u) D_F(u-u)$$

(eq. 93.2)

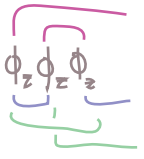
Vamos tentar identificar quantas contrações diferentes poderiam ter levado à mesma expressão 93.2.

Nome dos vértices: 3!

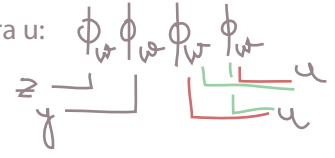
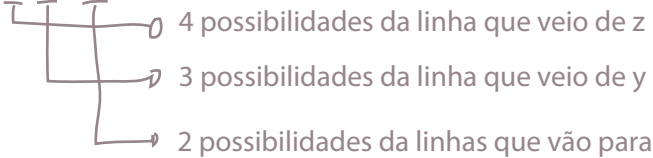
(z, w e u são variáveis mudas. Pense na expressão 93.1: eu poderia ter trocado a ordem de z, w e u sem mudar a posição dos "contratores" e há 3! ordenamentos para w, z e u - zwu, zuw, uzw, uwz, wzu)

Contrações no vértice z: 4 · 3

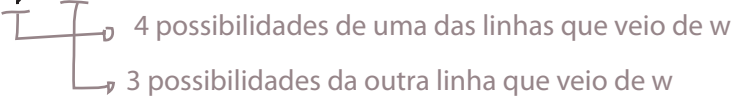
(temos 4 formas de conectar a linha que vem de x. Uma vez feito isto temos três forma de conectar os z's entre si. A linha que sobra vai para w)



Contrações no vértice w: 4 · 3 · 2



Contrações no vértice u: 4 · 3



(os dois campos que sobram só tem uma possibilidade)

Dupla contagem w vs. u: 1/2



$$3! (4 \cdot 3) (4 \cdot 3 \cdot 2) (4 \cdot 3) \frac{1}{2} = \frac{3! (4!)^3}{8} =$$

De forma que temos 10368 contrações diferentes que levam à mesma expressão 93.2. Note no entanto que este número quase exatamente cancela os fatoriais presentes em 93.2:

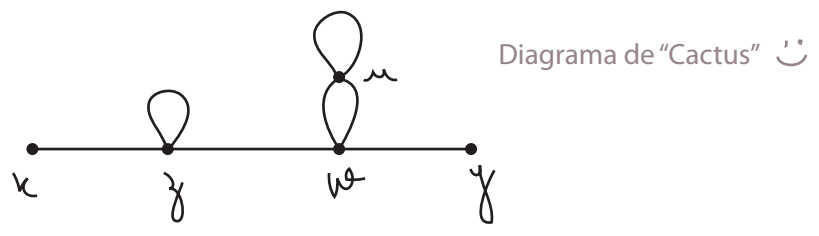
$$\left(\text{Soma sobre todas as contrações} \right) = + \frac{i\lambda}{8} \int d^4z \int d^4w \int d^4\mu D_F(x-z) D_F(y-w) D_F(z-z) D_F(z-w) D_F^2(w-\mu) D_F(\mu-\mu)$$

Este cancelamento não é tão impressionante se pensarmos a respeito:

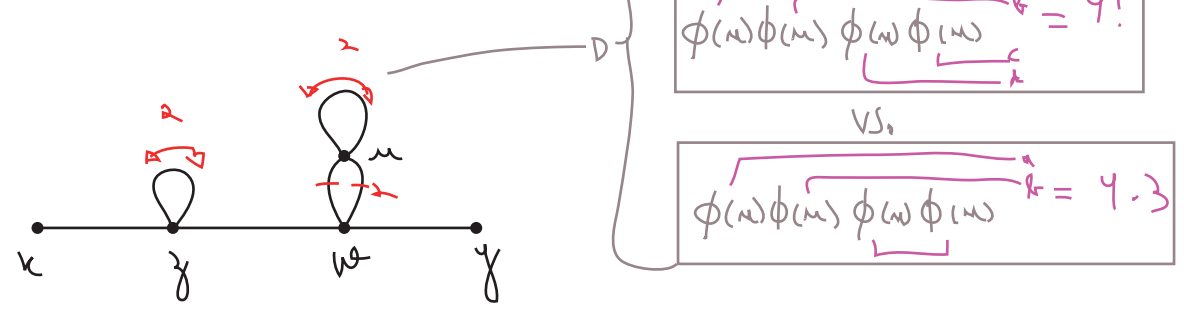
- (1) o fator 3! que vem da troca dos nomes dos pontos internos vai em geral cancelar com o 3! da série de Taylor da exponencial
- (2) cada um destes pontos internos tem 4 linhas saindo, e isso (inocentemente) nos dá um 4! para cada ponto interno, que cancela o 1/4! que está no Hamiltoniano de interação (de fato é por isso que definimos o Hamiltoniano com este 4!).

O ponto (2) acima não é totalmente verdade, **por conta das duplas contagens** e é isso que faz o cancelamento não ser exato e produz aquele "8" que sobrou no final. Isso quer dizer que simplesmente ignorando o 3! da série e os 4! do Hamiltoniano faremos uma sobrecontagem - que devemos dividir por um fator que dê conta das duplas contagens. Este fator que sobra é chamado de **Fator de Simetria** do diagrama e é nele que estamos interessados.

Como vemos este fator direto do diagrama? Baseado nos propagadores podemos desenhar:



E o fator de simetria vem de:



(pode ainda haver uma simetria por equivalência de dois pontos, mas esta não aparece neste diagrama)

$$S = 2 \times 2 \times 2 = 8 \quad \text{Fator de Simetria}$$

Voltando aos fatores da expressão 92.1:

$S = 8 \Rightarrow$

$$\frac{-i\lambda}{8} D_F(x_1-x_2) \int d^4z D_F(z-z) D_F(z-z)$$

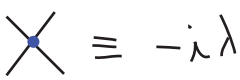
$S = 2 \Rightarrow$

$$\frac{-i\lambda}{2} \int d^4z D_F(x_1-z) D_F(z-z) D_F(z-x_2)$$

e isto aqui? $\rightarrow e^{-i\int \mathcal{H}} = \frac{-i\lambda}{4!} \phi^4$

para cada ponto interno terei um fator deste


O fator que resta vem de estabelecer uma regra para o **vértice** da teoria:


 $\equiv -i\lambda$

Vértice
(eq. 95.1)

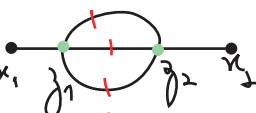
(note que o vértice é este ponto de onde saem 4 linhas, as linhas em si tem regras próprias dadas por 91.1)

E como este vértice é um ponto "interno" do diagrama, ele também contribui com uma integral em z . Para cada vértice no diagrama vai entrar um fator $(-i\lambda)$ e farei uma integral. Com isso, temos um conjunto de regras **para esta teoria** (campo escalar real com interação ϕ^4) que nos permite transformar um diagrama em uma expressão analítica:

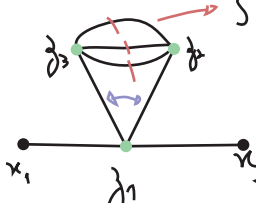
- (1) para cada propagador: $x_1 \text{---} x_2 = D_F(x_1 - x_2)$
- (2) para cada vértice:  $= (-i\lambda) \int d^4z$
- (3) para cada ponto externo: $x_1 \text{---} = \uparrow$ (isto é trivial aqui, mas não será assim na versão final das regras)
- (4) divida tudo pelo fator de simetria

Regras de Feynman (para func. de Green) de $\lambda\phi^4$ no espaço das posições (eq. 95.2)

Mais alguns exemplos:


 $= \frac{(-i\lambda)^2}{3!} \int d^4z_1 \int d^4z_2 D_F(x_1 - z_1) D_F(x_2 - z_2) D_F^3(z_1 - z_2)$

↳ 3! trocas de linhas

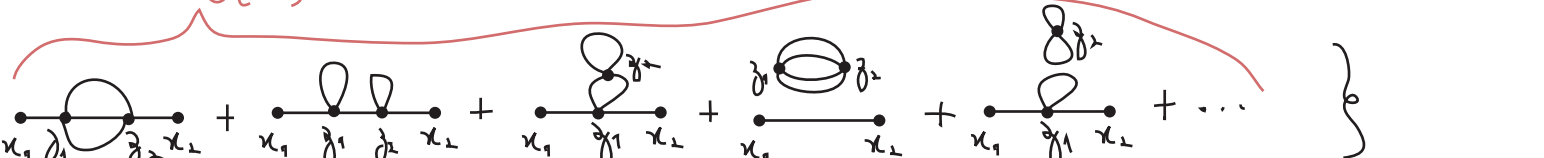

 $= \frac{(-i\lambda)^3}{3! \cdot 2} \int d^4z_1 d^4z_2 d^4z_3 D_F(x_1 - z_1) D_F(x_2 - z_2) D_F(z_1 - z_2) D_F(z_1 - z_3) D_F^3(z_2 - z_3)$

↳ $S = 3! \cdot 2$

Notando finalmente que para calcular uma dada função de n pontos, temos que somar sobre todos os diagramas possíveis até um certa ordem perturbativa:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - i\epsilon)} \frac{1}{N} \left\{ \underbrace{\text{---}}_{\mathcal{O}(\lambda^0)} + \underbrace{\text{---} \text{---}}_{\mathcal{O}(\lambda^1)} + \underbrace{\text{---} \text{---} \text{---}}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \dots \right\}$$

↳ $\mathcal{O}(\lambda^2)$



Em geral estamos interessados em calcular estes elementos no espaço dos momentos, não da posição, então é bem útil escrever as regras de Feynman também para os momentos. Note que:

eq. 67.1 $\Rightarrow D_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \underbrace{\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}}_{D_F(p)} e^{-ip(x-y)}$

note que podia ser (y-x) pois o sinal de p é arbitrário, a escolha é feita por consistência com as linhas externas. Da forma que está escrito o momento vai de y para x (veja no fim da pg 97)

e:

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | 0 \rangle = \theta(z_3 > z_1 > z_2) \langle 0 | \phi_3 \phi_1 \phi_2 \phi_4 | 0 \rangle + \dots$$

outros ordenamentos temp.

$$\int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p_3}}} a_{p_3}^\dagger e^{ip_3 z_3}$$

(eq. 88.2)

De forma que cada elemento no espaço das posições contém uma infinidade de possibilidades no espaço dos momentos

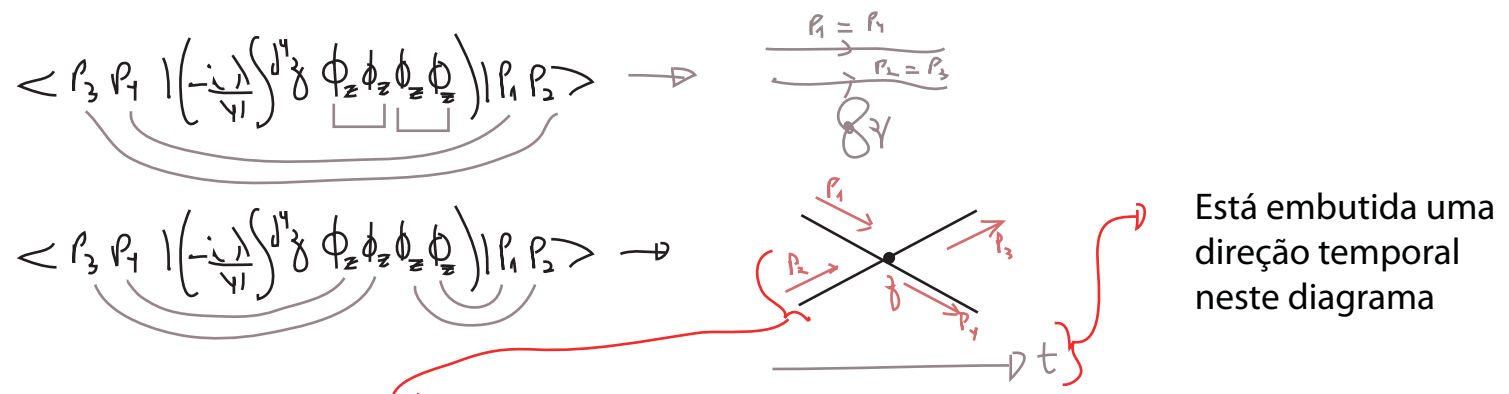
$$\langle 0 | \phi_3 \phi_1 \phi_2 \phi_4 | 0 \rangle \sim \int d^4 p_1 \int d^4 p_2 \int d^4 p_3 \int d^4 p_4 \langle p_3 p_1 | p_4 p_2 \rangle$$

queremos regras para estes (com escolha específica de p1 ... p4)

No caso de uma inserção da interação temos:

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \right) \} | 0 \rangle \sim \dots + \int \langle p_3 p_1 | \left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \right) | p_4 p_2 \rangle$$

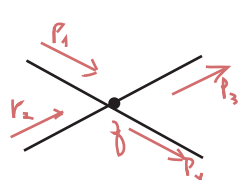
de novo há várias possibilidades do que pode ocorrer:



Note que esta linha vem até z de um ponto indeterminado, porque passamos da representação em x2 para uma em p2. Chamamos isto de **linha externa**.

$\phi^+ \phi^+ \phi^+ \phi^- = 0$
assim todos com número diferentes de criações e aniquilações

Suponha que estejamos interessados em:



Então: $\langle p_3 p_1 | (\phi_z^+ + \phi_z^-) (\phi_z^+ + \phi_z^-) (\phi_z^+ + \phi_z^-) (\phi_z^+ + \phi_z^-) | p_4 p_2 \rangle$

eq. 88.2

aniqu. (pointing to ϕ_z^-)
cria (pointing to ϕ_z^+)

4! formas de fazer isto

$$\begin{aligned} \phi_z^+ |P_1\rangle &= \int \frac{d^3 P_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{P_2}}} \underbrace{a_{P_2} e^{-iP_2 z}}_{\text{comut.}} \sqrt{2E_{P_1}} a_{P_1}^+ |0\rangle = \\ &= \int \frac{d^3 P_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{P_2}}} e^{-iP_2 z} \sqrt{2E_{P_1}} (2\pi)^3 \delta(P_2 - P_1) |0\rangle = e^{-iP_1 z} |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{eq. 97.1})$$

Da mesma forma:

$$\langle P_3 | \phi_z = \langle 0 | e^{iP_3 z} \quad (\text{eq. 97.2})$$

O que nos mostra que cada linha externa contribuirá com:



Ainda resta a integral em z:

$$\begin{aligned} &= \frac{(-i\lambda)}{4!} \int d^4 z e^{-iP_1 z} e^{-iP_2 z} e^{iP_3 z} e^{iP_4 z} = \\ &= \frac{(-i\lambda)}{4!} (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) \end{aligned}$$

4! formas de fazer isto

contribuição do vértice (a integração na posição do vértice garantiu conservação de momento no mesmo)

No caso de um diagrama mais complicado:

$$\begin{aligned} &= \langle P_3 P_4 | \underbrace{\left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z_1 \phi_{z_1} \phi_{z_1} \phi_{z_1} \phi_{z_1} \right)}_{4 \cdot 3} \underbrace{\left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z_2 \phi_{z_2} \phi_{z_2} \phi_{z_2} \phi_{z_2} \right)}_2 \underbrace{| P_1 P_2 \rangle}_{4 \cdot 3} = \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} D_F(k_1) D_F(k_2) e^{-i k_1 (z_1 - z_2)} e^{-i k_2 (z_2 - z_1)} e^{-i P_1 z_1} e^{-i P_2 z_1} e^{i P_3 z_2} e^{i P_4 z_2} \end{aligned}$$

escolho o sinal de k para manter a direção de momento igual a das linhas externas: $Exp[-ik_1 z_2]$ para momento entrando em z_2 e $Exp[ik_1 z_1]$ para momento saindo de z_1 .

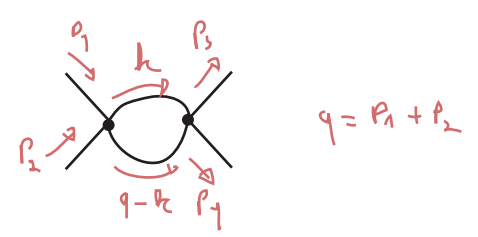
fator de simetria propagadores linhas externas

$$\begin{aligned} &= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 k_1}{k_1 = k} \frac{d^4 k_2}{P_1 + P_2 = q} \delta^4(-P_1 - P_2 + k_1 + k_2) \delta^4(-k_1 - k_2 + P_3 + P_4) D_F(k_1) D_F(k_2) \\ &\quad \delta^4(+k_2 - (q - k)) \end{aligned}$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int d^4k \delta^4(-k - (q-k) + p_3 + p_4) D_F(k) D_F(q-k) =$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2 (2\pi)^4}{2} \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k) D_F(p_1 + p_2 - k)$$

estou escrevendo assim pois logo vamos querer identificar \mathcal{M}



Podemos então escrever as regras para obter diretamente a expressão no espaço dos momentos (que não é da função de Green $G_n(x_1, \dots, x_n)$, nem de sua transformada de Fourier $\tilde{G}_n(p_1, \dots, p_n)$ mas sim para elementos do tipo $\langle p_1, p_2, \dots | p_3, p_4, \dots \rangle$)

- (1) para cada propagador de momento p: = $D_F(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
- (2) para cada vértice: = $-i\lambda$
- (3) para linha externa: = 1
- (4) imponha conservação de momento em cada vértice (re-escrevendo os momentos internos)
- (5) integre sobre cada momento não determinado: $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$
- (6) divida pelo fator de simetria
- (7) multiplique por: $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_\alpha)$ momentos externos

Regras de Feynman para $\langle p_1, p_2, \dots | p_3, p_4, \dots \rangle$ de $\lambda\phi^4$ no espaço dos momentos (eq. 98.1)

Mais alguns exemplos:

$$\text{Self-energy diagram} = (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2) \frac{(-i\lambda)}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k)$$

$$\text{Vertex correction diagram} \Rightarrow \text{renormalized vertex} = (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k) D_F(q-k)$$

$q = p_1 - p_3$

Conservação nos vértices: $p_1 = p_3 + k_2 + k$
 $p_2 + k_2 + k_1 = p_4$ } $p_1 - p_2 = q = p_1 - p_2 = k_2 + k$
 $k_2 = q - k$

Vamos deixar um pouco mais clara a diferença entre as regras do quadro 98.1 e as regras para

$$\tilde{G}_{n+m}(p_i, k_j) = \left(\prod_{i=1}^n \int d^4x_i e^{i p_i x_i} \right) \left(\prod_{j=1}^m \int d^4y_j e^{-i k_j y_j} \right) G(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m)$$

↙ ↘ partículas iniciais
↙ ↘ partículas finais

Considere o exemplo:

$$G(x_1, x_2) = \text{diagram} = \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4z_1 d^4z_2 D_F(z_1 - x_1) D_F(x_2 - z_2) D_F^3(z_2 - z_1)$$

Tomemos a sua transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(p_1, p_2) &= \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-i p_1 x_1} e^{i p_2 x_2} \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4z_1 d^4z_2 D_F(z_1 - x_1) D_F(x_2 - z_2) D_F^3(z_2 - z_1) = \\ &= \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-i p_1 x_1} e^{i p_2 x_2} \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4z_1 d^4z_2 \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} e^{-i p_3(z_1 - x_1)} D_F(p_3) \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} e^{-i p_4(x_2 - z_2)} D_F(p_4) \times \\ &\quad \times \int \frac{d^4p_5}{(2\pi)^4} e^{-i p_5(z_2 - z_1)} D_F(p_5) \int \frac{d^4p_6}{(2\pi)^4} e^{-i p_6(z_2 - z_1)} D_F(p_6) \int \frac{d^4p_7}{(2\pi)^4} e^{-i p_7(z_2 - z_1)} D_F(p_7) = \end{aligned}$$

$\int d^4x_1 \rightarrow \delta^4(-p_1 + p_3)$ $\int d^4x_2 \rightarrow \delta^4(p_2 - p_4)$

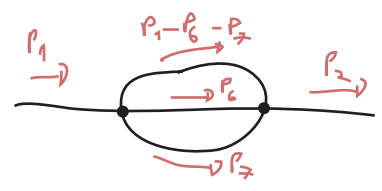
$$= \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4z_1 d^4z_2 e^{-i p_1 z_1} D_F(p_1) e^{i p_2 z_2} D_F(p_2) \int \int \int (\dots) =$$

$\int d^4z_1 \rightarrow \delta^4(-p_1 + p_5 + p_6 + p_7)$

$$= \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4z_2 D_F(p_1) D_F(p_2) e^{i p_2 z_2} e^{-i(p_1 - p_6 - p_7) z_2} \int \int D_F(p_1 - p_6 - p_7) (\dots) =$$

$\int d^4z_2 \rightarrow \delta^4(p_2 - p_1 + p_6 + p_7 - p_6 - p_7) = \delta^4(p_2 - p_1)$

$$= \frac{\lambda^2}{3!} D_F(p_1) D_F(p_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_1) \int \frac{d^4p_6}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_7}{(2\pi)^4} D_F(p_1 - p_6 - p_7) D_F(p_6) D_F(p_7)$$



Estes dois "propagadores externos" não pareceram nas regras de Feynman deduzidas anterior-

mente pois tratamos os estados iniciais e finais com mais detalhe (ainda que de forma heurística), como ondas planas. O jeito formal de obtê-las seria usando a fórmula de LSZ (eq. 74.3), que para este caso seria:

$$\begin{aligned} \langle \sum_{\text{out}} p_2 | p_1 \rangle_{\text{in}} &= \lim_{\substack{p_1 \rightarrow m^2 \\ p_2 \rightarrow m^2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{Z})^2} \cancel{(p_1^2 - m^2 + i\epsilon)} \cancel{(p_2^2 - m^2 + i\epsilon)} \times \right. \\ &\times \left. \frac{\lambda^2}{3!} \underbrace{D_F(p_1)}_{\frac{iZ}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon}} \underbrace{D_F(p_2)}_{\frac{iZ}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon}} (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_1) \int \frac{d^4 p_6}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_7}{(2\pi)^4} D_F(p_1 - p_6 - p_7) D_F(p_6) D_F(p_7) \right\} \\ \langle \sum_{\text{out}} p_2 | p_1 \rangle_{\text{in}} &= Z \frac{\lambda^2}{3!} (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_1) \int \frac{d^4 p_6}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_7}{(2\pi)^4} D_F(p_1 - p_6 - p_7) D_F(p_6) D_F(p_7) \end{aligned}$$

Que é o mesmo que obteríamos com as regras em 98.1, a menos de um fator $(\sqrt{Z})^n$, onde n é o número de linhas externas.

Note que isto não acontece somente neste exemplo de 2 pontos. Essencialmente o que a fórmula de LSZ faz é remover as singularidades que a função tinha por conta das linhas externas (as singularidades nas linhas internas são contornáveis pois os momentos destas estão integrados). Lembrando que $Z = 1$ em primeira ordem de perturbação, podemos usar as regras de 98.1 diretamente para elementos da matriz S nesta ordem. Lembrando ainda que (pg 76):

$$\langle \sum_{\text{out}} p_j | \{k_i\} \rangle_{\text{in}} = i \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^4(\sum k_i - \sum p_j)$$

Podemos esquecer a regra 7 de 98.1 para obter **regras de Feynman diretamente para $i\mathcal{M}$**

No exemplo acima:

$$i\mathcal{M} = Z \frac{\lambda^2}{3!} \int \frac{d^4 p_6}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_7}{(2\pi)^4} D_F(p_1 - p_6 - p_7) D_F(p_6) D_F(p_7)$$

Com isso temos um conjunto de regras completo, mas cabem alguns comentários para amarrar as pontas soltas. Primeiramente note que, na eq. 88.1, estamos dizendo que todos estes correlatores serão calculados para:

$$T \rightarrow \infty (1 - i\epsilon)$$

(eq. 88.1)

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \prod_I \psi(x_i) \dots \prod_I \psi(x_n) \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t)] \} | 0 \rangle}$$

Isto significa que todas as integrais dos vértices não vão ser simples integrais em d^4z , mas sim:

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \int_{-T}^T d^3z \int d^3z e^{i(p_1 + \dots + p_n)z} \propto \lim_{T \rightarrow \infty} \left[e^{i(p_1 + \dots + p_n)^0 (T - \lambda \epsilon T)} - e^{i(p_1 + \dots + p_n)^0 (-T + \lambda \epsilon T)} \right]$$

$$\propto \lim_{T \rightarrow \infty} \left(e^{+\epsilon (p_1 + \dots + p_n)^0 T} - e^{-\epsilon (p_1 + \dots + p_n)^0 T} \right)$$

Uma destas exponenciais explode (qual delas depende do sinal de q^0)

Para resolver isto podemos impor que q^0 tenha uma parte imaginária (também pequena e proporcional a ϵ) porque então:

$$q^0 \rightarrow q^0(1+i\epsilon) \Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} e^{i q^0 (\pm T \mp \lambda \epsilon T)} \rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Exp} \left[\pm i q^0 T (1 + \epsilon^2) \right]$$

oscilatória

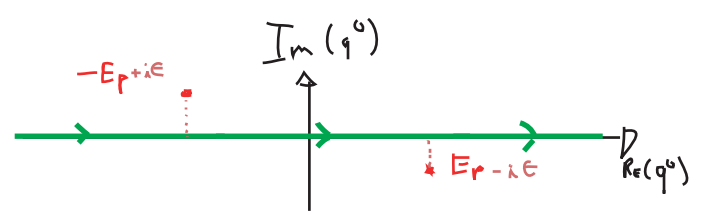
$i q^0 T (1+i\epsilon)(\pm 1 \mp \lambda \epsilon) = i q^0 T (\pm 1 \mp \lambda \epsilon \mp \lambda \epsilon \pm \epsilon^2)$
 note que inverter este sinal estragaria tudo

De fato isto é totalmente consistente com o que já vínhamos fazendo, pense de onde vêm estas exponenciais dentro das integrais dos vértices:

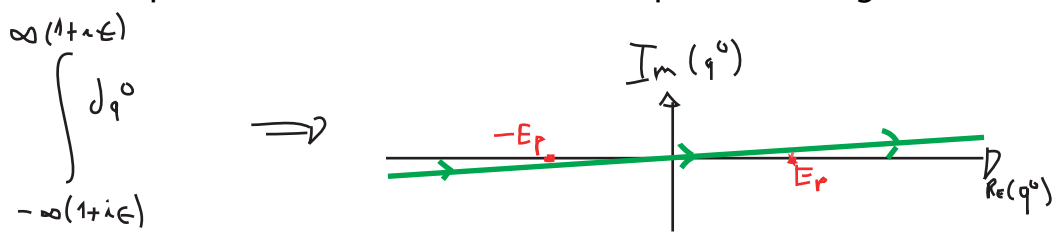
- (1) De linha externas (veja eqs. 97.1 e 97.2): neste caso não há restrição alguma sobre os momentos e podemos tomá-los imaginários e, depois de integrar, tomar o limite $\epsilon \rightarrow 0$
- (2) Dos propagadores de Feynman (veja, por exemplo, o expressão do diagrama na segunda metade da pg 97). Neste caso devemos lembrar que o propagador no espaço dos momentos é:

$$D_F(q) = \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$$

e que q^0 está sendo integrado no caminho (pg 67):



acontece que isto é exatamente o mesmo que fazer o seguinte caminho:



o que dá para q^0 exatamente a parte imaginária de que precisávamos. Isto mostra que o aparecimen-

to dos propagadores de Feynman no teorema de Wick não é uma coincidência, mas está intrinsecamente ligado ao limite que tomamos no tempo para poder projetar o vácuo livre da teoria no vácuo da teoria completa na página 85. Aqui podemos finalmente entender porque escolhemos, na definição do propagador de Feynman (eq 67.1), os polos E_p e $-E_p$ respectivamente abaixo e acima do eixo real, a escolha contrária geraria divergências aqui.

Ignoramos outros dois pontos importantes, um deles está relacionado a "bolhas no vácuo". Considere os dois dos diagramas de ordem λ^2 para a função de dois pontos no fim da página 95:

(A)

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4z_1 d^4z_2 D_F(x_1 - z_1) D_F(z_1 - x_2) D_F^2(z_1 - z_2) D_F(z_2 - z_1)$$

(B)

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{16} \int d^4z_1 d^4z_2 D_F(x_1 - z_1) D_F(z_1 - x_2) D_F(z_1 - z_2) D_F^2(z_2 - z_1)$$

(A)

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4z_1 d^4z_2 e^{-i z_1 p_1} e^{i z_1 p_2} \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^{12}} D_F(k_1) D_F(k_2) D_F(k_3) e^{i k_1 (z_1 - z_2)} e^{i k_2 (z_1 - z_2)} =$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^4} \delta^4(-p_1 + p_2 + k_1 + k_2) \delta^4(k_1 + k_2) D_F(k_1) D_F(k_2) D_F(k_3) =$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{4} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2) \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} D_F(k_2) D_F(-k_2) \int \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} D_F(k_3)$$

(B)

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{16} \int d^4z_1 d^4z_2 e^{-i z_1 p_1} e^{i z_1 p_2} \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^{12}} D_F(k_1) D_F(k_2) D_F(k_3) e^{i k_1 \cdot 0} e^{i k_2 \cdot 0} e^{i k_3 \cdot 0} =$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{16} \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^8} \delta^4(-p_1 + p_2) D_F(k_1) D_F(k_2) D_F(k_3) \underbrace{\int d^4z_2}_{(2T) \cdot V = \infty}$$

$(2\pi)^4 \delta(0)$

Isto sempre vai acontecer com diagramas desconectados de linhas externas (as tais bolhas no vácuo):

$$\sim \int d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 \delta^4(k_2+k_3) \delta^4(k_2+k_3) \mathcal{D}_F(k_1) \mathcal{D}_F(k_2) \mathcal{D}_F(k_3) \mathcal{D}_F(k_1)$$

$$\int d^4k_3 \delta^4(0) \mathcal{D}_F(k_2) \mathcal{D}_F(-k_2)$$

O outro detalhe que ignoramos foi o denominador de 88.1:

$$\langle 0 | T \left\{ \text{Exp} \left[-i \int_T dt H_{\text{int}}(t) \right] \right\} | 0 \rangle$$

Que de fato só contém bolhas (note que ele não depende de nenhum dos pontos externos, que vão todos no numerador). Para ver como os dois problemas se resolvem, basta notar que podemos separar as bolhas da parte **conectada a linhas externas** do diagrama:

$$\left(\text{tadpole with bubble} \right) = \left(\text{line with bubble} \right) \left(\text{bubble} \right)$$

$$\frac{(-i\lambda)^2}{16} \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^8} \delta^4(-p_1+p_2) \mathcal{D}_F(k_1) \mathcal{D}_F(k_2) \mathcal{D}_F(k_3) (2\pi)^4 \delta(0) =$$

$$= \left[\frac{(-i\lambda)}{2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1-p_2) \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \mathcal{D}_F(k_1) \right] \left[\frac{(-i\lambda)}{8} (2\pi)^4 \delta(0) \int \frac{d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^8} \mathcal{D}_F(k_2) \mathcal{D}_F(k_3) \right]$$

O numerador vai conter justamente diagramas conectados as pernas externas multiplicados por uma soma de todas as bolhas possíveis. Por exemplo, no caso de dois pontos:

$$\langle 0 | T \left\{ \phi_1 \phi_2 \text{Exp} \left[-i \int_T dt H_{\text{int}}(t) \right] \right\} | 0 \rangle = \left(x_1 \text{---} x_2 \right) \left(1 + \underbrace{\text{bubble}}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \underbrace{\text{tadpole}}_{\mathcal{O}(\lambda)} + \underbrace{\text{tadpole with bubble}}_{\mathcal{O}(\lambda^3)} + \text{tadpole with 2 bubbles} + \text{tadpole with 3 bubbles} + \dots \right) +$$

$$+ \left(x_1 \text{---} \text{bubble} \text{---} x_2 \right) \left(1 + \underbrace{\text{bubble}}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \underbrace{\text{tadpole}}_{\mathcal{O}(\lambda)} + \underbrace{\text{tadpole with bubble}}_{\mathcal{O}(\lambda^3)} + \text{tadpole with 2 bubbles} + \text{tadpole with 3 bubbles} + \dots \right) + \dots$$

$$\left(\underbrace{\text{bubble}}_{V_1} + \underbrace{\text{tadpole}}_{V_2} + \underbrace{\text{tadpole with bubble}}_{\frac{1}{2!} (V_1)^2} + \underbrace{\text{tadpole with 2 bubbles}}_{V_3} + \frac{1}{3!} V_1^3 + V_1 V_2 + V_1 V_3 + \frac{V_1^4}{4!} + \frac{V_2^2}{2!} + \frac{V_1^2 V_2}{2!} + \dots \right)$$

fator de simetria

Qualquer diagrama específico nesta longa soma vai ser portanto da forma:

$$\left(\text{diagrama conectado} \right) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \dots \left(\text{diagrama} \right) \rightarrow \begin{matrix} n_1=2 \\ n_2=0 \\ n_3=1 \end{matrix} \rightarrow \{n_i\} = \{2, 0, 1, 0, 0, \dots\}$$

$$\begin{aligned} \therefore \langle 0|T\{\phi_1 \phi_2 \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{I}}(t)]\}|0\rangle &= \sum_{\text{conectados}} \left\{ \sum_{\{n_i\}} (\text{diagrama conectado}) \prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right\} = \\ &\quad \text{incluindo } \{0,0,0, \dots\} \\ &= \sum_{\text{conectados}} (\text{diagrama conectado}) \cdot \sum_{\{n_i\}} \left(\prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right) = \\ &\quad \left(1 + V_1 + V_2 + V_3 + \frac{1}{2!} V_1^2 + V_3 + \frac{1}{3!} V_1^3 + V_1 V_2 + V_1 V_3 + \frac{V_1^2 V_2}{2!} + \dots = \left(1 + V_1 + \frac{V_1^2}{2!} + \dots \right) \left(1 + V_2 + \frac{V_2^2}{2!} + \dots \right) \dots \right) \\ &= \sum_{\text{conectados}} (\text{diagrama conectado}) \cdot \left(\sum_{n_1} \frac{1}{n_1!} (V_1)^{n_1} \right) \left(\sum_{n_2} \frac{1}{n_2!} (V_2)^{n_2} \right) \left(\sum_{n_3} \frac{1}{n_3!} (V_3)^{n_3} \right) \dots = \\ &= \sum_{\text{conectados}} (\text{diagrama conectado}) \prod_{i=1} \left(\sum_{n_i} \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right) = \sum_{\text{conectados}} (\text{diagrama conectado}) \prod_{i=1} e^{V_i} \end{aligned}$$

$$\langle 0|T\{\phi_1 \phi_2 \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{I}}(t)]\}|0\rangle = \sum_{\text{conectados}} (\text{diagrama conectado}) e^{\sum_i V_i} \quad (\text{eq. 104.1})$$

$$\langle 0|T\{\phi_1 \phi_2 \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{I}}(t)]\}|0\rangle = \left(x_1 \text{---} x_2 + x_1 \text{---} \bigcirc \text{---} x_2 + x_1 \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} x_2 + \dots \right) \times \text{Exp} \left[\bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \dots \right]$$

Claramente o mesmo vale para funções de mais pontos (aumentar o número de pontos externos só torna os diagramas conectados mais complicados, a soma das bolhas fica a mesma.

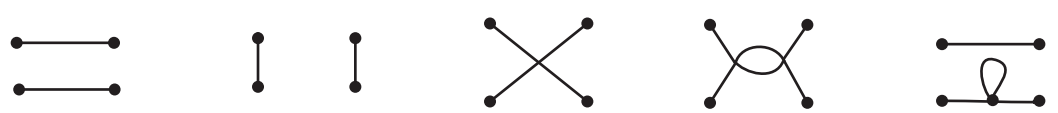
No caso do denominador, a lógica é a mesma, só que não há diagramas desconectados:

$$\langle 0|T\{\text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{I}}(t)]\}|0\rangle = \underbrace{\langle 0|0\rangle}_1 \text{Exp} \left[\bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \dots \right]$$

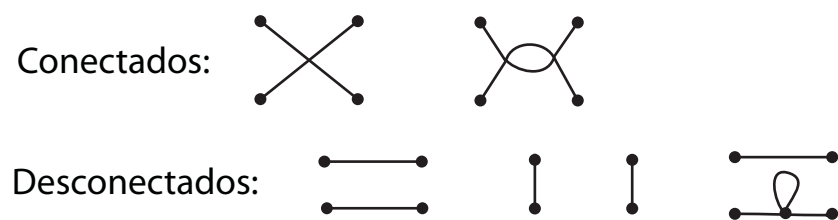
Logo a exponencial das bolhas é cancelada entre numerador e denominador, fazendo:

$$\langle \Omega|T\{\phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n)\}|\Omega\rangle = \sum_{\substack{\text{diagrama} \\ \text{conectado} \\ \text{a linhas externas}}} (\text{diagrama conectado}) \quad (\text{eq. 104.2})$$

Uma observação final sobre notação, aqui usamos "diagramas conectados" para denominar diagramas que estejam ligados aos pontos externos, e.g.:



Usaremos, com muito mais frequência, uma outra definição para “conectado” - querendo dizer que o diagrama conecta todos os pontos externos entre si. Nesta nova definição, os diagramas acima ficam divididos entre:



Ambos conjuntos entram na soma da eq. 104.2, somente as bolhas do vácuo foram realmente canceladas pelo denominador.

Com estes resultados em mãos já conseguimos calcular quaisquer correladores na teoria $\lambda\phi^4$. Daremos uns passos atrás para ver como obteríamos estes mesmos resultados usando a quantização por integrais de trajetória.

Quantização do Campo Escalar por Path Integrals

(Nastase 9, Peskin 9.2, Ryder 6.1 a 6.5, Ramond 3.1 e 3.2)

Usaremos as idéias usadas no oscilador harmônico para quantizar o campo escalar usando integrais de trajetória. Resumindo, o caminho mais curto e seguro que encontramos para quantizar o oscilador harmônico forçado foi:

- (1) Escrever uma função de partição do sistema como uma integral de trajetória, sobre um caminho fechado, no espaço Euclidiano (esta integral é bem definida e não tem bordas para criar problemas)
- (2) Para projetar sobre os estados do vácuo, tomamos $\beta \rightarrow 0$ (período infinito na integral de traj.)
- (3) Rodamos o resultado para o espaço físico (de Minkowski), tomando cuidado de não tocar os polos (o que nos leva invariavelmente a um propagador de Feynman)

Para passar para uma teoria de campos, faremos a substituição:

$$q_\mu(t) \rightarrow \phi_{\vec{x}}(t) \equiv \phi(\vec{x}, t) \equiv \phi(x)$$

↑ tem uma discretização do espaço aqui

A ação do campo escalar, no espaço de Minkowski, é:

$$i S[\phi] = i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \right]$$

e as funções de n pontos:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) \} | \Omega \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{i S[\phi]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n)$$

informações sobre o estado (eg. $|\Omega\rangle$ vs $|\Omega\rangle$ ou vácuo vs estado excitado) estão na ação usada e nas condições de contorno da integral

e estas podem ser obtidas a partir de integrais de trajetória sobre trajetórias periódicas de período infinito, usando a seguinte ação Euclidiana:

$$-S_E[\phi] = - \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + V(\phi) \right] \quad (\text{eq. 106.1})$$

(todos os índices "E" foram suprimidos)

EUCLID: $a_\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a_\mu b_\nu \delta^{\mu\nu}$

$x^0 = x_0 \equiv -i x^1 \quad x^1 = x_1 = t_E$

$x^i = i x^0$

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^0} \frac{\partial \phi}{\partial x^0} - \partial_i \phi \partial_i \phi = - \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} - \partial_i \phi \partial_i \phi = - \partial_\mu^E \phi \partial_\mu^E \phi$$

As funções de Green Euclidianas são:

$$G_n^{(E)}(x_1, \dots, x_n) = \int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_E[\phi]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n)$$

Podemos escrever o funcional gerador / função de partição para um período β :

$$Z[\beta, J] = \text{Tr} \{ e^{-\beta \hat{H}_3} \} = \int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_E[\phi] + J\phi}$$

$\phi(\vec{x}, t_E + \beta) = \phi(\vec{x}, t_E)$

$J\phi = \int d^4x \ J(x)\phi(x)$

$\beta \rightarrow \infty$

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_E[\phi] + J\phi} \equiv \langle 0|0 \rangle_J \quad (\text{eq. 107.1})$$

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z[J] \Big|_{J=0} \quad (\text{eq. 107.2})$$

e (por definição):

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \prod_{i=1}^n d^4x_i \ G_n(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) \quad (\text{eq. 107.3})$$

Teoria de Perturbação

Vamos assumir agora que este campo tem uma interação tratável em teoria de perturbação, e fazer a divisão usual:

$$S[\phi] = S_0[\phi] + S_I[\phi]$$

A funções de Green no espaço dos momentos são:

$$\tilde{G}_n(p_1, \dots, p_n) = \int d^4x_1 \dots d^4x_n \ e^{i(p_1x_1 + \dots + p_nx_n)} G_n(x_1, \dots, x_n)$$

Qualquer teoria que seja invariante por translações (ou seja, que conserve momento e energia):

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = G_n(x_1 - X, x_2 - X, \dots, x_n - X)$$

escolhendo: $X = x_1$ e mudando as integrais: $x_i \rightarrow x_i + x_1 \quad i \geq 2$

$$\tilde{G}_n(p_1, \dots, p_n) = \left[\int d^4x_1 \ e^{ix_1(p_1 + \dots + p_n)} \right] \left[\int d^4x_2 \dots d^4x_n \ e^{i(x_2p_2 + \dots + x_np_n)} G_n(0, x_2, \dots, x_n) \right]$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) G_n(p_1, \dots, p_n)$$

tendo em mente que a dependência de p_1 entra por meio da soma dos outros momentos $p_1 = p_2 + \dots + p_n$
 nestas funções a conservação de momento já está garantida

Um resultado importante, chamado de fórmula de Dyson, pode ser obtido começando com o VEV (valor esperado no vácuo) de operadores **quaisquer** no vácuo da teoria livre:

$$\langle 0 | \hat{O}[\{\hat{\phi}\}] | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi]} \mathcal{O}[\{\phi\}]$$

vácuo da teoria livre
 deste lado a informação vácuo está no fato de tomarmos configurações periódicas $\phi(\vec{x}, t_E + \beta) = \phi(\vec{x}, t_E)$ com β infinito e sabemos que é o vácuo da teoria livre pois usamos S_0 na função de partição

Suponha que: $\hat{O} = e^{-S_I[\phi]}$

temos então: $\langle 0 | e^{-S_I[\phi]} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi]}$ (eq. 108.1)

e se: $\hat{O} = \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) e^{-S_I[\phi]}$

$$\langle 0 | \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) e^{-S_I[\phi]} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) = G_n(x_1, \dots, x_n)$$

(lembre que quando rodarmos de volta para o espaço de Minkowski vamos obter o ordenamento temporal) (eq. 108.2)

finalmente, se: $\hat{O} = e^{-S_I[\phi]} e^{\int d^4x \mathcal{J}(x) \phi(x)}$

$$\langle 0 | e^{-S_I[\phi]} e^{\int d^4x \mathcal{J}(x) \phi(x)} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi] + \mathcal{J} \cdot \phi} = Z[\mathcal{J}]$$

Fórmula de Dyson (eq. 108.3)

Solução da Teoria Livre

Para $S_I[\phi] = 0$

$$Z_0[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] + \mathcal{J} \cdot \phi} = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x [\partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2] + \mathcal{J} \cdot \phi \right\}$$

$$= \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x \phi \left[-\partial_\mu \partial_\mu + m^2 \right] \phi + \mathcal{J} \cdot \phi \right\}$$

Note que:

$$-\frac{1}{i} (\phi - J \cdot \Delta) \cdot \Delta^{-1} \cdot (\phi - \Delta \cdot J) = -\frac{1}{2} \phi \Delta^{-1} \phi + \underbrace{\frac{1}{2} \phi \cdot J + \frac{1}{2} J \cdot \phi}_{J \cdot \phi} - \underbrace{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}_{\text{sobrando}}$$

Logo:

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{i} (\phi - J \cdot \Delta) \cdot \Delta^{-1} \cdot (\phi - \Delta \cdot J) + \frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J \right\} =$$

ϕ' ($\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$)

$$= e^{\frac{1}{2} J \Delta J} \int \mathcal{D}\phi' e^{-\frac{1}{2} \phi' \Delta^{-1} \phi'} \quad (\text{eq. 107.1})$$

$\langle 0|0 \rangle_0$

$Z_0[J] = e^{\frac{1}{2} J \Delta J} \langle 0|0 \rangle_0$

(eq. 109.1)
 $Z_0[0] = \langle 0|0 \rangle_0 = 1$ (normalização)

O propagador é tal que: $\Delta^{-1} = -\partial_\mu \partial_\mu + m^2$

e portanto:

$\Delta(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{i p(x-y)}}{p^2 + m^2}$

(eq. 109.2)

que não tem polos. A rotação de volta para Minkowski, assim como no caso do oscilador forçado (pg 47) leva a polos ($|p| = \pm i m$), então a rotação feita em p^0 deve ser de $(\pi/2 - \epsilon)$ ao invés de $(\pi/2)$:

$$p_E^0 = e^{-i(\frac{\pi}{2} - \epsilon)} p^0 = -i(p^0 + i\epsilon)$$

$$p_E^2 + m^2 = (p_E^0)^2 + (\vec{p}^T)^2 + m^2 = -(p^0 + i\epsilon)^2 + (\vec{p}^T)^2 + m^2 = -\underbrace{(p^0)^2}_{-p_\mu p^\mu} + (\vec{p}^T)^2 + m^2 - i\epsilon = -p^2 + m^2 - i\epsilon$$

e obtemos (agora tudo no espaço de Minkowski):

$\epsilon \cdot x_\epsilon = p_\mu x_\mu + \vec{p} \cdot \vec{x} = (-i p^0)(i x^0) + \vec{p} \cdot \vec{x} \rightarrow -p_\mu x^\mu$

$\Delta(t_E = it, \vec{x}; y=0) = \mathcal{D}_F(t, \vec{x}) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-i p x}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

(eq. 109.3)

Teorema de Wick:

Vejamos que forma toma o teorema de Wick neste formalismo. Considere a função:

$$F[\phi] = \phi^2(x_1) \phi(x_2) \phi^4(x_3)$$

$$\langle 0 | F[\phi] | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi]} \phi^2(x_1) \phi(x_2) \phi^4(x_3)$$

Note que: $\frac{\delta}{\delta J(x_1)} e^{J \cdot \phi} = e^{J \cdot \phi} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left(\int d^4x J(x) \phi(x) \right) = e^{J \cdot \phi} \phi(x_1)$

$J \cdot \phi = \int d^4x J(x) \phi(x)$

$\frac{\delta J(x)}{\delta J(x_1)} = \delta^4(x - x_1)$

Logo:

$$\langle 0 | F[\phi] | 0 \rangle = \left(\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right)^2 \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \left(\frac{\delta}{\delta J(x_3)} \right)^4 \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] + J \cdot \phi} \Big|_{J=0}$$

$Z_0[J=0]$ teoria livre

Podemos, de fato, fazer o mesmo para uma função arbitrária (caso ela não seja um polinômio, podemos considerar que está definida por sua série de potências):

$$\langle 0 | F[\phi] | 0 \rangle_J = F \left[\left\{ \frac{\delta}{\delta J} \right\} \right] Z_0[J] \quad (\text{eq. 110.1})$$

Voltando então na fórmula de Dyson (eq. 108.3), temos:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi] + J \cdot \phi} = \langle 0 | e^{-\int d^4x V(\phi(x))} | 0 \rangle_J$$

$F[\phi]$

$$Z[J] = e^{-\int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} Z_0[J] = e^{-\int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \quad (\text{eq. 110.2})$$

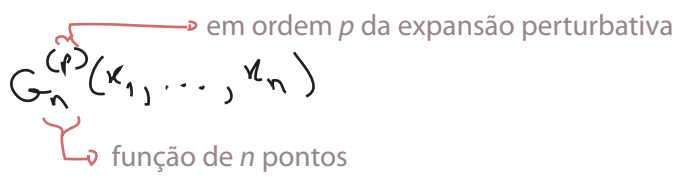
(compare com 88.1 - esta expressão gera correladores essencialmente iguais ao numerador do lado direito daquela equação)

interação **parte livre (Δ é o propagador da teoria livre)**

Não é muito óbvio, mas este é o teorema de Wick no formalismo de integrais de trajetória. De novo temos uma solução exata da teoria interagente (neste caso a função de partição), mas esta só é útil se pudermos expandir a exponencial da interação e truncar a expansão, ou seja, em teoria de perturbação.

Regras de Feynman

Para perceber que a equação 110.2 é de fato equivalente ao teorema de Wick, vamos calcular algumas funções de green usando-a. Definindo a notação:



Podemos obter estas funções a partir do funcional gerador, também calculado até alguma ordem em teoria de perturbação:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Z}[J] &= e^{-\int d^4x V(\frac{\delta}{\delta J(x)})} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \\
 &= \left[1 - \int d^4x V(\frac{\delta}{\delta J(x)}) + \frac{1}{2!} \left(\int d^4x V(\frac{\delta}{\delta J(x)}) \right)^2 + \dots \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \\
 &\equiv \mathbb{Z}_0[J] + \mathbb{Z}_1[J] + \mathbb{Z}_2[J] + \dots \quad (\text{eq. 111.1})
 \end{aligned}$$

$$G_n^{(p)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \mathbb{Z}_p[J] \Big|_{J=0} \quad (\text{eq. 111.2})$$

O objeto mais simples que podemos calcular é:

$$\begin{aligned}
 G_1^{(0)}(x_1)_J &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left\{ \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' J(x) \Delta(x, x') J(x') \right\} = \\
 &= e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \left\{ \delta^4(x-x_1) \Delta(x, x') J(x') + \underbrace{J(x) \Delta(x, x') \delta^4(x'-x_1)}_{\dots} \right\} = \\
 &= e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \int d^4x \underbrace{\Delta(x_1, x) J(x)}_{(\Delta \cdot J)(x_1)} = \\
 &= (\Delta \cdot J)(x_1) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} e^{\int d^4x' \dots} = \int d^4x' \dots e^{\int d^4x' \dots}$$

que, para $J=0$, é nula: $G_1^{(0)}(x_1) = 0$ (eq. 111.3)

É fácil ver que todas as funções com um número ímpar de pontos são nulas, pois temos dois J 's em Z e fazendo um número ímpar de derivadas vai sobrar sempre um J multiplicando tudo, o que anula a função quando fazemos $J = 0$.

$$k = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow G_{2k+1}^{(0)}(x_1, \dots, x_{2k+1}) = 0 \quad (\text{eq. 112.1})$$

A função de 2 pontos fica:

$$G_2^{(0)}(x_1, x_2)_J = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \underbrace{\frac{\delta}{\delta J(x_2)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}}_{G_1^{(0)}(x_2)_J} = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left[(\Delta \cdot J)(x_2) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right] =$$

$$\frac{\delta}{\delta J(x_1)} (\Delta \cdot J)(x_2) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \int d^4 x \Delta(x, x_2) J(x) = \int d^4 x \Delta(x, x_2) \delta(x - x_1) = \Delta(x_1, x_2)$$

$$= \Delta(x_1, x_2) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} + (\Delta \cdot J)(x_2) (\Delta \cdot J)(x_1) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$$

$\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left(\overset{\circ}{x_2} \text{---} \overset{\circ}{x_1} \right) = \overset{\circ}{x_2} \text{---} \overset{\circ}{x_1}$

$\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} e^{\overset{\circ}{x_1} \text{---} \overset{\circ}{x_2}} = \left(\overset{\circ}{x_2} \text{---} \overset{\circ}{x_1} + \overset{\circ}{x_1} \text{---} \overset{\circ}{x_2} \right) e^{\overset{\circ}{x_1} \text{---} \overset{\circ}{x_2}}$

$J = 0 \Rightarrow G_2^{(0)}(x_1, x_2) = \Delta(x_1, x_2) \leftrightarrow \overset{\circ}{x_1} \text{---} \overset{\circ}{x_2}$

A função de 3 pontos é zero, como já adiantamos, pois:

$$G_3^{(0)}(x_1, x_2, x_3)_J = \frac{\delta}{\delta J(x_3)} G_2^{(0)}(x_1, x_2)_J = \left[\Delta(x_1, x_2) (\Delta \cdot J)(x_3) + \Delta(x_2, x_3) (\Delta \cdot J)(x_1) + \Delta(x_1, x_3) (\Delta \cdot J)(x_2) + (\Delta \cdot J)(x_2) (\Delta \cdot J)(x_1) (\Delta \cdot J)(x_3) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$$

(J = 0)

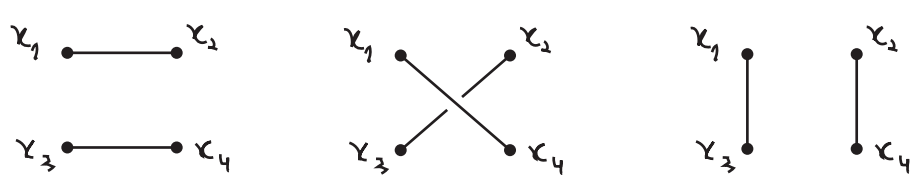
A próxima função não trivial é (exercício): $\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left[\overset{\circ}{x_1} \text{---} \overset{\circ}{x_2} \text{---} \overset{\circ}{x_3} \text{---} \overset{\circ}{x_4} \right] = \overset{\circ}{x_1} \text{---} \overset{\circ}{x_2} \text{---} \overset{\circ}{x_3} \text{---} \overset{\circ}{x_4}$

$$G_4^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_4)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} =$$

$$= \Delta(x_1, x_2) \Delta(x_3, x_4) + \Delta(x_1, x_3) \Delta(x_2, x_4) + \Delta(x_1, x_4) \Delta(x_2, x_3)$$

(eq. 112.2)

Que, em diagramas, é exatamente o mesmo que obtivemos na pg 91:



de onde fica claro que a lógica por trás do Teorema de Wick (conectar os pontos externos de todas as formas possíveis) aqui é implementada pela regra do produto da derivada.

Passemos para o caso com interação, considerando agora a teoria $\lambda\phi^3$:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{3!} \phi^3 \quad (\text{note que só queremos ver como saem as regras de Feynman, esta teoria é problemática pois o potencial não tem mínimo global, e energias infinitamente negativas são permitidas})$$

Em ordem λ , temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_1[J] &= - \int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = - \int d^4x \frac{\lambda}{3!} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = \\ &= - \frac{\lambda}{3!} \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^2 \left[(\Delta \cdot J)(x) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right] = - \frac{\lambda}{3!} \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) \left[\Delta(x, x) + (\Delta \cdot J)^2(x) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = \\ &= - \frac{\lambda}{3!} \int d^4x \left[\Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) + \Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) + (\Delta \cdot J)(x) \Delta(x, x) + (\Delta \cdot J)^3(x) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = \\ &= - \frac{\lambda}{3!} \int d^4x \left[3 \Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) + (\Delta \cdot J)^3(x) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \quad (\text{eq. 113.1}) \end{aligned}$$

Note que este funcional gerador agora tem sempre potências ímpares de J , de forma que as funções de n pontos serão nulas para n par:

$$G_{2k}^{(1)}(x_1, \dots, x_{2k}) = 0 \quad (\text{eq. 113.2})$$

A função de 1 ponto é dada por:

$$\begin{aligned} G_1^{(1)}(x_1) &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \mathbb{Z}_1[J] \Big|_{J=0} = - \frac{\lambda}{3!} \int d^4x \left[3 \Delta(x, x) \Delta(x, x_1) + 3 \Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) (\Delta \cdot J)(x_1) + \right. \\ &\quad \left. + 3 \Delta(x, x_1) (\Delta \cdot J)(x) + (\Delta \cdot J)^3(x) (\Delta \cdot J)(x_1) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \Big|_{J=0} = \\ &= - \frac{\lambda}{2} \int d^4x \Delta(x, x) \Delta(x, x_1) \end{aligned}$$

cujo diagrama é:

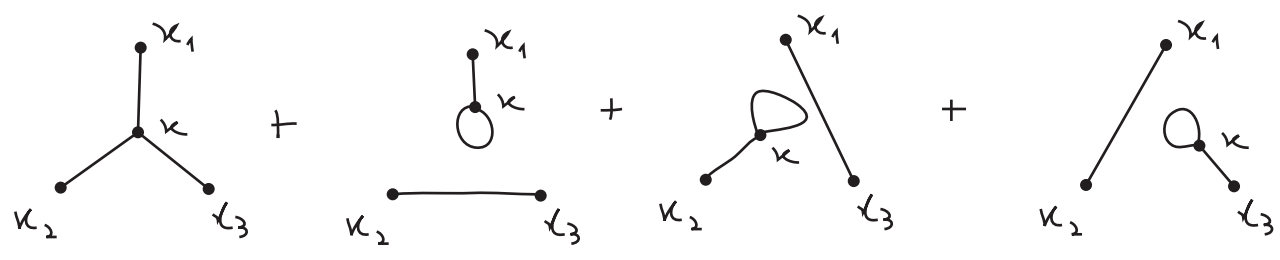


A função de 2 pontos dá zero (cheque!) e a função de 3 pontos é:

$$G_3^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \frac{\delta}{\delta J(x_3)} Z_1[J] \Big|_{J=0} =$$

$$= -\lambda \int d^4x \left\{ \Delta(x, x_1) \Delta(x, x_2) \Delta(x, x_3) + \frac{1}{2} \Delta(x, x) [\Delta(x, x_1) \Delta(x, x_3) + \Delta(x, x_2) \Delta(x, x_3) + \Delta(x, x_3) \Delta(x, x_2)] \right\}$$

que em diagramas fica:



Podemos obter as bolhas no vácuo calculando diretamente a função de 0 pontos, dada pelo próprio funcional gerador (pois fazemos zero derivadas), que em segunda ordem de perturbação é:

$$Z_2[J] = + \frac{1}{2!} \int d^4x \frac{\lambda}{3!} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \int d^4y \frac{\lambda}{3!} \left(\frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^3 e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$$

ao invés de fazer a regra da cadeia, posso pensar esta exponencial em termos de sua expansão. Como temos 6 derivadas em J e no fim faremos J=0, somente o termo com 6 J's vai sobreviver

$$Z_2[J=0] = \frac{1}{2!} \int d^4x \frac{\lambda}{3!} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \int d^4y \frac{\lambda}{3!} \left(\frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^3 \left\{ \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2} \right)^3 \int d^4z_1 d^4z_2 d^4z_3 d^4z'_1 d^4z'_2 d^4z'_3 \times \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \Delta(z_1, z_2) \Delta(z_2, z_3) \Delta(z_3, z_1) \Delta(z_1, z'_1) \Delta(z_1, z'_2) \Delta(z_1, z'_3) \Delta(z_2, z'_1) \Delta(z_2, z'_2) \Delta(z_2, z'_3) \Delta(z_3, z'_1) \Delta(z_3, z'_2) \Delta(z_3, z'_3) \right\} \Big|_{J=0}$$

exercício

$$Z_2[J=0] = \frac{\lambda^2}{2^3} \int d^4x d^4y \Delta(x, x) \Delta(x, y) \Delta(y, y) + \frac{\lambda^2}{2 \cdot 3!} \int d^4x d^4y \Delta^3(x, y)$$

em termos de diagramas (note que os fatores de simetria também já saíram certos):



Regras de Feynman no espaço das posições

Primeiramente vamos re-escrever o teorema de Wick em um formato mais útil para obter as regras de Feynman:

$$Z[J] = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi_a} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi_a}} \left\{ e^{-\int d^4x V(\phi_a) + J \cdot \phi_a} \right\} \Big|_{\phi=0} =$$

$$= \text{EXP} \left[\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Delta(x-y) \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \frac{\delta}{\delta \phi_a(y)} \right] \left\{ e^{-\int d^4x V(\phi_a) + J \cdot \phi_a} \right\} \Big|_{\phi=0} \quad (\text{eq. 115.1})$$

... ..

eq. 110.2 → $Z[J] = e^{-\int d^4x V(\frac{\delta}{\delta J(x)})} \left\{ e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right\}$

não ficaremos carregando esta notação, mas perceba que este campo que fazemos ir a zero é o campo clássico, e:
 $J \rightarrow 0 \Leftrightarrow \phi_{cl} = 0$

\\ Demonstração //

Essencialmente queremos provar que, dadas duas funções de múltiplas variáveis (mesmo número para ambas):

$$F(x) = F(x_1, \dots, x_n) \quad G(y) = G(y_1, \dots, y_n)$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) G(x) = G\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \left[F(y) e^{x \cdot y} \right]_{y=0} \quad (\text{Lemma de Coleman}) \quad (\text{eq. 115.2})$$

PROVA: podemos considerar a série de Fourier de F e G e aí basta provar o Lemma acima para

$$F(x) = e^{a \cdot x} \quad G(y) = e^{b \cdot y} \quad \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots \right)^m e^{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \dots} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} e^{b \cdot x} &= b_i e^{b \cdot x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n e^{b \cdot x} &= (b_i)^n e^{b \cdot x} \end{aligned} \right.$$

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) G(x) = e^{a \cdot \frac{\partial}{\partial x}} e^{b \cdot x} = \sum_m \frac{1}{m!} \left(a \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right)^m e^{b \cdot x} = \sum_m \frac{1}{m!} (a \cdot b)^m e^{b \cdot x} = e^{b \cdot (a+x)} = e^{a \cdot b} \quad \checkmark \text{OK!}$$

$$G\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \left[F(y) e^{x \cdot y} \right]_{y=0} = e^{b \cdot \frac{\partial}{\partial y}} \left[e^{a \cdot y} e^{x \cdot y} \right]_{y=0} = e^{b \cdot (a+x)} \left[e^{a \cdot y} e^{x \cdot y} \right]_{y=0} = e^{b \cdot (a+x)}$$

$\underbrace{x = \{x_1, \dots, x_n\}}_{\text{vetor}} \rightarrow \underbrace{J(x)}_{\text{vetor}}$
 $y = \{y_1, \dots, y_n\} \rightarrow \phi(x)$

estamos generalizando de um conjunto discreto de variáveis para um contínuo

$$\hookrightarrow \boxed{F\left[\frac{\delta}{\delta J}\right] G[J] = G\left[\frac{\delta}{\delta \phi}\right] \left[F[\phi] e^{J \cdot \phi} \right]_{\phi=0}} \quad (\text{eq. 116.1})$$

Logo, partindo do teorema de Wick na forma anterior:

$$Z[J] = \underbrace{e^{-\int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)}}_{F\left[\frac{\delta}{\delta J}\right]} \underbrace{\left\{ e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right\}}_{G[J]} = \underbrace{e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}}}_{G\left[\frac{\delta}{\delta \phi}\right]} \underbrace{\left\{ e^{-\int d^4x V(\phi)} e^{J \cdot \phi} \right\}}_{\left[F[\phi] e^{J \cdot \phi} \right]_{\phi=0}} \Big|_{\phi=0}$$

que é a eq. 115.1


 aqui termina a Lecture 10 do Nastase
 (nas pg. 89 e 90 ele mostra um outro jeito de obter (graficamente) o fator de simetria dos diagramas, que é equivalente ao que mostramos no contexto do formalismo canônico - recomendável para quem ainda não entendeu o fator de simetria)

Podemos então obter as regras de Feynman para um potencial mais geral:

$$V(\phi) = \lambda \phi^p$$

$$\begin{aligned}
 G_n(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} = \\
 &= \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \left\{ e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left[e^{-\int d^4x V(\phi) + J \cdot \phi} \right]_{\phi=0} \right\} \Big|_{J=0} = \\
 &= e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-\int d^4x V(\phi) + J \cdot \phi} \right\} \Big|_{\phi=0, J=0}
 \end{aligned}$$

este termo já se tornou obsoleto, pois depois das derivadas em ϕ , qualquer termo que sobrar com J multiplicado vai ser nulo (quando $J=0$)

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta\phi}} \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-\int d^4x V(\phi)} \right\}_{\phi=0} \quad (\text{eq. 117.1})$$

Em ordem N de perturbação:

$$G_n^{(N)}(x_1, \dots, x_n) = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta\phi}} \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \frac{(-\lambda)^N}{N!} \int d^4y_1 \dots d^4y_N \phi^P(y_1) \dots \phi^P(y_N) \right\}_{\phi=0}$$

estas derivadas vão agir sobre um produto de Q campos ϕ , onde:

$$Q = n + pN$$

Se aplicarmos mais do que Q derivadas a função se anula e se aplicamos menos do que Q derivadas também (pois nesse caso sobram ϕ 's que serão levados a zero). Assim, da expansão da exponencial contendo Q derivadas temos (e note Q deve ser obrigatoriamente par pois temos duas derivadas na exponencial):

$$(Q = 2q = n + pN)$$

$$G_n^{(N)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{q! 2^q} \int d^4z_1 d^4w_1 \dots d^4z_q d^4w_q \frac{\delta}{\delta\phi(z_1)} \Delta(z_1 - w_1) \frac{\delta}{\delta\phi(w_1)} \dots \frac{\delta}{\delta\phi(z_q)} \Delta(z_q - w_q) \frac{\delta}{\delta\phi(w_q)} \times \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \frac{(-\lambda)^N}{N!} \int d^4y_1 \dots d^4y_N \phi^P(y_1) \dots \phi^P(y_N) \right\}_{\phi=0}$$

(eq. 117.2)

Temos que agir com estas derivadas sobre todos os campos. Note que, quando aplicamos o par

$$\int d^4z_i d^4w_i \frac{\delta}{\delta\phi(z_i)} \Delta(z_i - w_i) \frac{\delta}{\delta\phi(w_i)}$$

sobre um par qualquer: $\phi(x) \phi(y)$

$$\text{obtemos: } \int d^4z_i d^4w_i \left[\delta^4(x - z_i) \delta^4(y - w_i) \Delta(z_i - w_i) + \delta^4(y - z_i) \delta^4(x - w_i) \Delta(z_i - w_i) \right] = 2 \Delta(x - y)$$

↳ como temos q fatores de 2 deste tipo, o 2^q em 117.2 é cancelado

O q! é cancelado pelo fato de termos q! formas de agir as 2q derivadas nos 2q campos (e pelo fato das coordenadas nas derivadas serem variáveis mudas de integração). Notem que novamente o que está acontecendo é que estamos conectando pontos externos e vértices de todas as formas possíveis.

Mesmo depois de levar em conta as repetições que cancelam $q! 2^q$ ainda sobram muitos termos iguais: o fato de ainda termos N variáveis de integração mudas cancela o $N!$ advindo da expansão da exponencial com a interação e o fato de cada termo de interação conter p campos calculados no mesmo ponto introduz um $(p!)^N$ que cancelamos redefinindo:

$$\lambda = \frac{\lambda_p}{p!}$$

Sabemos (do formalismo canônico), que o cancelamento deste $N!(p!)^N$ não é exato, dependendo de detalhes das contrações escolhidas. Assim como antes definimos um fator de simetria:

$$S = \frac{N! (p!)^N}{(\# \text{ de diagramas equivalentes})}$$

Este fator pode ser maior que 1 se tivermos menos diagramas equivalentes do que inocentemente se esperaria. Para ver como isto aparece aqui, considere o caso $n = 0, p = 2, N = 2 (Q = 4, q = 2)$:

$$A = \frac{1}{2!2^2} \int d z_i d w_i d z_j d w_j d x d y \frac{\delta}{\delta \phi(z_i)} \Delta(z_i - w_i) \frac{\delta}{\delta \phi(w_i)} \frac{\delta}{\delta \phi(z_j)} \Delta(z_j - w_j) \frac{\delta}{\delta \phi(w_j)} \phi(x) \phi(x) \phi(y) \phi(y)$$

(não confundir o cancelamento destes com o de $N!$ e $p!^N$)

de onde podemos extrair todos os termos que contribuem para:



Inocentemente teríamos $2!$ advindo das integrais em x e y e $(2!)^2$ advindo do fato de termos dois campos em x e dois em y , para um total de 8 termos iguais. Mas veja:

$$A = \frac{1}{8} \int d z_i d w_i d z_j d w_j d x d y \Delta(z_i - w_i) \Delta(z_j - w_j) \frac{\delta}{\delta \phi(z_i)} \frac{\delta}{\delta \phi(w_i)} \frac{\delta}{\delta \phi(z_j)} \times$$

$$\left\{ 2 \delta(x - w_j) \phi(x) \phi(y) \phi(y) + 2 \delta(y - w_j) \phi(x) \phi(x) \phi(y) \right\}$$

ignoro os termos em que $\frac{\delta}{\delta \phi(z_j)}$ age em no mesmo campo em que agiu $\frac{\delta}{\delta \phi(w_j)}$ pois este contribuem para $\left(\begin{matrix} \circ & \circ \\ x & y \end{matrix} \right)$

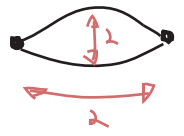
$$= \frac{1}{2} \int \dots \Delta \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi(z_i)} \frac{\delta}{\delta \phi(w_i)} \left\{ 2 \delta(x - w_j) \delta(z_j - y) \phi(x) \phi(y) + 2 \delta(y - w_j) \delta(z_j - x) \phi(x) \phi(y) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \dots \Delta \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi(z_i)} \times$$

$$\times \left\{ \delta(x - w_j) \delta(z_j - y) \left[\delta(x - w_i) \phi(y) + \delta(y - w_i) \phi(x) \right] + \delta(y - w_j) \delta(z_j - x) \left[\delta(w_i - x) \phi(y) + \delta(w_i - y) \phi(x) \right] \right\} =$$


$$= \frac{1}{2} \int \dots \int \Delta \Delta \left\{ \delta(x-w_j) \delta(y_j-y) \delta(x-w_i) \delta(y-z_i) + \delta(x-w_j) \delta(y_j-y) \delta(y-w_i) \delta(x-z_i) + \right. \\ \left. + \delta(y-w_j) \delta(y_j-x) \delta(w_i-x) \delta(y-z_i) + \delta(y-w_j) \delta(y_j-x) \delta(w_i-y) \delta(z_i-x) \right\} = \\ = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y 4 \Delta^2(x-y) = 2 \int d^4x d^4y \Delta^2(x-y)$$

O que é 4 vezes menos termos iguais do que esperávamos. O fator de simetria aqui é 4. De fato:



(mais uma vez há uma outra forma de olhar diagramas para obter o fator de simetria na pg 94 do Nastase)

Vemos que estamos obtendo as mesmas regras do formalismo canônico (só que no espaço Euclideano):

- (1) para cada propagador: $x_1 \text{---} x_2 = \Delta(x_1-x_2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x_1-x_2)}}{p^2+m^2}$
- (2) para cada vértice:  $= (-i\lambda_p) \int d^4y$
- (3) para cada ponto externo: $x_1 \text{---} = 1$
- (4) divida tudo pelo fator de simetria

(eq. 119.1)

Regras de Feynman no espaço dos momentos

Conforme visto na pg 107:

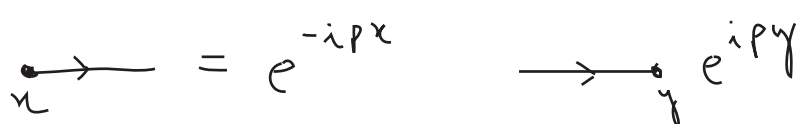
$$\tilde{G}(p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) \underbrace{G(p_1, \dots, p_n)}_{\text{satisfazem conserv. de momento}}$$

O propagador Euclideano é (eq. 94.2):

$$\Delta(y-x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(y-x)}}{p^2+m^2} \quad \therefore \quad \Delta(p) = \frac{1}{p^2+m^2} \quad (\text{eq. 119.2})$$

E adotamos novamente a convenção para direção de momento (lembrando que estamos no Euclideano

e $p_\mu \cdot x^\mu = -p_E \cdot x_E$):



Como derivamos as regras no espaço dos momentos a partir das regras no espaço das posições, e já mostramos que estas são as mesmas obtidas na quantização canônica, não há novidade alguma aqui.

Regras de Feynman para uma teoria Bosônica em geral

Suponha agora uma teoria mais geral composta de um número arbitrário de campos bosônicos (veremos adiante que a quantização de campos fermiônicos é mais complicada), que agruparemos usando um índice r :

$$\phi_r \quad \text{EX: } \phi = \{ \phi_1, \phi_2, \phi_3 = A_0, \phi_4 = A_1, \phi_5 = A_2, \phi_6 = A_3 \} = \{ \phi_1, \phi_2, A_\mu \}$$

Com a ação livre dada por:

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^4x \sum_{r,s} \phi_r(x) \Delta_{r,s}^{-1} \phi_s(x)$$

$$\text{EX: } \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} -\partial_\mu \partial^\mu + m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_\mu \partial^\mu + m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & (g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu)_{4 \times 4} \end{pmatrix}$$

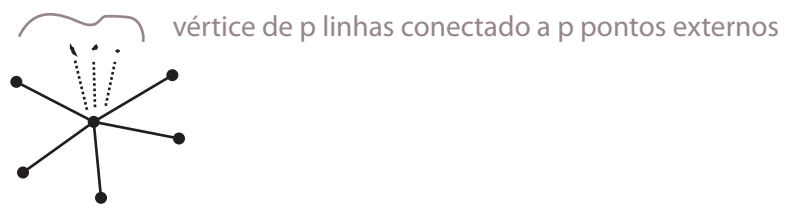
Este operador deve ser invertido para podermos encontrar os propagadores. Quando ele não é invertível, em geral existem problemas na definição dos campos. Vamos assumir que conseguimos resolver estes problema e encontrar uma base apropriada, aonde ele pode ser invertido (mais tarde veremos um exemplo específico, o campo do fóton). A interação também pode ser escrita em um forma genérica:

$$S_{\pi_1, \dots, \pi_p} = \int d^4z \underbrace{A_{\pi_1, \dots, \pi_p}}_{\substack{\text{pode conter constantes (acoplamentos) ou operadores} \\ \text{diferenciais agindo em um ou mais campos (o que torna isso} \\ \text{bem mais geral que } \phi^n)}} \underbrace{\phi_{\pi_1}(z) \dots \phi_{\pi_p}(z)}_{\text{não há soma subentendida!}}$$

Interação envolvendo p campos (r_i e r_j são genéricos, não necessariamente iguais nem diferentes)

Independentemente da forma de $A_{\{r_i\}}$, esta interação colocará p campos agindo no mesmo ponto, o que leva a um vértice com p linhas saindo. A forma mais simples de ver a regra para o vértice

é considerar a função com p pontos externos, especificamente o diagrama abaixo:



Podemos então seguir o raciocínio usado para passar de 117.1 para 117.2. A generalização de 117.1, agora que temos vários campos, é:

$$G_n(\{x_1, \dots, x_n\}) = e^{\frac{1}{2} \sum_{r,s} \frac{\delta}{\delta \phi_r} \Delta_{rs} \frac{\delta}{\delta \phi_s}} \left\{ \phi_{\pi_1}(x_{\pi_1}) \dots \phi_{\pi_n}(x_{\pi_n}) e^{-\int d^4z A_{\pi_1 \dots \pi_p} \phi_{\pi_1} \dots \phi_{\pi_p}} \right\}_{\phi=0}$$

→ a função depende das coordenadas dos pontos externos mas também de qual campo age ali

Especializando para o caso com apenas um vértice ($N = 1$) e número (e tipo) de pontos externos iguais aos da interação temos ($n = p$):

$$G_p^{(1)}(\{x_1, \dots, x_p\}) = e^{\frac{1}{2} \sum_{r,s} \frac{\delta}{\delta \phi_r} \Delta_{rs} \frac{\delta}{\delta \phi_s}} \left\{ \phi_{\pi_1}(x_{\pi_1}) \dots \phi_{\pi_p}(x_{\pi_p}) (-) \int d^4z A_{\pi_1 \dots \pi_p} \phi_{\pi_1} \dots \phi_{\pi_p} \right\}_{\phi=0}$$

→ o produto escalar tem integrais: $\int d^4y_1 d^4y_2 \frac{\delta}{\delta \phi(y_1)} \frac{\delta}{\delta \phi(y_2)}$

Agora basta lembrar que a exponencial com as derivadas deve ser expandida e o único termo que sobrevive é aquele que tem o número (e tipo) de derivadas que coincide com o que está dentro das chaves. O efeito destas chaves vai ser conectar pontos externos e internos de todas as formas possíveis, mas só estamos interessados no diagrama acima, onde cada ponto externo é conectado ao vértice. Neste caso cada par de derivadas vai produzir um propagador, assim como vimos na página 117, mas pode haver uma outra contribuição, dependendo de A. O resultado será da forma:

$$G_p^{(1)}(\{x_1, \dots, x_p\}) = \int d^4y_1 \dots d^4y_p \Delta_{rs}(x_1 - y_1) \dots \Delta_{rs}(x_p - y_p) \times$$

$$\times (-) \frac{\delta}{\delta \phi_{\pi_1}(y_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_{\pi_p}(y_p)} S_{\pi_1 \dots \pi_p}$$

estou ignorando estes índices que seriam fixados por deltas de Kronecker, assim como as deltas de Dirac fixam as coordenadas

→ Isso é o que chamamos de "regra do vértice" e no caso de teorias $\lambda \phi^p$, obtemos (veja pag 117)

$$\int d^4z \lambda \delta^4(y_1 - z) \dots \delta^4(y_p - z)$$

Mas para uma teoria mais geral pode ser mais complicado. Passando para o espaço dos momentos temos:

p linhas

$$= - \int d^4x_1 \dots d^4x_p e^{i(k_1x_1 + \dots + k_px_p)} \frac{\delta}{\delta\phi_{\pi_1}(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta\phi_{\pi_p}(x_p)} S_{\pi_1 \dots \pi_p}$$

a menos de um fator $(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + \dots + k_p)$

(eq. 122.1)

Um exemplo trivial seria:

$$S_{\mathbb{I}} = \frac{\lambda_4}{4!} \int d^4x \phi^4(x)$$

$$\times = - \int d^4x_1 \dots d^4x_4 e^{i(k_1x_1 + \dots + k_4x_4)} \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta\phi(x_4)} \left[\frac{\lambda_4}{4!} \int d^4x \phi^4(x) \right] =$$

$$= \frac{\lambda_4}{3!} \int d^4x \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta\phi(x_4)} \phi^4(x) \delta^4(x-x_1) = \frac{\lambda_4}{2!} \int d^4x \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \frac{\delta}{\delta\phi(x_2)} \phi^4(x) \delta^4(x-x_1) \delta^4(x-x_2) = \dots$$

$$= - \int d^4x_1 \dots d^4x_4 d^4x e^{i(k_1x_1 + \dots + k_4x_4)} \lambda_4 \delta^4(x-x_1) \delta^4(x-x_2) \delta^4(x-x_3) \delta^4(x-x_4) =$$

$$= -\lambda_4 \int d^4x e^{ix(k_1 + \dots + k_4)} = -(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + \dots + k_4) \lambda_4$$

Quantização de um campo fermiônico

(Nastase 12 e 13; Peskin 3.1-3.4 [campo clássico], 3.5 [quant. canônica], 9.5 [quant. funcional]; Ryder 6.7; Ramond 5.2-5.3)

Comecemos definindo um spinor. Vimos (pg 14) que é possível construir uma representação do grupo de Lorentz tal que:

$$\Psi'(x') = M_D(\Lambda) \Psi(x)$$

(eq. 122.2)

$$M_D(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2} \Theta_{\mu\nu} S^{\mu\nu}}$$

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

matrizes de Dirac

(eq. 122.3)

As matrizes de Dirac satisfazem a álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \hat{1}$$

(eq. 122.4)

E as matrizes $S^{\mu\nu}$ satisfazem a álgebra de Lorentz:

$$[\gamma^{\mu\nu}, \gamma^{\rho\sigma}] = i [\gamma^{\mu\rho} \gamma^{\nu\sigma} - \gamma^{\mu\sigma} \gamma^{\nu\rho} - \gamma^{\nu\sigma} \gamma^{\mu\rho} + \gamma^{\nu\rho} \gamma^{\mu\sigma}] \quad (\text{eq. 123.1})$$

Todas as expressões acima valem para um número arbitrário de dimensões e qualquer métrica (Minkowski ou Euclideana), o que vai mudar é a forma das matrizes de Dirac. Por exemplo, em três dimensões euclidianas conseguimos satisfazer 122.4 com:

$$\gamma^i = \sigma^i \quad \leftarrow \text{Pauli}$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k$$

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i = 2\delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k + i \epsilon^{jik} \sigma^k = 2\delta^{ij}$$

e neste caso:
$$S^{ij} = \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \sigma^k \quad (\text{eq. 123.2})$$

Note que isto é a rotação em 3D de um spin 1/2

a representação que vai nos interessa é dada por:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Representação Quiral ou de Weyl} \quad (\text{eq. 123.3})$$



$$\begin{aligned} (\gamma^0)^\dagger &= \gamma^0 \\ (\gamma^i)^\dagger &= -\gamma^i \end{aligned} \quad (\text{eq. 123.4})$$

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

E podemos definir 4-vetores, para as matrizes 2x2:

$$\begin{aligned} \sigma^\mu &= (1, \sigma^i) \\ \bar{\sigma}^\mu &= (1, -\sigma^i) \end{aligned} \quad (\text{eq. 123.5})$$

De forma a re-escrever 123.3 na forma compacta:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{eq. 123.6})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \{\mu=0, \nu=i\} \\ \{\nu=0, \mu=i\} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} = 0$$

$$\mu=0, \nu=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 1_{2 \times 2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 1_{2 \times 2} \end{pmatrix} = 2 \hat{1}_{4 \times 4}$$

$$\mu=i, \nu=j \Rightarrow \begin{pmatrix} -\sigma^i \sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^i \sigma^j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sigma^j \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^j \sigma^i \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} \{\sigma^i, \sigma^j\} & 0 \\ 0 & \{\sigma^i, \sigma^j\} \end{pmatrix} = -2 S^{ij} \hat{1}_{4 \times 4}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu} \hat{1}_{4 \times 4} \quad g^{\mu\nu} = \text{Diag}\{1, -1, -1, -1\} \text{ (Minkowski 4D)}$$

Também nos interessa definir

$$\gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (\text{eq. 124.1})$$

que, nesta representação (usando eq. 123.6), é: $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(que de fato é o objetivo desta rep. Outra rep. popular é a em que γ^0 é diagonal ao invés de γ^5 - cuidado ao comparar livros)

O gerador $S^{\mu\nu}$ agora é um objeto mais complicado (que deve conter rotações e boosts), note que a parte puramente espacial contém as rotações 3D e:

$$S^{ij} = \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -[\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & -[\sigma^i, \sigma^j] \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \quad (\text{eq. 124.2})$$

Note que isto é o mesmo que temos em 123.2, repetido 2 vezes (se eu aplicar isto num objeto de quatro componentes, as duas "de cima" rodam como um spin 1/2 e as duas "de baixo" também, independentemente)

O próximo passo consiste em construir invariantes de Lorentz com o campo ψ . Infelizmente a primeira opção que vem a mente:

$$\psi^\dagger \psi \rightarrow \psi^\dagger \underbrace{M_D^\dagger(\Lambda) M_D(\Lambda)} \psi \neq \psi^\dagger \psi$$

\hookrightarrow M não é unitária pois alguns elementos de S não são hermiteanos (os boosts)

no entanto não é difícil obter um invariante, definindo:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (\text{eq. 124.3})$$

de forma que:

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \psi \rightarrow \psi^\dagger \underbrace{\gamma^0 M_D^\dagger(\Lambda) \gamma^0}_{= \gamma^0 M_D^{-1}(\Lambda)} M_D(\psi) = \bar{\psi} \psi \quad (\text{veja Peskin, pg 43})$$

Também podemos provar que: $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rightarrow \Lambda^\nu_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

E que, portanto, a contração dele com um vetor qualquer é invariante: $V_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi \rightarrow V_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi$

Outros invariantes podem ser obtidos como potências destes no entanto, se quisermos uma teoria renormalizável, somente aceitamos os termos com dois ψ (esta afirmação terá que aguardar o curso de TQCII para ser provada, assim como a explicação do que é "renormalização")

Com isto podemos construir uma ação:

$$\mathcal{S}_\psi = \int d^4x \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (\text{eq. 125.1})$$

$$\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$$

Cuja solução clássica é dada pela equação de Dirac:

$$(i \not{\partial} - m) \psi = 0 \quad (\text{eq. 125.2})$$

basta fazer a variação em relação a $\bar{\psi}$, também podemos obter a equação conjugada, para $\bar{\psi}$, variando ψ .

Espinores de Weyl e Majorana

Já vimos que, nesta representação (124.2):

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijkl} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$$

Também vale que: $S^{0i} = -S^{i0} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}$ Boosts de Lorentz (eq. 125.3)

o que deixa óbvio (note a estrutura bloco diagonal) que a representação de Dirac é redutível (este é o grande trunfo desta representação. Podemos definir:

$$\psi_D^{4 \times 1} \equiv \begin{pmatrix} \psi_L^{2 \times 1} \\ \psi_R^{2 \times 1} \end{pmatrix} \quad \psi_L^{4 \times 1} \equiv \begin{pmatrix} \psi_L^{2 \times 1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_R^{4 \times 1} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \psi_R^{2 \times 1} \end{pmatrix}$$

(eq. 125.4)

$$\psi_D^{4 \times 1} = \psi_L^{4 \times 1} + \psi_R^{4 \times 1}$$

cuidado com o abuso de notação, em geral fica claro na equação se estamos falando do objeto de dois componentes ou o objeto de quatro componentes, então é comum suprimir este índice.

Observe as expressões para as rotações e boosts: as duas representações obtidas tem exatamente a mesma rotação, mas os boosts tem o sinal invertido. Note também que:

$$r^s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} P_L &\equiv \frac{1 - \not{\beta}_s}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P_R &\equiv \frac{1 + \not{\beta}_s}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{eq. 125.5})$$

$$\Psi_L = P_L \Psi_D \quad \Psi_R = P_R \Psi_D \quad (\text{eq. 126.1})$$

$$\begin{aligned} P_L^2 &= P_L & P_R^2 &= P_R \\ P_L P_R &= P_R P_L = 0 \\ P_L + P_R &= 1 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(operadores de projeção)} \\ \text{(eq. 126.2)} \end{array}$$

$$\Psi_L + \Psi_R = P_L \Psi_D + P_R \Psi_D = (P_L + P_R) \Psi_D = \Psi_D$$

Além destas duas representações irredutíveis (chamada de **Espinores de Weyl**), ainda temos uma terceira, definida pela propriedade:

$$\Psi = \Psi_C \quad \text{condição de realidade} \quad \text{onde: } \Psi_C \equiv -i \gamma_2 \Psi^* \quad (\text{eq. 126.3})$$

Os espinores que satisfizerem esta condição são chamados **Espinores de Majorana**, e no caso deles não podemos tratar $\bar{\psi}$ como independente de ψ (os dois estão ligados pela eq 126.3).

Veremos mais adiante que a transformação que conecta partículas em anti-partículas, a **conjugação de carga C**, age sobre férmions de forma que:

$$\Psi \longrightarrow -i \gamma_2 \Psi^*$$

a condição 126.3 equivale, portanto, a construir férmions que são a própria anti-partícula.

ATENÇÃO: alguns livros (Peskin, Schwartz) preferem manter a ação do operador C na forma abstrata, usando a notação:

$$C \Psi C = -i \gamma_2 \Psi^* \equiv \Psi_C \quad \text{ou} \quad C: \Psi \rightarrow -i \gamma_2 \Psi^* \equiv \Psi_C$$

outros (Nastase, Lahiri & Pal) constroem uma matriz que representa a ação de C em férmions:

$$\Psi_C = C M \Psi^* \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \bar{C} \gamma^\mu C = (-\gamma^\mu)^T \\ M \rightarrow \text{alguma matriz proporcional a matrizes de Dirac (puramente convencional)} \end{cases}$$

na nossa representação isto funciona com: $M = -\gamma^0$; $C = i \gamma^2 \gamma^0$

É importante não confundir o C da notação do Peskin com a matriz C, usada no Nastase.

É possível mostrar (Schwartz, pg 192) que o seguinte objeto de 4 componentes:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ i \gamma_2 \Psi_L^* \end{pmatrix} \quad \text{satisfaz 126.3}$$

e se transforma como um spinor de Dirac (uma vez que $\gamma_2 \Psi_L^*$ se transforma como Ψ_R)

Representações e Fenomenologia

Qual destas representações descreve os férmions na natureza? A resposta depende de qual partícula você quer descrever. Para começar note que:

$$\bar{\Psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = \bar{\Psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R - m \bar{\Psi}_L \Psi_R - m \bar{\Psi}_R \Psi_L$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 0 \Rightarrow P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$$

$$\bar{\Psi}_L \Psi_R = (P_L \Psi)^\dagger \gamma^0 (P_R \Psi) = \Psi^\dagger \underbrace{P_L^\dagger \gamma^0 P_R}_{P_R} \Psi = \bar{\Psi} \underbrace{P_R}_{P_R} \Psi$$

$$\bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R = (P_R \Psi)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu (P_R \Psi) = \Psi^\dagger \underbrace{P_R^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu P_R}_{P_R} \Psi = \bar{\Psi} \gamma^\mu P_R \Psi$$

$$\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L = \bar{\Psi} (P_R + P_L) \Psi = \bar{\Psi} \Psi \quad \& \quad \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R + \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \Psi_L = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$$

$$\bar{\Psi}_L \Psi_L = 0$$

$$\bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_L = 0$$

Note que o termo de massa mistura os campos R e L (isso quer dizer que as equações de movimento para ambos vão ser acopladas). O que quer dizer que é "incomodo" descrever partículas com massa em termos de spinores de Weyl, que é bem mais útil para partículas sem massa.

Os espinores de Majorana podem ser usados para descrever partículas completamente neutras (nenhuma carga) e que são a própria antipartícula.

	Componentes	"Embedding" em spinores	Massa
Dirac	Ψ_L & Ψ_R 2×2 misturados dinamicamente	$\Psi^{4 \times 1} = \begin{pmatrix} \Psi_L^{2 \times 1} \\ \Psi_R^{2 \times 1} \end{pmatrix}$	com ou sem massa $m \bar{\Psi} \Psi$
Weyl	Ψ_L ou Ψ_R 2×1 independentes entre si	$\Psi_L^{4 \times 1} = \begin{pmatrix} \Psi_L^{2 \times 1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \not{S} \Psi_{L/R} = \mp \Psi_{L/R}$	sem massa
Majorana	Ψ_L ou Ψ_R 2×1 independentes entre si	$\Psi_L^{4 \times 1} = \begin{pmatrix} \Psi_L^{2 \times 1} \\ i \sigma_2 \Psi_L^{2 \times 1} \end{pmatrix} \Rightarrow \Psi = \Psi_c = -i \not{S}_2 \Psi^*$ <small>↳ poderia fazer algo análogo para Ψ_R</small>	com ou sem massa $\frac{m}{2} \bar{\Psi} \Psi = i \frac{m}{2} \Psi_L^\dagger \sigma_2 \Psi_L + h.c.$

Soluções (Clássicas) da Equação de Dirac

Começemos notando que o operador de Dirac: $\hat{D} = i \not{\partial} - m$

e seu adjunto: $\hat{D}^\dagger = -i \not{\partial} - m$

tem a propriedade: $\hat{D} \hat{D}^\dagger = -(i \not{\partial} - m)(i \not{\partial} + m) = (\not{\partial}^2 + m^2) = \hat{D}_{KG} = \hat{D}^\dagger \hat{D}$

$$\not{\partial} \not{\partial} = \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial^2$$

simetria

o que quer dizer que qualquer campo que satisfaça $\hat{D} \Psi = 0$ ou $\hat{D}^\dagger \bar{\Psi} = 0$ vai satisfazer também:

$$\hat{D}_{KG} \Psi = 0$$

Ou seja, as soluções da equação de Dirac têm que ser também soluções da equação de Klein-Gordon. Isso nos diz que estas são do tipo:

$$K e^{\pm i p \cdot x} \iff p^2 - m^2 = 0$$

Onde claramente o coeficiente K deve ser uma matriz, pois estes campos se transformam sob aplicação das matrizes de Dirac. Parametrizemos primeiro as soluções de frequência positiva:

$$\Psi(x) = u(p) e^{-i p \cdot x} \quad \begin{matrix} p^2 - m^2 = 0 \\ p^0 > 0 \end{matrix}$$

$$(-i \not{\partial} - m) \Psi(x) = 0 \Rightarrow (\not{p} - m) u(p) = 0$$

\uparrow
 $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$

As duas soluções desta equação podem ser compactadas em:

$$S = 1, 2 \Rightarrow u^S(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^S \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^S \end{pmatrix} \Leftrightarrow \xi^\dagger \xi = 1 \quad (\text{eq. 128.1})$$

Determina o spin (depois que quantizarmos e pudermos falar em partícula), e.g. spin up e down ao longo do eixo z:

$$\begin{cases} \xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\sqrt{A^\dagger} = B \quad B^\dagger = A$
(matrizes)

Que no referencial de repouso vira:

$$\begin{aligned} (p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) &= p^2 = m^2 \\ \vec{p}' &= 0 \quad p^0 = m \\ (\sqrt{p \cdot \sigma}) &= \sqrt{m \cdot \hat{1}} \end{aligned}$$

$$u^S(p_0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^S \\ \xi^S \end{pmatrix}$$

$$u^1(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u^2(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

As duas soluções de frequência negativa são

$$\begin{aligned} \psi(x) &= v^S(p) e^{+i p x} \\ \Downarrow \\ (p \cdot \sigma + m) v^S(p) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} p^2 - m^2 &= 0 \\ p^0 &> 0 \end{aligned}$$

$$v^S(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^S \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^S \end{pmatrix} \quad (\text{eq. 128.2})$$

$$\eta^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\eta^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que no referencial de repouso:

$$v^S(p_0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \eta^S \\ -\eta^S \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \eta^\dagger \eta = 1$$

$$v^1(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v^2(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

As condições de normalização (usadas para obter os ξ acima) são:

$$\begin{aligned} \bar{u}^\mu(p) u^\nu(p) &= 2m \delta^{\mu\nu} \\ \bar{v}^\mu(p) v^\nu(p) &= -2m \delta^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{eq. 128.3})$$

Ou, em termos de u^\dagger e v^\dagger (mais gerais, valem para partículas sem massa):

$$\begin{aligned} u^{\mu\dagger}(p) u^\nu(p) &= 2 E_p \delta^{\mu\nu} \\ v^{\mu\dagger}(p) v^\nu(p) &= 2 E_p \delta^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{eq. 128.4})$$

E valem:

$$\begin{aligned} \bar{u}^\mu(p) v^\nu(p) &= \bar{v}^\mu(p) u^\nu(p) = 0 \\ u^{\mu\dagger}(p) v^\nu(p) &\neq 0 \quad v^{\mu\dagger}(p) u^\nu(p) \neq 0 \\ u^{\mu\dagger}(p^0, \vec{p}^1) v^\nu(p^0, -\vec{p}^1) &= v^{\mu\dagger}(p^0, -\vec{p}^1) u^\nu(p^0, \vec{p}^1) = 0 \end{aligned} \quad (\text{eq. 128.5})$$

Quantização do campo de Dirac

Sabemos (olhando as transformações sobre rotação em 3D) que este campo descreve partículas de spin 1/2, e que portanto devem obedecer estatística de Fermi. Em termos da quantização canônica isso significa que devemos usar anticomutadores ao invés de comutadores para fazer a quantização

é bastante rápido mostrar que, usando: $[\Psi_\alpha(\vec{x}), \Psi_\beta^\dagger(\vec{y})] = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{\alpha\beta}$
(Peskin 3.5, até eq. 3.90)

$$x^0 = y^0$$

chegamos a
$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \left(E_p a_p^{s\dagger} a_p^s - E_p b_p^{s\dagger} b_p^s \right)$$

operadores de criação e aniq.
energia **arbitrariamente negativa!**

e que isso é resolvido com a quantização correta: $\{\Psi_\alpha(\vec{x}), \Psi_\beta^\dagger(\vec{y})\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{\alpha\beta}$

que, consistentemente, também garante que não consigamos criar duas partículas no mesmo estado, implementando o princípio de exclusão de Pauli

A lagrangeana é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi = i \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi = \\ &= i \Psi^\dagger \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_{1} \partial_0 \Psi + i \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \partial_i \Psi - m \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi \end{aligned}$$

$i \Psi^\dagger \dot{\Psi}$

$$\begin{aligned} \therefore \pi_\Psi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} = i \Psi^\dagger & \mathcal{H} &= \pi_\Psi \dot{\Psi} - \mathcal{L} \\ & & &= \cancel{\pi_\Psi \dot{\Psi}} - \underbrace{i \Psi^\dagger \dot{\Psi}}_{\pi_\Psi} - i \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \partial_i \Psi + m \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi \end{aligned}$$

$$H = \int d^3x \Psi^\dagger \left[-i \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu + m \gamma^0 \right] \Psi$$

(eq. 129.1)

Quantizando: $\{\Psi_\alpha(\vec{x}, t), \Psi_\beta^\dagger(\vec{y}, t)\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{\alpha\beta}$

$$\{\Psi_\alpha(\vec{x}, t), \Psi_\beta(\vec{y}, t)\} = \{\Psi_\alpha^\dagger(\vec{x}, t), \Psi_\beta^\dagger(\vec{y}, t)\} = 0$$

O procedimento então é o mesmo que usamos para o campo escalar, só que agora sabemos que os coeficientes da solução geral são matrizes 4x1:

$$\Psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(A_{\lambda}(p) e^{-ipx} + B_{\lambda}(p) e^{ipx} \right)$$

$\lambda = 1, \dots, 4$
 (índices espinoriais): $(\gamma^{\mu})_{ij} \Psi_j$

Conhecendo a solução clássica, vou parametrizar estes coeficientes na forma:

$$A_{\lambda}(p) = \sum_s a_{\vec{p}}^s u_{\lambda}^s(p) \quad B_{\lambda}(p) = \sum_s b_{\vec{p}}^{s+} v_{\lambda}^s(p)$$

\rightarrow função (ou conjunto de 4 funções), carrega o índice espinorial

\rightarrow operador que vai dar conta das relações de comutação

Assim, expandimos o campo na forma:

$$\Psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ipx} + b_{\vec{p}}^{s+} v^s(p) e^{ipx} \right)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(b_{\vec{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^{s+} \bar{u}^s(p) e^{ipx} \right)$$

(eq. 130.1)

As relações de anticomutação para os campos implicam que:

$$\{ a_{\vec{p}}^{\alpha}, a_{\vec{q}}^{\beta+} \} = \{ b_{\vec{p}}^{\alpha}, b_{\vec{q}}^{\beta+} \} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{\alpha\beta}$$

(qualquer outra combinação = 0)

Temos, assim como no caso bosônico, um vácuo no espaço de Fock:

$$a_{\vec{p}}^s |0\rangle = b_{\vec{p}}^{s+} |0\rangle = 0$$

E criamos estados de uma partícula agindo com os operadores de criação neste vácuo:

$$|\vec{p}, s\rangle_{\pm} = \sqrt{2E_p} a_{\vec{p}}^{s+} |0\rangle$$

$$|\vec{p}, s\rangle_{\pm} = \sqrt{2E_p} b_{\vec{p}}^{s+} |0\rangle$$

Só que os anticomutadores implicam que: $(a_{\vec{p}}^{s+})^2 = (b_{\vec{p}}^{s+})^2 = 0$, o que torna impossível adicionar outra partícula com mesmo momento e spin a este estado. E também:

$$|\vec{p}, s; \vec{k}, s\rangle = \mathcal{N} a_{\vec{p}}^{s+} a_{\vec{k}}^{s+} |0\rangle = -\mathcal{N} a_{\vec{k}}^{s+} a_{\vec{p}}^{s+} |0\rangle = -|\vec{k}, s; \vec{p}, s\rangle$$

O operador hamiltoniano será dado por:

$$\begin{aligned}
 H &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_S E_p \left(a_{\vec{p}}^{+S} a_{\vec{p}}^S - b_{\vec{p}}^S b_{\vec{p}}^{+S} \right) = \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_S E_p \left(a_{\vec{p}}^{+S} a_{\vec{p}}^S + b_{\vec{p}}^{+S} b_{\vec{p}}^S - \{b_{\vec{p}}^{+S}, b_{\vec{p}}^S\} \right) \quad (\text{eq. 131.1})
 \end{aligned}$$

Mais uma vez temos uma energia infinita no vácuo dada pelo último termo acima. Mais uma vez definiremos o ordenamento normal. A novidade aqui é que, para passar da primeira linha acima para a segunda o sinal do termo com 2 b's foi invertido. Então se quisermos somente descartar o efeito do vácuo de forma consistente com a estatística de Fermi, devemos fazer:

$$\begin{aligned}
 : a_{\vec{p}}^{\uparrow} a_{\vec{q}}^{\downarrow} : &= a_{\vec{p}}^{\uparrow} a_{\vec{q}}^{\downarrow} \\
 : a_{\vec{q}}^{\downarrow} a_{\vec{p}}^{\uparrow} : &= a_{\vec{q}}^{\downarrow} a_{\vec{p}}^{\uparrow} = -a_{\vec{p}}^{\uparrow} a_{\vec{q}}^{\downarrow}
 \end{aligned}$$

E o mesmo deve valer para quando o produto já não começa ordenado:

$$: a_{\vec{p}}^{\uparrow} a_{\vec{q}}^{\downarrow \dagger} : = -a_{\vec{q}}^{\downarrow \dagger} a_{\vec{p}}^{\uparrow} \quad (\text{eq. 131.2})$$

Moral da história, o ordenamento normal para férmions carrega um sinal (para vários campos multiplicados é necessário contar quantas vezes um operador fermiônico passar por outros para sair da ordem inicial e chegar na final, e multiplicar por -1 para cada passagem). Isso obviamente vai implicar em modificações no teorema de Wick para férmions

A integral de trajetória fermiônica

Precisamos então pensar em como transportar esta anti-comutação de forma consistente para o formalismo de integral de trajetória. O problema é que neste formalismo, trocamos os operadores por funções, que comutam entre si.

Podemos pensar, que no caso bôsonico, as funções são obtidas a partir dos operadores no limite:

$$[a, a^{\dagger}] = \hbar \rightarrow 0$$

Então agora, deveríamos obter

$$\{a, a^{\dagger}\} = \hbar \rightarrow 0$$

que não são as funções ou números usuais, pois anticomutam (seguem a chamada [Álgebra de Grassmann](#)). Podemos dividir o conjunto destes [Números de Grassmann](#) em dois:

Parte **ímpar** da álgebra: $a, a^{\dagger} : \{a, a^{\dagger}\} = \{a, a\} = \{a^{\dagger}, a^{\dagger}\} = 0$

Parte **par** da álgebra: $aa^{\dagger} : [aa^{\dagger}, aa^{\dagger}] = 0$

De forma que o produto de duas funções fermiônicas (ímpar) vai ser bosônica (par)

(e é fácil ver que [par . par = par] e [ímpar . par = ímpar])

Números de Grassmann, definições e propriedades

Precisamos de funções definidas em um espaço de **números complexos que anti-comutem**, o que já havia sido proposto antes por Grassmann. Os números de Grassmann satisfazem a seguinte propriedade:

$$\{\theta, \eta\} = \theta\eta + \eta\theta = 0$$

O que tem diversas consequências:

$$\theta^2 = 0 \quad (\text{eq. 132.1})$$

elemento "par" da álgebra (commutative-number)

elemento "ímpar" (anticommutative-number)

um par de números de Grassmann se comporta como um c-number

$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 = -\eta_1 \eta_3 \eta_2 = \eta_3 \eta_1 \eta_2$$

$$f(\theta, \eta) = a_0 + a_1 \theta + a_2 \eta + a_3 \theta \eta + a_4 \theta^2 \eta + a_5 \theta \eta^2$$

se a função tiver paridade definida ela é a-number ou c-number
 assim, se $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ então $a_0 = a_3 = 0$ ou $a_1 = a_2 = 0$ (ou então os próprios a's devem ser Grassmann)
 Na maior parte do segue, vamos assumir coeficientes pares, o que significa que estamos tomando a álgebra de Grassmann finita, o que quer dizer que, no exemplo abaixo, não há outros ímpares além de θ, η e ρ para aparecer nos coeficientes:

$$f(\theta, \eta, \rho) = a_0 + a_1 \theta + a_2 \eta + a_3 \rho + a_4 \theta \eta + a_5 \theta \rho + a_6 \eta \rho + a_7 \theta \eta \rho$$

e considerando funções mais gerais (sem paridade, ou supernumbers)

Há uma ambiguidade na definição de derivada (temos que decidir se ela age pela direita ou esquerda):

$$\begin{aligned} \frac{d^L}{d\theta} f(\theta, \eta) &= a_1 + a_3 \eta & \frac{d^R}{d\theta} f(\theta, \eta) &= a_1 - a_3 \eta \\ \frac{d^L}{d\eta} f(\theta, \eta) &= a_2 - a_3 \theta & \frac{d^R}{d\eta} f(\theta, \eta) &= a_2 + a_3 \theta \end{aligned}$$

Definiremos: $\frac{d}{d\eta} = \frac{d^L}{d\eta}$ (quando for necessário usar a derivada pela direita indicaremos isto explicitamente)

$$\eta \frac{d}{d\eta} f = a_2 \eta - a_3 \eta \theta = a_2 \eta + a_3 \theta \eta$$

$$\eta f = a_0 \eta + a_1 \eta \theta \Rightarrow \frac{d}{d\eta} (\eta f) = a_0 + a_1 \theta$$

$$\left(\eta \frac{d}{d\eta} + \frac{d}{d\eta} \eta \right) f = f$$

A consequência é que a regra do produto também fica modificada:

$$\frac{d}{d\eta} (\eta f) = f - \eta \frac{d}{d\eta} f$$

$$\left\{ \eta_i, \frac{\partial}{\partial \eta_j} \right\} = \delta_{ij} \quad (\text{eq. 133.1})$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} = 0 \quad (\text{eq. 133.2})$$

E num caso mais geral:

$$\frac{\partial}{\partial \eta_j} (\eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n) = \delta_{1j} \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n - \delta_{2j} \eta_1 \eta_3 \dots \eta_n + \delta_{3j} \eta_1 \eta_2 \eta_4 \dots \eta_n - \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} e^{\sum \theta_i \eta_i} = \eta_k e^{\sum \theta_i \eta_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_k} e^{\sum \theta_i \eta_i} = -\theta_k e^{\sum \theta_i \eta_i}$$

$a = \sum \theta_i \eta_i$

$$e^a = 1 + \sum \theta_i \eta_i + \frac{1}{2!} (\sum \theta_i \eta_i) (\sum \theta_j \eta_j) + \dots = 1 + \sum \theta_i \eta_i + \frac{1}{2!} (\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j) + \frac{1}{3!} (\sum_{\substack{i,j,k \\ i \neq j \\ i \neq k}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j \theta_k \eta_k) =$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} e^a = 0 - \theta_k + \frac{1}{2!} \left[\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (-\theta_i \delta_{ik} \theta_j \eta_j - \theta_i \eta_i \theta_j \delta_{kj}) \right] + \dots = -\theta_k - \theta_k \sum_i \theta_i \eta_i - \theta_k \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j$$

$$= -\theta_k (1 + \sum_i \theta_i \eta_i + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j + \dots) = -\theta_k e^a //$$

Para definir integrais é natural assumir que os infinitesimais de Grassmann também anti-comutam:

$$\{\theta, d\eta\} = 0$$

$$\{d\theta, d\eta\} = 0$$

que resolve outra ambiguidade de sinal (se fizemos primeiro a integral de fora o sinal fica invertido)

$$\int d\theta d\eta f(\theta, \eta) \equiv \int d\theta \left[\int d\eta f(\theta, \eta) \right]$$

Considere a integral de uma função de apenas um número de Grassman, queremos que esta integral tenha a propriedade de ser invariante por translações nesta variável:

$$\theta \rightarrow \theta + \eta \Rightarrow \int d\theta f(\theta) = \int d\theta f(\theta + \eta)$$

$$F(\theta) = F(\theta + \eta)$$

série $A + B\theta = A + B(\theta + \eta)$ série

$$\forall \eta \rightarrow B = 0$$

A deve ser par, então $\int d\theta f(\theta)$ também deve ser par

$$\int d\theta f(\theta) = \int d\theta (a_1 + a_2 \theta) = \int a_1 d\theta + \int d\theta a_2 \theta$$

$$\left(\int d\theta a_1\right)^2 = \int d\theta \int d\eta a_1^2 = \int d\theta d\eta a_1^2 = -\int d\eta d\theta a_1^2 = -\left(\int d\theta a_1^2\right) = 0$$

$\int d\theta a_1$ é ímpar ou zero, como não pode ser ímpar: $\int d\theta a_1 = a_1 \int d\theta \rightarrow \int d\theta = 0$ (eq. 134.1)

$\int d\theta a_2 \theta$ deve ser par, e tomaremos: $\int d\theta a_2 \theta = a_2 \int d\theta \theta$
 & $\int d\theta \theta = 1$ (eq. 134.2)

$$\int d\theta f(\theta, \eta) = \int d\theta (a_0 + a_1 \theta + a_2 \eta + a_3 \theta \eta) = a_1 + a_3 \eta = \frac{d}{d\theta} f(\theta, \eta)$$

o que pode ser mostrado em geral, ou seja **a integração e a diferenciação tem o mesmo efeito.**

A função delta também pode ser definida, usando uma função η : $g(\eta)$

$$g(\eta) = a + b\eta$$

queremos:

$$\int d\eta \delta(\eta - p) g(\eta) = g(p) = a + b p$$

$$\int d\eta \delta(\eta - p) [a + b\eta] = a \int d\eta \delta(\eta - p) + b \int d\eta \delta(\eta - p) \eta$$

O que é obtido com: $\delta(\eta - p) = \eta - p$ (eq. 134.3)

$$\int d\eta (\eta - p) = \int d\eta \eta - \int d\eta p$$

$$\int d\eta (\eta - p) \eta = \int d\eta \eta \eta - \int d\eta p \eta$$

A mudança de variáveis multiplicativa (por um número complexo) na integração também parece mais com uma mudança em derivadas:

$$\int d\theta \theta = 1 \quad \eta = a\theta \quad \int d\eta \eta = 1 = a \int d\theta \theta \quad \boxed{d\eta = \frac{1}{a} d\theta}$$
 (eq. 134.4)

Para números de Grassmann complexos:

$$(\Theta \eta)^* \equiv \eta^* \Theta^* = -\Theta^* \eta^* \quad \left\{ \int d\eta = \int d\eta^* = 0 \quad \& \quad \int d\eta \eta = \int d\eta^* \eta^* = 1 \right\}$$

$$e^{-\eta^* \eta} = 1 - \eta^* \eta$$

$$\int d\eta^* d\eta e^{-\eta^* \eta} = \int d\eta^* d\eta (1 - \eta^* \eta) = \int d\eta^* d\eta (1 + \eta \eta^*) = 1$$

$$\int d\eta^* d\eta e^{-\eta^* \eta} = 1 \quad (\text{eq. 135.1})$$

$$\int d\eta^* d\eta \eta \eta^* e^{-\eta^* \eta} = \int d\eta^* d\eta \eta \eta^* (1 - \eta^* \eta) = 1$$

$$\int d\eta^* d\eta \eta \eta^* e^{-\eta^* \eta} = \frac{1}{i} \cdot 1 \quad (\text{eq. 135.2})$$

$$\dots \int d\eta^* d\eta \eta \eta^* e^{-\eta^* \eta} = \frac{d}{d\eta} \int d\eta^* d\eta e^{-\eta^* \eta}$$

Isto é análogo ao que teríamos obtido para integral gaussiana de variáveis complexas:

$$\int \frac{d\bar{z}^{\dagger}}{(2\pi i)^{1/2}} \frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}} e^{-\bar{z}^{\dagger} \cdot \eta \cdot z} = \frac{1}{i}$$

(eq. 135.3)

$$\int \frac{d\bar{z}^{\dagger}}{(2\pi i)^{1/2}} \frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}} \bar{z}^{\dagger} z e^{-\bar{z}^{\dagger} \cdot \eta \cdot z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{i}$$

(eq. 135.4)

$$\dots \frac{d}{d\eta} \int \frac{d\bar{z}^{\dagger} dz}{(2\pi i)^2} e^{-\bar{z}^{\dagger} \cdot \eta \cdot z} = \dots$$

Suponha um caso bidimensional:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad \bar{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1^* & \eta_2^* \end{pmatrix}$$

$$(\bar{\eta} \eta)^{\dagger} = (\eta_1^* \eta_1 + \eta_2^* \eta_2)^{\dagger} = \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2 + \eta_2^* \eta_2 \eta_1^* \eta_1 = 2 \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2$$

$$e^{-\bar{\eta} \eta} = 1 - \eta_1^* \eta_1 + \eta_2^* \eta_2 + \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2$$

$$d\bar{\eta} d\eta \equiv d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2$$

$$\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta} \eta} = \int d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2 \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2 = 1$$

$$\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta} \eta} = 1$$

(eq. 136.1)

Fazendo uma mudança de variáveis, obtemos:

$$\eta = M \alpha \quad M, N \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

$$\bar{\eta} = \bar{\alpha} N$$

$$\begin{aligned} \eta_1 \eta_2 &= (M_{11} \alpha_1 + M_{12} \alpha_2) (M_{21} \alpha_1 + M_{22} \alpha_2) = \\ &= (M_{11} M_{22} - M_{12} M_{21}) \alpha_1 \alpha_2 = \text{DET}[M] \alpha_1 \alpha_2 \end{aligned}$$

$$\text{Então, se queremos que: } \int d\eta_1 d\eta_2 \eta_1 \eta_2 = \int d\alpha_1 d\alpha_2 \alpha_1 \alpha_2$$

$$\text{temos que exigir: } d\eta_1 d\eta_2 = (\text{DET}[M])^{-1} d\alpha_1 d\alpha_2$$

(como já tínhamos visto na mudança de uma variável)

$$\text{da mesma forma: } d\eta_1^* d\eta_2^* = (\text{DET}[N])^{-1} d\alpha_1^* d\alpha_2^*$$

então:

$$\begin{aligned} 1 &= \int d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2 e^{-\bar{\eta} \eta} = \int \frac{d\alpha_1^* d\alpha_2^*}{\text{DET}[N]} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{\text{DET}[M]} e^{-\bar{\alpha} N M \alpha} = \\ &= \frac{1}{\text{DET}[NM]} \int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 e^{-\bar{\alpha} \underbrace{NM}_A \alpha} \end{aligned}$$

$$\int d\bar{\alpha} d\alpha e^{-\bar{\alpha} \cdot A \alpha} = \text{DET}[A]$$

(eq. 136.2)

Provamos isso para 2D, mas a mesma coisa poderia ter sido feita para mais dimensões.

$$\text{compare com: } \int \frac{d^n \vec{z}^*}{(2\pi i)^n} \frac{d^n \vec{z}}{(2\pi i)^n} e^{-\vec{z}^* \cdot A \vec{z}} = (\text{DET} A)^{-1}$$

Usando derivadas em a , podemos também mostrar que:

$$\int \prod_i d\bar{\alpha}_i d\alpha_i \alpha_i \bar{\alpha}_j e^{-\bar{\alpha} \cdot A \alpha} = (A^{-1})_{ij} \mathcal{D}_{\epsilon_T} [A] \quad (\text{eq. 137.1})$$

Podemos definir uma "função de Grassmann" (que é ímpar, para cada valor x , fornece um a -number)

como:

$$\Psi(x) = \sum_i \psi_i \phi_i(x)$$

$\left\{ \phi_i \right\}$ base de funções usuais ($\phi_i \in \mathbb{C}$)
 coeficientes são números de Grassmann

E generalizar as integrais funcionais Gaussianas para funções deste tipo:

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\bar{\psi} \cdot A \psi} = \mathcal{D}_{\epsilon_T} [A] \quad (\text{eq. 137.2})$$

O Oscilador Harmônico Fermiônico

O operador hamiltoniano de um oscilador harmônico quantizado como um férmion, antes de dispensarmos a energia do vácuo, é:

$$\hat{H}_F = \omega \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} - \frac{1}{2} \right) \quad \left\{ \hat{b}, \hat{b}^\dagger \right\} = 1$$

Consideremos, assim como no caso bosônico, o estado coerente:

$$|\beta\rangle = e^{\hat{b}^\dagger \beta} |0\rangle = (1 + \hat{b}^\dagger \beta) |0\rangle = (1 - \beta \hat{b}^\dagger) |0\rangle$$

$$\hat{b} |\beta\rangle = \left(\hat{b} + \beta \hat{b} \hat{b}^\dagger \right) |0\rangle = \beta |0\rangle = \beta (1 - \beta \hat{b}^\dagger) |0\rangle = \beta |\beta\rangle$$

Temos a relação de completeza:

$$\hat{1} = \int d\beta^* d\beta |\beta\rangle \langle \beta^*| e^{-\beta^* \beta}$$

E o hamiltoniano na presença de fontes (oscilador forçado) será escrito como:

$$H(b^\dagger, b; t) = \omega b^\dagger b - b^\dagger \eta(t) - \bar{\eta}(t) b$$

Queremos calcular a amplitude de transição:

$$F(\beta^*, t'; \beta, t) = \langle \beta^*, t' | \beta, t \rangle$$

para a qual seguimos os mesmos passos de sempre para encontrar a integral funcional:

$$F(\beta^*, t'; \beta, t) = \int \mathcal{D}\beta^* \mathcal{D}\beta \exp \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[-i \dot{\beta}^*(t) \beta(t) - H(\beta, \dot{\beta}, t) \right] + \beta^*(t') \beta(t) \right\}$$

As equações de Hamilton na presença de fontes são:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}^*(z) - i\omega \beta^*(z) + i\bar{\eta}(z) &= 0 \\ \dot{\beta}(z) + i\omega \beta(z) - i\eta(z) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \beta(t) &= \beta \\ \beta^*(t') &= \beta^* \end{aligned} \quad (\text{eq. 138.1})$$

Com soluções:

$$\begin{aligned} \beta_{cl}(z) &= \beta e^{i\omega(t-z)} + i \int_t^z e^{i\omega(s-z)} \eta(s) ds \\ \beta^*_{cl}(z) &= \beta^* e^{i\omega(z-t')} + i \int_z^{t'} e^{i\omega(z-s)} \bar{\eta}(s) ds \end{aligned} \quad (\text{eq. 138.2})$$

Que podemos projetar no vácuo fazendo: $\left. \begin{aligned} \beta &= \beta^* = 0 \\ t &\rightarrow -\infty \\ t' &\rightarrow +\infty \end{aligned} \right\}$

E neste caso (exercício, mas a dedução prossegue de maneira análoga ao caso bosônico - pgs 36-37):

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = F(0, \infty; 0, -\infty) = \langle 0 | 0 \rangle \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{i\omega(z-s)} \bar{\eta}(z) \eta(s) \right\} \quad (\text{eq. 138.3})$$

Isto é praticamente o mesmo que um campo em 0+1 dim., temos:

$$\beta \rightarrow \psi \quad \beta^* \rightarrow \bar{\psi}$$

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int dt \left[\underbrace{-i \dot{\bar{\psi}} \psi}_{i \bar{\psi} \dot{\psi}} - \omega \bar{\psi} \psi + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int dt \left[\bar{\psi} (i \dot{\psi} - \omega) \psi + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\} =$$

$\mathcal{D}_F^{-1} = -i(i \dot{\psi} - \omega)$

$$= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int dt \left[-\bar{\psi} D_F^{-1} \psi \right] + \lambda \int dt \left[\bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\}$$

$$\therefore Z[\eta, \bar{\eta}] = Z[0, 0] \exp \left\{ - \int ds dz \bar{\eta}(s) D_F(s, z) \eta(z) \right\} \quad (\text{eq. 139.1})$$

$$D_F(s, z) = \left[-\lambda (i \partial_t - \omega) \right]^{-1} = \lambda \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(s-z)}}{E - \omega + i\epsilon} = \Theta(s-z) e^{-i\omega(s-z)} \quad (\text{eq. 139.2})$$

Note que: (1) Temos apenas um polo, em $E = \omega - i\epsilon$

(2) Isso significa que se fizemos a integral no hemisfério superior ($\text{Im } E > 0$) ela dá zero, e somos forçados a fazer isso se ($s < \tau$), portanto a integral é zero para ($s < \tau$). No outro hemisfério (obrigatório se $s > \tau$) pegamos o polo e obtemos o resultado não nulo acima.

$$-iE(s-z) \sim \text{Im}(E)(s-z)$$

(3) Basta substituir a última expressão em 139.1 para obter 138.3 (incluindo o limite de integração, que impõe $s > \tau$)

Passando para o espaço Euclidiano: $\tau = -i t_E$

$$Z_E[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int dt_E \bar{\psi}_E (-\partial_{t_E} - \omega) \psi_E + \int dt_E \bar{\psi}_E \eta_E + \bar{\eta}_E \psi_E \right\}$$

suprimindo o "E"

$$= Z[0, 0] \exp \left\{ \int dz ds \bar{\eta}(s) D(s, z) \eta(z) \right\}$$

$$-S_E = -\bar{\psi} \cdot D^{-1} \psi + \bar{\psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \psi \quad (\text{eq. 139.3})$$

$$D[s, z] = (\partial_t + \omega)^{-1} = \lambda \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(s-z)}}{E + i\omega} \quad (\text{eq. 139.4})$$

E rodando de volta para Minkowski com $E_E = (-i + \epsilon) E$ (para evitar o polo), voltamos ao propagador em 139.2

Agora basta aumentar o número de coordenadas espaciais para obter uma teoria de campo. A lagrangeana (em Mink.) é:

$$\mathcal{L}_F^{(M)} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi$$

Passando para o Euclideoano:

$$\mathcal{L}_F^{(E)} = \bar{\Psi}_E (\not{\partial} + m) \Psi_E$$

Tomando o cuidado de manter a álgebra de Clifford funcionando: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

$$(\gamma^0)^2 = 1 \quad (\gamma^i)^2 = -1$$

$$\boxed{\gamma_E^0 = \gamma^0}$$

$$\hookrightarrow (\gamma_E^i)^2 = 1 \Rightarrow \gamma_E^i = -i \gamma^i$$

$$\rightarrow \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0 = \Psi^\dagger \gamma_E^0$$

$$\Psi_E(x_E) = \Psi(-i t_E, \vec{x})$$

E, nesta representação: $\gamma_\mu = \gamma^\mu = (\gamma^\mu)^\dagger$

A função de partição obtida é:

$$\mathcal{Z}_F^{(E)}[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \exp \left\{ - \int d^4x \bar{\Psi} (\not{\partial} + m) \Psi + \int d^4x (\bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta) \right\} = \tag{eq. 140.1}$$

$$= Z(0,0) e^{\bar{\eta} (\not{\partial} + m)^{-1} \eta}$$

Atenção para o índice Espinorial:
 $\int d^4x \bar{\eta} \Psi = \int d^4x \bar{\eta}_\alpha(x) \Psi_\alpha(x)$
 $\alpha = 1, 2, 3, 4$
 $\bar{\eta} (\not{\partial} + m)^{-1} \eta = \int d^4x d^4y \bar{\eta}_\alpha(x) (\not{\partial} + m)^{-1}_{\alpha\beta} \eta_\beta(y)$

$$S_F(x, y) = (\not{\partial}_x + m)^{-1} = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{i p \cdot (x-y)}}{-\not{p} + i m}$$

(eq. 140.2)

$$(\not{\partial}_x + m) S_F(x, y) = \delta^4(x-y) \quad \because \not{\partial}_x e^{i p x} = i \not{p} e^{i p x}$$

Usaremos com frequência a seguinte relação:

$$\frac{1}{-\not{p} + i m} = \frac{-\not{p} - i m}{p^2 + m^2} = \frac{-\not{p}_{\alpha\beta} - i m \uparrow_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2}$$

$$\not{p} \not{p} = \gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu = 2 g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - \underbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu}_{\gamma^\nu \gamma^\mu p_\nu p_\mu} \Rightarrow 2 p^2 = 2 \not{p} \not{p}$$

$$\boxed{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu}}$$

Voltando para Minkowski, obtemos:

$$S_F^{(E)}(x, y) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{i p \cdot (x-y)}}{-\not{p} + i m} = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-\not{p} - i m}{p^2 + m^2} e^{i p \cdot (x-y)}$$

$$p_E^0 x_E^0 = -i p_E^0 \dot{x}_E^0 = p_E^0 x_E^0$$

$$t_E = i t \quad p_E^0 = (-i + \epsilon) p^0 \quad p_E^2 + m^2 = -p^2 + m^2 - i\epsilon$$

$$p_E^\mu = \gamma_\mu^0 p_E^0 + \gamma_\mu^i p_E^i = \gamma^0 (-i + \epsilon) p^0 - i \gamma^i p^i = -i \gamma^0 p^0 - i \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + \epsilon \gamma^0$$

$$S_F^{(M)}(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i[p^0(x^0 - y^0) + p^i(x^i - y^i)]} \frac{+i \gamma^0 p^0 + i \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - i m}{-p^2 + m^2 - i\epsilon} =$$

$p_0 \rightarrow -p_0$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x - y)} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Teorema de Wick para Campos Fermiônicos

Como um exemplo, consideremos uma teoria com um escalar ϕ (com fonte J) e um férmion ψ , interagindo por meio de um termo $S_I[\bar{\psi}, \psi, \phi]$, neste caso poderíamos escrever:

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{-S_I\left[-\frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, \frac{\delta}{\delta J}\right]} Z_F^{(0)}[\bar{\eta}, \eta] Z_\phi^{(0)}[J] \tag{eq. 141.1}$$

que é obtida segundo exatamente o mesmo procedimento usado na pag 110. A única diferença está no termo $-\frac{\delta}{\delta \eta}$ que tem este sinal pois o termo de fonte tem a forma: $\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta$

Logo: $\bar{\psi} e^{\int d^4x \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta} = - \int \frac{\delta}{\delta \eta} e^{\int d^4x \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta}$

O lema de Coleman (eq. 115.2) também ganha um sinal pelo mesmo motivo:

$$F\left(-\frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}\right) Z[\bar{\eta}, \eta] = Z\left[-\frac{\delta}{\delta \psi}, \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}}\right] \left(F(\bar{\psi}, \psi) e^{\bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi} \right)_{\bar{\psi} = \psi = 0} \tag{eq. 141.2}$$

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{-S_I\left(-\frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, \frac{\delta}{\delta J}\right)} e^{\bar{\eta} S_F \eta} Z_\phi^{(0)}[J] = \tag{eq. 141.3}$$

$$= e^{-\frac{\delta}{\delta \psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}}} e^{-S_I(\bar{\psi}, \psi, \frac{\delta}{\delta J}) + \bar{\psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \psi} Z_\phi^{(0)}[J] \Big|_{\psi = \bar{\psi} = J = 0} =$$

$$= e^{-\frac{\delta}{\delta \psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ e^{-S_I(\bar{\psi}, \psi, \phi) + \bar{\psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \psi + J \cdot \phi} \right\}_{\psi = \bar{\psi} = \phi = 0}$$

Regras de Feynman para Férmions (Interação de Yukawa)

$$\mathcal{L}_Y = g \bar{\Psi} \Psi \phi$$

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{-\frac{\delta}{\delta \Psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \Delta \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ e^{-g \int d^4x \bar{\Psi} \Psi \phi + \bar{\Psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \Psi + J \cdot \phi} \right\}_{\Psi = \bar{\Psi} = \phi = 0}$$

Começemos com a função de dois pontos livre (onde os dois pontos são aplicações do campo fermiônico):

$G_{(n,m)}^{(N)}$
 ↳ ordem na expansão perturbativa
 ↳ numero de pontos externos bosônicos
 ↳ numero de pontos externos fermiônicos

$$G_{(2,0)}^{(0)} = \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \left(- \frac{\delta}{\delta \eta(y)} \right) Z_0(\bar{\eta}, \eta, J) \Big|_{\eta = \bar{\eta} = J = 0}$$

note que, trivialmente, temos $\langle 0 | \psi \psi | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{\psi} \bar{\psi} | 0 \rangle = 0$

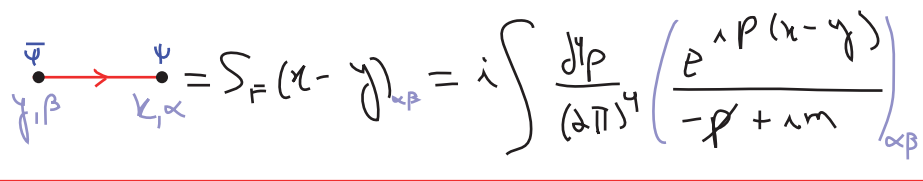
$$Z_0[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{-\frac{\delta}{\delta \Psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \Delta \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ e^{-\bar{\Psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \Psi + J \cdot \phi} \right\}_{\Psi = \bar{\Psi} = \phi = 0} =$$

↳ Só estou interessado na parte que contribui para $G_{(2,0)}^{(0)}$ ou seja com $\eta \cdot \bar{\eta}$

$$= - \frac{\delta}{\delta \Psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}} e^{\bar{\Psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \Psi} = \bar{\eta} \cdot S_F \cdot \eta e^{\bar{\Psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \Psi} \Big|_{\bar{\Psi} = \Psi = 0} = \bar{\eta} \cdot S_F \cdot \eta$$

$$G_{(2,0)}^{(0)} = \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \left(- \frac{\delta}{\delta \eta(y)} \right) \bar{\eta} \cdot S_F \cdot \eta = \int d^4z_1 d^4z_2 \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \bar{\eta}(z_1) S_F(z_1 - z_2) \delta_{\beta\gamma} \frac{\delta}{\delta \eta(y)} \eta(z_2)_{\beta} = S_F(x - y)_{\alpha\beta}$$

$\delta^4(y - z_2) \delta_{\beta\gamma}$



$$= S_F(x - y)_{\alpha\beta} = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{e^{i p \cdot (x - y)}}{-\not{p} + m} \right)_{\alpha\beta}$$

(eq. 142.1)

Note que agora o sinal do momento (ou a ordem de x e y) importa!

A regra para o vértice vem trivialmente da função de três pontos:

$$G_{(2,1)}^{(1)} = \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \left(- \frac{\delta}{\delta \eta(y)} \right) \frac{\delta}{\delta J(z)} e^{-\frac{\delta}{\delta \Psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \Delta \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ e^{-g \int d^4x \bar{\Psi} \Psi \phi + \bar{\Psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \Psi + J \cdot \phi} \right\}_{\Psi = \bar{\Psi} = \phi = 0}$$

↳ índice espinoriais subentendidos

$$= e^{-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\psi}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi}} \left\{ \phi(z) \psi(x) \bar{\psi}(y) e^{-g \int d^4\omega \bar{\psi} \psi \phi} \right\} =$$

só quero o termo $O(g^1)$

$$= e^{-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\psi}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi}} (-g) \phi(z) \psi(x) \bar{\psi}(y) \int d^4\omega \bar{\psi}_\beta(\omega) \psi_\alpha(\omega) \phi(\omega) =$$

índice espinoriais subentendidos

$$= -g \int d^4\omega \Delta(z-\omega) \frac{1}{2} \left(-\frac{\delta}{\delta\psi} \cdot S_F \cdot \frac{\delta}{\delta\psi} \right) \left(-\frac{\delta}{\delta\psi} \cdot S_F \cdot \frac{\delta}{\delta\psi} \right) \psi(x) \bar{\psi}(y) \bar{\psi}(\omega) \psi(\omega) =$$

$$\left(-\frac{\delta}{\delta\psi} \cdot S_F \cdot \frac{\delta}{\delta\psi} \right) \psi(x) \bar{\psi}(y) \bar{\psi}(\omega) \psi(\omega) =$$

$$= \int d^4z_1 d^4z_2 \left(-\frac{\delta}{\delta\psi(z_1)} S_F(z_1-z_2) \right) \left[-\psi(x) \delta(z_2-y) \delta_{\alpha\beta} \bar{\psi}_\beta(\omega) \psi_\alpha(\omega) + \psi(x) \bar{\psi}_\beta(y) \delta(\omega-z_2) \delta_{\beta\alpha} \psi_\alpha(\omega) \right] =$$

Não quero diagramas do tipo:



$$= \int d^4z_1 d^4z_2 \left(-S_F(z_1-z_2) \right) \left[-\psi(x) \delta(z_2-y) \bar{\psi}_\beta(\omega) \delta_{\alpha\beta} \psi_\alpha(\omega) + \delta(x-z_1) \bar{\psi}_\beta(y) \delta(\omega-z_2) \psi_\alpha(\omega) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right] + (\dots)$$

$$= +S_F(\omega-y)_{\beta\alpha} \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(\omega) - S_F(x-\omega)_{\alpha\beta} \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(\omega) + (\dots)$$

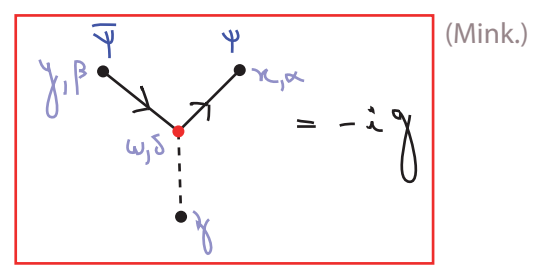
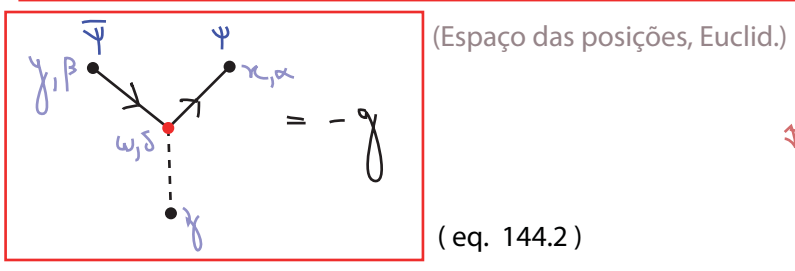
$$= -g \int d^4\omega \Delta(z-\omega) \frac{1}{2} \int d^4z_3 d^4z_4 \left(-\frac{\delta}{\delta\psi(z_3)} \cdot S_F(z_3-z_4) \cdot \frac{\delta}{\delta\psi(z_4)} \right) \left[+S_F(\omega-y) \psi(x) \bar{\psi}(\omega) - S_F(x-\omega) \bar{\psi}(y) \psi(\omega) \right] =$$

$$= -g \int d^4\omega \Delta(z-\omega) \frac{1}{2} \int d^4z_3 d^4z_4 \left(-S_F(z_3-z_4) \right) \left[-S_F(\omega-y) \psi(x) \delta(\omega-z_4) - S_F(x-\omega) \delta(y-z_4) \psi(\omega) \right] =$$

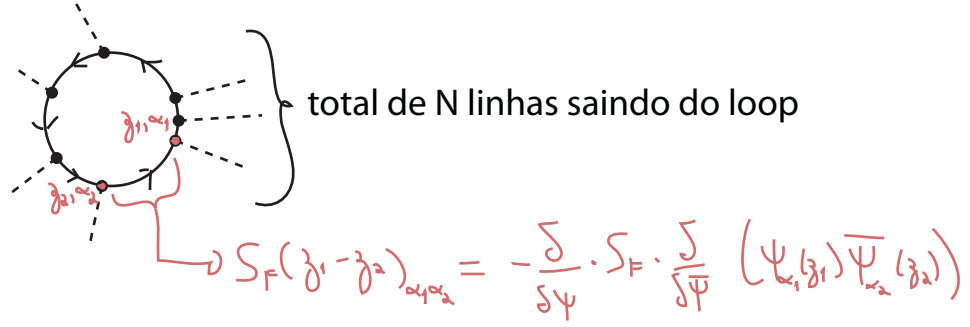
$$= -g \int d^4\omega \Delta(z-\omega) \frac{1}{2} \int d^4z_3 d^4z_4 \left(-S_F(z_3-z_4) \right) \left[-S_F(\omega-y) \delta(x-z_3) \delta(\omega-z_4) - S_F(x-\omega) \delta(y-z_4) \delta(\omega-z_3) \right] =$$

$$= -g \int d^4\omega \Delta(z-\omega) \frac{1}{2} \left[S_F(x-\omega)_{\alpha\delta} S_F(\omega-y)_{\delta\beta} + S_F(\omega-y)_{\delta\beta} S_F(x-\omega)_{\alpha\delta} \right] =$$

$$G_{(2,1)}^{(1)} = -g \int d^4\omega \Delta(\gamma-\omega) S_F(x-\omega) S_F(\omega-\gamma) \quad (\text{eq. 144.1})$$



A importância do ordenamento do campo fermiônico cria uma importante diferença entre um loop fermiônico e um loop bosônico, pense no seguinte diagrama:



Temos vários termos deste tipo:

$$\left(-\frac{\delta}{\delta \psi} \cdot S_F \cdot \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}}\right) \dots \left(-\frac{\delta}{\delta \psi} \cdot S_F \cdot \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}}\right) \left((\bar{\Psi} \Psi)_1 \dots (\bar{\Psi} \Psi)_N \right) \leftrightarrow (\bar{\Psi} \Psi)_i = \bar{\Psi}(z_i) \Psi(z_i)$$

note que estes vêm todos da interação, por isso a ordem $\bar{\Psi} \Psi$

Para obter a combinação cíclica (já que é um loop):

$$S_F(z_N - z_1)_{\alpha_N \alpha_1} S_F(z_1 - z_2)_{\alpha_1 \alpha_2} \dots S_F(z_{N-1} - z_N)_{\alpha_{N-1} \alpha_N} = \text{Tr} \left[S_F(z_1 - z_2) \dots S_F(z_{N-1} - z_N) \right]$$

(loops de férmions geram traços)

temos que trazer o último campo para a primeira posição e então aplicar as derivadas:

$$\left((\bar{\Psi} \Psi)_1 \dots (\bar{\Psi} \Psi)_N \right) = -\Psi(z_N) (\bar{\Psi} \Psi)_1 \dots (\bar{\Psi} \Psi)_{N-1} \Psi_N(z_N)$$

passo por 2N-1 campos

De onde vemos que, além de qualquer sinal que venha dos vértices $(-g)^N$, temos uma regra de Feynman nova, devemos multiplicar por sinal total negativo toda vez que aparecer um loop fermiônico. Você pode checar, por exemplo que o mesmo loop gerado em uma teoria $\lambda \phi^3$ não tem sinal algum além do que vem dos vértices.



Regras de Feynman para interação de Yukawa:

(Espaço das posições, Euclid.)
(eq. 144.3)

$$S_F(x-y)_{\alpha\beta} = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{e^{ip(x-y)}}{-p + im} \right)_{\alpha\beta} \quad (\text{direção é importante})$$

$$S_F(x-y) = -g$$

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2}$$

(multiplico por -1^L , onde $L = \#$ loops fermiônicos)
(a contração dos índices espinoriais vai produzir um traço)

Para uma interação geral entre férmions e um número arbitrário de escalares:

$$S_I(\bar{\Psi}, \Psi, \phi_1, \dots, \phi_n)$$

Temos uma expressão semelhante a 122.1, a regra do vértice é dada por:

$$\int d^4x d^4y d^4z_1 \dots d^4z_n e^{-i(p \cdot x + p' \cdot y + q_1 \cdot z_1 + \dots + q_n \cdot z_n)} \times$$


$$\times \frac{\delta}{\delta \phi_1(z_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_n(z_n)} \left(-\frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}(y)} \frac{\delta}{\delta \Psi(x)} \right) \left[-S_I[\bar{\Psi}, \Psi, \phi_1, \dots, \phi_n] \right]$$

(eq. 145.1)

Regras de Feynman no Espaço de Minkowsky:

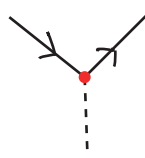
Basta fazer a rotação de volta na expressão 144.1 (os propagadores já tinham sido deduzidos anteriormente) para mostrar que

Regras de Feynman para interação de Yukawa (Minkowski):




$$= \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

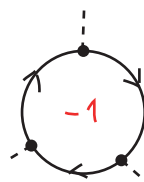
(direção é importante)



$$= -i\gamma$$



$$= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$



(multiplico por -1^L , onde $L = \#$ loops fermiônicos)
(a contração dos índices espino-riais vai produzir um traço)

(Espaço dos momentos, Mink.) (eq. 145.2)

Lembrando que um estado fermiônico pode ser escrito como:

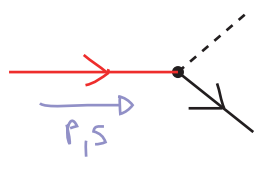
$$|p, s\rangle = \sqrt{2E_p} \alpha_p^{s+} |0\rangle$$

Então:

$$\Psi(x) |p, s\rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \sum_{s'} \alpha_{p'}^{s'} u^{s'}(p') e^{ip' \cdot x} \sqrt{2E_p} \alpha_p^{s+} |0\rangle =$$

$$= e^{ip \cdot x} u^s(p) |0\rangle \quad \text{(note que especificamos também o spin)}$$

mais uma vez estamos evitando fazer a transformada de Fourier e lidar com os propagadores externos de férmions (que serão amputados via LSZ), comparando isto com o que fizemos nas páginas 97 e 98, dá para intuir que as exponenciais serão convertidas na conservação de momento total, deixando como regra da linha externa:



$$= u^s(p)$$

usando o mesmo raciocínio para a^\dagger , b e b^\dagger , chegamos a (note que estas regras só fazem sentido no espaço de Minkowski onde podemos definir um espalhamento):

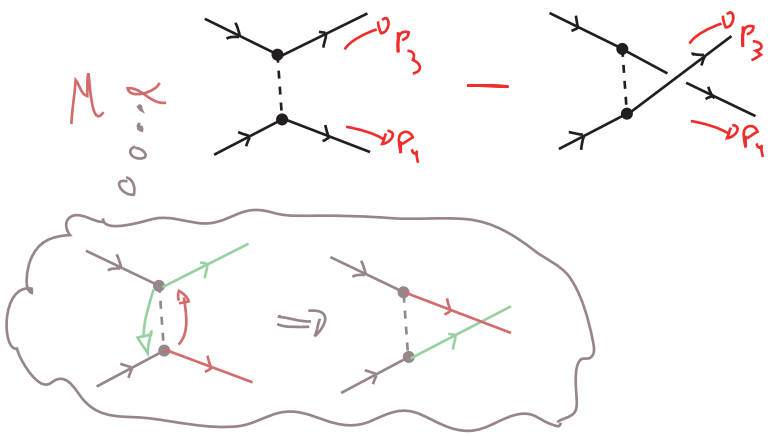
Linhas externas fermiônicas

(eq. 146.1)

É importante notar que:

$$\Psi \Psi | \vec{p}, s; \vec{p}', s' \rangle = - \Psi \Psi | \vec{p}', s'; \vec{p}, s \rangle$$

portanto diagramas que difiram apenas pela troca de dois férmions finais vão ter um sinal relativo negativo. Exemplo:



para saber o sinal global é preciso escrever o elemento de matriz explicitamente e usar o teorema de Wick, raramente isso é necessário pois estamos interessados em $|M|^2$ mas há exceções (e.g.: cálculo de potenciais). Veja Peskin pgs 119 e 120.

Isto fale também se trocarmos linhas de férmions e anti-férmions, uma vez que são criados/aniquilados pelo mesmo campo. Note que (espalhamento Bhabha):

$$\mathcal{G}(e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-) \Rightarrow \langle e^-(p_2) e^+(p_1) | (\bar{\Psi} A_\mu \Psi)(x) (\bar{\Psi} A_\nu \Psi)(y) | e^-(p_1) e^+(p_2) \rangle$$

↗ aniquila e^+ , cria e^-
↘ aniquila e^- , cria e^+

este espalhamento pode ser obtido de dois jeitos:

$\langle e^+(p_1) e^-(p_2) | \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \bar{\Psi}(y) \Psi(y) | e^-(p_1) e^+(p_2) \rangle \Rightarrow$

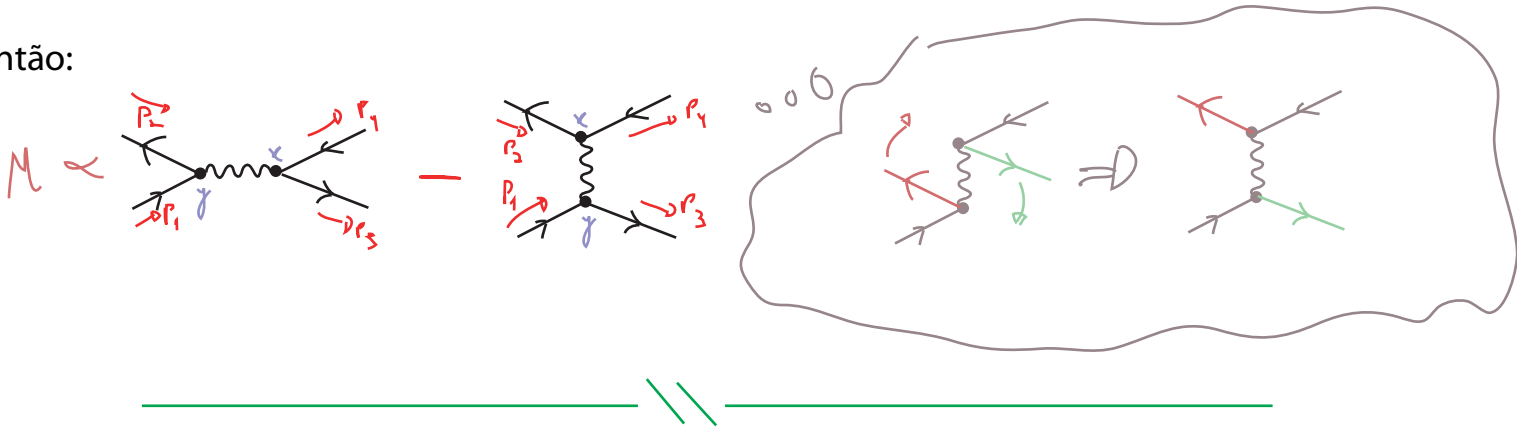
ou

$\langle e^+(p_1) e^-(p_2) | \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \bar{\Psi}(y) \Psi(y) | e^-(p_1) e^+(p_2) \rangle \Rightarrow$

SINAL!!

normalmente desenhamos:

Então:



Somas de Spin, Bilineares e simetrias discretas C, P e T

(Natase 14; Peskin 3.4 e 3.6)

Frequentemente estaremos calculando espalhamentos entre férmions onde:

- (1) Temos partículas sem qualquer polarização definida no início
- (2) Queremos saber a probabilidade de espalhamento, independentemente da direção do spin final

Para dar conta de um estado inicial totalmente “despolarizado” o que podemos fazer é escrever (estamos pensando em uma única partícula sendo espalhada por alguma coisa “externa”):

$$P(|N_i = \uparrow\rangle) = P(|N_i = \downarrow\rangle) = \frac{1}{2}$$

E queremos obter uma probabilidade total que é:

$$P(|N_i \rightarrow \uparrow\rangle) + P(|N_i \rightarrow \downarrow\rangle)$$

Acontece que, para o estado inicial despolarizado acima:

$$P(|N_i \rightarrow \uparrow\rangle) = \frac{1}{2} P(\uparrow \rightarrow \uparrow) + \frac{1}{2} P(\downarrow \rightarrow \uparrow)$$

De forma que enfim:

$$\begin{aligned} P_{\text{TOTAL}} &= \frac{1}{2} P(\uparrow \rightarrow \uparrow) + \frac{1}{2} P(\downarrow \rightarrow \uparrow) + \frac{1}{2} P(\uparrow \rightarrow \downarrow) + \frac{1}{2} P(\downarrow \rightarrow \downarrow) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{S, R = \uparrow, \downarrow} P(S \rightarrow R) \end{aligned}$$

Na (densidade de) probabilidade final, somamos sobre os spins finais e tiramos uma média sobre os iniciais (o mesmo acontece com qualquer outro número quântico que não observamos, por exemplo a “cor” da QCD)

Na prática, estas somas sobre spins externos, haja visto as regras 146.1, vão nos levar a calcular expressões do tipo:

$$\sum_{S=1,2} u^S(p) \bar{u}^S(p) = \sum_S \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^S \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{S\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma} & \xi^{S\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \end{pmatrix} \underbrace{\gamma^0}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} =$$

$$= \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \xi^{s+} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \xi^{s+} \sqrt{p \cdot \sigma} \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \xi^{s+} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \xi^{s+} \sqrt{p \cdot \sigma} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_s \xi^s \xi^{s+} = \hat{1}_{2 \times 2}$$

$$(p_N \cdot \sigma^N)(p_V \cdot \bar{\sigma}^V) = p_0 \sigma^0 p_0 \bar{\sigma}^0 + p_i \sigma^i p_0 \bar{\sigma}^0 + p_0 \sigma^0 p_i \bar{\sigma}^i + p_i \sigma^i p_j \bar{\sigma}^j =$$

$$= (p_0)^2 - p_i p_j \sigma^i \sigma^j + p_i \sigma^i p_0 - p_0 p_i \sigma^i =$$

$$p_i p_j \sigma^i \sigma^j = p_i p_j (2\delta^{ij} - \sigma^i \sigma^j) \rightarrow p_i p_j \sigma^i \sigma^j = (p_i)^2$$

$$= (p_0)^2 - (p_i)^2 = p_\nu p^\nu = m^2$$

$$= \begin{pmatrix} m & p \cdot \sigma \\ p \cdot \bar{\sigma} & m \end{pmatrix} = \not{p} + m \hat{1}$$

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \sum_s \vec{u}^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m \quad (\text{eq. 148.1})$$

Analogamente:

$$\sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m \quad (\text{eq. 148.2})$$

Bilineares do Campo de Dirac

Claramente, qualquer grandeza observável vai ter que ser composta do produto de um número par de campos de Dirac, uma vez que estes são números de Grassmann. Assim, qualquer objeto observável vai ser construído a partir de bilineares, que são números usuais que comutam. Mesmo em grandezas não observáveis em teoria de campos (e.g. o propagador) é comum o aparecimento de bilineares, por isso é importante entender suas propriedades. Vamos começar com o bilinear mais simples:

$$j_s = \bar{\Psi} \Psi \rightarrow \text{Escalar de Lorentz (por construção, inventamos } \bar{\Psi} \text{ justamente para este fim)}$$

O próximo que nos interessa é:

$$j^N = \bar{\Psi} \not{\sigma}^N \Psi \rightarrow \bar{\Psi} M_0^{-1} \not{\sigma}^N M_0 \Psi = \Lambda^N_\nu \bar{\Psi} \not{\sigma}^\nu \Psi = \Lambda^N_\nu j^\nu$$

$M_0^{-1}(\Lambda) \not{\sigma}^N M_0(\Lambda) = \Lambda^N_\nu \not{\sigma}^\nu$

Que outros poderíamos ter? A forma mais sistemática de buscar seria definir:

$$\hat{j}_\mu = \bar{\psi} \Gamma_\mu \psi$$

Onde Γ é qualquer matriz 4x4, e então decompor esta matriz em uma base para as matrizes 4x4. Dada esta base, podemos definir um produto escalar neste espaço de matrizes e construir uma métrica:

$$\text{Tr} [\Gamma_a \Gamma_b] = g^{ab} \quad (\text{produto escalar})$$

$a, b = 1, \dots, 16$

Que pode ser usada, para baixar e levantar índices: $\Gamma^a = g^{ab} \Gamma_b$

Qualquer matriz pode ser expandida nesta base:

$M = M^a \Gamma_a$

matrizes
número

$$M = M^b \Gamma_b$$

$$M \Gamma^a = M^b \Gamma_b \Gamma^a$$

$$\text{Tr} [M \Gamma^a] = M^b \text{Tr} [\Gamma_b \Gamma^a] = M^b g^{ba} = M^a$$

$$M^a = \text{Tr} (M \Gamma^a)$$

 (eq. 149.1)

$$M = \text{Tr} (M \Gamma^a) \Gamma_a$$

$$M_{ij} = M_{kl} (\Gamma^a)_{kl} (\Gamma_a)_{ij}$$

$$\delta_{il} \delta_{jk} M_{kk} = M_{kk} (\Gamma^a)_{kl} (\Gamma_a)_{ij}$$

$$\delta_{il} \delta_{jk} = (\Gamma^a)_{kl} (\Gamma_a)_{ij}$$

 (eq. 149.2)

Suponha agora que estejamos calculando:

$$(\bar{\psi}_1 A \psi_2) (\bar{\psi}_3 B \psi_4) = (\bar{\psi}_1)_i A_{ij} (\psi_2)_j (\bar{\psi}_3)_k B_{kl} (\psi_4)_l$$

$$A_{ij} B_{kl} = A^a B^b (\Gamma_a)_{ij} (\Gamma_b)_{kl}$$

Podemos reescrever a mesma expressão em termos de outras duas matrizes, para as quais valha:

$$(\bar{\psi}_1 M \psi_4) (\bar{\psi}_3 N \psi_2) = (\bar{\psi}_1)_i M_{il} (\psi_4)_l (\bar{\psi}_3)_k N_{kj} (\psi_2)_j$$

$$M_{il} N_{kj} = M^c N^d (\Gamma_c)_{il} (\Gamma_d)_{kj}$$

Para encontrar a relação entre $A_{ij} B_{kl}$ e $M_{il} N_{kj}$ basta encontrar a relação entre

$(\Gamma_a)_{ij} (\Gamma_c)_{kl}$ e $(\Gamma_a)_{il} (\Gamma_c)_{kj}$ dada pela combinação linear:

$$(\Gamma_a)_{ij} (\Gamma_c)_{kl} = C_{ab}{}^{cd} (\Gamma_c)_{il} (\Gamma_d)_{kj}$$

 (eq. 149.3)

Multiplicando esta expressão por $(\Gamma_e)_{\lambda\lambda} (\Gamma_f)_{jk}$ temos:

$$\underbrace{(\Gamma_a)_{ij} (\Gamma_c)_{kl} (\Gamma_e)_{\lambda\lambda} (\Gamma_f)_{jk}}_{\text{Tr}[\Gamma_a \Gamma_c \Gamma_b \Gamma_e]} = C_{ab}{}^{cd} \underbrace{(\Gamma_c)_{il} (\Gamma_d)_{kj}}_{\text{Tr}[\Gamma_c \Gamma_e] = g_{ce}} \underbrace{(\Gamma_e)_{\lambda\lambda} (\Gamma_f)_{jk}}_{g_{df}}$$

$$C_{ab}{}^{cd} = \text{Tr}[\Gamma_a \Gamma_d \Gamma_b \Gamma_c] \quad (\text{eq. 150.1})$$

As equações 149.3 e 150.1 nos permitem re-arranjar produtos de bilineares e são conhecidas como **fórmulas de rearranjo de Fierz**. Conhecendo o coeficiente 150.1 podemos escrever:

$$A_{ij} B_{kl} = A^a B^b (\Gamma_a)_{ij} (\Gamma_b)_{kl} = A^a B^b C_{ab}{}^{cd} (\Gamma_c)_{il} (\Gamma_d)_{kj} \\ \times (\Psi_1)_i (\Psi_2)_j (\bar{\Psi}_3)_k (\Psi_4)_l$$

$$(\bar{\Psi}_1 A \Psi_2) (\bar{\Psi}_3 B \Psi_4) = A^a B^b (\bar{\Psi}_1 \Gamma_a \Psi_2) (\bar{\Psi}_3 \Gamma_b \Psi_4) = \\ = \underbrace{-A^a B^b C_{ab}{}^{cd}}_{M^c N^d} (\bar{\Psi}_1 \Gamma_c \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \Gamma_d \Psi_2)$$

$$(\bar{\Psi}_1 \Gamma_a \Psi_2) (\bar{\Psi}_3 \Gamma_b \Psi_4) = -C_{ab}{}^{cd} (\bar{\Psi}_1 \Gamma_c \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \Gamma_d \Psi_2) \quad (\text{eq. 150.2})$$

Identidade de Fierz

Outra forma bastante útil é obtida multiplicando 149.2 por $(\Psi_2)_i (\bar{\Psi}_3)_k (B \Psi_4)_j$

$$\Rightarrow (\Psi_2)_i (\bar{\Psi}_3 B \Psi_4) = -(\bar{\Psi}_3)_k (\Gamma^a)_{kl} (\Psi_2)_l (\Gamma_a B \Psi_4)_i \\ (\Psi_2)_i (\bar{\Psi}_3 B \Psi_4) = -(\Gamma_a B \Psi_4)_i (\bar{\Psi}_3 \Gamma^a \Psi_2)$$

Que então multiplicamos por $(\bar{\Psi}_1 A)_i$

$$(\bar{\Psi}_1 A \Psi_2) (\bar{\Psi}_3 B \Psi_4) = -(\bar{\Psi}_1 A \Gamma_a B \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \Gamma^a \Psi_2) \quad (\text{eq. 150.3})$$

Especificando a base como:

$$\mathcal{O}_i = \left\{ \underbrace{\hat{1}_{4 \times 4}}_{\uparrow \text{matriz}}, \underbrace{\gamma^{\mu}}_{\uparrow}, \underbrace{\gamma_5}_{\uparrow}, \underbrace{\gamma^{\mu} \gamma_5}_{\uparrow}, \underbrace{\gamma^{\mu\nu}}_{\uparrow} = \frac{1}{2} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] = \frac{1}{2} \gamma^{[\mu} \gamma^{\nu]} \right\} \quad (\text{eq. 150.4}) \\ 6 = \frac{4 \cdot 3}{2} \rightarrow [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] = -[\gamma^{\nu}, \gamma^{\mu}]$$

E exigindo a normalização:

$$T_{\alpha} [\psi_i, \psi_j] = \psi \delta_{ij}$$

Rigorosamente: $\psi = \{ \hat{1}, \gamma^0, i\gamma^1, i\gamma^2, i\gamma^3, \gamma^5, i\gamma^0\gamma^5, \gamma^1\gamma^5, \gamma^2\gamma^5, \gamma^3\gamma^5, \gamma^{01}, \gamma^{02}, \gamma^{03}, i\gamma^{12}, i\gamma^{13}, i\gamma^{23} \}$

Temos a relação de completudeza:

$$\delta_{\alpha}^{\beta} \delta_{\gamma}^{\delta} = \frac{1}{4} (\psi_i)_{\alpha}^{\gamma} (\psi_i)_{\gamma}^{\beta}$$

↓ SIGMA DO

Que leva a uma eq. equivalente a 150.3:

$$(\bar{\psi}_1 A \psi_2) (\bar{\psi}_3 B \psi_4) = - \frac{1}{4} (\bar{\psi}_1 A \psi_i B \psi_4) (\bar{\psi}_3 \psi_i \psi_2) \quad (\text{eq. 151.1})$$

Dada a base 150.4, não precisamos nos preocupar com "estruturas" de Dirac mais complicadas, pois podem ser escritas nessa base. Por exemplo:

$$\gamma_{[NVP]} \equiv \gamma_{[N} \gamma_{\nu} \gamma_{P]} \propto \epsilon_{NVP\sigma} \gamma^{\sigma} \gamma_5$$

↳ produto completamente antissimétrico

(NVP - VP N - NPV + PNV - PVP + VPP)

$$\gamma_{[NVP\sigma]} \propto \epsilon_{NVP\sigma} \gamma_5$$

Definindo a terminologia, dado um bilinear $\bar{\psi} \Gamma \psi$, chamamos:

- $\Gamma = \hat{1} \Rightarrow \bar{\psi} \psi$ escalar
- $\Gamma = \gamma_5 \Rightarrow \bar{\psi} \gamma_5 \psi$ pseudo-escalar
- $\Gamma = \gamma^{\nu} \Rightarrow \bar{\psi} \gamma^{\nu} \psi$ vetor
- $\Gamma = \gamma^{\nu} \gamma_5 \Rightarrow \bar{\psi} \gamma^{\nu} \gamma_5 \psi$ pseudo-vetor ou vetor axial
- $\Gamma = \gamma^{\nu} \gamma^{\nu} \Rightarrow \bar{\psi} \gamma^{\nu} \gamma^{\nu} \psi$ tensor antissimétrico

Se ψ satisfaz a equação de Dirac, vemos que a corrente vetorial é conservada:

$$j^\mu \equiv \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \Rightarrow \partial_\nu j^\mu = (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\nu \psi = m \bar{\psi} \psi - m \bar{\psi} \psi = 0$$

$\bar{\psi} \overleftarrow{\not{\partial}} = m \bar{\psi}$ $\not{\partial} \psi = -m \psi$

(eq. 152.1)

No entanto a corrente axial:

$$\partial_\nu j^{\mu 5} \equiv \partial_\nu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi) = (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma_5 \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\nu \psi =$$

$$= \bar{\psi} \overleftarrow{\not{\partial}} \gamma_5 \psi - \bar{\psi} \gamma_5 \not{\partial} \psi = 2m \bar{\psi} \gamma_5 \psi$$

só é conservada se o férmion em questão não tiver massa: $m = 0 \iff \partial_\nu j^{\mu 5} = 0$ (eq. 152.2)

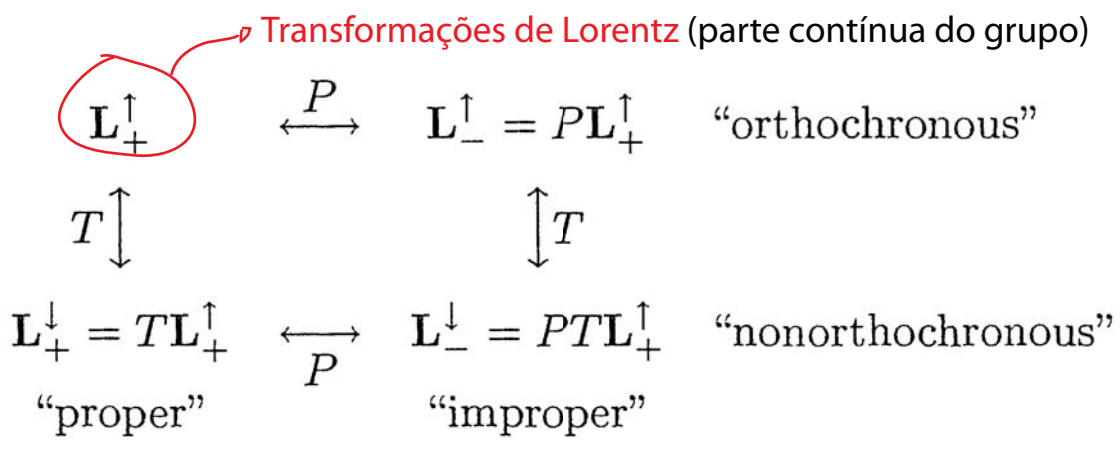
Simetrias C, P e T para férmions

Além da simetria de Lorentz (uma transformação contínua do espaço tempo) podemos ver se a nossa Lagrangeana é simétrica sobre transformações discretas do espaço tempo. Definimos:

Transformação de Paridade: $P: (t, \vec{x}) \rightarrow (t, -\vec{x})$

Inversão temporal: $T: (t, \vec{x}) \rightarrow (-t, \vec{x})$

Estas transformações podem ou não ser simetrias, não há nada que as exija a priori. Embora estas transformações não sejam contínuas, elas mantêm $\Sigma^2 = t^2 - \vec{x}^2$ invariante e fazem parte do grupo de Lorentz, que pode ser dividido:



Podemos ainda imaginar uma outra transformação:

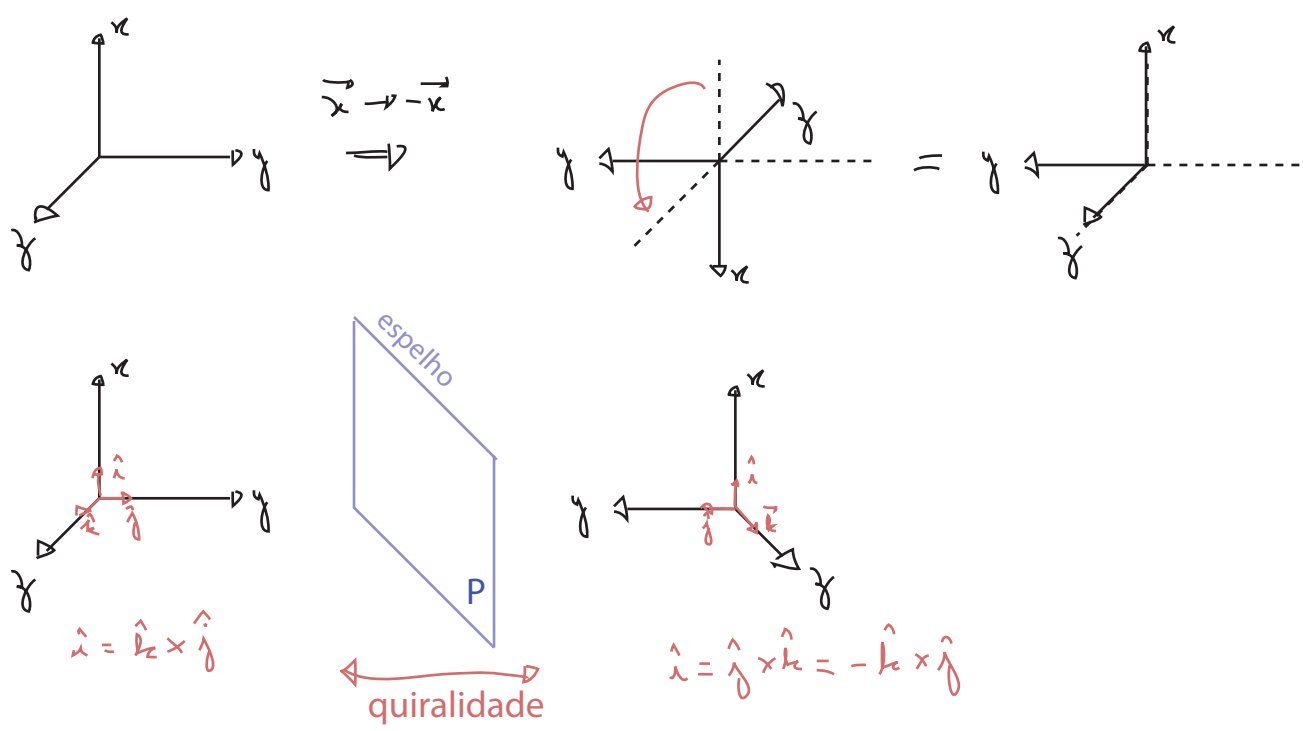
Conjugação de Carga: $C: \text{PARTÍCULA} \longleftrightarrow \text{ANTI PARTÍCULA}$
 (veremos mais a frente como definir isso)

Por muito tempo acreditou-se que as simetrias C, P e T eram, SEPARADAMENTE, simetrias da física, pois tanto a gravitação quanto o eletromagnetismo (e depois as interações fortes) respeitavam estas simetrias, mas aí as interações fracas vieram para estragar a alegria: as primeiras medidas indica-

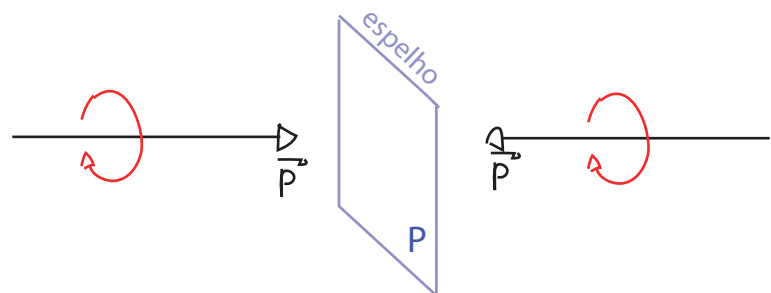
vam que a teoria era invariante sobre transformações CP, mas não C e P separadamente (a quebra da simetria de paridade foi bastante surpreendente). Sabemos hoje que há também uma pequena violação de CP gerada pelas interações fracas e esperamos uma violação ainda maior proveniente de alguma teoria além do modelo padrão, pois esta é necessária para explicar a assimetria entre matéria e antimatéria. A simetria sobre transformações CPT no entanto deve ser respeitada (segundo o Teorema CPT, que assume uma série de coisas "sensatas": invariância de Lorentz da teoria e do vácuo, energia tem um mínimo global, comutatividade das coordenadas espaciais, localidade, unitariedade uma prova do teorema e mais referências podem ser encontradas na seção 5.8 do Weinberg) o que implica uma violação de T. Vamos encontrar representações destas transformações:

Paridade:

Primeiramente note que P é o mesmo que ocorre em uma reflexão no espelho:



Isso quer dizer, dado uma partícula com spin (ou helicidade ou qualquer momento angular), cuja projeção da direção do momento é representada por uma rotação em torno do eixo definido por este, sofrerá a seguinte transformação:



Note que o momento é invertido mas não o spin.

Se codificarmos toda a ação de P como um operador unitário agindo sobre os outros operadores da teoria (os de criação e aniquilação), isto implica que:

$$P a_{\vec{p}}^S P^{-1} = \underbrace{\eta_a^S}_{\text{possíveis fases (paridade intrínseca)}} a_{-\vec{p}}^S \quad P b_{\vec{p}}^S P^{-1} = \underbrace{\eta_b^S}_{\text{possíveis fases (paridade intrínseca)}} b_{-\vec{p}}^S \quad (\text{eq. 153.1})$$

Aplicar P duas vezes deveria nos trazer observáveis de volta ao valor original, logo:

$$P^2 = \hat{1} \quad (\text{eq. 154.1}) \quad \rightarrow \quad P^\dagger = P^{-1} = P \quad (\text{eq. 154.2})$$

unitária ↙

$$\therefore |\eta_{\uparrow}|^2 = |\eta_{\downarrow}|^2 = 1$$

definindo: $\tilde{p} = (p^0, -\vec{p})$

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{p} \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ \sqrt{\tilde{p} \cdot \sigma} \xi \end{pmatrix} = \gamma^0 u(\tilde{p})$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
↑

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = (1, -\vec{\sigma}) &\Rightarrow \begin{cases} p \cdot \sigma = p^0 \sigma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma} = \tilde{p} \cdot \bar{\sigma} \\ p \cdot \bar{\sigma} = p^0 \bar{\sigma}^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma} = \tilde{p} \cdot \sigma \end{cases} \\ \sigma = (1, \vec{\sigma}) & \end{aligned}$$

$$v(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{p} \cdot \bar{\sigma}} \eta \\ -\sqrt{\tilde{p} \cdot \sigma} \eta \end{pmatrix} = -\gamma^0 v(\tilde{p})$$

$$p \cdot x = p^0 t - \vec{p} \cdot \vec{x} = p^0 t - (\vec{p}) \cdot (-\vec{x}) = \tilde{p} \cdot (t, -\vec{x})$$

Note que P só age sobre a e b (não age no espaço com índices spinoriais ou nas matrizes de Dirac)

então:

$$P \psi(x) P = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(\eta_a a_{-\vec{p}}^s u^s(p) e^{-i p x} + \eta_b^* b_{-\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{i p x} \right)$$

$$= \int \frac{d^3 \tilde{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(\eta_a a_{\vec{p}}^s \gamma^0 u^s(\tilde{p}) e^{-i \tilde{p}(t, -\vec{x})} - \eta_b^* b_{\vec{p}}^{s\dagger} \gamma^0 v^s(\tilde{p}) e^{i \tilde{p}(t, -\vec{x})} \right)$$

(note que a transformação de x saiu como esperado)

(eq. 154.3)

Para que a integral acima seja proporcional a $\psi(t, -\vec{x})$, ou seja, para que $\psi(t) |0\rangle$ tenha paridade bem definida, exigimos:

$$\eta_b^* = -\eta_a \quad (\text{estamos escolhendo uma representação ao fazer isso})$$

neste caso:

$$P \psi(x) P = \eta_a \gamma^0 \psi(t, -\vec{x}) \quad (\text{eq. 154.4})$$

$$(P \psi(x) P)^\dagger = \eta_a^* \psi^\dagger(t, -\vec{x}) \gamma^{0\dagger} = \eta_a^* \psi^\dagger(t, -\vec{x}) \gamma^0$$

$$\therefore P \bar{\psi}(x) P = P^\dagger \psi^\dagger P^\dagger = (P \psi(x) P)^\dagger \gamma^0 = \eta_a^* \bar{\psi}(t, -\vec{x}) \gamma^0 \quad (\text{eq. 154.5})$$

$P = P^\dagger$

Vejam agora as propriedades dos bilineares. O escalar de fato se comporta como tal:

$$\bar{\Psi} \Psi \xrightarrow{P} P \bar{\Psi} \Psi P = P \bar{\Psi} P P \Psi P = |\eta_a|^2 \bar{\Psi}(t, -\vec{x}) (\gamma^0)^2 \Psi(t, -\vec{x}) = (\bar{\Psi} \Psi)(t, -\vec{x}) \quad (\text{eq. 155.1})$$

já o pseudo-escalar (daí o "pseudo"):

$$\bar{\Psi} \gamma_5 \Psi \xrightarrow{P} P \bar{\Psi} P P \gamma_5 \Psi P = \bar{\Psi}(t, -\vec{x}) \gamma^0 \gamma_5 \gamma^0 \Psi(t, -\vec{x}) = -(\bar{\Psi} \gamma_5 \Psi)(t, -\vec{x}) \quad (\text{eq. 155.2})$$

note que η_a não importa para os bilineares

obs: $(\bar{\Psi} \gamma_5 \Psi)^\dagger = -\bar{\Psi} \gamma_5 \Psi$ não é Hermiteano, portanto é comum definir a corrente pseudo escalar como $i \bar{\Psi} \gamma_5 \Psi$

e:

$$\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \xrightarrow{P} \bar{\Psi}(t, -\vec{x}) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \Psi(t, -\vec{x}) = (-1)^\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi)(t, -\vec{x}) \quad (\text{eq. 155.3})$$

$\mu=0 \Rightarrow \gamma^0$
 $\mu=i \Rightarrow (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$

$(-1)^\mu = \begin{cases} 1 & \mu=0 \\ -1 & \mu=1,2,3 \end{cases}$

(a parte espacial inverte de sinal e a temporal não, exatamente o que esperávamos de um vetor sob uma transformação de paridade)

$$\bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \Psi \xrightarrow{P} \bar{\Psi}(t, -\vec{x}) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^0 \Psi(t, -\vec{x}) = -(-1)^\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \Psi)(t, -\vec{x}) \quad (\text{eq. 155.4})$$

γ_5 sinal extra

(como um vetor, mas com sinal errado, daí o pseudo-vetor)

Inversão Temporal:

A inversão temporal reverte na direção do tempo, isso significa que vamos inverter o momento e o sentido das rotações (e do spin):



queremos então:

$$\begin{cases} \vec{p} \rightarrow -\vec{p} \\ \vec{s} \rightarrow -\vec{s} \\ (t, \vec{x}) \rightarrow (-t, \vec{x}) \end{cases}$$

momentos angulares (e spins) são invertidos

Mas já vimos acima que a inversão do momento na expansão de Ψ , inverte o sinal da posição e não do tempo. Este aparente beco sem saída aparece porque T não pode ser implementada como um operador linear (tem uma prova disso na pg 67 do Peskin) mas sim por um **operador antilinear (e antiunitário)**:

$$T z = z^* T \quad T^\dagger = T^{-1} \quad (\text{T age nos números complexos também})$$

$\hookrightarrow \mathbb{C}\text{-NUMBER}$

e então:

$$T \alpha_{\vec{p}}^s T^{-1} = \alpha_{-\vec{p}}^{-s} \quad T \beta_{\vec{p}}^s T^{-1} = \beta_{-\vec{p}}^{-s} \quad (\text{eq. 155.5})$$

(Estou ignorando a fase por simplicidade. Weinberg, pg 78, prova que podemos eliminá-la trivialmente)

A antilinearidade implica em:

$$T a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{i p x} T^{-1} = T a_{\vec{p}}^s T^{-1} [u^s(p)]^* e^{-i p x} = a_{-\vec{p}}^{-s} [u^s(p)]^* e^{-i p x}$$

$$T b_{\vec{p}}^{s+} v^s(p) e^{-i p x} T^{-1} = T b_{\vec{p}}^{s+} T^{-1} [v^s(p)]^* e^{i p x} = b_{-\vec{p}}^{-s+} [v^s(p)]^* e^{i p x}$$

Considere uma base de spin mais geral do que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, com a orientação do spin dada em relação a um eixo com ângulos θ e ϕ em relação ao eixo z:

$$\xi(\uparrow) = R(\theta, \phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$\xi(\downarrow) = R(\theta, \phi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$\xi^s = \begin{cases} \xi^1 = \xi(\uparrow) \\ \xi^2 = \xi(\downarrow) \end{cases} \quad \xi^s = (\xi(\uparrow), \xi(\downarrow))$$

preciso achar ξ^{-s}

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} = \sigma_1 (-\sigma_2^*)$$

Se escolhermos um eixo \vec{n} tal que: $\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \xi^+ = + \xi^+$ então $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) (-i \sigma_2 \xi^{+*}) =$

operador proj. de spin

$$\vec{n} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -i \sigma_2 (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^* \xi^{+*} = i \sigma_2 \xi^{+*} = -(-i \sigma_2 \xi^{+*})$$

$$\xi^{-s} \equiv -i \sigma_2 (\xi^s)^* \quad (\text{eq. 156.1})$$

$$\xi^{-s} = (\xi(\downarrow), -\xi(\uparrow))$$

$$\theta=0, \phi=0 \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \eta^s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$-i \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $-i \sigma_2 \xi(\uparrow)^* = \xi(\downarrow)$
- $-i \sigma_2 \xi(\downarrow)^* = -\xi(\uparrow)$
- $-i \sigma_2 (-\xi(\uparrow))^* = -\xi(\downarrow)$
- $-i \sigma_2 (-\xi(\downarrow))^* = \xi(\uparrow)$

quatro inversões para chegar no original

duas inversões resultam em um sinal (-)

Note que η (pg 128), deve ser $\eta^s = \xi^{-s}$ uma vez que b^+ cria uma partícula com todos os números quânticos opostos ao de a^+ , inclusive a projeção de spin. (o lugar onde isto está mais formal é a sec. 5.5 do Weinberg, veja o desenvolvimento até a eq. 5.5.36)

$a_{\vec{p}}^{-s}$ deve fazer o mesmo, trocando ξ^s por ξ^{-s} na função de onda do estado que ele cria, definimos:

$$a_{\vec{p}}^{-s} = (a_{\vec{p}}^2, -a_{\vec{p}}^1) \quad \text{E} \quad b_{\vec{p}}^{-s} = (b_{\vec{p}}^2, -b_{\vec{p}}^1) \quad (\text{eq. 156.2})$$

Para os espinores temos:

$$u^{-s}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\vec{p} \cdot \sigma} (-i\sigma^2 \xi^{s*}) \\ \sqrt{\vec{p} \cdot \sigma} (-i\sigma^2 \xi^{s*}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \sqrt{p \cdot \sigma^*} \xi^{s*} \\ -i\sigma^2 \sqrt{p \cdot \sigma^*} \xi^{s*} \end{pmatrix} =$$

(basta expandir a raiz em p e notar que:
 $(\vec{p} \cdot \sigma)\sigma^2 = [\vec{p} \cdot \hat{1} - \vec{p} \cdot \sigma^i] \sigma^2 =$
 $= \sigma^2 [\vec{p} \cdot \hat{1} + \vec{p} \cdot \sigma^i] =$
 $= \sigma^2 [p \cdot \hat{1} - p \cdot \sigma^i] = \sigma^2 (p \cdot \sigma^*)$

$$= -i \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} [u^s(p)]^* = -\gamma^1 \gamma^3 [u^s(p)]^*$$

basta multiplicar os dois lados por $\gamma^1 \gamma^3$ e: $\begin{cases} (\gamma^i)^2 = -1 \\ \gamma^i \gamma^j = -\gamma^j \gamma^i \end{cases}$

Invertendo a relação obtemos: $[u^s(p)]^* = \gamma^1 \gamma^3 u^{-s}(\vec{p})$ (eq. 157.1)

da mesma forma: $[v^s(p)]^* = \gamma^1 \gamma^3 v^{-s}(\vec{p})$ (eq. 157.2)

Juntando tudo em Ψ temos:

$$\begin{aligned} \overline{T\Psi T^{-1}} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s T (a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ipx} + b_{\vec{p}}^{s+} v^s(p) e^{+ipx}) T^{-1} = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (a_{\vec{p}}^{-s} \underbrace{u^s(p)^*}_{\gamma^1 \gamma^3 u^{-s}(\vec{p})} e^{ipx} + b_{\vec{p}}^{-s+} \underbrace{v^s(p)^*}_{\gamma^1 \gamma^3 v^{-s}(\vec{p})} e^{-ipx}) = \\ &= \gamma^1 \gamma^3 \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s (a_{\vec{p}}^{-s} u^{-s}(\vec{p}) e^{-i\vec{p} \cdot (-t, \vec{x})} + b_{\vec{p}}^{-s+} v^{-s}(\vec{p}) e^{+i\vec{p} \cdot (-t, \vec{x})}) = \\ &= \gamma^1 \gamma^3 \psi(-t, \vec{x}) \end{aligned}$$

(eq. 157.3)

Para os bilineares precisamos de: $T\bar{\Psi}T^{-1} = T\Psi^\dagger \gamma^0 T^{-1} = T\Psi^\dagger T^{-1} (\gamma^0)^* = \bar{\Psi}(-t, \vec{x}) \gamma^3 \gamma^1$

E obtemos:

$$\begin{aligned} T\bar{\Psi}\Psi T^{-1} &= \bar{\Psi}_{-t} \gamma^3 \gamma^1 \gamma^1 \gamma^3 \Psi_{-t} = (\bar{\Psi}\Psi)(-t, \vec{x}) \\ T\bar{\Psi}\gamma_5\Psi T^{-1} &= T\bar{\Psi}T^{-1} \gamma_5^* T\Psi T^{-1} = \bar{\Psi}_{-t} \gamma^3 \gamma^1 \gamma_5 \gamma^1 \gamma^3 \Psi_{-t} = +(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(-t, \vec{x}) \\ T\bar{\Psi}\gamma_5\Psi T^{-1} &= -(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(-t, \vec{x}) \\ T\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi T^{-1} &= \bar{\Psi}_{-t} \gamma^3 \gamma^1 \gamma^{\mu*} \gamma^1 \gamma^3 \Psi_{-t} = (-1)^\mu (\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)(-t, \vec{x}) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma^0 &= \gamma^0 \Rightarrow \gamma^3 \gamma^1 (+\gamma^0) \gamma^1 \gamma^3 = \gamma^0 \\ \gamma^1 &= \gamma^1 \Rightarrow \gamma^3 \gamma^1 (+\gamma^1) \gamma^1 \gamma^3 = -\gamma^1 \\ \gamma^2 &= -\gamma^2 \Rightarrow \gamma^3 \gamma^1 (-\gamma^2) \gamma^1 \gamma^3 = -\gamma^2 \\ \gamma^3 &= \gamma^3 \Rightarrow \gamma^3 \gamma^1 (+\gamma^3) \gamma^1 \gamma^3 = -\gamma^3 \end{aligned} \right\} (-1)^\mu \gamma^\mu$$

$\begin{cases} +1 / \mu = 0 \\ -1 / \mu = 1, 2, 3 \end{cases}$

Conjugação de Carga:

Esta é diferente das anteriores, pois não é uma transformação do espaço tempo mas age diretamente sobre os operadores de campo de forma a levar partículas em anti-partículas (e vice versa). Vamos ver como podemos defini-la:

Começamos notando que, dado que: $\psi \sim a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{i p x} + b_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{+i p x}$

e: $H \sim \omega (a^\dagger a + b^\dagger b)$
 criam e aniquilam antipartículas
 criam e aniquilam partículas

Logo, o operador que queremos deve ligar: $a^\dagger |0\rangle \leftrightarrow b^\dagger |0\rangle$
 $\langle 0| a \leftrightarrow \langle 0| b$

Definimos portanto:

$$C a_{\vec{p}}^s C^{-1} = b_{\vec{p}}^s$$

$$C b_{\vec{p}}^s C^{-1} = a_{\vec{p}}^s$$

(poderiam haver fases, que tomamos como 1 - uma discussão mais completa sobre fases em conjugação de carga está feita na seção 3.3 do Weinberg, especialmente na pg 131 - a leitura vale ainda que você não se preocupe em entender a notação)
 $C^+ = C^{-1} = C$

Então, usando o fato de que (queremos relacionar u e v):

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} (-i \sigma_2 \xi^{s*}) \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} (-i \sigma_2 \xi^{s*}) \end{pmatrix}$$

$\eta^s = \xi^{s*}$

$$(v^s(p))^* = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} (-i \sigma_2 \xi^{s*}) \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} (-i \sigma_2 \xi^{s*}) \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -i \sigma_2 \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}^*} \xi^s \\ +i \sigma_2 \sqrt{p \cdot \sigma^*} \xi^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \sigma_2 \\ i \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix}$$

$\sigma^0 \sigma^2 = \sigma^2 (-\sigma^0)^*$
 $\sigma^1 \sigma^2 = \sigma^2 \sigma^1^*$
 $(i \sigma_2)^* = i \sigma_2$
 $-i \gamma^2$
 $u^s(p)$

$$(v^s(p))^* = -i \gamma^2 u^s(p) \Rightarrow \begin{cases} u^s(p) = -i \gamma^2 (v^s(p))^* \\ v^s(p) = -i \gamma^2 (u^s(p))^* \end{cases}$$

(eq. 158.2)

Como o operador C é linear, fica fácil obter o efeito sobre o campo

$$C \psi(x) C = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(b_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{i p x} + a_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{+i p x} \right) =$$

$$= -i \gamma^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(b_{\vec{p}}^s (v^s(p))^* e^{-i p x} + a_{\vec{p}}^{s\dagger} (u^s(p))^* e^{+i p x} \right) = -i \gamma^2 (\psi^\dagger(x))^T$$

transp. nos índices de spinor

$\therefore C \psi(x) C = -i \gamma^2 (\psi^\dagger)^T$ (eq. 159.1)

$\hookrightarrow C \psi(x) C = -i \gamma^2 (\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0)^T = -i (\bar{\psi} \gamma^0 \gamma^2)^T$

$(C \psi C)^\dagger = (-i \gamma^2 (\psi^\dagger)^T)^\dagger = i \psi^T \gamma^{2\dagger} = -i \psi^T \gamma^2$

$C \bar{\psi} C = C \psi^\dagger C \gamma^0 = -i \psi^T \gamma^2 \gamma^0 = -i (\gamma^0 \gamma^2 \psi)^T$

Assim:

$C \bar{\psi} \psi C = (-i \gamma^0 \gamma^2 \psi)^T (-i \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^2)^T = + (\bar{\psi} \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \gamma^2 \psi)^T = (\bar{\psi} \psi)^T = \bar{\psi} \psi$ (eq. 159.2)

Analogamente:

$C \bar{\psi} \gamma_5 \psi C = \bar{\psi} \gamma_5 \psi$
 $C \bar{\psi} \gamma^\mu \psi C = -\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$
 $C \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi C = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$ (eq. 159.3)

basta multiplicar por i para obter a mesma regra para o operador hermitiano

Podemos resumir tudo na seguinte tabela:

	P	T	C	CPT
$\bar{\psi} \psi$	+1	+1	+1	+1
$\bar{\psi} \gamma_5 \psi$	-1	+1	+1	-1
$i \bar{\psi} \gamma_5 \psi$	-1	-1	+1	+1
$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$	$(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$	-1	-1
$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$	$-(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$	+1	-1
$\bar{\psi} \gamma^{\mu\nu} \psi$	$(-1)^\mu (-1)^\nu$	$(-1)^\mu (-1)^\nu$	-1	+1
∂_μ	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu$	+1	-1

$P: \hat{\psi}(\vec{x}, t) \rightarrow \eta \hat{\psi}(-\vec{x}, t)$
 $T: \hat{\psi}(\vec{x}, t) \rightarrow \eta \hat{\psi}(\vec{x}, -t)$

ñ hermitiana

$(-1)^\mu = (1, -1, -1, -1)$

ñ são invariantes de Lorentz

o que está ligado à unitariedade da teoria.

Podemos notar que todas as combinações hermitianas e invariantes de Lorentz preservam

CPT, incluindo: $\bar{\psi} \psi$, $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \psi$, ETC...

Quantização de Campos de Gauge

(Nastase 16, Peskin 9.4, Ryder 7.1)

Voltaremos agora ao “mundo bosônico” para lidar com um tipo bastante especial de bóson, os **Bósons de Gauge**. Estes campos vetoriais são introduzidos em teorias toda vez que assumimos a existência de alguma simetria contínua e local (simetria de Gauge), em geral postulando que o conteúdo de matéria da teoria (escalares e férmions) se transformem sobre alguma representação de um grupo de Lie (embora seja também comum pensar em teorias de puro Gauge, onde temos apenas os campos vetoriais, comumente chamadas de teorias de Yang-Mills).

Neste caso, o campo vetorial deve, para manter a invariância da ação sobre as transformações do grupo em questão, se transformar da seguinte forma:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \lambda(x) \quad (\text{no caso de uma simetria } U(1), \text{ abeliana})$$

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^a(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \lambda^a(x) + f^{abc} A_\mu^b \lambda^c(x)$$

$a, b, c \rightarrow$ índices da representação adjunta do grupo (vão de 1 até #Geradores do Grupo)

(no caso de uma simetria não-abeliana)

Vamos nos restringir ao caso abeliano, por enquanto, e comecemos tentando o caminho ingênuo, análogo ao que fizemos no campo escalar:

$$\begin{aligned} Z[J] &= N \int \mathcal{D}\phi \ e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi)} = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi \ e^{-i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi (\square + m^2) \phi - \phi J \right]} = \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x \ d^4y \ J(x) D_F(x-y) J(y) \right] \end{aligned}$$

No caso do campo eletromagnético (sem interação com a matéria):

$$\begin{aligned} Z[J] &= N \int \mathcal{D}A_\mu \ e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + J^\mu A_\mu)} \\ \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ \int d^4x (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) &= \int d^4x \partial_\mu (A_\nu \partial^\mu A^\nu) - \int d^4x A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = - \int d^4x \eta_{\mu\nu} A^\mu \square A^\nu \\ \int d^4x (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu A^\mu) &= \int d^4x \partial_\nu (A_\mu \partial^\nu A^\mu) - \int d^4x A_\mu \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = - \int d^4x A^\mu \partial_\nu \partial_\mu A^\nu \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \left(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu \right) =$$

$$= \frac{1}{2} A^\mu \left(g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu \right) A^\nu \quad (\text{eq. 146.1})$$

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu = 0 \quad (\text{eq. de Maxwell})$$

Em princípio só precisaríamos inverter **este operador**, mas aí esbarramos em um problema: imagine uma configuração de campo específica (estamos somando sobre TODAS ELAS):

$$A^\mu(x) = \partial^\mu \alpha(x)$$

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu) \partial^\mu \alpha = (\square \partial_\nu - \partial_\nu \square) \alpha = 0$$

O operador tem autovalores zero, e portanto é singular. De fato, a integral:

$$\int \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4x A_\mu(x) (g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x) \right\}$$

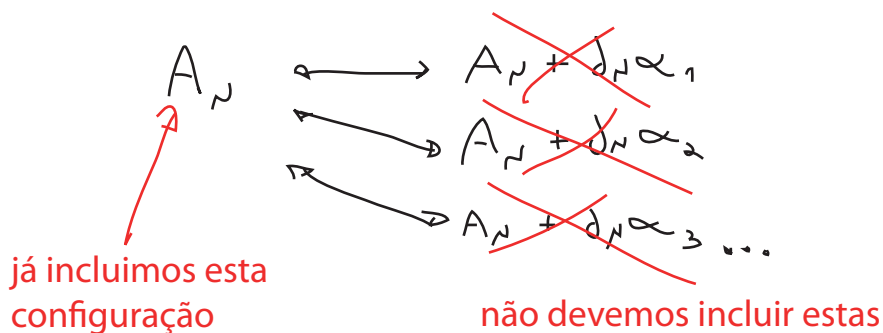
vai receber uma contribuição igual a "1" cada vez que considerarmos uma contribuição deste tipo. É divergente. Podemos ver que esta divergência é transmitida para o que seria a função de Green:

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) D^{\nu\lambda}(x-y) = \delta_\mu^\lambda \partial^4(x-y)$$

(tem que ser realmente grande para satisfazer isto)

$$(0 \cdot \partial_\nu) D^{\nu\lambda}(x-y) = \partial^\lambda \partial^4(x-y)$$

A raiz do problema está na invariância de gauge. Quando somamos sobre diversas configurações de A_μ , somamos inclusive aquelas equivalentes (ligadas por uma transformação de gauge) o que é uma forma de "múltipla contagem".



Temos que forçar a nossa integral de trajetória a considerar somente estados inequivalentes por uma transformação de gauge. Uma forma óbvia de fazê-lo é **fixar o gauge**, mas como fazemos isto em uma integral de trajetória?

Começemos a discussão escolhendo qual fixação de Gauge será mais conveniente para a quantização da teoria. A equação de movimento clássica:

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial^\mu A_\mu) = 0$$

é bastante difícil de resolver, no Gauge de Lorenz (proposta por Ludvig Lorenz que não é o Hendrik Lorentz) ou Gauge Covariante a solução é bem mais simples:

Gauge Covariante

$$\boxed{\partial^\mu A_\mu = 0} \Rightarrow \square A_\mu = 0 \quad (\text{eq. 162.1})$$

(Klein-Gordon, para $m = 0$)

$A_\mu \sim \epsilon_\mu(k) e^{\pm i k \cdot x}$
 o coeficiente carrega o índice vetorial e a informação sobre o momento angular (spin / polarização)
 $k^2 = 0$ (pois a massa é zero na eq. KG)

$$\begin{aligned} \partial^\mu A_\mu(x) = 0 &\Rightarrow \int \partial^\nu x e^{i p \cdot x} \partial^\mu A_\mu(x) = 0 \\ &\Rightarrow \int \partial^\nu x e^{i p \cdot x} \int \frac{d^4 k}{N_k} \epsilon_\mu(k) e^{\pm i k \cdot x} = 0 \\ &\Rightarrow \int \frac{d^4 k}{N_k} k^\nu \cdot \epsilon_\mu(k) \delta^4(p \pm k) = 0 \Rightarrow \boxed{\pm p^\mu \epsilon_\mu(\pm p) = 0} \quad (\text{eq. 162.2}) \end{aligned}$$

esta fixação, no entanto, não fixa completamente o Gauge. Note que, dadas duas configurações de campo fisicamente equivalentes, ligadas pela transformação de Gauge a seguir:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda \quad \text{com} \quad \lambda / \square \lambda = 0$$

ambas podem satisfazer a condição de fixação (sem exigir $A = A'$): $\partial^\mu A'_\mu = \partial^\mu A_\mu = 0$

Poderíamos aprimorar a nossa fixação exigindo também $\boxed{A_0 = 0}$ (eq. 162.3)
 (ainda mantendo a condição 162.1)

o que equivale a: $\partial_0 \lambda = -A_0$

E não causa nenhum problema com a condição 162.1, uma vez que:

$$\square A_0 = 0 \Rightarrow \square \partial_0 \lambda = 0 \Rightarrow \partial_0 \square \lambda = 0$$

$\square \lambda = 0$ já era permitido

A combinação de 162.1 e 162.3 nos leva a: $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0}$ (eq. 162.4)

Note que esta condição não é condizente com a presença de correntes (fontes) externas, que produziriam um $A_0 \neq 0$, portanto este formalismo só é útil para radiação no vácuo. Em suma, usaremos:

$$\boxed{A_0 = 0 \quad \& \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0} \quad (\text{eq. 162.5})$$

Gauge de Radiação ou de Coulomb

162.2 $\rightarrow \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}^{(\lambda)}(p) = 0$

Sabemos do eletromagnetismo que, neste Gauge, só temos dois modos que se propagam no campo, correspondendo a duas polarizações transversais. Por isso ele é um Gauge Físico.

A solução clássica é:

$$\vec{A}^0(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=1,2} \vec{E}^{(\lambda)}(k) \left[a^{(\lambda)}(k) e^{-ik \cdot x} + a^{(\lambda)\dagger}(k) e^{+ik \cdot x} \right] \quad (\text{eq. 163.1})$$

$$k^2 = 0 \quad \vec{k} \cdot \vec{E}^{(\lambda)}(k) = 0$$

É também conveniente escolher os dois vetores de polarização $\vec{E}^{(\lambda)}$ de forma que sejam ortogonais:

$$\vec{E}^{(\lambda)}(\vec{k}) \cdot \vec{E}^{(\lambda')}(\vec{k}) = \delta^{\lambda\lambda'} \quad (\text{eq. 163.2})$$

Quantização no Gauge Físico:

(não explicitaremos todos os detalhes, ver: Bjorken & Drell, "Relativistic Quantum Fields", cap 14)

Queremos agora impor as condições 162.5 uma vez que o campo tenha se tornado um operador. A condição para o componente zero é trivial, estamos de fato removendo um grau de liberdade do sistema, já a condição $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ deve ser vista como uma condição para operadores. Ou seja:

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{A} \rangle = 0 \quad \& \quad \vec{\nabla} \cdot [\vec{A}, \hat{\phi}] = 0$$

Note então que, definindo o momento conjugado:

$$\Pi^i = F^{0i} = E^i$$

Poderíamos, inocentemente, impor:

$$[A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta^{ij} e^{ik \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} = i \delta^{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

Mas veja que, se aplicamos $\vec{\nabla}_{x_i}$ neste comutador NÃO temos: $\vec{\nabla} \cdot [\vec{A}(\vec{x}, t), E^i(\vec{x}', t)] = 0$

$$\vec{\nabla}_{x_i} [A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = i \frac{\partial}{\partial x^i} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta^{ij} e^{ik \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_j e^{ik \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}$$

A lição aqui é que vínculos (e a fixação de Gauge é um vínculo sobre as variáveis dinâmicas do sistema) tornam a prescrição de quantizar simplesmente trocando os brackets de Poisson por comutadores (ou anticomutadores) inválida. Dirac achou uma forma de generalizar a prescrição para sistemas com vínculo mas não exploraremos isto aqui (veja as notas do prof. Nastase lec 15 e a referência lá dada para o original de Dirac), para nossos fins basta notar que a generalização:

$$\delta^{ij} \rightarrow \Delta^{ij} = \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) \quad (\text{eq. 163.3})$$

Fornece a seguinte relação de comutação:

$$\begin{aligned}
 [A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta^{ij} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \\
 &= i \left(\delta^{ij} - \frac{\partial^i \partial^j}{(\nabla^2)} \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')
 \end{aligned}$$

que, por sua vez, satisfaz $\vec{\nabla} \cdot [\vec{A}, E^i] = 0$ uma vez que

$$[A, A] = [E, E] = 0$$

$$k_i \Delta^{ij} = k_j - k_i \frac{k^i k^j}{k^2} = 0$$

Substituindo a decomposição de A no comutador acima obtemos a relação usual:

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{eq. 164.1})$$

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

$$H = \frac{1}{2} \int d^3k (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^0}{2} [a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k) + a^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda)\dagger}(k)]$$

$$:H: = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k^0 a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k) \quad (\text{eq. 164.2})$$

Esta escolha de Gauge é conveniente pois só temos dois graus de liberdade, que coincidem com os graus físicos. No entanto a invariância de Lorentz explícita está perdida, e para ter certeza de que correções quânticas (loops) não a quebram seria necessário testá-la explicitamente a cada passo da teoria de perturbação. Uma alternativa a isto seria escolher o Gauge Covariante (que mantém a estrutura de Lorentz explícita) e pagar o preço de ter polarizações não físicas na teoria, é o que faremos a seguir.

Quantização no Gauge Covariante

(mais detalhes: Mandl e Shaw, secs 5.1 e 5.2)

Neste caso, a única condição de fixação é a da eq. 147.1: $\partial_\mu A^\mu = 0$

A solução clássica é:
$$A_\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \left[a^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} + a^{(\lambda)\dagger}(k) e^{+ikx} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{4 polarizações}}$

$k^2 = 0 \rightarrow E_k = k$

Podemos escolher um sistema de coordenadas tomando o 3 eixo na direção de k: $k^\mu = (k, 0, 0, k)$

e mais uma vez construir polarizações ortogonais:

$$\epsilon_{\mu}^{(0)} = (1, 0, 0, 0) \quad \epsilon_{\mu}^{(1)} = (0, 1, 0, 0) \quad \epsilon_{\mu}^{(2)} = (0, 0, 1, 0) \quad \epsilon_{\mu}^{(3)} = (0, 0, 0, 1)$$

$$\therefore \epsilon_{\mu}^{(\lambda)} = \delta_{\mu}^{\lambda}$$

$\lambda = 1, 2 \rightarrow k^{\mu} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)} = 0$ ✓ Polarizações transversas são físicas

$\lambda = 0, 3 \rightarrow k^{\mu} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)} = E_{\mu}$ ✗ Polarizações tipo-tempo ($\lambda = 0$) e longitudinal ($\lambda = 3$) não são físicas

isso quer dizer que, quando formos a condição $\partial^{\mu} A_{\mu} = 0$ em termos de observáveis, os modos tipo-tempo e longitudinal devem se cancelar.

Mais uma vez temos que modificar o jeito de quantizar para levar o vínculo da fixação de Gauge em conta, neste caso trocaremos a imposição forte de que:

$$[\partial_{\mu} A^{\mu}(x), A^{\nu}(x')] = 0$$

que é impossível de satisfazer com a expansão de A dada acima, por uma condição imposta apenas sobre a parte de aniquilação da expansão:

$$\int d^3x A_{\mu}^{(+)}(x) |\Psi\rangle = 0$$

(eq. 150.1)

Condição de Gupta-Bleuler

$$A_{\mu}^{(+)} \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=0, \dots, 3} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda)}(k) e^{-ik \cdot x}$$

Que também implica:

$$\left\{ \begin{aligned} \langle \Psi | \partial^{\mu} A_{\mu}^{(-)}(x) &= 0 \\ A_{\mu}^{(-)} &\equiv \dots a^{(\lambda)\dagger}(k) e^{+ik \cdot x} \\ \langle \Psi | \partial^{\mu} A_{\mu} | \Psi \rangle &= \langle \Psi | \partial^{\mu} A_{\mu}^{(-)} + \partial^{\mu} A_{\mu}^{(+)} | \Psi \rangle = 0 \end{aligned} \right.$$

O que estamos fazendo na prática é colocar uma restrição nos estados iniciais e finais permitidos pela teoria. A quantização é dada por:

$$[A_{\mu}(\vec{x}, t), \tilde{\pi}_{\nu}(\vec{x}', t)] = i \eta_{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad [A, A] = [\tilde{\pi}, \tilde{\pi}] = 0$$

Note que temos um problema aí, pois $\tilde{\pi}_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^0} = \frac{\partial}{\partial \dot{A}^0} \left[-\frac{1}{4} (\partial_{\lambda} A_{\sigma} - \partial_{\sigma} A_{\lambda}) (\partial^{\lambda} A^{\sigma} - \partial^{\sigma} A^{\lambda}) \right] = 0$

Portanto não há como a relação de comutação acima valer para A_0 e π_0 , a não ser que modifiquemos a Lagrangeana - existe uma forma de fazer isso sem mudar as equações de movimento, que

não exploraremos aqui, uma vez que este procedimento é muito mais direto via integrais de trajetória, o que faremos a seguir (veja Mandl e Shaw para a história completa). Assumindo que este problema foi resolvido, podemos obter relações de comutação para os operadores de criação e aniquilação:

$$\boxed{[\alpha^{(\lambda)}(k), \alpha^{(\lambda')\dagger}(k')] = -g^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')} \quad (\text{eq. 166.1})$$

$$[\alpha, \alpha] = [\alpha^\dagger, \alpha^\dagger] = 0$$

O que está bem para $\lambda = 1, 2$ e 3 , mas:

$$\lambda = 0 \Rightarrow [\alpha^{(0)}(k), \alpha^{(0)\dagger}(k')] = -(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$$

O que leva a uma norma negativa para $\alpha^\dagger|0\rangle$ pois:

$$\|\alpha^\dagger|0\rangle\|^2 \equiv \langle 0|\alpha\alpha^\dagger|0\rangle = -\langle 0|\alpha^\dagger\alpha|0\rangle = -\langle 0|0\rangle = -1$$

Reforçando o fato de que estes estados não podem ser físicos. A condição de Gupta-Bleuler diz que:

$$\partial^\mu A_\mu^{(+)}(x)|\psi\rangle = 0$$

$$\hookrightarrow \sum_{\lambda=0\dots 3} \int d^3k \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \alpha^{(\lambda)}(k) |\psi\rangle = 0$$

$k^\mu \epsilon_\mu^{(1)} = k^\mu \epsilon_\mu^{(2)} = 0$
 $\rightarrow \left[\underbrace{k^\mu \epsilon_\mu^{(0)}(k)}_{E_k} \alpha^{(0)}(k) + \underbrace{k^\mu \epsilon_\mu^{(3)}(k)}_{E_k} \alpha^{(3)}(k) \right] |\psi\rangle = 0$

$$\boxed{[\alpha^{(0)}(k) + \alpha^{(3)}(k)] |\psi\rangle = 0} \quad (\text{eq. 166.2})$$

Esta equação deve ser verdade para qualquer estado ψ , e portanto é uma condição que restringe os estados físicos possíveis. Um exemplo de estado que satisfaz esta restrição é:

$$|\psi\rangle = (\alpha^{(0)\dagger}(k) + \alpha^{(3)\dagger}(k)) |0\rangle$$

$$[\alpha^{(0)}(k) + \alpha^{(3)}(k)] (\alpha^{(0)\dagger}(k) + \alpha^{(3)\dagger}(k)) |0\rangle = \left[\underbrace{[\alpha^{(0)}(k), \alpha^{(0)\dagger}(k)]}_{-(2\pi)^3 \delta} + \underbrace{[\alpha^{(3)}(k), \alpha^{(3)\dagger}(k)]}_{+(2\pi)^3 \delta} \right] |0\rangle = 0$$

Podemos mostrar que o mesmo é verdade para qualquer estado que tenha o mesmo número de excitações com as polarizações (0) e (3). O resultado final é que, neste Gauge, a contribuição destas duas polarizações não-físicas se cancelam no cálculo de todos os observáveis. A energia, por exemplo, é dada por:

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \int d^3k k^0 \sum_{\lambda=0,1,2,3} \xi_\lambda \langle \psi | \alpha^{(\lambda)\dagger} \alpha^{(\lambda)} | \psi \rangle$$

$$\boxed{\xi_0 = -1 \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1}$$

$$165.2 \rightarrow \langle \psi | [\alpha^{(0)\dagger}(k) + \alpha^{(3)\dagger}(k)] = 0$$

isso quer dizer que (simplificando a notação):

$$\alpha^{(0)\dagger}(k) \equiv 0^{\dagger} \quad \alpha^{(3)\dagger}(k_2) \equiv 3^{\dagger}$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi | (0^{\dagger} + 3^{\dagger}) 0 | \Psi \rangle &= \langle \Psi | (0^{\dagger} + 3^{\dagger}) 3 | \Psi \rangle = \langle \Psi | 0^{\dagger} (0 + 3) | \Psi \rangle = \langle \Psi | 3^{\dagger} (0 + 3) | \Psi \rangle = 0 \\ -\langle \Psi | (0^{\dagger} + 3^{\dagger}) 0 | \Psi \rangle + \langle \Psi | (0^{\dagger} + 3^{\dagger}) 3 | \Psi \rangle - \langle \Psi | 0^{\dagger} (0 + 3) | \Psi \rangle + \langle \Psi | 3^{\dagger} (0 + 3) | \Psi \rangle &= 0 \\ \langle \Psi | -0^{\dagger} 0 - \cancel{3^{\dagger} 0} + \cancel{0^{\dagger} 3} + 3^{\dagger} 3 - 0^{\dagger} 0 - \cancel{0^{\dagger} 3} + \cancel{3^{\dagger} 0} + 3^{\dagger} 3 | \Psi \rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\langle \Psi | \alpha^{(3)\dagger}(k) \alpha^{(3)}(k) - \alpha^{(0)\dagger}(k) \alpha^{(0)}(k) | \Psi \rangle = 0$$

Portanto a energia pode ser escrita como:

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \int d^3k \, k^0 \sum_{\lambda, \lambda'} \langle \Psi | \alpha^{(\lambda)\dagger} \alpha^{(\lambda')} | \Psi \rangle \quad (\text{eq. 167.1})$$

↳ só as polarizações transversais contribuem

Fixação de Gauge em Integrais de Trajetória, método de Fadeev-Popov

Há um jeito mais moderno, e mais facilmente generalizável para o caso não-abeliano, de lidar com a redundância contida nas teorias de Gauge. Começamos fazendo a rotação de Wick para o espaço Euclidiano. É preciso atentar para o fato de que A_{μ} é um vetor de Lorentz e sua componente zero também deve ser rodada:

$$\chi_0 = \chi^0 = t = -i \chi_4 = -i \chi^4 \quad \partial_0 = \frac{\partial}{\partial \chi^0} = i \frac{\partial}{\partial \chi^4} = i \partial_4$$

$$A_0 \equiv i A_4 \quad (\text{eq. 167.2})$$

$$E_i^{(m)} = F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = i \partial_4 A_i - i \partial_i A_4 = i F_{4i} \equiv i E_i^{(E)} \quad F^{0i} = -i F^{4i} \quad (\text{eq. 167.3})$$

$$\mathcal{L}_{EM}^{(m)} = -\frac{1}{4} \bar{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} = -\frac{1}{4} F_{4i} F^{4i} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} = -\frac{1}{4} \bar{F}_{\mu\nu}^{(E)} F^{(E)\mu\nu}$$

$$\int d^4\chi \mathcal{L}_{EM}^{(m)} = \int d^4\chi_E \left(-\frac{1}{4} \bar{F}_{\mu\nu}^{(E)} F^{(E)\mu\nu} \right) = - \int d^4\chi_E \underbrace{\left(F_{\mu\nu}^{(E)} \right)^2}_{\mathcal{L}_{EM}^{(E)}}$$

$$\mathcal{L}_{EM}^{(E)} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(E)} F_{\mu\nu}^{(E)} = \frac{1}{2} \left[\left(E_i^{(E)} \right)^2 + \left(\vec{B}_i^{(E)} \right)^2 \right] \quad S_{EM}^{(E)} \quad (\text{eq. 167.4})$$

Esquecendo o índice (E) e fazendo uma integração por parte (análogo ao que fizemos para obter 161.1, mas aqui não há termos de borda por definição):

$$S_{EM}[A] = \int d^4\chi \left[-\frac{1}{2} A_{\mu} \left(\delta_{\mu\nu} \partial^{\mu} - \partial_{\nu} \partial^{\mu} \right) A_{\nu} \right]$$

A idéia agora é que em:

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu(x) e^{-S_{EM}[A]}$$

temos duas "somas":

- (1) uma desejável, sobre todas as configurações **fisicamente inequivalentes** do campo A_μ que criam o comportamento quântico do campo
- (2) uma soma igual a anterior só que com todos as configurações levadas em outras **fisicamente equivalentes** por meio de uma transformação de Gauge, para um parâmetro de Gauge λ específico. Claramente temos uma "cópia" desta para cada escolha de λ , o que acaba virando uma integral em λ .

Se conseguirmos fatorar a integral acima em duas: $\int \mathcal{D}A_\mu(x) = \int d\lambda \int \mathcal{D}A_\mu^{GF}(x)$

integral para os diversos "Gauges" ←

integral sobre os campos fisicamente relevantes (Gauge-fixados) ←

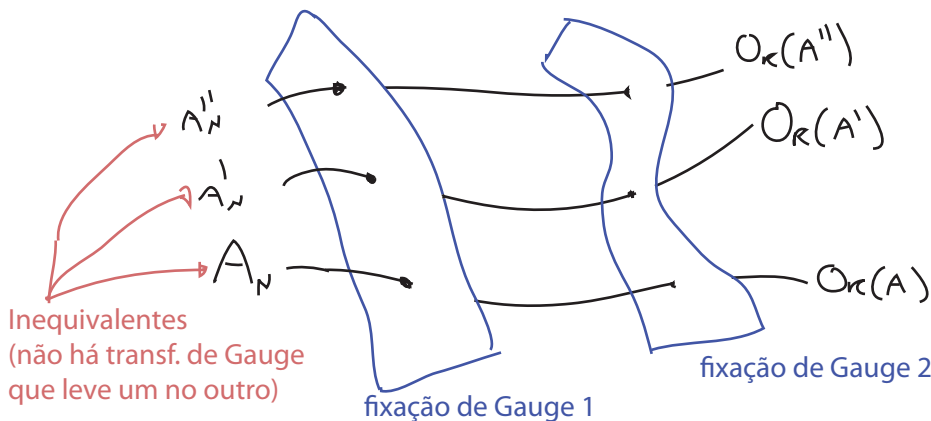
e eliminarmos toda dependencia em λ da integral de trajetória, então a integral em λ vira um fator multiplicativo em Z , completamente irrelevante (é o "volume" do espaço interno definido pelo grupo $U(1)$). Essa é nossa meta nas próximas páginas.

Para começar, consideremos uma fixação de Gauge covariante mais geral do que a de Lorenz:

$$\partial_\mu A_\mu = C(x) \quad (\text{eq. 168.1})$$

Dada uma configuração de campo específica A_μ , definamos a **órbita de A_μ , $Or(A)$** , como o conjunto de todas as outras configurações que podem ser obtidas a partir de A_μ por meio de uma transformação de Gauge.

Agora imagine também o espaço de todas as possíveis condições de fixação de Gauge. Se estas são "boas" fixações de Gauge, deve haver apenas um ponto de intersecção entre este espaço e $Or(A)$ (para cada configuração inequivalente):



Vamos assumir que a intersecção é única, mas existe um problema conhecido em teorias não Abelianas com esta suposição, as chamadas cópias de Gribov (outras intersecções, uma infinidade delas de fato). Não nos preocuparemos com elas pois (1) só aparecem no caso não Abelianas e (2) mesmo nas teorias não Abelianas, só são importantes no regime não perturbativo destas.

Considere então que estamos percorrendo a órbita fazendo a transformação:

$$A_\mu(x) \rightarrow \boxed{\chi A_\mu(x) \equiv A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x)} \quad (\text{eq. 169.1})$$

$$\begin{aligned} \partial^\nu \chi A_\nu &= \partial^\nu A_\nu + \partial^\nu \partial_\nu \chi^{(A)} \\ \partial^\nu \chi A_\nu &= C \end{aligned}$$

a forma: $\boxed{\chi^A(x) / \delta^2 \chi^{(A)}(x) = -\partial_\nu A_\nu(x) + C(x)}$ (eq. 169.2)

É a transformação que nos coloca exatamente na intersecção de $Or(A)$ com a fixação 168.1.

Queremos então provar o seguinte:

$$\int \prod_{x \in \mathbb{R}^4} \delta \chi(x) \prod_{y \in \mathbb{R}^4} \delta \left(-\partial_\nu (\chi A_\nu(y)) + C(y) \right) = \frac{1}{\text{DET}(-\delta^2)} \quad (\text{eq. 169.3})$$

porque se isso for verdade, teremos encontrado uma identidade:

$$1 = \text{DET}(-\delta^2) \int \prod_{x \in \mathbb{R}^4} \delta \chi(x) \prod_{y \in \mathbb{R}^4} \delta \left[-\partial_\nu A_\nu(y) + C(y) \right] \quad (\text{eq. 169.4})$$

"δ funcional" no sentido em que a derivada de A tem que ser c para qualquer ponto y

que pode ser inserida dentro da integral de trajetória de A e impõe, **por meio desta δ**, a condição 168.1 para qualquer valor de χ .

// Demonstração //

$$-\partial_\nu (\chi A_\nu) + C = -\partial^2 \chi - \partial_\nu A_\nu + C = -\partial^2 \chi + \delta^2 \chi^{(A)}$$

Podemos fazer uma mudança de variáveis na integral em χ : $\chi \rightarrow \chi - \chi^A$

$$\int \prod_{x \in \mathbb{R}^4} \delta \chi(x) \prod_{y \in \mathbb{R}^4} \delta \left[\underbrace{-\partial_\nu (\chi A_\nu(y)) + C(y)}_{G(\chi A_\nu)} \right] = \int \prod_{x \in \mathbb{R}^4} \delta \chi(x) \prod_{y \in \mathbb{R}^4} \delta \left[-\partial^2 \chi(y) \right]$$

Note que, dado o vínculo:

$$G(\chi A_\nu(y)) \equiv -\partial_\nu \chi A_\nu + C = -\partial^2 \chi(y) - \partial_\nu A_\nu(y) + C(y)$$

$$\frac{\delta G(\chi A_\nu(y))}{\delta \chi(x)} = -\partial^2 \delta(x-y) \equiv -\delta^2(x,y)$$

Mostrando que este operador $-\delta^2(x,y)$ age como elemento de matriz do Jacobiano de uma mudança de variáveis:

$$\chi \rightarrow G(\chi A_\nu)$$

O que é uma versão contínua de:

$$\int \prod_{i=1}^n d\chi_i \prod_{j=1}^n \delta(\Delta_{ij} \chi_j) = \int d^n \chi \delta(\Delta \vec{\chi}) = \int d^n \eta \frac{\delta^n(\vec{\eta})}{\mathcal{D}_{ET}(\Delta)} = \frac{1}{\mathcal{D}_{ET}(\Delta)}$$

$\vec{\eta} = \Delta \vec{\chi}$
 $\eta_i = \Delta_{ij} \chi_j \rightarrow d^n \eta = \mathcal{D}_{ET}(\Delta) d^n \chi$

Portanto:

$$\int \prod_{x \in \mathbb{R}^4} d\chi(x) \prod_{y \in \mathbb{R}^4} \delta[-\partial^2 \chi(y)] = \frac{1}{\mathcal{D}_{ET}(-\partial^2)}$$

que é o que queríamos demonstrar

Podemos então, a partir da identidade 169.4, obter uma outra, integrando sobre as condições de Gauge (com um peso gaussiano):

garante a identidade

$$N(\alpha) \int \mathcal{D}c \ e^{-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x \ c^2(x)} = 1$$

$$N(\alpha) \int \mathcal{D}c \ e^{-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x \ c^2(x)} \mathcal{D}_{ET}(-\partial^2) \int \mathcal{D}\chi \ \delta[-\partial_\nu \chi A_\nu + c(y)] = 1$$

$$\int \mathcal{D}\chi \ N(\alpha) \ e^{-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x \ (\partial_\nu \chi A_\nu)^2} \mathcal{D}_{ET}(-\partial^2) = 1$$

(eq. 170.1)

Podemos então inserir a identidade 155.1 dentro de qualquer integral de trajetória em A:

$$\int \mathcal{D}A \ e^{-S[A]} \mathcal{O}[A] = \int \mathcal{D}A \ e^{-S[A]} \mathcal{O}[A] \mathcal{D}_{ET}(-\partial^2) \int \mathcal{D}\chi \ N(\alpha) \ e^{-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x \ (\partial_\nu \chi A_\nu)^2}$$

Não depende de A. Este passo, aparentemente inofensivo, é onde está uma das grandes diferenças entre teorias abelianas e não abelianas. Para uma teoria não abeliana este $\mathcal{D}_{ET}[\delta G / \delta \chi]$ vai depender de A e não poderá ser tirado da integral de trajetória. Neste caso seríamos forçados a reescrevê-lo como uma integral de gaussiana, ou seja, mais um termo quadrático seria adicionado a ação. É dessa forma que nascem os fantasmas de Fadeev-Popov (quem estiver curioso pode olhar minhas notas de TQC II (2016), pgs 80-87 e as referências que indico lá)

$$\int \mathcal{D}A \ e^{-S[A]} \mathcal{O}[A] = \mathcal{D}_{ET}(-\partial^2) N(\alpha) \int \mathcal{D}\chi \int \mathcal{D}A \ e^{-S[A] - \frac{1}{2\alpha} \int d^4x \ (\partial_\nu \chi A_\nu)^2} \mathcal{O}[A]$$

Fazemos uma mudança de variáveis em A: $x A \rightarrow \chi A - \partial_\mu \chi = A$

$$\partial_\mu \chi A_\nu \rightarrow \partial_\mu A_\nu$$

Já sabemos que a ação é invariante de Gauge, então: $S[\chi A] = S[A]$ e $\mathcal{D}A = \mathcal{D}\chi A$

e vamos assumir que $O[A]$ também tenha esta propriedade (o que é obrigatório para qualquer observável): $\mathcal{O}[\chi A] = \mathcal{O}[A]$

$$\therefore \int \mathcal{D}A e^{-S[A]} \mathcal{O}[A] = \mathcal{D}_{\text{ET}}(-\partial^2) N(\epsilon) \left(\int \mathcal{D}\chi \right) \int \mathcal{D}A e^{-S[A] - \frac{1}{2\alpha} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu(x))^2} \mathcal{O}[A] \quad (\text{eq. 171.1})$$

Não há mais nada dependendo de χ , logo esta integral é só um número (infinito).

Esta é de fato a expressão que buscávamos, pois conseguimos fatorar a integração sobre o parâmetro de Gauge. Todas as constantes fora da integral em A são irrelevantes pois qualquer correlator vai ser obtido via:

$$\langle \mathcal{O}[A] \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{O}(A) e^{-S[A]} \uparrow}{\int \mathcal{D}A e^{-S[A]} \uparrow} = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{O}(A) e^{-S_{\text{EFF}}[A]}}{\int \mathcal{D}A e^{-S_{\text{EFF}}[A]}}$$

Onde:

$$S_{\text{EFF}}[A] \equiv \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \underbrace{\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\nu)^2}_{S_{\text{GF}} \text{ (Gauge Fixing)}} \quad (\text{eq. 171.2})$$

O propagador do Fóton:

Podemos agora usar a nova Lagrangeana para obter o propagador do fóton. Integrando por partes podemos escrever:

$$\begin{aligned} S_{\text{EFF}} &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2} A_\mu (\delta_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu \right] - \underbrace{\frac{1}{2\alpha} A_\mu \partial_\mu \partial_\nu A_\nu}_{\text{parte nova}} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) \left(-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right) A_\nu(x) \end{aligned} \quad (\text{eq. 171.3})$$

$(G^{(0)})_{\mu\nu}^{-1}(x)$ (que agora é inversível)

$$S_{\text{EFF}} = \frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A_\mu(k) e^{ikx} \left(-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right) \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} A_\nu(k') e^{ik'x} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 k' \delta^4(k+k') A_N(k) \left[+ \delta_{\mu\nu} k'^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) k'_\mu k'_\nu \right] A_\nu(k') =$$

$$\boxed{S_{\text{EFF}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_N(-k) \left[\delta_{\mu\nu} k^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) k_\mu k_\nu \right] A_\nu(k)} \quad (\text{eq. 172.1})$$

$G^{(0)-1}(k)_{\mu\nu}$

Finalmente:

$$\left[\delta_{\mu\nu} k^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) k_\mu k_\nu \right] G^{(0)}_{\nu\rho}(k) = \delta_{\nu\rho}$$

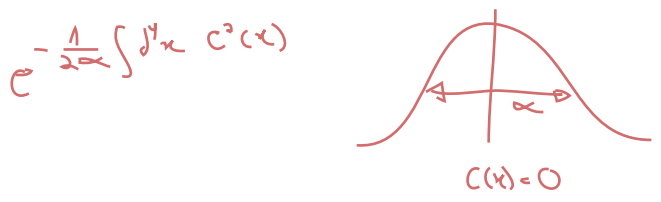
$$\boxed{G^{(0)}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \left(1 - \alpha\right) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)} \quad (\text{eq. 172.2})$$

Euclidiano

De onde vemos que o propagador de um bóson de Gauge depende deste parâmetro α (que **está ligado** a escolha de de Gauge). No chamado "Gauge" de Feynman $\alpha = 1$ e:

$$\boxed{G^{(0)}_{\mu\nu}(k; \alpha = 1) = \frac{1}{k^2} \delta_{\mu\nu}} \quad (\text{eq. 172.3})$$

fixamos o Gauge e depois integramos sobre todas as fixações possíveis com a seguinte distribuição:

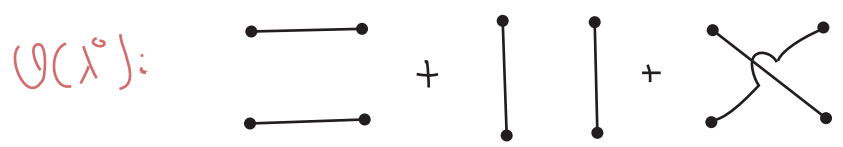


Com isso concluímos a parte de "quantização" do curso, no sentido em que já sabemos como tratar campos escalares, fermiônicos (de spin 1/2) e vetoriais (inclusive quando são campos de Gauge). Passaremos agora a caminhar na direção de relacionar estas teorias com observáveis físicos.

Funcional gerador para diagramas conectados e a ação efetiva

(Nastase 17; Ramond 3.1 - 3.3)

Considere a função de 4 pontos de uma teoria $\lambda\phi^4$, calculada em ordem λ^2 . Temos os seguintes diagramas:



$\mathcal{O}(\lambda^1)$:

$$+ \underbrace{\int \times (\mathcal{O}(\lambda^0))}_{\dots} + \left(\begin{array}{c} \text{loop on top line} \\ \text{loop on bottom line} \\ \text{tadpole} \\ \text{self-energy} \\ \dots \end{array} \right)$$

$\mathcal{O}(\lambda^2)$:

$$+ \int \times (\mathcal{O}(\lambda^1)) + \left(\text{bubble} + \text{tadpole} \right) \times \mathcal{O}(\lambda^0) + \dots$$

(1) Diagramas contendo bolhas no vácuo, ex:

Já vimos que as "bolhas" podem ser separadas como um fator multiplicando a parte do diagrama ligada a pontos externos, e então exponenciada (pgs 102 a 104). Esta exponencial é cancelada pela normalização de Z, e ficamos somente com diagramas sem bolhas, que caem em uma das duas outras categorias.

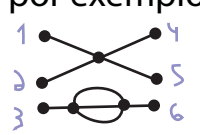
(2) **Diagramas desconectados** (note que agora estamos usando uma nova definição, diferente do que usamos na discussão das bolhas na pg 102, ficaremos com esta daqui em diante), são aqueles em que temos algum subconjunto de pontos externos que está desconectado dos outros. Ex:



(3) **Diagramas Conectados** são aqueles em que todos os pontos externos estão ligados uns aos outros por vértices e propagadores. Ex:



É razoável definir que, quando nos referimos à "um espalhamento entre duas partículas" estamos nos referindo ao caso em que tínhamos duas partículas no estado inicial, elas trocaram momento (e carga, sabor, cor, etc...) e isto resultou nas duas (ou mais) partículas no estado final. Ou seja, todas as excitações presentes no estado inicial e no estado final participaram de alguma forma do processo. Fica claro, por exemplo, que no diagrama seguinte:



A excitação que se propagou do ponto 3 ao 6 não teve influência alguma sobre o espalhamento que ocorreu entre os dois estados começando nos pontos 1 e 2 e terminando em 4 e 5. É também obrigatório que possamos encontrar alguma forma de separar os dois "subdiagramas" ali contidos, caso contrário teríamos que levar em conta todas as partículas expectadoras do universo para calcular um

simples espalhamento (isso se baseia na localidade da teoria).

Veremos agora que é possível definir um novo funcional gerador:

$$Z[J] \equiv e^{-W[J]} \quad (\text{eq. 174.1})$$

que gera funções de Green que só contém os diagramas conectados (3). Definamos as funções de Green na presença de fontes:

$$G_n(x_1, \dots, x_n)_J \equiv \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} Z[J] \quad (\text{eq. 159.2})$$

para fazer um tratamento em termos de diagramas, vamos definir uma notação para a fonte e para a função de Green completa:

$$G_n(x_1, \dots, x_n)_J \equiv \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{array} \right] J \quad (\text{eq. 159.3})$$

$$G_{\delta J} = Z[J] = \left[\begin{array}{c} J \end{array} \right]$$

(basicamente uma soma de todas as bolhas no vácuo)

$$J(x) \equiv \begin{array}{c} \times \\ \text{---} \\ x \end{array} \quad (\text{eq. 159.4})$$

$$\Delta(x-y) \cdot J(x) \equiv \begin{array}{c} \times \\ \text{---} \\ x \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ y \end{array}$$

Também adotaremos a notação: $\bullet \text{---} \textcircled{J}$ para indicar os diagramas conectados (neste caso a soma de todos os diagramas conectados de um ponto). Veja, por exemplo, o cálculo desta função de um ponto para a teoria $\lambda\phi^4$ (veja pg 111):

$$G_1(x)_J = \underbrace{\int d^4y \Delta(x-y) J(y)}_{\mathcal{O}(\lambda^0)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} + \mathcal{O}(\lambda^1)$$

$$\mathcal{O}(\lambda^1) = \frac{\delta}{\delta J(x)} \left(-\frac{\lambda}{4!} \int d^4z \left(\frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right) = \frac{\delta}{\delta J(x)} \left\{ -\frac{\lambda}{4!} \int d^4z \left(\frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^3 (\Delta \cdot J)(z) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right\} =$$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x)} \left(-\frac{\lambda}{4!} \int d^4z \left(\frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^2 \left[\Delta(z-z) + (\Delta \cdot J)^2(z) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right) =$$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x)} \left\{ -\frac{\lambda}{4!} \int d^4z \left(\frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \left[\Delta(z-z) (\Delta \cdot J)(z) + 2 (\Delta \cdot J)(z) \Delta(z-z) + (\Delta \cdot J)^3(z) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right\} =$$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x)} \left\{ -\frac{\lambda}{4!} \int d^4 z \left[3 \Delta^2(z-z) + 6 \Delta(z-z) (\Delta \cdot J)(z) + (\Delta \cdot J)^4(z) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right\} =$$

$$= -\frac{\lambda}{4!} \int d^4 z \left[3 \Delta^2(z-z) (\Delta \cdot J)(x) + 12 \Delta(z-z) \Delta(x-z) (\Delta \cdot J)(z) + 6 \Delta(z-z) (\Delta \cdot J)(z) (\Delta \cdot J)(x) + \right.$$

$$\left. 4 \Delta(x-z) (\Delta \cdot J)^3(z) + (\Delta \cdot J)^4(z) (\Delta \cdot J)(x) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$$

Lembrando que cada produto $(\Delta \cdot J)(z) = \int d^4 y_1 \Delta(y_1 - z) J(y_1)$ introduz uma nova coordenada, onde está aplicada a fonte, podemos representar isso em diagramas:

$$x \text{---} \boxed{J} = \left\{ x \text{---} x_{y_1} + \left(x \text{---} x \right) \text{ with a loop } + \left(x \text{---} x \right) \text{ with a loop } + \left(x \text{---} x \right) \text{ with a loop } + \right.$$

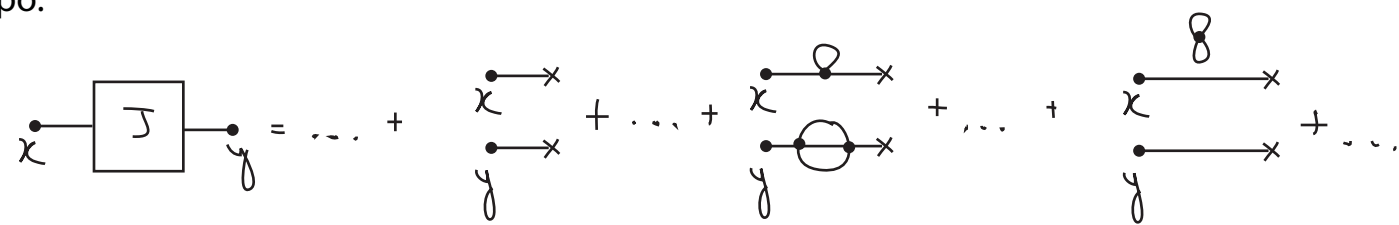
$$\left. + \left(x \text{---} x \right) \text{ with a loop } + \left(x \text{---} x \right) \text{ with a loop } + \mathcal{O}(\lambda^2) \right\} \text{Exp} \left[x \text{---} x \right]$$

$$\boxed{J} = \left\{ 1 + \text{loop} + x \text{---} x \text{ with a loop} + x \text{---} x \text{ with a loop} + \dots \right\} \text{Exp} \left[x \text{---} x \right]$$

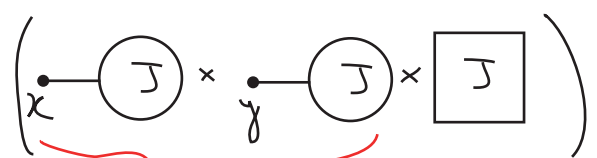
$$x \text{---} \bigcirc J = \left\{ x \text{---} x + x \text{---} x \text{ with a loop} + x \text{---} x \text{ with a loop} + \mathcal{O}(\lambda^2) \right\}$$

$$x \text{---} \boxed{J} = x \text{---} \bigcirc J \times \boxed{J} \quad (\text{eq. 175.1})$$

o que é o mesmo que fizemos na página 103 (para $J = 0$ e antes de exponenciar a soma das bolhas). Note que para a função de dois pontos a situação é um pouco mais complicada, pois ela contém contribuições do tipo:



$$\therefore x \text{---} \boxed{J} \text{---} y \neq x \text{---} \bigcirc J \text{---} y \times \boxed{J} \Rightarrow \text{Pois temos também que remover de alguma forma as contribuições:}$$



Diagramas desconectados segundo a definição (2) da pg 173

A equação 175.1 pode ser escrita como:

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = - \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} Z[J] \quad (\text{eq. 161.1})$$



$$\Rightarrow -W[J] = \text{circled } J$$

Gerador das Funções Conectadas

$$\Rightarrow Z[J] = N e^{-W[J]}$$

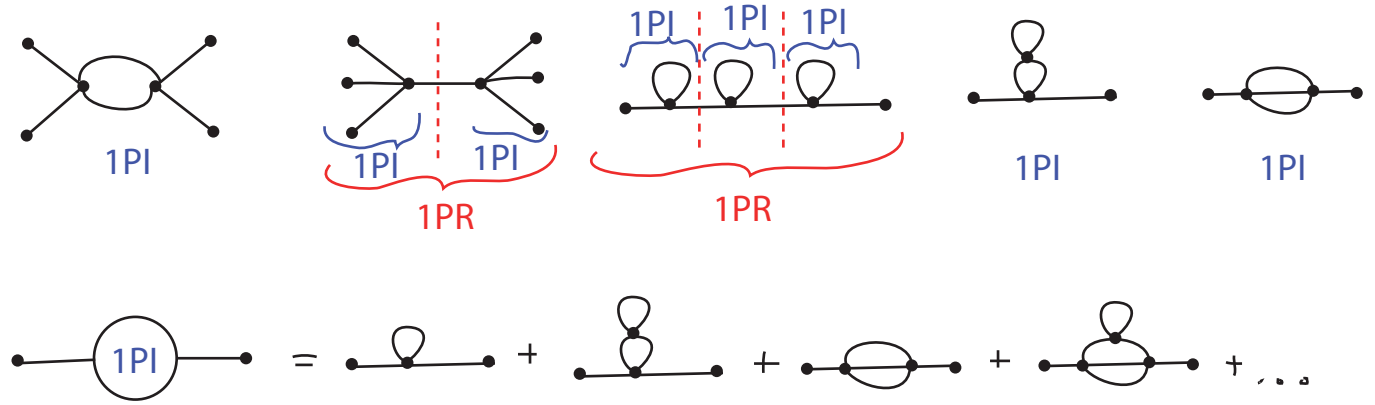
$$\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} = \frac{\delta}{\delta J(x)} \left(Z[J] \frac{-\delta W[J]}{\delta J(y)} \right) = Z[J] \frac{-\delta W[J]}{\delta J(x)} \frac{-\delta W[J]}{\delta J(y)} + Z[J] \frac{-\delta^2 W[J]}{\delta J(x) \delta J(y)}$$

$$\text{Diagram: } x \text{---} \square \text{---} y = \left(x \text{---} \text{circled } J \text{---} y \text{---} \text{circled } J + x \text{---} \text{circled } J \text{---} y \right) \times \square \quad (\text{eq. 161.2})$$

A analogia com a termodinâmica também é clara, onde $W[J]$ seria a energia livre (a função de partição é a exponencial de menos a energia livre).

Ação efetiva

Outro funcional de interesse é aquele que gera as chamadas funções de Green 1PI (one particle irreducible), definidas como a soma (para um determinado número de pontos externos) de todos os diagramas que não podem ser separados em dois cortando um único propagador (interno). Por exemplo:



Veremos que o funcional que gera estas funções de Green 1PI pode ser obtida a partir de $W[J]$ da mesma forma que potenciais podem ser obtidos a partir da energia livre, usando uma transformada de Legendre.

na termodinâmica (energia livre de Gibbs): $G(\phi) = F(Q) - Q\phi$

$$\downarrow$$

$$F[?] = W[J] - J \cdot ?$$

precisamos definir a variável conjugada a J pela transformada ↕

A variável conjugada a J (que gera o objeto que estamos procurando) é justamente o chamado campo clássico (na presença de fontes ou correntes externas):

$$\phi_{cl}[\mathcal{J}] \equiv \frac{\langle \Omega | \hat{\phi}(x) | \Omega \rangle_{\mathcal{J}}}{\langle \Omega | \Omega \rangle_{\mathcal{J}}} = \frac{1}{Z[\mathcal{J}]} \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\mathcal{J}] + \mathcal{J} \cdot \phi} \quad \phi(x) = \frac{1}{Z[\mathcal{J}]} \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x)} Z[\mathcal{J}]$$

(eq. 109.1) \rightarrow $Z[\mathcal{J}]$ (eq. 177.1)

$$Z[\mathcal{J}] = e^{-W[\mathcal{J}]} \rightarrow W[\mathcal{J}] = -L_N(\bar{z}[\mathcal{J}]) \quad \text{(eq. 177.2)}$$

$$\phi_{cl}[\mathcal{J}] = \frac{\delta(-W[\mathcal{J}])}{\delta \mathcal{J}(x)} = G_1^c(x)_{\mathcal{J}} \quad \text{(eq. 177.3)}$$

conectada

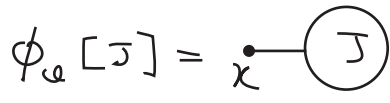
Algumas observações sobre este campo clássico:

(1) na ausência de fontes (correntes ou cargas externas) e de interações ele é zero:

$$\langle 0 | \hat{\phi} | 0 \rangle = 0 \quad \langle 0 | 0 \rangle_0 = 1$$

(2) dada uma corrente externa, a configuração de um campo na teoria clássica está bem determinada. Aqui o mesmo vale em média (ao longo de repetidas medições para o mesmo estado). Este é o valor do campo na ausência de excitações discretizadas (partículas), é zero caso não haja fonte externa e de qualquer forma as "partículas" são medidas em relação a isto, por isso ele é definido como o VEV (valor esperado no vácuo) do operador campo. Este campo é o que realmente vai ser observado em qualquer experiência em que medimos o campo em sua encarnação contínua (a "ponta de prova" - uma partícula - tem comprimento de onda de de Broglie muito maior que o comprimento de onda Compton das partículas do campo, logo não tem energia para excitar o campo - a imagem aqui é a de uma carga se movendo em um campo) e inclui a solução clássica e pequenas correções quânticas.

(3) vemos, em 177.3, que ele é dado pela função de 1-ponto conectada na presença de fontes:



Um exemplo: teoria escalar livre

$$S_0[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2] = \frac{1}{2} \int d^4x \phi [-\partial_\mu \partial^\mu + m^2] \phi$$

Δ^{-1}

na presença de fontes temos:

$$S_{\mathcal{J}}[\phi] = S_0[\phi] - \mathcal{J} \cdot \phi$$

que tem como solução clássica:

$$\Delta_x^{-1} \phi(x) = \mathcal{J}(x)$$

$$\Delta_x^{-1} \Delta(x-y) = \delta^4(x-y) \dots \phi(x) = \int d^4y \Delta(x-y) \mathcal{J}(y) = (\Delta \cdot \mathcal{J})(x)$$

Se pensarmos em um campo sem massa ($m = 0$) e cuja fonte externa é uma carga pontual

$$J(x) = \delta^3(\vec{x})$$

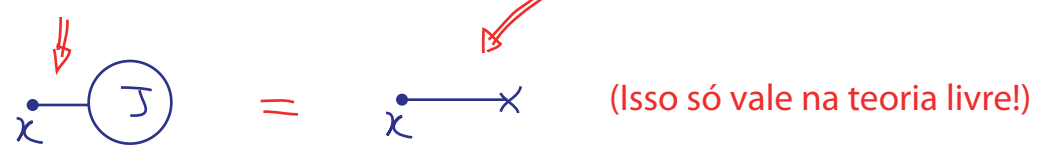
temos que $\phi(x) = \phi(\vec{x})$ é justamente $1/|\vec{x}|$ (o Laplaciano agindo em $\phi(x)$ tem produzir a delta) e portanto temos a lei de Coulomb:

$$\Delta(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

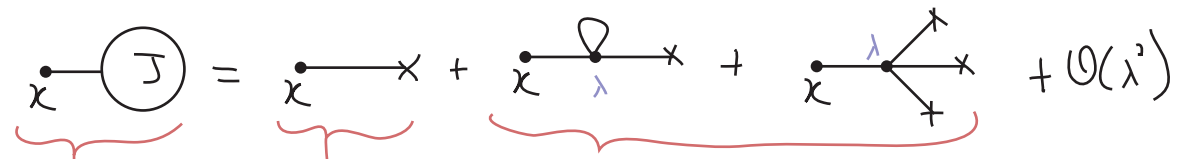
Por outro lado, para esta teoria livre sabemos que (eq. 109.1): $Z_0[J] = e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$

$$\therefore W_0[J] = -L_N(Z_0[J]) = -\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J$$

Então, $\phi_a[J] = \frac{\delta(-W_0[J])}{\delta J(x)} = (\Delta \cdot J)(x)$ (que coincide com a solução obtida via princípio da mínima ação)



Se tivéssemos ligado a interação, teríamos:

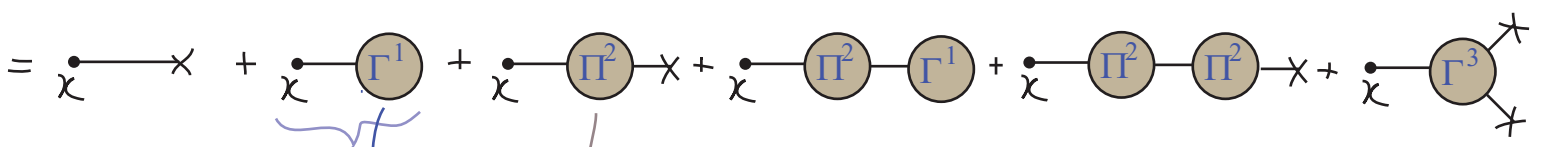
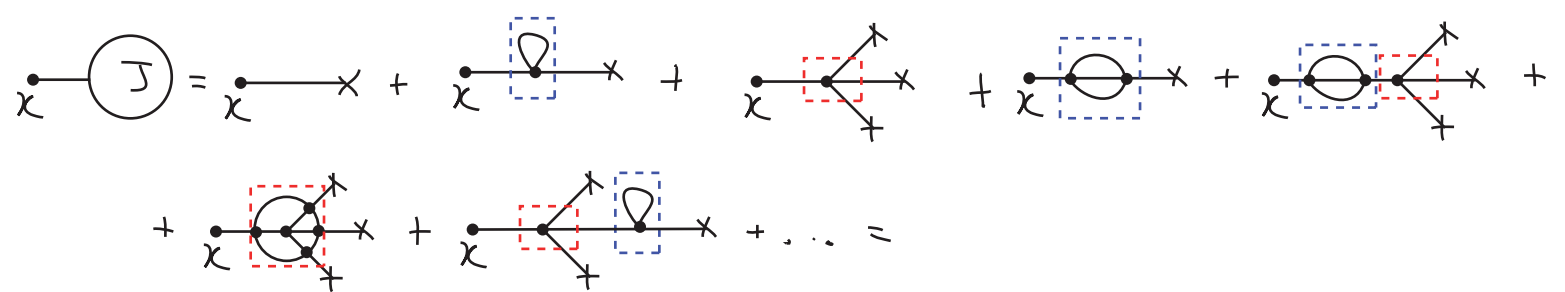


Correções quânticas (só possíveis na presença de interações)

Campo "clássico - clássico!" vem do princ. da extrema ação na presença de fonte

Campo "clássico" significa "pouco relativístico", não há energia o suficiente para produzir partículas (vácuo da TQC), mas as correções quânticas estão incluídas. Este é o nosso $\phi_a[J]$

Vamos tentar agora reorganizar esta soma, para encontrar a função geradora dos diagramas 1PI (não é óbvio que ela deveria vir daí, mas aguarde até o fim), coloquemos mais alguns termos:

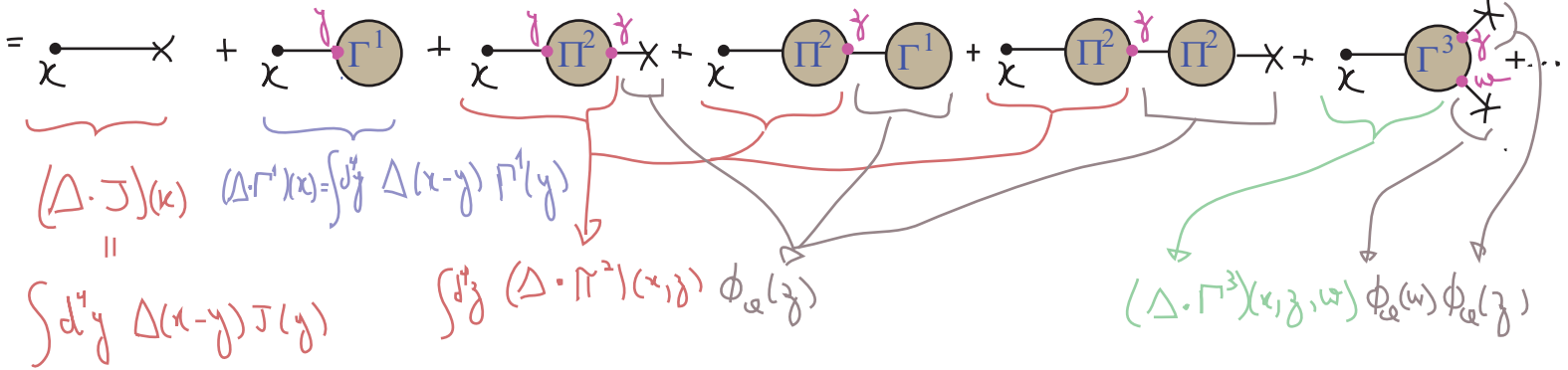


mais a frente deixarei claro porque a 1PI de dois pontos ficou outro nome

$\Gamma^n =$ função 1PI com n linhas saindo

pensando agora em uma teoria mais geral, que pode ter isso, ex: $\lambda\phi^3 \rightarrow$

Aí basta notar que:



Ou seja:

$$\phi_a(x) = \int d^4 y \Delta(x-y) \left\{ J(y) - \left[\Gamma^1(y) + \int d^4 z \Pi^2(y, z) \phi_a(z) + \frac{1}{2} \int d^4 z \int d^4 w \Gamma^3(y, z, w) \phi_a(z) \phi_a(w) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \int d^4 z_1 \dots d^4 z_{n-1} \Gamma^n(y, z_1, \dots, z_{n-1}) \phi_a(z_1) \dots \phi_a(z_{n-1}) + \dots \right] \right\}$$

(eq. 179.1)

que é uma equação auto-consistente para o campo clássico (ressomei toda série perturbativa). Podemos então definir o funcional gerador:

$$\hat{\Gamma}[\phi_a] \equiv \int d^4 y \Gamma^1(y) \phi_a(y) + \frac{1}{2} \int d^4 y \int d^4 z \Pi^2(y, z) \phi_a(y) \phi_a(z) + \frac{1}{3!} \int d^4 y \int d^4 z \int d^4 w \Gamma^3(y, z, w) \phi_a(y) \phi_a(z) \phi_a(w) + \dots$$

(eq. 179.2)

Tal que:

$$\Gamma^n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n}{\delta \phi_a(x_1) \dots \delta \phi_a(x_n)} \hat{\Gamma}[\phi_a] \Big|_{\phi_a=0}$$

(eq. 179.3)

Para n = 2 vale:

$$\Pi^2(x_1, x_2) = \frac{\delta^2}{\delta \phi_a(x_1) \delta \phi_a(x_2)} \hat{\Gamma}[\phi_a] \Big|_{\phi_a=0}$$

(eq. 179.4)

Com estas definições podemos re-escrever 179.1 na forma:

$$- \frac{\delta W}{\delta J(x)} \equiv \phi_a(x) = \int d^4 y \Delta(x-y) \left(J(y) - \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_a]}{\delta \phi_a(y)} \right)$$

que pode ser invertida:

$$\Delta_x^{-1} \phi_a(x) = J(x) - \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_a]}{\delta \phi_a(x)}$$

$\Delta_x^{-1} \Delta(x-y) = \delta^4(x-y)$
 $\Delta_x^{-1} \equiv \frac{\delta^2}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_a(y)}$

$$\mathcal{J}(x) = \Delta_x^{-1} \phi_a(x) + \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_a]}{\delta \phi_a(x)} = \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \left[\hat{\Gamma}[\phi_a] + \frac{1}{2} \phi_a \cdot \Delta^{-1} \phi_a \right]$$

$\int d^4y \phi_a(y) \Delta_y^{-1} \phi_a(y) = \int d^4y \Delta_y^{-1} \phi_a(y) \phi_a(y) + \text{surperf.}$
↳ 2 deriv.

Definimos então a **Ação Efetiva**:

$$\Gamma[\phi_a] = \hat{\Gamma}[\phi_a] + \frac{1}{2} \phi_a \cdot \Delta^{-1} \phi_a \quad (\text{eq. 180.1})$$

Para a qual vale:

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \Gamma[\phi_a] = \mathcal{J}(x) \quad (\text{eq. 180.2})$$

↳ O que é muito parecido com o que vale para a ação, via a equação de movimento CLÁSSICA:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} - \mathcal{J} = 0 \Rightarrow \frac{\delta S}{\delta \phi} = \mathcal{J}$$

daí o nome "ação efetiva". Da mesma forma que o campo ϕ_{cl} é o que vemos a baixas energias com correções quânticas já incluídas, a ação efetiva é a ação que de fato dita o comportamento deste campo (incluindo em si as flutuações quânticas).

Definimos ainda:

$$\Gamma[\phi_a] = \sum_{N \geq 1} \frac{1}{N!} \Gamma^N \underbrace{\phi_a \cdot \phi_a \cdot \dots \cdot \phi_a}_N \quad (\text{eq. 180.3})$$

N campos

Cuja única diferença para as definições 179.3 e 179.4 está no segundo termo:

$$\Gamma^2(x, y) = \frac{\delta^2}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_a(y)} \Gamma[\phi_a] \Big|_{\phi_a=0} = \frac{\delta^2}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_a(y)} \underbrace{\hat{\Gamma}[\phi_a]}_{\Pi^2(x, y)} + \frac{\delta^2}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_a(y)} \left[\frac{1}{2} \phi_a \cdot \Delta^{-1} \phi_a \right]$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(y)} \frac{1}{2} \int d^4z \phi_a(z) \Delta_z^{-1} \phi_a(z) = \Delta_y^{-1} \phi_a(y) \quad \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \Delta_y^{-1} \phi_a(y) = \Delta_y^{-1} \delta(x-y)$$

$$\Gamma^2(x, y) = \Pi^2(x, y) + \Delta_y^{-1} \delta(x-y) \quad (\text{eq. 180.4})$$

↳ lembrando que só essa parte é a função 1PI de dois pontos
 ↳ é possível mostrar que esta função é a inversa do propagador completo da teoria:

$$\int d^4z \Gamma^2(x, z) \Delta_F^c(z-y) \sim \delta^4(x-y) \quad (\text{eq. 181.1})$$

propagador incluindo TODAS as correções perturbativas:  + ...

mas para fazer isso precisamos primeiro definir o propagador completo:

Função conectada de dois pontos

Já definimos a equação conectada de 1 ponto (eq 177.3), façamos o mesmo para a de dois pontos:

$$G_a^c(x, y)_J = - \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(y)} W[J] = \frac{\delta \phi_a(y)}{\delta J(x)} \quad (\text{eq. 181.2})$$

Substituindo ϕ_{cl} pela equação auto-consistente (179.1):

$$G_a^c(x, y)_J = \Delta(y-x) - (\Delta \cdot \Pi^2 \cdot \frac{\delta \phi_a(y)}{\delta J(x)}) + \dots$$

estes termos somem desde que $\phi_a(J=0) = 0$

$$G_a^c(x, y)_{J=0} = \Delta(y-x) - \int d^4z_1 d^4z_2 \Delta(y-z_1) \Pi^2(z_1, z_2) G_a^c(z_2, x)_{J=0} \quad (\text{eq. 181.3})$$

$$\int d^4z_2 \left[\delta(y-z_2) + \int d^4z_1 \Delta(y-z_1) \Pi^2(z_1, z_2) \right] G_a^c(z_2, x) = \Delta(y-x) \quad (\times \Delta_y^{-1})$$

$$\int d^4z_2 \left[\Delta_y^{-1} \delta(y-z_2) + \Pi^2(y, z_2) \right] G_a^c(z_2, x) = \delta(y-x)$$

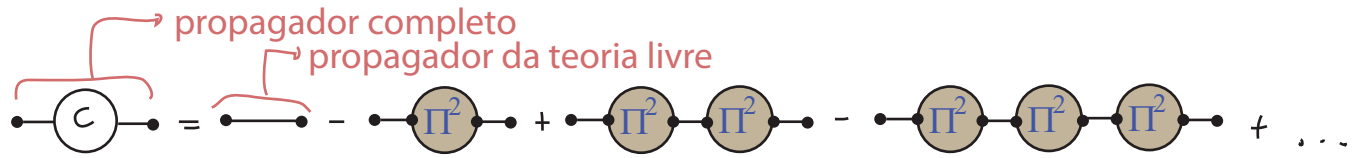
$(\hat{1} + \Delta \cdot \Pi^2) \cdot G_2 = \Delta$

o que prova 181.1 e identifica G_2^c como o tal propagador completo, que é justamente o que queríamos (o propagador livre mais a soma de todos os diagramas conectados de dois pontos). Notemos que:

$$(\hat{1} + \Delta \cdot \Pi^2) \cdot G_2 = \Delta \implies G_2 = (\hat{1} + \Delta \cdot \Pi^2)^{-1} \cdot \Delta$$

$(-1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

$$G_2 = (\hat{1} - \Delta \Pi^2 + \Delta \Pi^2 \Delta \Pi^2 - \Delta \Pi^2 \Delta \Pi^2 \Delta \Pi^2 + \dots) \Delta = \Delta - \Delta \Pi^2 \Delta + \Delta \Pi^2 \Delta \Pi^2 \Delta - \dots$$



Com isso já obtivemos um funcional, a Ação Efetiva, que gera as funções 1PI. Resta agora mostrar que podemos obter a ação efetiva como uma transformada de Legendre da energia livre (sem isso não conseguimos calcular a ação efetiva, já que foi definida como uma soma de infinitos termos). Queremos mostrar que:

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} = e^{-W[J]} = e^{-\Gamma[\phi_c] + J \cdot \phi_c}$$

ou: $\Gamma[\phi_c] = W[J] + J \cdot \phi_c$ (eq. 182.1)

// Demonstração //

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} = \frac{\delta W[J]}{\delta \phi_c(x)} + \frac{\delta J}{\delta \phi_c(x)} \cdot \phi_c + J(x) = J(x)$$

$$\int \mathcal{D}\gamma \underbrace{\frac{\delta W[J]}{\delta J(\gamma)}}_{-\phi_c(\gamma)} \frac{\delta J(\gamma)}{\delta \phi_c(x)} = -\phi_c \cdot \frac{\delta J}{\delta \phi_c(x)}$$

Que é a equação 180.2 novamente, mostrando que o RHS da equação 182.1 também é a ação efetiva

Ação clássica como geradora dos diagramas em "nível árvore" (sem loops)

Uma das formas de pensar o limite $\hbar \rightarrow 0$ é notar que na equação abaixo:

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} = e^{-\Gamma[\phi_c] + J \cdot \phi_c}$$

$$e^{-\frac{1}{\hbar}(S + J \cdot \phi)}$$

podemos ignorar todas as trajetórias não clássicas do lado esquerdo e aí a ação efetiva e a clássica são o mesmo. Sabemos que a ação efetiva gera certos diagramas (os diagramas 1PI) então podemos nos perguntar se a ação clássica também funciona como funcional gerador de algum diagrama e, se sim, quais são eles. Para obter a resposta, tomemos uma teoria simples como exemplo:

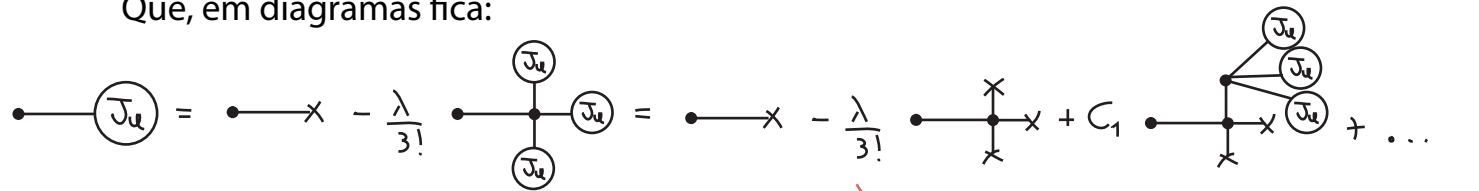
$$S[\phi] = \frac{1}{2} \phi \cdot \Delta^{-1} \phi + \int \mathcal{D}^3x \phi^3(x)$$

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} = J(x) \Rightarrow (\Delta^{-1} \cdot \phi)(x) + \frac{\lambda}{3!} \phi^3(x) = J(x)$$

$$\phi(x) = (\Delta \cdot J)(x) - \frac{\lambda}{3!} (\Delta \cdot \phi^3)(x)$$

(eq. 182.1)

Que, em diagramas fica:



consigo gerar qualquer diagrama em árvore, mas nunca um loop

Isso quer dizer que os diagramas em nível árvore são "clássicos" (no sentido mais geral da palavra)? De fato se calculamos estes diagramas usando propagadores e no fim interpretarmos todos os resultados como amplitudes de probabilidade, teremos, como esperado, efeitos já conhecidos de mecânica quântica, tal como interferências entre canais alternativos. Mas isso é porque em uma *teoria clássica de campos* a informação se propaga por meio de ondas, e isso reproduz bem estes efeitos. O que estamos perdendo então? Os efeitos quânticos intrínsecos de uma *teoria de campo*, que são codificados nos loops da expansão perturbativa. Estes efeitos serão melhor abordados em TQCII, mas consistem essencialmente no fato de uma excitação do campo (uma partícula) acabar interagindo com o próprio campo, com várias consequências (o propagador completo tem um polo que não coincide com a massa na lagrangiana, running das constantes de acoplamento, etc...)

Equações de Dyson-Schwinger e identidades de Ward

(Nastase 18, Peskin 9.6)

A nível clássico vale:

$$\frac{\delta S[J]}{\delta \phi(x)} - J(x) = 0$$

Queremos o equivalente quântico disso. Considere a identidade:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{d}{dx} f(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad f(\pm\infty) = 0$$

Podemos generalizar isto para a integral de trajetória e, no caso do espaço Euclideo não precisamos que o campo vá a zero, a ciclicidade da integral já garante isso:

$$\int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \phi(x)} e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} = 0$$

$$\int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \phi(x)} e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} = \int \mathcal{D}\phi \left[-\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} + J(x) \right] e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} =$$

$$= \left[-\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} \Big|_{\phi = \frac{\delta J}{\delta J}} + J(x) \right] Z[J] = 0$$

leia-se: (1) agimos com a derivada em ϕ na ação; (2) no resultado, troco todos os ϕ por derivadas em J ; (3) essas agem em Z .

$$\left[-\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} \Big|_{\phi=\frac{\delta}{\delta J}} + J(x) \right] Z[J] = 0$$

Equação de Schwinger-Dyson

(eq. 184.1)

(em sua versão mais compacta e geral)

$$\rightarrow \left\langle \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} - J(x) \right\rangle = 0$$

Este resultado parece óbvio e trivial de deduzir, mas isto foi graças ao formalismo de integral de trajetórias. Historicamente este resultado foi obtido em termos de diagramas de Feynman, e é interessante ver como isto é feito pois ele implica **relações** nada triviais **entre diagramas**.

Vamos assumir uma teoria bosônica com termo cinético quadrático e uma interação qualquer:

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \phi \cdot \Delta^{-1} \phi + S_I[\phi]$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi(x)} S[\phi] = (\Delta^{-1} \phi)(x) + \frac{\delta}{\delta \phi(x)} S_I[\phi]$$

$$\left(\Delta \cdot \frac{\delta S}{\delta \phi} \right)(y) = \phi(y) + \left(\Delta \cdot \frac{\delta S_I}{\delta \phi} \right)(y)$$

$$\left\{ \int d^4x \Delta(x-y) \frac{\delta}{\delta \phi(x)} = \left(\Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi} \right)(y) \right\}$$

Substituindo isso em 184.1 (onde primeiro aplicamos Δ):

$$\left[-\frac{\delta}{\delta J(x)} - \left(\Delta \cdot \frac{\delta S_I}{\delta \phi} \right)(x) \Big|_{\phi=\frac{\delta}{\delta J}} + (\Delta \cdot J)(x) \right] Z[J] = 0$$

de onde obtemos a equação de Schwinger-Dyson para Z:

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = (\Delta \cdot J)(x) Z[J] - \left(\Delta \cdot \frac{\delta S_I}{\delta \phi} \right)(x) \Big|_{\phi=\frac{\delta}{\delta J}} Z[J]$$

(eq. 184.2)

$$\langle \phi(x) \rangle = \langle (\Delta \cdot J)(x) \rangle - \left\langle \left(\Delta \cdot \frac{\delta S_I}{\delta \phi} \right)(x) \right\rangle$$

Uma vez que tenhamos a equação para Z podemos obter a equação para qualquer função de n-pon-tos, mas precisamos especificar uma interação. Por exemplo:

$$\int \mathcal{L}_I(\phi(y)) = \frac{g_3}{3!} \phi^3(y) + \frac{g_4}{4!} \phi^4(y)$$

(eq. 184.2)

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} &= (\Delta \cdot J)(x) Z[J] - \int d^4y \Delta(x-y) \int d^4z \delta(y-z) \left(\frac{g_3}{2!} \frac{\delta^2}{\delta J(y) \delta J(y)} + \frac{g_4}{3!} \frac{\delta^3}{\delta J(y) \delta J(y) \delta J(y)} \right) Z[J] \\ &= (\Delta \cdot J)(x) Z[J] - \int d^4z \Delta(x-z) \left(\frac{g_3}{2!} \frac{\delta^2}{\delta J(y) \delta J(y)} + \frac{g_4}{3!} \frac{\delta^3}{\delta J(y) \delta J(y) \delta J(y)} \right) Z[J] \end{aligned}$$

Chamemos $x = x_i$ na equação acima e então tomemos mais $(n-1)$ derivadas: $\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)}$

$$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0} = G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$$

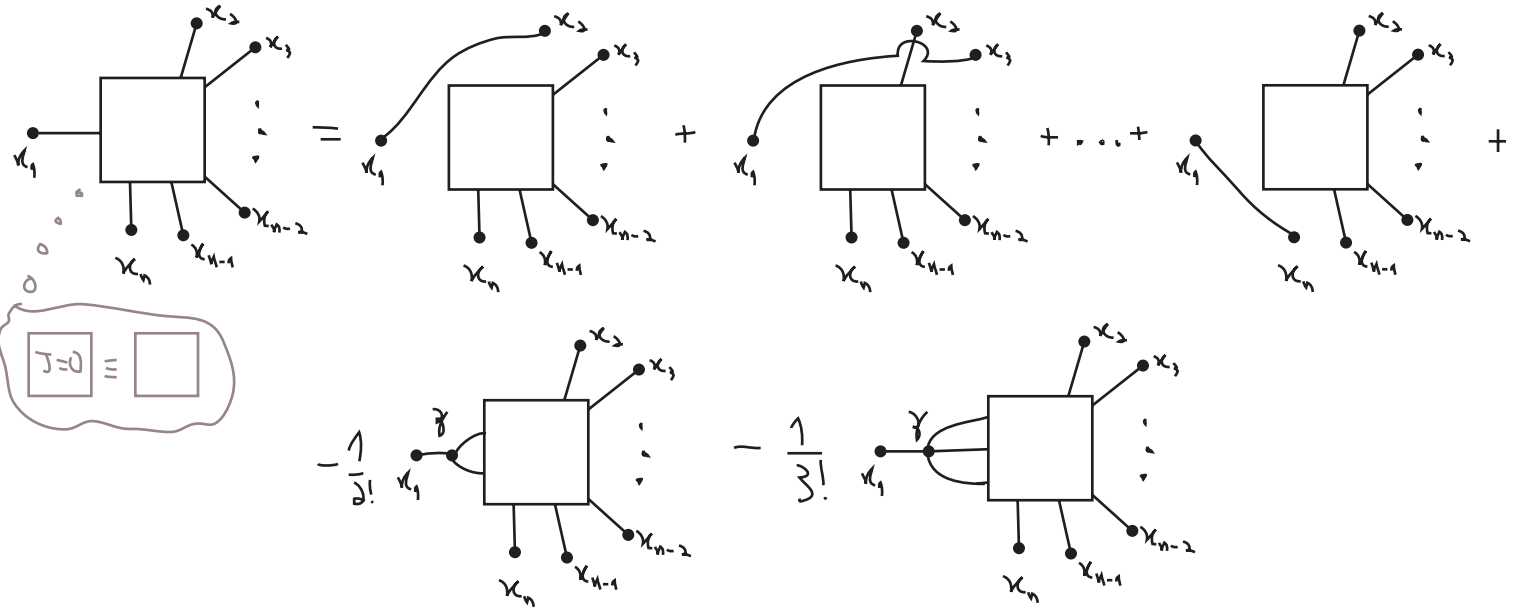
$$\frac{\delta^{n-1} (\Delta \cdot J)(x_1) Z[J]}{\delta J(x_2) \dots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0} = \Delta(x_1 - x_2) G^{(n-2)}(x_3, \dots, x_n) + \Delta(x_1 - x_3) G^{(n-2)}(x_2, x_4, \dots, x_n) + \dots$$

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \Delta(x_1 - x_2) G^{(n-2)}(x_3, \dots, x_n) + \dots + \Delta(x_1 - x_n) G^{(n-2)}(x_2, \dots, x_{n-1}) +$$

$$- \int d^4z \Delta(x_1 - z) \left[\frac{g_3}{2!} G^{(n+1)}(z, z, x_2, \dots, x_n) + \frac{g_4}{3!} G^{(n+2)}(z, z, z, x_2, \dots, x_n) \right] \quad (\text{eq. 185.1})$$

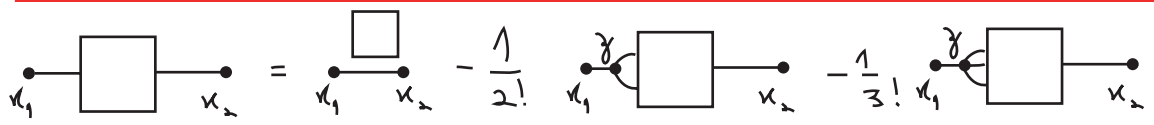
(note que estas são as funções de Green completas, essa relação é verdade independentemente de teoria de perturbação)

Vamos expressar esta equação em termos de diagramas (note que a equação é sempre escrita em função de um **ponto especial** escolhido, neste caso x_1):



Podemos reiterar a equação de DS para obter a expansão perturbativa. Tome, por exemplo, a função de dois pontos da teoria acima:

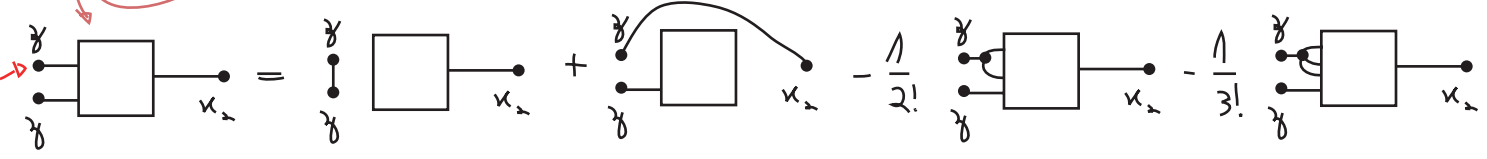
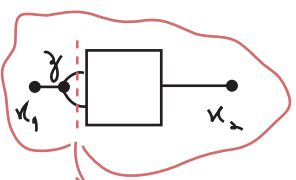
$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \Delta(x_1 - x_2) G^{(0)} - \int d^4z \Delta(x_1 - z) \left[\frac{g_3}{2!} G^{(3)}(z, z, x_2) + \frac{g_4}{3!} G^{(4)}(z, z, z, x_2) \right] \quad (\text{eq. 185.2})$$



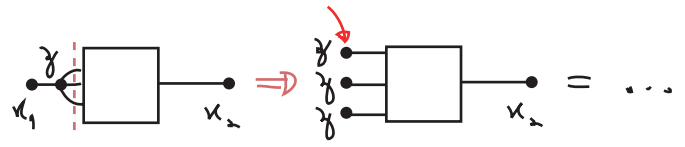
Se usarmos novamente a equação de DS para $G^{(3)}$ e $G^{(4)}$, temos:

$$G^{(3)}(z, z, x_2) = \Delta(z - z) G^{(1)}(x_2) + \Delta(z - x_2) G^{(1)}(z) - \frac{g_3}{2!} \int d^4w \Delta(z - w) G^{(1)}(w, w, z, x_2) - \frac{g_4}{3!} \int d^4w \Delta(z - w) G^{(1)}(w, w, w, z, x_2)$$

Ponto escolhido para escrever a equação



$$G^{(2)}(\gamma, \gamma, \gamma, x_2) = 2\Delta(\gamma - \gamma) G^{(2)}(\gamma, x_2) + \Delta(\gamma - x_2) G^{(2)}(\gamma, \gamma) - \frac{g_2}{2!} \int d^4\omega \Delta(\gamma - \omega) G^{(5)}(\omega, \omega, \gamma, \gamma, x_2) + \frac{g_1}{3!} \int d^4\omega \Delta(\gamma - \omega) G^{(6)}(\omega, \omega, \omega, \gamma, \gamma, x_2)$$



Voltando com estas expressões em 170.2, temos:

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \Delta(x_1 - x_2) G^{(0)} - \frac{g_3}{2!} \int d^4\gamma \Delta(x_1 - \gamma) \left[\Delta(\gamma - \gamma) G^{(1)}(x_2) + \Delta(\gamma - x_2) G^{(1)}(\gamma) - \frac{g_2}{2!} \int d^4\omega \Delta(\gamma - \omega) G^{(4)}(\omega, \omega, \gamma, x_2) - \frac{g_1}{3!} \int d^4\omega \Delta(\gamma - \omega) G^{(5)}(\omega, \omega, \omega, \gamma, x_2) \right] + \frac{g_1}{3!} \int d^4\gamma \Delta(x_1 - \gamma) \left[2\Delta(\gamma - \gamma) G^{(2)}(\gamma, x_2) + \Delta(\gamma - x_2) G^{(2)}(\gamma, \gamma) - \frac{g_2}{2!} \int d^4\omega \Delta(\gamma - \omega) G^{(5)}(\omega, \omega, \gamma, \gamma, x_2) - \frac{g_1}{3!} \int d^4\omega \Delta(\gamma - \omega) G^{(6)}(\omega, \omega, \omega, \gamma, \gamma, x_2) \right]$$

O que podemos continuar iterando para obter termos com potências ainda maiores de g_3 e g_4 . Suponha que estivéssemos interessados no termos **CONECTADOS** de ordem $(g_3)^0(g_4)^1$: para começar podemos esquecer completamente o primeiro colchete, pois tudo ali é proporcional a g_3 . Além disso, para nos livrarmos das bolhas no vácuo, devemos dividir tudo por $G^{(0)}$ (o que acontece mesmo em observáveis). Aí só restam os dois primeiros termos do segundo colchete, pois os outros tem potências a mais de g_3 ou g_4 . Como:

$$G^{(2)}(\gamma, x_2) = \Delta(\gamma - x_2) G^{(0)} + \mathcal{O}(g_3, g_4) \rightarrow \text{já temos uma potência de } g_4 \text{ multiplicando tudo}$$

$$G^{(2)}(x_1, x_2) \stackrel{\mathcal{O}(g_3^0, g_4^1)}{=} \Delta(x_1 - x_2) - \frac{g_1}{3!} \int d^4\gamma \Delta(x_1 - \gamma) \Delta(\gamma - \gamma) \Delta(\gamma - x_2) = \Delta(x_1 - x_2) + \Delta(x_1 - \gamma) \Delta(\gamma - x_2) + \dots$$

fator de simetria ok!

Simetrias e as Identidades de Ward

Como já vimos dada uma simetria sobre a transformação (global):

$$\phi^{i'} = \phi^i + \underbrace{\epsilon^a (T^a)_{ij}}_{\delta\phi^i} \phi^j$$

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int d^4x \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} \delta \phi^i + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \partial_\mu \delta \phi^i \right\} = \\ &= \int d^4x \left\{ \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \right) \right] \delta \phi^i + \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \delta \phi^i \right] \right\} \end{aligned}$$

se as equações de movimento CLÁSSICAS forem satisfeitas o primeiro colchete é zero, e temos (usando o $\delta\phi^i$ acima):

$$(\delta S)^\alpha = \lambda \epsilon^a \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} (T^a)_{ij} \phi^j \right]}_{j_\mu^a} = 0 \quad (\text{corrente de Noether})$$

Note a importância da equação de movimento clássica. Por isso dizemos que a corrente é conservada classicamente ou **on-shell** (nome que ficará mais claro adiante). Suponha agora que estejamos pensando nas trajetórias ou configurações não clássicas da teoria (**off-shell**), ainda temos $\delta S = 0$, só que:

$$\delta S = 0 = \lambda \epsilon^a (T^a)_{ij} \left\{ \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \right) \right] \phi^j + \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \phi^j \right] \right\}$$

Suponha agora que nós tornemos a simetria mais geral tornando-a local $\epsilon^a \rightarrow \epsilon^a(x)$. A ação que era invariante sob a transformação global não vai ser obrigatoriamente invariante sobre a transformação local, a variação agora será:

0 (note que não mudei a Lagrangeana)

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \lambda \epsilon^a(x) (T^a)_{ij} \left\{ \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \right) \right] \phi^j + \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \phi^j \right] \right\} + \\ &+ \lambda \int d^4x (\partial_\mu \epsilon^a) (T^a)_{ij} \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \phi^j \right] = \\ &= \lambda \int d^4x (\partial^\mu \epsilon^a(x)) j_\mu^a(x) = -\lambda \int d^4x \epsilon^a(x) \partial^\mu j_\mu^a(x) \quad (\text{eq. 187.1}) \end{aligned}$$

↳ assumindo que ϵ vai a zero no infinito

Esta equação 187.1 vale off-shell, portanto podemos usá-la dentro de integrais de trajetória. Acharmos um jeito de definir a corrente off-shell de uma ação classicamente invariante sob uma transformação global: basta olhar a variação da mesma ação sob a versão local da transformação, o coeficiente de $\delta^\mu \epsilon^\alpha(x)$ é a corrente.

O que queremos agora é muito semelhante à eq. 184.1 (Dyson-Schwinger), que era uma versão quântica das equações de movimento. Queremos a versão quântica da conservação da corrente:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \implies \langle \partial_\mu j^\mu = 0 \rangle$$

Aqui, no entanto, a passagem não é garantida, pois podem aparecer **anomalias quânticas**: quando as correções quânticas não respeitam a simetria

Considere: $\delta \phi^\alpha(x) = \lambda \epsilon^\alpha(x) T_{\alpha\beta}^a \phi^\beta$ $\phi' = \phi + \delta\phi$

sempre vale que: $\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} = \int \mathcal{D}\phi' e^{-S[\phi']}$ (só estou mudando o nome da variável de integração)

No entanto, se a mudança de ϕ para ϕ' for tal que o jacobiano seja $\hat{1}$, então $\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$ e aí:

$$\int \mathcal{D}\phi (e^{-S[\phi']} - e^{-S[\phi]}) = 0 = \int \mathcal{D}\phi \delta(e^{-S[\phi']}) = -\int \mathcal{D}\phi \delta S[\phi] e^{-S[\phi]}$$

$\therefore \langle \delta S \rangle = 0$ (eq. 188.1) \iff se $S[\phi'] = S[\phi]$ ou seja, é uma simetria da teoria clássica ou seja, é uma simetria da teoria quântica

As anomalias entram justamente aí, pois teorias anômalas modificam o jacobiano fazendo justamente que ele seja diferente da identidade. Este assunto será abordado em TQCII, portanto aqui assumiremos simplesmente que a teoria não é anômala. Substituindo 187.1 em 188.1 temos:

$$\int \mathcal{D}\phi \left(-\lambda \int d^4x \epsilon^\alpha(x) \partial^\mu j_\mu^\alpha(x) \right) e^{-S[\phi]} = 0$$

$$\underbrace{\int d^4x \lambda \epsilon^\alpha(x)}_{\text{arbitrário}} \int \mathcal{D}\phi \partial^\mu j_\mu^\alpha(x) e^{-S[\phi]} = 0$$

$$\boxed{\int \mathcal{D}\phi \partial^\mu j_\mu^\alpha(x) e^{-S[\phi]} = 0} \quad \text{Identidade de Ward} \quad \text{(eq. 188.2)}$$

$$\langle \partial^\mu j_\mu^\alpha \rangle = 0$$

Podemos obter outras identidades deste tipo generalizando o operador que está sendo variado:

$$\delta \mathcal{O}(\phi, \lambda) = \int d^4x \frac{\delta \mathcal{O}(\phi, \lambda)}{\delta \epsilon^a(x)} \epsilon^a(x)$$

e obtemos:

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \delta \left[e^{-S[\phi]} \mathcal{O}(\phi, \lambda) \right] = i \int d^4x \epsilon^a(x) \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \left[\delta^{\mu\nu} j_{\mu\nu}^a(x) \mathcal{O} - i \frac{\delta \mathcal{O}}{\delta \epsilon^a(x)} \right]$$

De forma que temos as **Identidades de Ward Generalizadas**:

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} (\delta^{\mu\nu} j_{\mu\nu}^a(x)) \mathcal{O}(\phi, \lambda) = i \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \frac{\delta \mathcal{O}(\phi, \lambda)}{\delta \epsilon^a(x)} \quad (\text{eq. 189.1})$$

Que pode ser usada para, por exemplo, explorar o caso com fontes: $\mathcal{O} = e^{\phi \cdot J}$

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \delta \left[e^{-S[\phi] + \phi \cdot J} \right] = \int d^4x \epsilon^a(x) \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \epsilon^a(x)} \left[e^{-S[\phi] + \phi \cdot J} \right]$$

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \epsilon^a(x)} \left[e^{-S[\phi] + \phi \cdot J} \right] = i T_{ij}^a \int \mathcal{D}\phi \left[-\frac{\delta S}{\delta \phi^i} \phi^j + J_i \phi^i \right] e^{-S + \phi \cdot J}$$

$$\phi(x) \rightarrow \frac{\delta}{\delta J(x)} \quad \frac{\delta S}{\delta \epsilon^a} = \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \frac{\delta \phi^i}{\delta \epsilon^a} = i T_{ij}^a \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \phi^j$$

$$(i T_{ij}^a) \left[-\frac{\delta S}{\delta \phi^i(x)} \right]_{\phi = \frac{\delta}{\delta J}} + J_i(x) \left[\frac{\delta}{\delta J_j(x)} \right] Z[J] = 0 \quad (\text{eq. 189.2})$$

O que nos dá uma identidade de Ward para Z e pode facilmente ser usada para obter identidades para as funções de Green.

Veremos que a versão local desta história (note que em nenhuma das passagens acima a ação era invariante sobre a transformação local) leva a relações semelhantes (chamadas de Ward-Takahashi) que colocam forte restrições sobre as funções de Green. Um resultado importante é, por exemplo:

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}^{(2)} = 0 \quad \rightarrow \quad \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \Pi^{(2)}(k^2)$$

↳ Função 1PI de dois pontos para o fóton.

É esta restrição que mantém o fóton sem massa mesmo sob correções radiativas (loops).

Diagramas de Feynman para a Matriz S

(Nastase 20; Peskin 4.6)

Finalmente podemos coletar tudo que aprendemos com as funções de Green e obter um conjunto de regras sucinto para o cálculo da matriz S incluindo agora as correções de ordem superior na teoria de perturbação. Partindo de (73.3 e 73.4):

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | S | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | e^{-iH(\Delta T)} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle$$

(eq. 190.1)

Queremos os estados da teoria livre, vimos que (eq. 85.1):

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-i\tilde{E}_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle \right)^{-1} e^{-iHT} |0\rangle$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-i\tilde{E}_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle \right)^{-1} U_I(0, -T) |0\rangle$$

Faremos agora:

$$|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle \propto \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} e^{-iHT} |\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle_0$$

↳ estado livre, mas não é o vácuo

(estamos deixando a constante de proporcionalidade em aberto, pois ela pode ser bem complicada)

O lado direito de 190.1 fica:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | e^{-iH(\Delta T)} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle \propto \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | e^{-iH(\Delta T)} U_I(T, -T) | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | T \left\{ \text{EXP} \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0$$

$$\therefore S_{fi} \propto \langle f | U_I(+\infty, -\infty) | i \rangle$$

No caso das funções de Green a constante de proporcionalidade se cancela usando a normalização (passagem entre as eqs. 87.1 e 87.2) e aqui acontece o mesmo. Provar isso envolve provar a fórmula LSZ e não faremos isso neste curso. O resultado obtido fazendo a normalização correta e usando a fórmula de LSZ é dado por:

↳ curioso? Veja as notas de TQCII (2016), pgs 93 a 98

$$\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | i T | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle = (\sqrt{Z})^{n+1} \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | T \left(\text{EXP} \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right) | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \right)$$

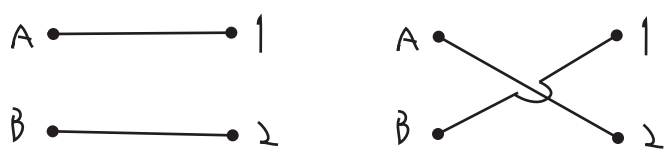
conectado amputado

(eq. 190.2)

Na equação 190.2 obtemos iT ao invés de S , pois a fórmula de LSZ só nos fornece estados conectados em que o estado inicial e final são diferentes. Ainda resta entender o que "amputado" quer dizer. Lembrando que $Z = 1$ a nível árvore, vejamos alguns exemplos:

$2 \rightarrow 2$ $\mathcal{O}(\lambda^0)$ o lado direito de 190.2 fica:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 &\equiv \sqrt{2E_A 2E_B 2E_1 2E_2} \langle 0 | a_1 a_2 a_A^\dagger a_B^\dagger | 0 \rangle = \\ &= 2E_A 2E_B (2\pi)^4 \left[\delta^{(3)}(\vec{p}_A - \vec{p}_1) \delta^{(3)}(\vec{p}_B - \vec{p}_2) + \delta^{(3)}(\vec{p}_A - \vec{p}_2) \delta^{(3)}(\vec{p}_B - \vec{p}_1) \right] \end{aligned}$$



Desconectados (não são incluídos)

contribuem para a parte 1 de $S = 1 + iT$

$2 \rightarrow 2$ $\mathcal{O}(\lambda^1)$

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T \left\{ -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x) \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 = \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | N \left\{ -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x) + \text{contr.} \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \quad (\text{eq. 191.1})$$

Teorema de Wick

$\neq 0$

Os ordenamentos normais não contraídos não somem.

Já vimos que (pág 97): $\underbrace{\phi^+}_{\vec{p}} | \vec{p} \rangle_0 = e^{-i p x} | 0 \rangle$; $\underbrace{\langle \vec{p} |}_{\vec{p}} \phi^- = \langle 0 | e^{i p x}$

dentro de $\langle \dots | N(\phi^N) | \dots \rangle = \langle \dots | (\phi^-)^n (\phi^+)^{N-n} | \dots \rangle$, $n = 0, \dots, N$, temos os ϕ^+ agindo para a direita e os ϕ^- agindo para a esquerda. Definimos então:

no exemplo em questão como temos 2 estados iniciais e 2 finais, o único termo que vai ser diferente de zero é $n=2$ ($N=4$)

Em 191.1 temos termos do tipo: $\phi\phi\phi\phi$, $\phi\phi\phi\phi$, $\phi\phi\phi\phi$

O último termo não passa de um diagrama desconectado acompanhado de bolhas no vácuo:

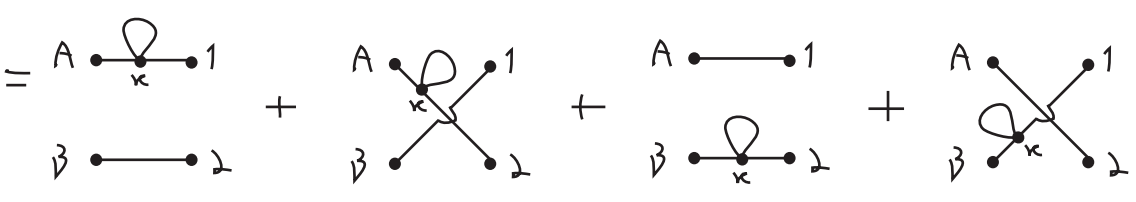
$$-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi\phi\phi\phi \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 = 0 \times \left(\begin{array}{c} A \text{---} 1 \\ B \text{---} 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} A \text{---} 1 \\ B \text{---} 2 \end{array} \right)$$

O segundo termo, com apenas uma contração, nos dá o seguinte:

$$-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \ 2 \phi \phi \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \phi^- \phi^+ | \vec{p}_a \vec{p}_b \rangle_0 =$$

$\langle \phi^+ \phi^+ \rangle = \langle \phi^- \phi^- \rangle = 0$

quatro diagramas



Desconectados (não são incluídos)

Finalmente, no termo sem nenhuma contração somos obrigados a contrair todos os campos com os estados assintóticos:

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \phi^- \phi^- \phi^+ \phi^+ | \vec{p}_a \vec{p}_b \rangle_0 = 4! e^{i(p_a + p_b - p_1 - p_2)x}$$

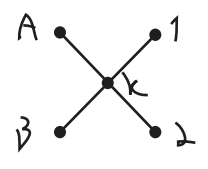
várias formas de fazer, mas todas com o mesmo resultado

$$\therefore \left(\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | N \left\{ -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi_{\pm}^4(x) + \text{contr.} \right\} | \vec{p}_a \vec{p}_b \rangle_0 \right)_{\text{CONNECT.}} = -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \ 4! e^{i(p_a + p_b - p_1 - p_2)x} =$$

$$= -i \lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_1 - p_2)$$

(eq. 192.1)

que é justamente o que obteríamos com as regras de Feynman para o diagrama:



como $i\mathcal{T} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_1 - p_2) i\mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M} = -\lambda$

logo a sessão de choque no centro de massa é: $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{cm}^2}$ (eq. 192.2)

Como o lado direito não tem qualquer dependência angular, fica fácil integrar em Ω :

$$\sigma_{TOT} = \frac{\lambda^2}{32\pi^2 E_{cm}^2} \quad \left(\int dR = 4\pi \right) \quad \frac{1}{2} \quad (2 \text{ partículas idênticas})$$

(eq. 193.1)

Até aqui nenhuma novidade, mas vejamos o que ocorre com algumas correções.

Até agora só o diagrama conectado contribuiu para esta seção de choque, mas resta a pergunta: todos os diagramas conectados possíveis contribuirão para ela? Vejamos o seguinte diagrama

$$= \frac{1}{2} (-i\lambda) (2\pi)^4 \delta^4(p_B + p_A - p_1 - p_2) (-i\lambda) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k) D_F(p' = p_B)$$

(eq. 193.2)

$\equiv (-iM_{(1)}^2)$ (sai da integral)

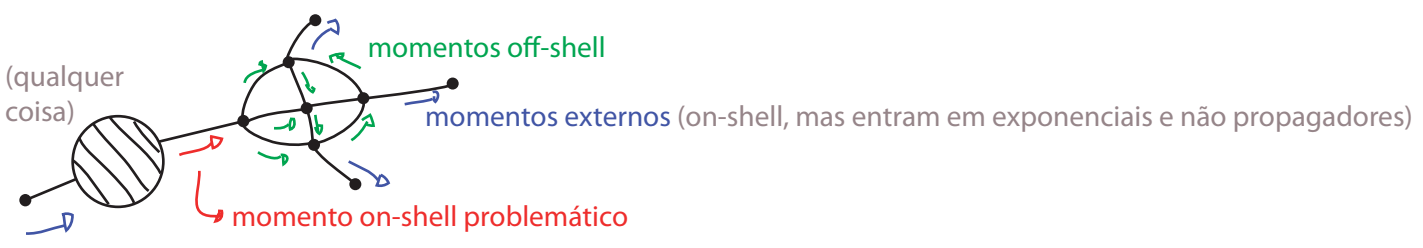
zero para partícula on-shell: $p_B^2 = m^2$

Essa é outra versão do problema que mencionamos pela primeira vez ao fim da página 99, onde obtemos as regras de Feynman no espaço dos momentos e apareceram propagadores para as linhas externas, na última expressão da pag 99 temos:

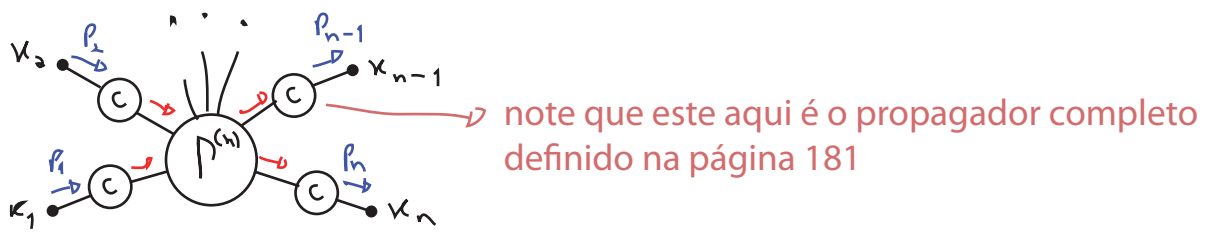
$$= \frac{\lambda^2}{3!} D_F(p_1) D_F(p_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_1) \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} D_F(p_1 - p_1 - p_2) D_F(p_1) D_F(p_2)$$

$\propto \frac{1}{p_i^2 - m^2}$ ambos problemáticos on-shell $p_i^2 = m^2$

Este problema não apareceu no cálculo de 192.1 pois os estados finais e iniciais foram tratados de forma apropriada nas páginas 191 e 192 (por meio da contração dos operadores com os estados assintóticos) e forneceram exponenciais ao invés de propagadores. No entanto este tratamento não resolve o problema para o diagrama em 193.2 pois não é o propagador ligado ao ponto externo que está divergindo, mas sim aquele que envolve p' . Note que, em geral, este problema vai surgir toda vez em que um momento inicial ou final (por definição on-shell) "correr" dentro de alguma linha interna do diagrama. Note que:

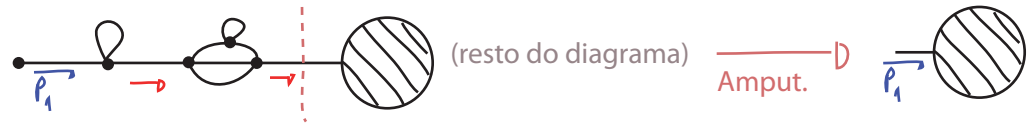


Fica claro que podemos fazer a seguinte separação para n pernas externas:



onde queremos nos livrar dos propagadores em vermelho. Esta operação é chamada de amputar o

diagrama, uma vez que removeremos as pernas externas com TODAS AS SUAS CORREÇÕES, ou seja, o propagador completo. Operacionalmente podemos "seguir" o momento externo e procurar a linha mais distante do ponto externo em que podemos remover a perna cortando apenas um propagador:



É a estes diagramas amputados que nos referimos na eq. 190.2. Felizmente a fórmula de LSZ faz esta "amputação" formalmente, basta notar que (LSZ, eq 74.3):

$$\langle \{p_i\}_n | \{k_j\}_m \rangle_{in} = \lim_{\substack{p_i^2 \rightarrow m_i^2 \\ k_j^2 \rightarrow m_j^2}} \frac{1}{(\sqrt{z^1})^{m+n}} \prod_{i=1}^n (p_i^2 - m_i^2 + i\epsilon) \prod_{j=1}^m (k_j^2 - m_j^2 + i\epsilon) \tilde{G}_{n+m}(p_i^N, k_j^N)$$

Se encontra multiplicado pelos propagadores completos "problemáticos"

$$G_2(p) \sim \frac{i z}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Inverso do propagador completo! ($\Gamma^{(n)}$)

É por isso que obtemos só os diagramas amputados quando passamos da fórmula de LSZ para a eq. 190.2 e finalmente:

$$i \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum p_k) = \left(\sum \text{diagramas conectados e amputados} \right) \times (\sqrt{z^1})^{n+2} \quad (\text{eq. 194.1})$$

QED: definição e regras de Feynman

(Nastase 22; Peskin 4.8)

Agora passamos a aplicações físicas e construímos a nossa primeira Lagrangeana completa, observável e fenomenologicamente viável. Começaremos com a Eletrodinâmica Quântica, que é a versão de TQC para o eletromagnetismo. Para manter a teoria bem geral assumiremos que existem dois estados carregados: um férmion (que pode se o elétron) e um escalar complexo (que é uma partícula escalar carregada qualquer: um méson ou um núcleo atômico). Exigir que a teoria seja invariante por transformações $U(1)_{EM}$ nos obriga a inserir também um campo de Gauge (o fóton) e obtemos a Lagrangeana (Minkowski):

$$\mathcal{L}_{QED}^{(M)}(A_\mu, \phi, \psi) = \underbrace{-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2}_{\mathcal{L}(A)} + \underbrace{\bar{\psi}(\not{D} - m)\psi}_{\mathcal{L}(A, \psi)} + \underbrace{(\not{D}_\mu \phi)^* (\not{D}^\mu \phi) - V(\phi^* \phi)}_{\mathcal{L}(A, \phi)}$$

e.g.: $V(\phi^* \phi) = m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$

(eq. 190.2)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \not{D} = \gamma^\mu D_\mu \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad \boxed{D_\mu = \partial_\mu - i e A_\mu}$$

So a transformação U(1) local os campos se transformam da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = \psi(x) e^{ie\chi(x)} \\
 \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = \phi(x) e^{ie\chi(x)} \\
 A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x)
 \end{aligned}
 \tag{eq. 195.1}$$

é fácil ver (com um pouco de álgebra) que a Lagrangeana é invariante sobre estas transformações e também que ela perde a invariância local se fizermos $A_\mu = 0$ (mantém a invariância sobre U(1) global, no entanto).

Podemos passar para o espaço Euclideano (usando os resultados individuais para férmions, escalares e bósons de Gauge mostrados anteriormente):

$$i S^{(M)} \rightarrow -S^{(E)}$$

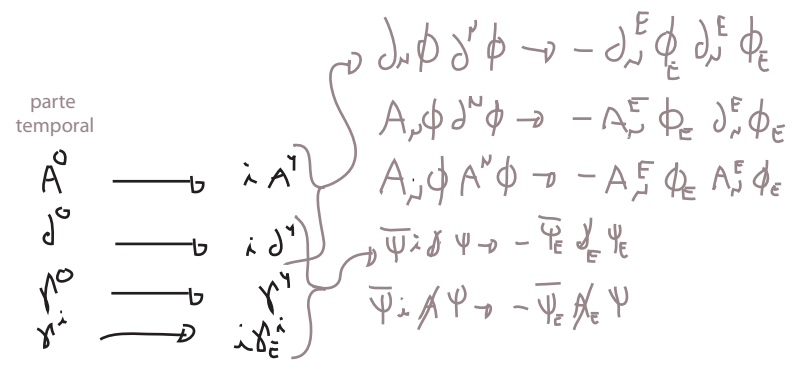
(pg 106) $\mathcal{L}^{(E)}(\phi) = \partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi + V(\phi^* \phi)$

(pg 140) $\mathcal{L}^{(E)}(\psi) = \bar{\psi} (\not{D} + m) \psi$ $\{ \gamma_\mu, \gamma_\nu \} = 2 \delta_{\mu\nu}$

(pg 167) $\mathcal{L}^{(E)}(A) = + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(E)} F^{(E)\mu\nu}$

o único termo novo é: $A_\mu^{(M)} \rightarrow \begin{cases} A_0 = i A_4 \\ A_i \end{cases}$

mas ele está sempre contraído com: $\begin{cases} A^\mu \\ \partial^\mu \\ \gamma^\mu \end{cases}$



$$\therefore \mathcal{L}^{(E)}(A, \psi, \phi) = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi} (\not{D} + m) \psi + (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) + V(\phi^* \phi)
 \tag{eq. 195.2}$$

Quantização:

Já vimos que a parte do bóson de Gauge, para ser quantizada, terá que passar por algum método de fixação de Gauge. Segundo o de Fadeev-Popov, ganhamos um termo de fixação de Gauge:

$$\mathcal{L}(A) \rightarrow \mathcal{L}_{EFF}(A) = \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}_{GF} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu)^2$$

(a presença dos outros dois campos não muda o procedimento de Fadeev-Popov em nada, a única exigência que fizemos em relação a ação foi a de que fosse invariante de Gauge, o que é verdade para 195.2)

Resta então obter os propagadores. Na Lagrangeana 195.2 temos alguns termos de interação como:

$$(\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi) \quad (\phi^* \phi A^\mu A_\mu)$$

a forma de lidar com estas interações é a habitual, adicionamos uma fonte para cada campo:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \mathcal{J}_\mu A_\mu - \bar{\xi} \Psi - \bar{\Psi} \xi - \mathcal{J} \phi - \bar{\mathcal{J}} \phi^*$$

e escrevemos as interações como derivadas nas fontes, que então podemos tirar de dentro das integrais de trajetória. O ponto é que uma vez feito isso, teremos três integrais de trajetória independentes, de três teorias livres:

$$\underbrace{\int \mathcal{D}A_\mu e^{-S(A)}}_{e^{\frac{1}{2} \mathcal{J}_\mu \Delta_{\mu\nu} \mathcal{J}_\nu}} \underbrace{\int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{-S(\Psi)}}_{e^{\bar{\xi} \mathcal{S}_F \xi}} \underbrace{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* e^{-S(\phi)}}_{e^{\bar{\mathcal{J}} \Delta \mathcal{J}}}$$

de onde fica claro que posso quantizar as três teorias independentemente e obter os propagadores já mostrados nas aulas anteriores.

Esquecendo o escalar por um tempo, temos o seguinte funcional gerador:

$$Z[\mathcal{J}_\mu, \xi, \bar{\xi}] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{-S_{\text{EFF}}[A, \Psi, \bar{\Psi}, \mathcal{J}_\mu, \xi, \bar{\xi}]} \quad (\text{eq. 196.1})$$

e o VEV de um operador qualquer será dado por:

$$\langle \hat{O}(A, \bar{\Psi}, \Psi) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} O e^{-S_{\text{EFF}}[A, \Psi, \bar{\Psi}, \mathcal{J}_\mu, \xi, \bar{\xi}]}}{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{-S_{\text{EFF}}[A, \Psi, \bar{\Psi}, \mathcal{J}_\mu, \xi, \bar{\xi}]}} \quad (\text{eq. 196.2})$$

a energia livre (gerador dos diagramas conectados):

$$Z[\mathcal{J}, \xi, \bar{\xi}] = e^{-W[\mathcal{J}, \xi, \bar{\xi}]}$$

e a ação efetiva (gerador dos diagramas 1PI) será dada por (transformada de Legendre):

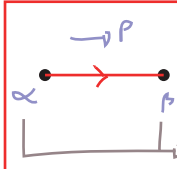
$$\Gamma[A_\mu, \bar{\Psi}_\mu, \Psi_\mu] = W[\mathcal{J}, \xi, \bar{\xi}] + \int d^4x [\mathcal{J}_\mu A_\mu^\mu + \bar{\xi} \Psi^\mu + \bar{\Psi}^\mu \xi] \quad (\text{eq. 196.3})$$

fazendo derivadas nesta equação obtemos as seguintes relações:

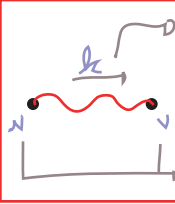
$$\frac{\delta W}{\delta \mathcal{J}_\mu} = -A_\mu^\mu \quad \frac{\delta W}{\delta \xi} = -\Psi^\mu \quad \frac{\delta W}{\delta \bar{\xi}} = \bar{\Psi}^\mu \quad (\text{eq. 196.4})$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^\mu} = \mathcal{J}_\mu \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \Psi^\mu} = -\bar{\xi} \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\Psi}^\mu} = \xi \quad (\text{eq. 196.5})$$

Regras de Feynman no espaço dos momentos (Euclideo):

propagador do férmion:  = $\left(\frac{1}{i\not{p} + m} \right)_{\alpha\beta} = \frac{(-i\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2}$ (Euclid.) (eq. 197.1)

índices espinoriais ($\alpha, \beta = 1 \dots 4$)

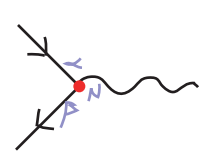
propagador do fóton:  = $\frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$ (Euclid.) (eq. 197.2)

índices de Lorentz

o sentido do momento não importa

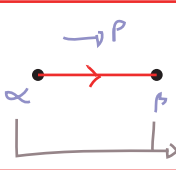
vértice: a interação é dada por parte da derivada covariante: $S_I = -i e \int d^4x \bar{\Psi}_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} A_\mu \Psi_\beta$

então basta derivar nos campos para obter (segundo a eq 122.1):

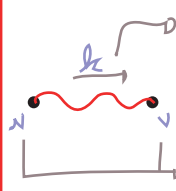
 = $i e (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$ (Euclid.) (eq. 197.3)

Regras de Feynman para a matriz S (Minkowski / Momentos):

As linhas externas on-shell, necessárias para o cálculo da matriz S, só podem ser obtidas no espaço físico, então re-escrevemos as regras fazendo a habitual rotação de volta:

 = $\frac{i (\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ (Mink.) (eq. 197.4)

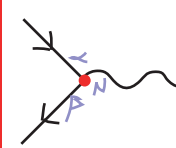
índices espinoriais ($\alpha, \beta = 1 \dots 4$)

 = $\frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$ (Mink.) (eq. 197.5)

índices de Lorentz

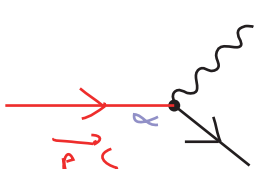
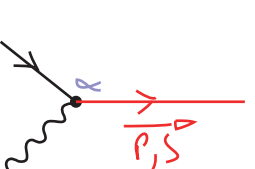
o sentido do momento não importa

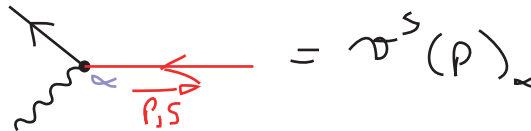
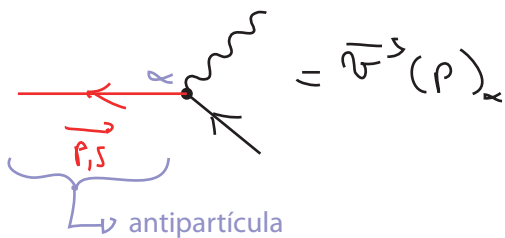
Para o vértice basta rodar S_I antes de derivar nos campos:

 = $-i e (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$ (Mink.) (eq. 197.6)

note que os índices nos vértices tem que estar contraídos com os índices das linhas externas ou propagadores que entram neles

As linhas externas para os férmions foram obtidas nas pgs 145-146 (eq 146.1):

 = $u^S(p)_\alpha$  = $\bar{u}^S(p)_\alpha$ (Mink.)



que vêm de:

$$\psi |e^-(\vec{p}, s)\rangle = u^s(p) e^{i p x} |0\rangle$$

$$\bar{\psi} |e^+(\vec{p}, s)\rangle = \bar{v}^s(p) e^{i p x} |0\rangle$$

$$|e^-(\vec{p}, s)\rangle = \sqrt{2E_p} \hat{a}_r^+ |0\rangle$$

$$|e^+(\vec{p}, s)\rangle = \sqrt{2E_p} \hat{b}_r^+ |0\rangle$$

$$\langle e^-(\vec{p}, s) | \bar{\psi} = \bar{u}^s(p) e^{-i p x} \langle 0 |$$

$$\langle e^+(\vec{p}, s) | \psi = v^s(p) e^{-i p x} \langle 0 |$$

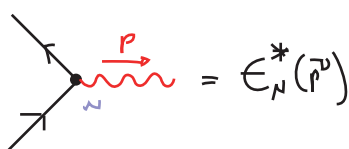
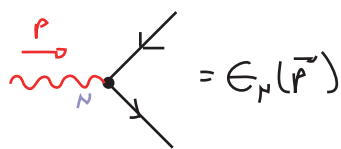
sendo importante lembrar que os sinais relativos entre diagramas que envolvam trocas destes estados finais e iniciais são fixados conforme regras mostradas nas páginas 146 e 147.

Da mesma forma podemos obter a linha externa do fóton (usando a expansão da pag 164):

$$A_\mu(\vec{p}) = \epsilon_\mu(\vec{p}) e^{i p x} |0\rangle$$

$$\langle \vec{p} | A_\mu = \epsilon_\mu^*(\vec{p}) e^{-i p x} \langle 0 |$$

na pg 164 escolhemos ϵ real, que é útil para polariz. transversa. Para polarizações horárias ou anti-horárias seria mais conveniente tomar ϵ complexo



(Mink.)

(eq. 198.1)

Em suma:

(198.2)

Regras de Feynman da QED - obtendo \mathcal{M}

- (1) desenhar todos os diagramas conectados e amputados que contribuem para o espalhamento
- (2) imponha conservação de momento em cada vértice (re-escrevendo os momentos internos)
- (3) escreva as funções dos propagadores (somente as linhas internas), conforme eqs. 197.4 e 197.5

(4) para cada vértice:

$$= -ie (\gamma^\nu)_{\nu\mu}$$

(5) para as linhas externas: eqs 146.1 e 198.1 (com atenção do sinal relativo entre diagramas iguais sob a troca de ponto de inserção de linhas fermiônicas externas)

(6) integre sobre cada momento não determinado: $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$

(7) divida cada termo pelo fator de simetria do diagrama correspondente

(8) multiplique por (-1) para cada loop fermiônico

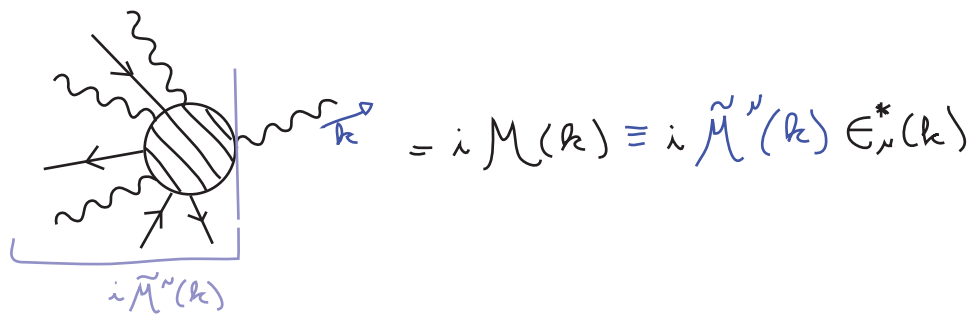
(9) rigorosamente deveríamos multiplicar por $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_\alpha)$ mas como estamos procurando

$$i \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_\alpha) = \left(\sum \text{diagramas conectados e amputados} \right) \times (\sqrt{Z})^{n+2} \quad (\text{eq. 194.1})$$

basta dividir o resultado do passo (8) por i para obter \mathcal{M} (veremos o que fazer com Z em TQCII, mas a nível árvore $Z = 1$)

Conhecendo o elemento de matriz, podemos usá-lo no cálculo da seção de choque, lembrando que na integração sobre os momentos finais é possível **haver uma dupla contagem no caso de partículas idênticas nos estados finais** (que nada tem a ver com os fatores de simetria levados em conta nas regras de Feynman)

Também é preciso notar, que assim como os férmions, os fótons carregam momento angular intrínseco, então conforme o espalhamento estudado é preciso somar ou tirar a média sobre as polarizações. O caso do fóton é um pouco mais complicado que o dos férmions, pois em geral temos polarizações não-físicas em ϵ_μ . Notemos, no entanto que cada fóton externo vai estar ligado em um diagrama mais geral da seguinte forma:



então, se estivermos somando sobre as polarizações a seção de choque incluirá:

$$\sum_{\epsilon} |M|^2 = \sum_{\epsilon} |\epsilon_\nu^*(k) \tilde{M}^\nu(k)|^2 = \sum_{\epsilon} \epsilon_\nu^* \epsilon_\nu \tilde{M}^\nu(k) M^{\nu*}(k)$$

podemos escolher uma direção para k e somar só sobre as polarizações físicas:

$$k^\mu = (k, 0, 0, k) \quad \sum_{\epsilon} \rightarrow \sum_{\epsilon=1,2} \leftrightarrow \begin{matrix} \epsilon_1^\mu = (0, 1, 0, 0) \\ \epsilon_2^\mu = (0, 0, 1, 0) \end{matrix}$$

$$\sum_{\epsilon} |M|^2 = |\tilde{M}^1(k)|^2 + |\tilde{M}^2(k)|^2 \quad (\text{eq. 199.1})$$

mas seria mais conveniente manter a invariância relativística explícita. Isso é possível lembrando da identidade de Ward (que será provada com mais rigor em campos II, veja Peskin sec 7.4):

$$k_\nu \tilde{M}^\nu(k) = 0$$

no referencial acima esta equação fica: $k \tilde{M}^0(k) - k \tilde{M}^3(k) = 0 \Rightarrow \tilde{M}^0(k) = \tilde{M}^3(k)$ (eq. 199.2)

logo:

$$\sum_{\epsilon} |M|^2 = |\tilde{M}^1(k)|^2 + |\tilde{M}^2(k)|^2 + |\tilde{M}^3(k)|^2 - |\tilde{M}^0(k)|^2$$

$$\sum_{\epsilon} \epsilon_\nu^* \epsilon_\nu \tilde{M}^\nu(k) \tilde{M}^{\nu*}(k) = -g_{\nu\nu} \tilde{M}^\nu(k) \tilde{M}^{\nu*}(k) \quad (\text{eq. 199.3})$$

que vale em qualquer referencial. Como não especificamos \tilde{M} a conclusão é que em geral podemos fazer a soma através da substituição:

$$\sum_{\epsilon} \epsilon_\nu^* \epsilon_\nu \rightarrow -g_{\nu\nu} \quad (\text{eq. 199.4})$$

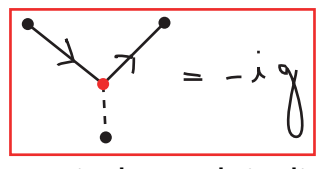
Processos não relativísticos

(Nastase 23; Peskin 4.7 e 4.8)

Usaremos agora o formalismo que desenvolvemos para obter alguns resultados para processos não relativísticos conhecidos. Assim poderemos ver como aplicá-lo ao mesmo tempo que provamos a sua concordância com resultados experimentais conhecidos.

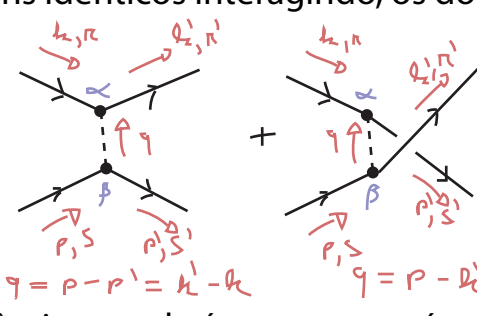
Potencial de Yukawa

Queremos ver se o potencial de Yukawa entre dois férmions é mesmo dado pela troca de um escalar, conforme a interação da pg 144 (teoria de Yukawa):

$$\mathcal{L}_Y^{(m)} = g \bar{\psi} \psi \phi$$


(Mink.)

Para dois férmions idênticos interagindo, os dois diagramas em menor ordem de g que contribuem são:

$$i\mathcal{M} =$$


$q = p - p' = k' - k$ $q = p - k = p' - k'$

Se não fossem idênticos poderíamos pegar só o primeiro, pois o momento estaria ligado a identidade do férmion, de fato é este caso que consideraremos. No limite não relativístico temos:

$$p \simeq (m, \vec{p}) \quad p' \simeq (m, \vec{p}') \quad k \simeq (m, \vec{k}) \quad k' \simeq (m, \vec{k}')$$

$$(p - p')^2 \simeq -|\vec{p} - \vec{p}'|^2 \ll 0 \quad (p^0 - p'^0 \simeq m - m)$$

$$u^s(p) \simeq \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \quad \xi^s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{u}^{s'}(p') u^s(p) = u^{s'} \gamma^0 u^s = m \begin{pmatrix} \xi^{s'+} & \xi^{s'+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = 2m \delta^{s's}$$

Isso nos permite escrever ambos os diagramas (lembre-se que só usaremos o primeiro):

$$i\mathcal{M} = (-ig) \bar{u}^{s'}(p')_\beta u^s(p)_\beta \frac{i}{(p-p')^2 - m_\phi^2} (-ig) \bar{u}^{s'}(k')_\alpha u^s(k)_\alpha$$

$$- (-ig) \bar{u}^{s'}(p')_\alpha u^s(k)_\alpha \frac{i}{(p-k')^2 - m_\phi^2} (-ig) \bar{u}^{s'}(k')_\beta u^s(p)_\beta$$

↑ sinal da troca de férmions no estado final

(eq. 200.1)

O que quer dizer que, para férmions distinguíveis no limite não relativístico:

$$i\mathcal{M} \simeq \frac{ig^2}{|\vec{p} - \vec{p}'|^2 + m_\phi^2} (2m \delta^{s's}) (2m \delta^{r'r})$$

(eq. 200.2)

Podemos comparar este resultado com a aproximação de Born para espalhamentos em mecânica quântica:

$$\langle \vec{p}' | i T | \vec{p} \rangle = -i V(\vec{q}) 2\pi \delta(E_{p'} - E_p) \quad (\text{eq. 201.1})$$

$$\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p} \quad \text{momento transferido}$$

que é válido para potenciais fracos (o que condiz com nossa aproximação perturbativa - estamos pegando só os diagramas em ordem mais baixa [LO]). Assumimos também que a troca de momento é pequena, e que o centro espalhador é pesado o suficiente para absorver este momento sem ser espalhado. Nosso resultado é mais geral que isso (vale para troca de momento arbitrário), mas deve valer também neste limite em particular.

A comparação é delicada, pois usamos normalizações diferentes do que usualmente se faz em mecânica quântica (para obter objetos relativisticamente invariantes). O fator de $2m$ acompanhando cada linha fermiônica vem desta diferença de normalização, então devemos ignorá-lo na comparação.

Outra sutileza vem do fato de que, como estamos assumindo que o momento do centro espalhador não muda e temos só uma partícula inicial e uma final ($1 \rightarrow 1$), teremos:

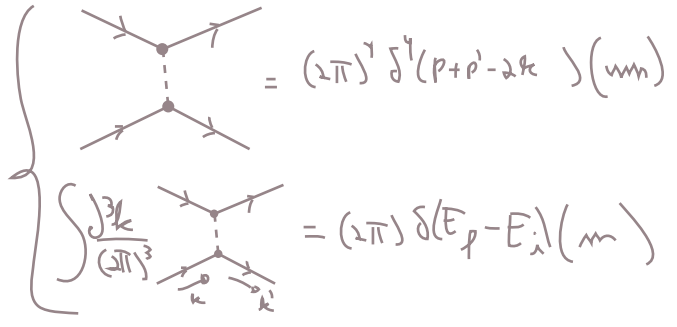
$$\vec{p}^0 \neq \vec{p}' \quad \text{ao passo que} \quad E_{p'} = E_p \quad (|\vec{p}'| = |\vec{p}|)$$

Nesse caso, definimos:

$$\langle \vec{p}' | i T | \vec{p} \rangle = i \mathcal{M} (2\pi) \delta(E_{p'} - E_p) \quad (\text{eq. 201.2})$$

(outra forma de ver isso é notar que, como não estamos observando o momento do alvo, temos que integrar sobre ele

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{p}' - \vec{k} - \vec{k}')$$



que absorve a delta nos momentos, deixando apenas a delta na energia:)

Comparando 201.2 com 201.1 obtemos: $V(\vec{q}) = -\mathcal{M}$

e como (de novo, por conta da aproximação de Born), não há inversões de spin ($s' = s, r' = r$):

$$V(\vec{q}) = \frac{-g^2}{|\vec{q}|^2 + m_\phi^2} \quad (\text{eq. 201.3})$$

Para obter este potencial no espaço das posições fazemos:

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-g^2}{|\vec{q}|^2 + m_\phi^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} = \frac{-g^2}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty q^2 dq \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} \frac{1}{q^2 + m_\phi^2} =$$

$$= \frac{-g^2}{4\pi^2 i r} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q e^{iqr}}{q^2 + m_\phi^2}$$

$r \equiv |\vec{x}|$
 $q \equiv |\vec{q}|$

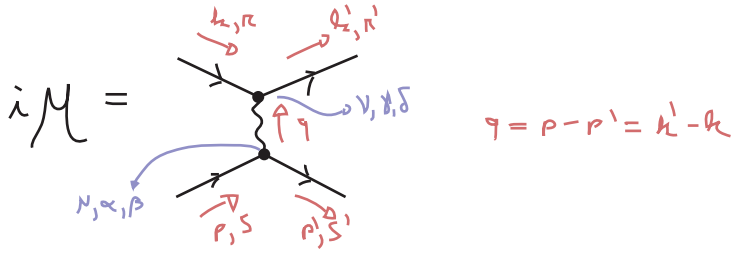
$$\int_0^\pi \sin(\theta) d\theta e^{iqr \cos \theta} = \int_0^1 d(\cos \theta) e^{iqr \cos \theta} = \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr}$$

$$V(\vec{x}) = \frac{-g^2}{4\pi^2 i r} (2\pi i) \left(\frac{i m e^{-m_\phi r}}{2 i m} \right) = \frac{-g^2}{4\pi r} e^{-m_\phi r} \quad (\text{eq. 201.4})$$

que é o potencial atrativo de Yukawa.

Potencial de Coulomb

Seguimos a mesma lógica acima, agora temos o diagrama:



$$i\mathcal{M} = \bar{u}^s(p')_\alpha (-ie\gamma_{\alpha\mu}^N) u^s(p)_\beta \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{(p-p')^2} \bar{u}^{\pi'}(k')_\gamma (-ie\gamma_{\gamma\delta}^N) u^\pi(k)_\delta$$

No limite não relativístico:

$$\bar{u}^s(p') \gamma^0 u^s(p) = m \begin{pmatrix} \xi^{s'+} & \xi^{s+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = 2m \delta^{ss'}$$

$$\bar{u}^s(p') \gamma^i u^s(p) = m \begin{pmatrix} \xi^{s'+} & \xi^{s+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = 0$$

e obtemos:

$$i\mathcal{M} = \frac{-ie^2 \gamma_{00}}{|\vec{p}-\vec{p}'|^2} (2m \delta^{ss'}) (2m \delta^{\pi\pi'}) = -\frac{ie^2}{|\vec{p}'-\vec{p}|^2} (2m \delta^{ss'}) (2m \delta^{\pi\pi'})$$

$$V(q) = + \frac{e^2}{|\vec{q}|^2} \quad (\text{eq. 202.1})$$

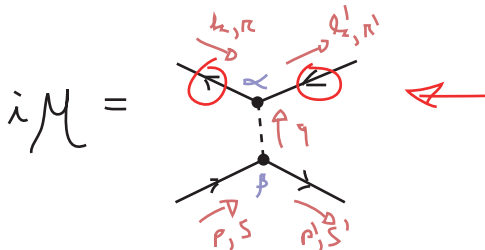
que é muito parecida com o potencial de Yukawa da eq. 201.3 (salvo o sinal e o fato de não termos massa). Portanto ao invés de fazer a transformada de Fourier de novo, basta inverter o sinal e fazer $m = 0$ em 201.4:

$$V(\lambda) = \frac{\pm e^2}{4\pi\lambda} \equiv \frac{\alpha}{\lambda} \quad (\text{eq. 202.2})$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$$

Potencial Partícula-Antipartícula

O que acontece se substituirmos um dos férmions por sua antipartícula?



$$\bar{u}^{\pi'}(k') u^\pi(k) \rightarrow \bar{v}^{\pi'}(k') v^\pi(k) = m \begin{pmatrix} \xi^{+\pi'} & -\xi^{+\pi'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{\pi'} \\ -\xi^{\pi'} \end{pmatrix} = -2m \delta^{\pi\pi'}$$

no entanto usando: $|p, k\rangle = a_p^+ b_k^+ |0\rangle$ $\langle p', k'| = \langle 0| b_k a_p$ mudança de sinal

$$\langle p', k' | \bar{\Psi} \Psi \bar{\Psi} \Psi | p, k \rangle = \langle 0 | b_k a_p (\bar{\Psi} \Psi)(z_2) (\bar{\Psi} \Psi)(z_1) a_p^+ b_k^+ | 0 \rangle$$

Para "desentrelaçar" as contrações preciso fazer um número ímpar de permutações, que não tínhamos no caso só com partículas:

$$\langle 0 | a_k a_p (\bar{\psi} \psi)(y_2) (\bar{\psi} \psi)(y_1) a_p^+ a_k^+ | 0 \rangle$$

o que produz mais um sinal. A conclusão é que o potencial de Yukawa é atrativo mesmo neste caso.

No caso do potencial de Coulomb também temos este segundo fator (-1) advindo da ordem dos operadores fermiônicos, no entanto a troca de "u" por "v" resulta em:

$$\bar{u}^s(p') \not{\epsilon} u^s(p) = 2m \delta^{ss'} \Rightarrow \bar{v}^s(k) \not{\epsilon} v^{s'}(k) = m (\not{\epsilon}^+ - \not{\epsilon}^-) \begin{pmatrix} \not{\epsilon}^+ \\ -\not{\epsilon}^- \end{pmatrix} = 2m \delta^{ss'}$$

ou seja, não há mudança aqui. Logo temos um sinal total de diferença, de forma que o potencial entre partícula e anti-partícula é atrativo.

Espalhamento Rutherford

Vamos calcular agora a seção de choque de espalhamento de um elétron por um campo elétrico gerado por um núcleo atômico (não estamos considerando o núcleo dinamicamente, assumimos que ele é infinitamente mais pesado que o elétron e seu único papel vai ser produzir o campo). A Hamiltoniana de interação é:

$$H_I = \int d^3x e \bar{\psi} \not{A} \psi$$

A primeira contribuição perturbativa para a parte não trivial da matriz S, de ordem e, é dada por (eq. 190.2):

$$\langle p' | iT | p \rangle = \langle p' | T \left\{ e^{-i \int H_I dt} \right\} | p \rangle = \dots + \langle p' | T \left\{ -i \int d^4x \bar{\psi} e \not{A} \psi \right\} | p \rangle + \dots =$$

Note que não tenho fótons no estado inicial nem no final, e não estou contraindo A_μ com nada (se tratasse A como operador isto daria zero) - estamos tratando A como um campo clássico

$$\stackrel{\mathcal{O}(e)}{=} -i e \bar{u}(p') \not{\epsilon} u(p) \int d^4x e^{-i p' x} e^{+i p x} A_\mu(x) = -i e \bar{u}(p') \not{\epsilon} u(p) A_\mu(p' - p) \quad (\text{eq. 203.1})$$

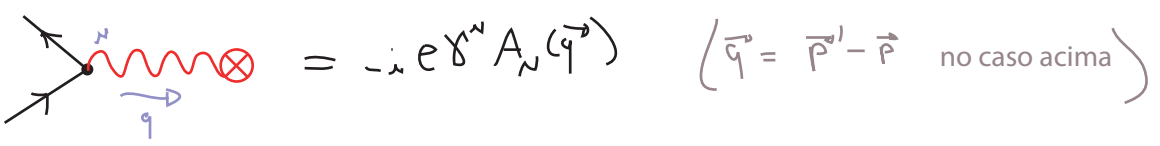
Se tomarmos a função $A_\mu(x)$ como independente do tempo, a sua transformada de Fourier vai ter uma delta de Dirac na energia:

$$A_\mu(p' - p) = A_\mu(\vec{p}' - \vec{p}) 2\pi \delta(\epsilon_{p'} - \epsilon_p)$$

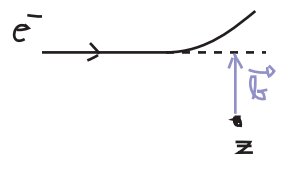
E, assim como na eq. 201.2, temos:

$$\langle p' | iT | p \rangle = i M(2\pi) \delta(\epsilon_{p'} - \epsilon_p)$$

Vemos que o efeito do campo externo pode ser codificado em uma nova regra de Feynman:



Queremos então calcular o espalhamento:



Que é um espalhamento $2 \rightarrow 2$ onde, no entanto, estamos olhando apenas uma das partículas. Assim como antes, temos:

$$dP(i \rightarrow f) = \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} |\langle p_f | \phi_A \rangle_{in}|^2$$

$$d\sigma = \int d^3 \vec{k} dP(\vec{k}) = \int d^3 k \underbrace{\frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f}}_{(2\pi)^{-6}} \underbrace{\left(\frac{d^3 k_i \phi(k_i)}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_i}} \right)}_{(2\pi)^{-6}} \underbrace{\left(\frac{d^3 \bar{k}_i \phi(\bar{k}_i)}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_i}} \right)}_{(2\pi)^{-6}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_i)} \times \langle p_f | k_i \rangle_{in} \langle p_f | \bar{k}_i \rangle_{in}^*$$

Dado que: $\langle p_f | k_i \rangle_{in} = i \mathcal{M} 2\pi \delta(E_f - E_i)$
 $\langle p_f | \bar{k}_i \rangle_{in}^* = -i \mathcal{M}^* 2\pi \delta(E_f - E_i)$

$$\int d^3 k e^{i\vec{k} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_i)} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_i - \vec{k}_i)$$

$$\delta(E_f - E_i) \delta(E_f - E_i) = \delta(E_f - E_i) \frac{\delta(\vec{k}_i^z - k_i^z)}{\left| \frac{\vec{k}_i^z}{E_i} \right|}$$

($\times \mathcal{M}(p_i \rightarrow p_f)$)

$$\int \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} 2\pi \delta(E_f - E_i) = d\Omega \int \frac{dp_r p_r^2}{8\pi^2 \cancel{E_f} \cancel{p_r}} \delta(p_f - p_i) = \frac{d\Omega}{8\pi} \int dp_r p_r \delta(p_f - p_i)$$

Mais uma vez assumimos que: $|\phi(k_i)|^2 = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_i - \vec{p}_i)$ cancela o que ainda tinha de potência de 2π por aí

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{v_i E_i} \int dp_r p_r \delta(p_f - p_i) |\mathcal{M}(p_i \rightarrow p_f)|^2$$

(eq. 204.1)

$\left| \frac{k_i^z}{E_i} \right| (\sqrt{2E_i})^2 \rightarrow |k_i^z|$ $E_i \approx m$

No caso de um núcleo de carga Z e teremos: $A_0(\vec{r}) = + \frac{Ze}{4\pi r} \longrightarrow A_0(\vec{q}) = \frac{Ze}{|\vec{q}|^2}$

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}(p_f) \gamma^\mu u(p_i) A_\mu(\vec{p}_f - \vec{p}_i) = -ie^2 \frac{\bar{u}(p_f) \gamma^0 u(p_i)}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^2}$$

No limite não relativístico, como já vimos:

$$\bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 u^s(p_i) = 2m \delta^{ss'}$$

$$\bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 u^s(p_i) = \bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 (v^0) u^s(p_i) = \bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 u^s(p_i) = \bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 u^s(p_i)$$

$$\therefore |iM|^2 = Z^2 e^4 \frac{4m^2 \delta^{ss'} \delta^{s's'}}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4} = Z^2 e^4 \frac{\bar{u}^{s'}(p_f) \gamma^0 u^s(p_i) \bar{u}^{s'}(p_i) \gamma^0 u^s(p_f)}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4}$$

Lembrando que temos que tirar a média sobre spins iniciais e somar sobre os finais (já que não estamos considerando feixes polarizados nem observando a polarização final):

$$\frac{1}{2} \sum_{ss'} |M|^2 = \frac{Z^2 e^4 m^2}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{ss'} \delta^{ss'} \delta^{s's'} = 1$$

$$|\vec{p}_f + \vec{p}_i - 2p_i \cos \theta| = \sqrt{2p_i^2 - 2p_i^2 \cos \theta} = 2p_i \sin(\theta/2)$$

(eq. 204.1)

$$\delta(p_f - p_i) \Rightarrow |\vec{p}_f| = |\vec{p}_i| \Rightarrow |\vec{p}_f - \vec{p}_i| = 2p_i \sin(\theta/2) \simeq 2m v_i \sin(\theta/2)$$

Enfim:

(eq. 204.1) →

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{v_i E_i} \frac{m v_i}{m v_i} \frac{Z^2 e^4 m^2}{(2m v_i \sin(\theta/2))^4} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4m^2 v_i^4 \sin^4(\theta/2)}$$

(eq. 205.1)

que é o resultado obtido por Rutherford em 1911.

Espalhamento $e^+e^- \rightarrow \ell \bar{\ell}$ despolarizado

(Nastase 24; Peskin 5.1)

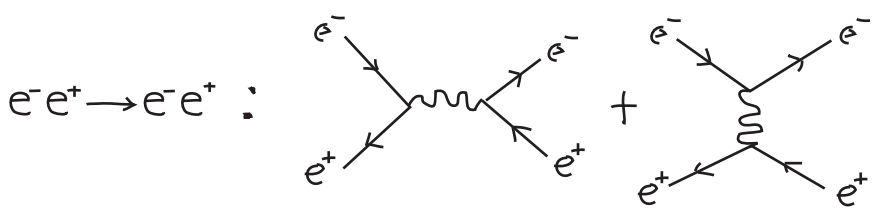
Agora que já reproduzimos alguns resultados clássicos conhecidos vamos atacar um espalhamento novo, a aniquilação elétron-pósitron em léptons, que é intrinsecamente quântica-relativística.

$$\text{Lépton: } \ell \equiv e^-, \mu^-, \tau^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$$

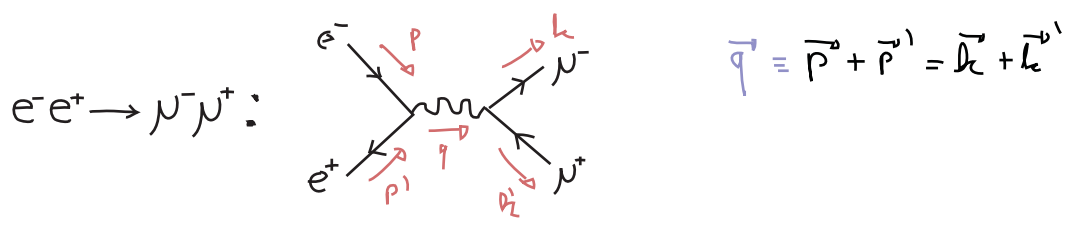
$$\bar{\ell} \equiv e^+, \mu^+, \tau^+, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$$

(eq. 205.2)

Se consideramos apenas a QED podemos esquecer dos neutrinos (já que não tem carga elétrica nenhum vértice nesta teoria os envolve). O caso em que $\ell = e^-$ é chamado de Espalhamento Bhabha e tem dois diagramas (ordem e^2):



No caso em que $l = \mu, \tau$ temos apenas o primeiro diagrama. Realizaremos o cálculo para o muon, mas a única coisa que muda para o τ é a massa.



Note que para criar o par de léptons final eu preciso ter uma energia mínima inicial:

$$E_{cm} > 2m_l \quad (\text{eq. 206.1})$$

o que significa:

{	energia inicial	estados finais possíveis (ignorando a produção de quarks)
	$E_{cm} < 2m_\mu$	$e^- e^+$
	$2m_\mu \leq E_{cm} < 2m_\tau$	$e^- e^+; \mu^- \mu^+$
	$E_{cm} \geq 2m_\tau$	$e^- e^+; \mu^- \mu^+; \tau^- \tau^+$

Usando as regras de Feynman para o diagrama acima obtemos:

$$i \mathcal{M} = \bar{v}^{s'}(p') (-ie \gamma^\mu) u^s(p) \left(\frac{-i g^{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon} \right) \bar{u}^r(k) (-ie \gamma^\nu) v^{r'}(k') =$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$ não importa aqui porque não estamos integrando em q e, por conservação de momento, $q^2 \neq 0$

$$= + \frac{i e^2}{q^2} (\bar{v}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p)) (\bar{u}^r(k) \gamma_\mu v^{r'}(k'))$$

$$(\bar{v} \gamma^\mu u)^* = (\bar{v} \gamma^\mu u)^\dagger = u^\dagger \gamma^{\mu\dagger} (v^\dagger \gamma^0)^\dagger = u^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \underbrace{\gamma^0}_{\gamma^{0\dagger} = \gamma^0} \underbrace{v}_{\gamma^{0\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0} = \bar{u} \gamma^\mu v$$

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} (\bar{v}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p)) (\bar{u}^r(k) \gamma_\mu v^{r'}(k')) (\bar{v}^{r'}(k') \gamma_\nu u^r(k)) (\bar{u}^s(p) \gamma^\nu v^{s'}(p'))$$

(eq. 206.2)

Se não estamos observando as polarizações devemos tirar a média sobre as duas polarizações iniciais e somamos sobre as finais, obtendo a chamada **seção de choque despolarizada**. Estas somas vão agir sobre os u 's e v 's (eqs. 148.1 e 148.2):

$$\sum_s u_i^s(p) \bar{u}_j^s(p) = \not{p}_{ij} + m \hat{1}_{ij} \quad \sum_s v_i^s(p) \bar{v}_j^s(p) = \not{p}_{ij} - m \hat{1}_{ij}$$

Explicitando os índices spinoriais em 206.2 temos:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4^4} (\bar{u}_i^{s'}(p') \gamma_{ij}^\mu u_j^s(p)) (\bar{u}_k^\pi(k) \gamma_{kl}^\nu u_l^{\pi'}(k')) (\bar{u}_m^{\pi'}(k') \gamma_{mn}^\rho u_n^\pi(k)) (\bar{u}_o^s(p) \gamma_{op}^\sigma u_p^{s'}(p'))$$

$$\frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{2} \sum_{s'} \sum_\pi \sum_{\pi'} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4^4} \gamma_{ij}^\mu \gamma_{kl}^\nu \gamma_{mn}^\rho \gamma_{op}^\sigma (\not{k}' - m_\mu)_{lm} (\not{k} + m_\nu)_{nk} (\not{k} + m_\rho)_{jo} (\not{k}' - m_\sigma)_{pi}$$

$\text{Tr}[\gamma_\mu (\not{k}' - m_\mu) \gamma_\nu (\not{k} + m_\nu)]$ $\text{Tr}[\gamma^\mu (\not{k} + m_\mu) \gamma^\nu (\not{k}' - m_\nu)]$

estes traços não são coincidência, notem que aparece um deles por linha fermiônica e isto vai sempre acontecer.

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4^4} \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{k}' - m_\mu) \gamma_\nu (\not{k} + m_\nu)] \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{k} + m_\mu) \gamma^\nu (\not{k}' - m_\nu)] \quad (\text{eq. 207.1})$$

Para calcular os traços acima precisamos desenvolver um certo arsenal de identidades envolvendo matrizes de Dirac (note que há até quatro delas em cada traço). Fazemos uma pausa no presente cálculo para desenvolver este arsenal.

Identidades com Matrizes de Dirac

Dado que: $(\gamma^5)^2 = 1$
 $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ } propriedades independentes de representação

$$\text{Tr}[\gamma^\mu] = \text{Tr}[(\gamma^5)^2 \gamma^\mu] = -\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5] = -\text{Tr}[\gamma^\mu] = 0$$

CICLIZAR DE

$$\text{Tr}[\gamma^5] = \text{Tr}[\pm (\gamma^\mu)^2 \gamma^5] = \text{Tr}[\pm \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\mu] = -\text{Tr}[\gamma^5] = 0$$

depende de repr. e de $\mu \rightarrow (\gamma^\mu)^2 = \pm 1$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu] = \text{Tr}[\gamma^5] = 0 \quad (\text{eq. 207.2})$$

Note que o mesmo que fizemos para provar as identidades acima poderia ser usado para provar:

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \dots \gamma^p] = 0 \quad (\text{eq. 207.3})$$

ímpar

$$\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^5 \dots \gamma^5] = \text{Tr}[\gamma^5] = 0 \quad (\text{eq. 207.4})$$

$$\boxed{\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu]} = \text{Tr} \left[\frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu + \frac{1}{2} \overset{\text{CICL.}}{\gamma^\nu \gamma^\mu} \right] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\underbrace{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}_{2g^{\mu\nu} \cdot \hat{1}_{4 \times 4}} \right] = 4g^{\mu\nu} \quad (\text{eq. 208.1})$$

De uma forma geral, o que fazemos com um produto de matrizes de Dirac é expandir na base:

$$\mathcal{V}_{\mathbb{F}} = \{ \hat{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \gamma^{\mu\nu} \}$$

e vale: $\boxed{\mathcal{V}_{\mathbb{F}} \neq \hat{1} \leftrightarrow \text{Tr}[\mathcal{V}_{\mathbb{F}}] = 0}$ (eq. 208.2)

Já provamos isso para o segundo e o terceiro e: $\text{Tr}[\underbrace{\gamma^\mu \gamma^5}_{(-1)}] = -\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^5] = 0$

$$\text{Tr}[\gamma^{\mu\nu}] \leftarrow \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu] = 4g^{\mu\nu} - 4g^{\nu\mu} = 0$$

Produtos mais complicados podem ser expandidos na base usando:

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu\nu} \gamma^5 &= -\frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_{\rho\sigma} \\ \gamma^{\mu\nu\rho} &= -i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \\ \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_5 &= -i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \\ \gamma^{\mu\nu\rho\sigma} &= i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \end{aligned} \quad (\text{eq. 208.3})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\underbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu}_{2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu} \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= \text{Tr}[(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \underbrace{\gamma^\rho \gamma^\sigma}_{g^{\rho\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\rho}] = \\ &= \text{Tr}[2g^{\mu\nu} \underbrace{\gamma^\rho \gamma^\sigma}_{\text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4g^{\rho\sigma}} - 2g^{\mu\rho} \gamma^\nu \gamma^\sigma + 2g^{\mu\sigma} \gamma^\nu \gamma^\rho] - \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] \\ 2\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= 2[4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}] \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma]} = 4[g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}] \quad (\text{eq. 208.4})$$

Como $\gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$

$$\boxed{\text{Tr}[\underbrace{\gamma^\mu \dots \gamma^\nu}_{\text{ÍMPAR}} \gamma^5]} = 0 \quad (\text{eq. 208.4})$$

Já o produto com 2 γ_s :

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = \text{Tr} [\underbrace{\pm (\gamma^\alpha)^2}_{\substack{\text{cicl} \\ \alpha \neq \mu; \alpha \neq \nu}} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = -\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0 \quad (\text{eq. 209.1})$$

o que não funciona para 4 γ_s , caso sejam as 4 diferentes, uma vez que já não existe uma quinta para inserir como identidade.

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5]$$

$\{\mu, \nu, \alpha, \beta\} = \text{alguma perm. de } \{0, 1, 2, 3\}$ \leftarrow antissim sobre a troca de quaisquer dois índices

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5] \propto \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left(\text{para achar a constante de proporcionalidade basta escolher uma das permutações, ex: } \{\mu, \nu, \alpha, \beta\} = \{0, 1, 2, 3\} \right)$$

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5] = 4i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (\text{eq. 209.2})$$

Também é útil conhecer as contrações entre os ϵ_s :

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= 4! \epsilon^{0123} \epsilon_{0123} = -24 \\ \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} &= 3! \delta_\nu^\mu \epsilon^{0123} \epsilon_{0123} = -6 \delta_\nu^\mu \\ \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} &= 2! (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu) \epsilon^{0123} \epsilon_{0123} = -2 (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu) \end{aligned}$$

e notar que é possível inverter a ordem das γ_s no traço:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \dots] &= \text{Tr} [C \gamma^\mu C^{-1} C \gamma^\nu C^{-1} \dots \gamma^\rho C^{-1}] = (-1)^n \text{Tr} [\gamma^{\mu T} \gamma^{\nu T} \dots] = \\ &= (-1)^n \text{Tr} [(\dots \gamma^\nu \gamma^\mu)^T] = (-1)^n \text{Tr} [\dots \gamma^\nu \gamma^\mu] \end{aligned}$$

$\hat{1} = C^{-1}C$
 $C \equiv \gamma^0 \gamma^3$
 $C \gamma^\nu C^{-1} = -\gamma^{\nu T}$

\rightarrow se n é ímpar o traço é zero.

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \dots] = \text{Tr} [\dots \gamma^\nu \gamma^\mu] \quad (\text{eq. 209.3})$$

Finalmente, listamos algumas contrações entre γ_s que nos permitem simplificar o argumento do traço antes de fazê-lo:

$$g_{\mu\nu} (\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}) \Rightarrow \gamma^\mu \gamma_\mu = \delta^\mu_\mu = 4 \quad (\text{eq. 209.4})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu + 2g^{\mu\nu} \delta_\mu = -2\delta^\nu \quad (\text{eq. 209.5})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\nu = -\gamma^\nu \underbrace{\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\nu}_{-2\gamma^\rho} + 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma_\nu = 2\gamma^\nu \gamma^\rho + 2\gamma^\rho \gamma^\nu = 4g^{\nu\rho} \quad (\text{eq. 210.1})$$

(segundo a mesma lógica)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\nu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\mu \quad (\text{eq. 210.2})$$



Voltando ao cálculo da seção de choque, podemos simplificar bastante a equação 207.1

$$\begin{aligned} (\text{eq. 207.1}) \rightarrow \frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[\underbrace{\gamma_\mu (\not{k}' - m_e) \gamma_\nu (\not{k} + m_e)}_{\text{do quatro termos aqui, apenas dois tem o traço não nulo:}}] \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu (\not{p}' - m_e)] = \\ &\sim \gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu \not{k} \quad \& \quad \sim m_e^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \end{aligned}$$

logo:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{k}' - m_e) \gamma_\nu (\not{k} + m_e)] &= +k'^\alpha \not{\epsilon}^\beta \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta] - m_e^2 \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] = \\ &= 4k'^\alpha k^\beta (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu}) - 4m_e^2 g_{\mu\nu} = \\ &= 4(+k'_\mu k_\nu - k' \cdot k g_{\mu\nu} + k_\mu k'_\nu - m_e^2 g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

da mesma forma:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu (\not{p}' - m_e)] &= 4(+p^\mu p'^\nu + p'^\mu p^\nu - p \cdot p' g^{\mu\nu} - \underbrace{m_e^2 g^{\mu\nu}}_{\text{como os momentos são da}} \\ &\quad \text{ordem de } m_e \text{ e } \frac{m_e}{m_e} \sim \frac{1}{200} \\ &\quad \text{podemos desprezar este termo} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{4e^4}{q^4} \left[k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu - g_{\mu\nu} (m_e^2 + k' \cdot k) \right] \left[p^\mu p'^\nu + p'^\mu p^\nu - p \cdot p' g^{\mu\nu} \right] = \\ &= \frac{4e^4}{q^4} \left[2k' \cdot p k \cdot p' + 2k' \cdot p' k \cdot p - \cancel{2k' \cdot k p \cdot p'} - (m_e^2 + \cancel{k' \cdot k}) (\underbrace{2p \cdot p' - 4p \cdot p'}_{-2p \cdot p'}) \right] = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} (k' \cdot p k \cdot p' + k' \cdot p' k \cdot p + m_e^2 p \cdot p') \quad (\text{eq. 210.3})$$

Esta expressão pode ser calculada em qualquer referencial, tomemos o do centro de massa.

Seção de Choque no ref. do CM

Dado que: $2E_e > 2m_\mu \sim 400 m_e$ estamos falando de elétrons ultra-relativísticos e podemos desprezar sua massa, ou seja, no centro de massa:

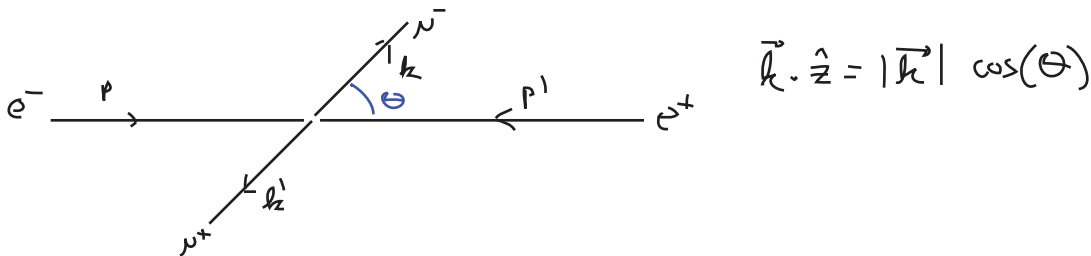
$$p = (E, E\hat{z}) \quad p' = (E, -E\hat{z})$$

Como a massa do muon e do anti-muon são iguais: $E_\mu = E_e = E$

(conserv. energia) $2E = E_{\mu^-} + E_{\mu^+}$ $m_{\mu^-} = m_{\mu^+}$
 (conserv. momento) $0 = \vec{k} + \vec{k}' \Rightarrow |\vec{k}| = |\vec{k}'| \Rightarrow E_{\mu^-} = E_{\mu^+}$ } $2E_\mu = 2E$

Então: $k = (E, \vec{k}) \quad k' = (E, -\vec{k})$
 $|\vec{k}| = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$

Definimos então o ângulo entre os elétrons e os muons:



$$q^2 = (p + p')^2 = \underbrace{p_\mu p^\mu}_0 + \underbrace{p'_\mu p'^\mu}_{\sim m_e \rightarrow 0} + 2 p_\mu p'^\mu = 4E^2 \quad (\text{eq. 211.1})$$

$$p_\mu p'^\mu = (E^2 + E^2) = +2E^2 \quad (\text{eq. 211.2})$$

$$\begin{aligned} p \cdot k &= p' \cdot k' = +E^2 - \vec{k} \cdot (E\hat{z}) = +E^2 - E|\vec{k}|\cos\theta \\ p \cdot k' &= p' \cdot k = +E^2 + \vec{k} \cdot (E\hat{z}) = +E^2 + E|\vec{k}|\cos\theta \end{aligned} \quad (\text{eq. 211.3})$$

Voltando com estas identidades em 210.3, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{8e^4}{(4E)^4} \left[\underbrace{(+E^2 + E|\vec{k}|\cos\theta)^2}_{E^2 (E + |\vec{k}|\cos\theta)^2} + \underbrace{(+E^2 - E|\vec{k}|\cos\theta)^2}_{E^2 (E - |\vec{k}|\cos\theta)^2} + m_\mu^2 (2E^2) \right] = \\ &= \frac{e^4}{4E^2} \left[\underbrace{(E + |\vec{k}|\cos\theta)^2 + (E - |\vec{k}|\cos\theta)^2}_{2E^2 + 2|\vec{k}|^2 \cos^2\theta} + 2m_\mu^2 \right] = \\ &= e^4 \left[1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2\theta \right] \quad (\text{eq. 211.4}) \end{aligned}$$

Voltaremos com este resultado na seção de choque para dois corpos (eq. 78.4):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{2\bar{E}_A 2\bar{E}_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\bar{P}_1|}{4\pi^2 \bar{E}_{cm}} \underbrace{|\mathcal{M}(P_A, P_B \rightarrow P_1, P_2)|^2}_{\frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2}$$

no nosso caso: $P_A = p \quad P_B = p'$ $P_1 = k \quad P_2 = k'$

$$2E_A = 2E_B = 2E = E_{cm}$$

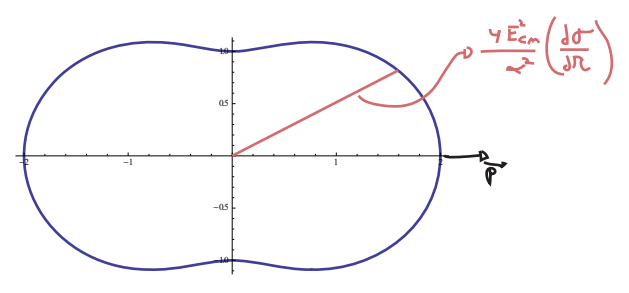
$$\vec{v}_A = \frac{\vec{p}}{E} = \hat{z} \quad \vec{v}_B = \frac{\vec{p}'}{E} = -\hat{z} \Rightarrow |\vec{v}_A - \vec{v}_B| = 2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{2 E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}|}{4\pi^2 2E} \left[1 + \frac{m_N^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_N^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right]$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_N^2}{E^2}} \left[1 + \frac{m_N^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_N^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] \quad (\text{eq. 212.1})$$

No limite ultra-relativístico $E \gg m_N$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm, \text{ULTRAREL}} = \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (\text{eq. 212.2})$$



A seção de choque total é encontrada integrando-se sobre o ângulo sólido:

$$d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\phi = 2\pi \sin(\theta) d\theta = -2\pi d(\cos\theta) \quad \int_{-1}^1 d(\cos\theta) = 2$$

$0 < \theta < \pi \quad 1 < \cos\theta < -1$

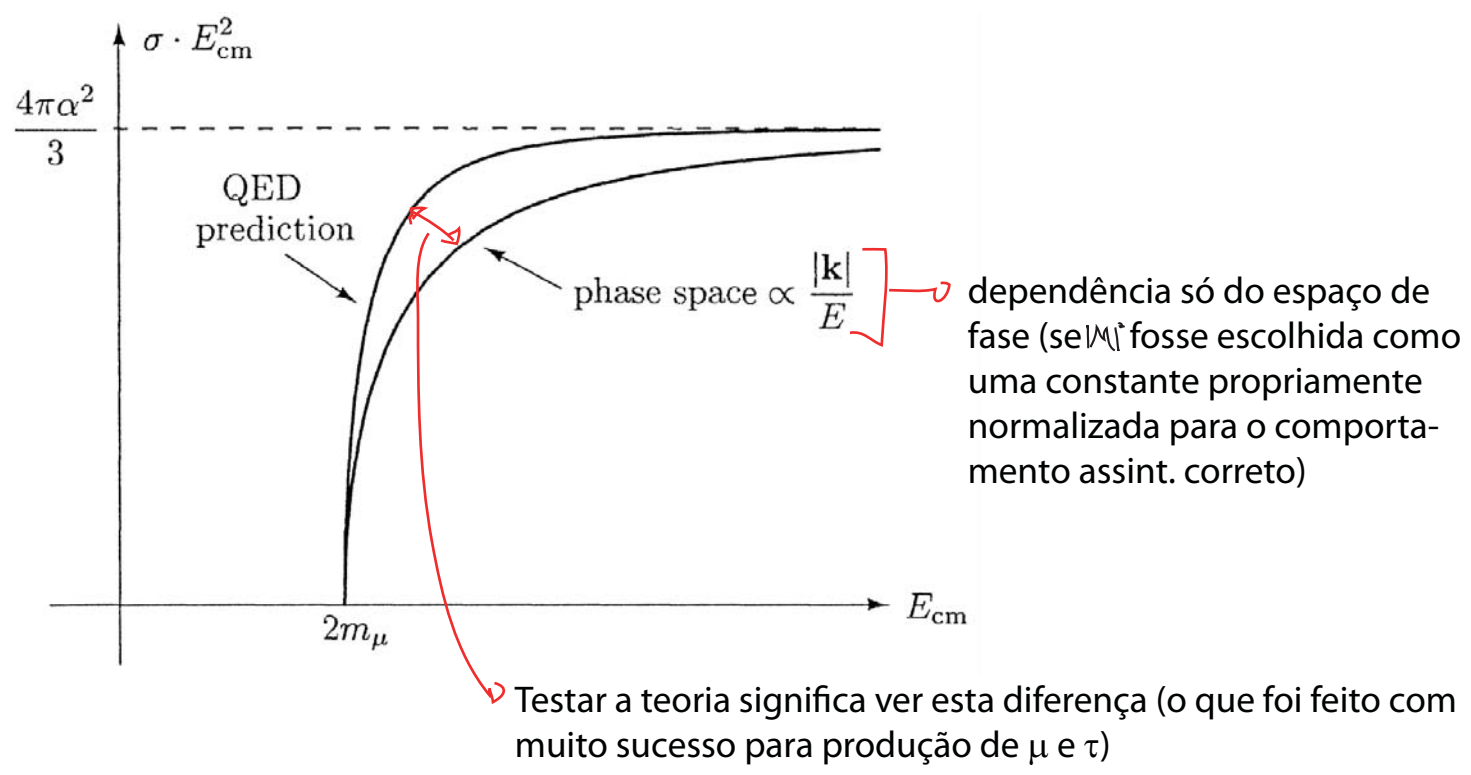
$$\int_{-1}^1 d(\cos\theta) \cos^2\theta = \frac{2}{3}$$

$$\sigma_{TOT} = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_N^2}{E^2}} \left[1 + \frac{m_N^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_N^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] =$$

$$= \frac{\pi \alpha^2}{2E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_N^2}{E^2}} \left[1 + \frac{m_N^2}{E^2} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{m_N^2}{E^2}\right) \right] = \frac{4\pi \alpha^2}{3E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_N^2}{E^2}} \left[1 + \frac{m_N^2}{2E^2} \right] \quad (\text{eq. 212.3})$$

$\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \frac{m_N^2}{E^2}$

Que, no limite ultra-relativístico fica: $\sigma_{TOT} = \frac{4\pi \alpha^2}{3E_{cm}^2} \quad (\text{eq. 212.4})$



Seção de Choque polarizada e Crossing Symmetry

(Nastase 25; Peskin 5.2-5.3)

Para obter um entendimento um pouco melhor da dependência angular em 212.2 exploraremos novamente o espalhamento $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$, analisando agora as polarizações dos estados. Por simplicidade, tomaremos o limite ultra-relativístico onde: $m_e, m_\mu \rightarrow 0$

Lembrando das definições dos projetores de quiralidade feitas na pg 125-126 e que, para férmions sem massa, temos teorias separadas para ψ_L e ψ_R , notamos que estes são também autoestados de **helicidade**.

$$h \equiv \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$$

Para estudar polarizações precisamos definir uma base, e nada mais natural que usar as projeções do spin na direção do movimento da partícula, usando portanto estes autoestados de helicidade.

Notemos que:

$$\overline{\psi_L} \equiv \overline{\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\psi\right)} = \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\psi\right)^\dagger \gamma_0 = \psi^\dagger \frac{1-\gamma_5}{2} \gamma_0 = \overline{\psi} \frac{1+\gamma_5}{2} = \overline{\psi} P_R \equiv (\overline{\psi})_R$$

$\psi_L = P_L \psi = \frac{1-\gamma_5}{2} \psi$

$P_L \gamma_\mu = \gamma_\mu P_R$
 $P_R \gamma_\mu = \gamma_\mu P_L$

$(\overline{\psi})_R (\psi)_L = \overline{\psi} P_R P_L \psi = 0$

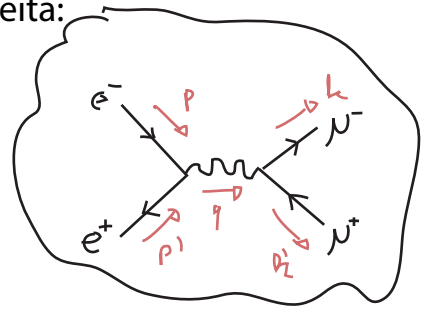
Considere os produtos de spinores aparecendo na equação 206.2 (que queremos calcular), por ex:

$$\overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p)$$

queremos calcular este produto usando a base de helicidade: $s, s' \rightarrow u_R, (\overline{v})_L = \overline{u}_R$

Suponha que o elétron inicial estivesse com helicidade de mão direita:

$$u^s(p) = u_R(p) = P_R u(p) = P_R u^s(p)$$



Neste caso podemos introduzir P_R neste produto:

$$\overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu P_R u^s(p) = \overline{u}^{s'}(p') P_L \gamma^\mu P_R u^s(p)$$

De onde vemos que a helicidade do pósitron também está determinada (mão esquerda), de fato, como: $P_R u_L = (\overline{v})_R P_L = 0$

Podemos escrever uma soma sobre spins e, se deixarmos o P_R ali, estaremos somando apenas termos nulos, com exceção do termo que queremos:

$$\overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p) = \sum_{s, s'} \overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu P_R u^s(p)$$

Em $|M|^2$:

note que não é uma média, o spin inicial está fixo, somamos um monte de zeros para aparecer com a soma pois ela é conveniente

$$\sum_{s, s'} \overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu P_R u^s(p) \overline{v}^{s'}(p') \gamma^\nu P_R v^s(p) =$$

usando as somas de spin: $\sum_s u_i^s(p) \overline{u}_j^s(p) = (\not{p} + m)_{ij} \approx \not{p}_{ij}$
 $\sum_s v_i^s(p) \overline{v}_j^s(p) = (\not{p} - m)_{ij} \approx \not{p}_{ij}$

$$= \text{Tr}[\not{p}' \gamma^\mu P_R \not{p} \gamma^\nu P_R] = \text{Tr}[\not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu P_R] =$$

igual ao obtido no caso não polarizado (eq 207.1)

Calculando o traço obtemos:

$$= 2(p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} p \cdot p' - i \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} p'_\sigma p_\rho) \quad (\text{eq. 214.1})$$

Podemos fazer o mesmo para o outro traço (para os muons finais):

$$\sum_{s, s'} |\overline{u}^s(k) \gamma_\mu P_R v^{s'}(k')|^2 = 2(k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - g_{\mu\nu} k \cdot k' - i \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} k'^\sigma k^\rho) \quad (\text{eq. 214.2})$$

Logo:

$$|M|^2 = \frac{e^4}{q^4} \sum_{RR'} |...|^2 \sum_{SS'} |...|^2 = \frac{16e^4}{q^4} (p \cdot k')(p' \cdot k)$$

$\epsilon^{\rho\sigma\tau\nu} \epsilon_{\alpha\mu\rho\gamma} = -2 (\delta_{\alpha}^{\rho} \delta_{\gamma}^{\sigma} - \delta_{\beta}^{\rho} \delta_{\alpha}^{\sigma})$

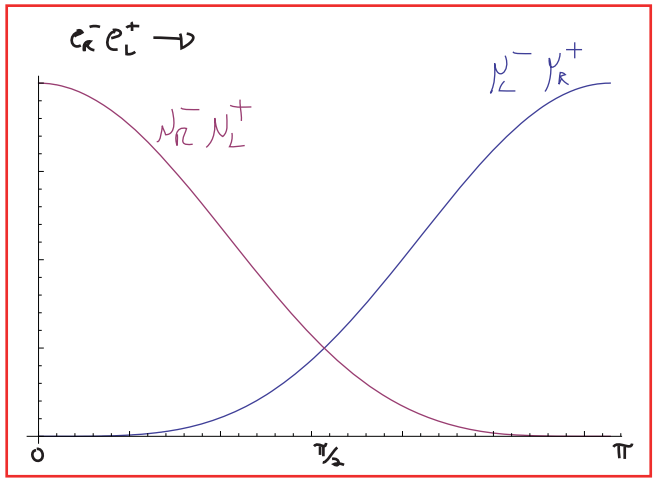
novamente (ver pg 211) especializamos para o centro de massa: $\begin{cases} q^2 = 4E^2 \\ p' \cdot k = p \cdot k = E(E + k \cos \theta) \\ E = k \end{cases}$

$$|M(e_R^- e_L^+ \rightarrow \nu_R^- \nu_L^+)|^2 = e^4 (1 + \cos \theta)^2$$

$$\therefore \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^+ \rightarrow \nu_R^- \nu_L^+) \right)_{cm, n \rightarrow 0} = \frac{|M|^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} = \frac{\alpha^2}{4 E_{cm}^2} (1 + \cos \theta)^2$$

Poderíamos fazer a mesma conta para outras polarizações, no caso $e_R^- e_L^+ \rightarrow \nu_L^- \nu_R^+$ o que muda é $p_R \rightarrow p_L$ em 214.2, o que resulta em um sinal na frente do ϵ e obtemos (exercício):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^+ \rightarrow \nu_L^- \nu_R^+) \right)_{cm, n \rightarrow 0} = \frac{\alpha^2}{4 E_{cm}^2} (1 - \cos \theta)^2$$



Da mesma forma:

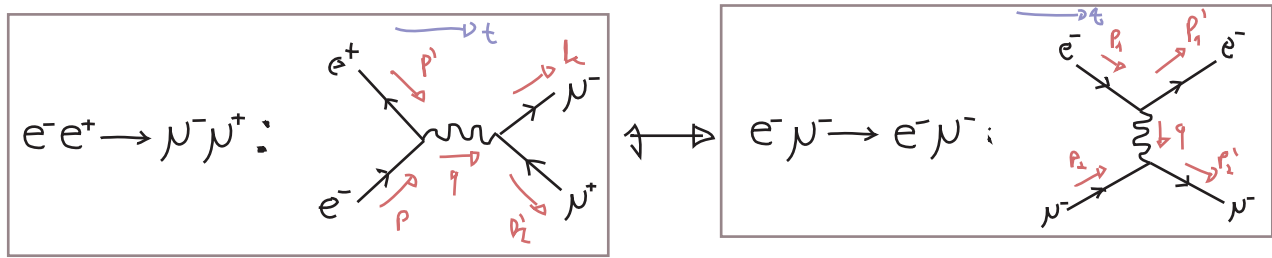
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^+ \rightarrow \nu_L^- \nu_R^+) \right)_{cm, n \rightarrow 0} = \frac{\alpha^2}{4 E_{cm}^2} (1 + \cos \theta)^2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^+ \rightarrow \nu_R^- \nu_L^+) \right)_{cm, n \rightarrow 0} = \frac{\alpha^2}{4 E_{cm}^2} (1 - \cos \theta)^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_L^+ \rightarrow \nu_R^- \nu_R^+) = 0 \quad (\text{assim como todas as outras combinações que restam})$$

Crossing symmetry

Dada a natureza das regras de Feynman, é de se esperar que expressões de diagramas bem semelhantes (ainda que representando processos físicos bem diferentes) tenham expressões semelhantes. Considere, por exemplo, os dois diagramas abaixo:



O diagrama da direita, apesar de representar um fenômeno diferente (é um espalhamento elétron-muon, ao passo que o da esquerda é uma aniquilação elétron-pósitron produzindo muon-antimuon), é essencialmente o mesmo que o da esquerda, a menos dos nomes dados aos momentos (basta olhar o da esquerda com o tempo passando de baixo para cima). De fato, as regras de Feynman nos fornecem:

$$i\mathcal{M}(e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-) = \bar{u}(p_1') (-ie\gamma^\mu) u(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(p_2') (-ie\gamma^\nu) u(p_2)$$

$$= \frac{ie^2}{q^2} \bar{u}(p_1') \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_2') \gamma_\nu u(p_2)$$

$$\therefore \frac{1}{4} \sum_{\text{SPIN}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{p}_2 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m_\mu) \gamma_\nu]$$

(eq. 216.1)

$$q = p_2' - p_2 = p_1 - p_1'$$

Compare esta equação com a eq. 207.1:

(eq. 207.1) $\Rightarrow \frac{1}{4} \sum_{\text{SPIN}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{k}' - m_\mu) \gamma_\nu (\not{k} + m_\mu)] \text{Tr}[\gamma^\nu (\not{p} + m_e) \gamma^\mu (\not{p}' - m_e)]$

$(\not{p}' - m_e) = \ominus(-\not{p} + m_e) \xrightarrow{\sum u \bar{u}(p_2)}$
 $\xrightarrow{\text{se cancelam}}$

o que mudou é apenas o nome dos momentos:

$$p \rightarrow p_1 \quad p' \rightarrow -p_1' \quad k \rightarrow p_2' \quad k' \rightarrow -p_2 \quad q = p' + p \rightarrow p_1 - p_1'$$

A seção de choque obtida para este diagrama é (ver Nastase, pgs 227 e 228), no limite ultra-relativístico:

$$\left. \begin{matrix} E \gg m_\mu \\ m_\mu, m_e \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} (e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-) \right)_{\text{cm}} = \frac{\alpha^2}{2E_{\text{cm}}^2 (1 - \cos\theta)^2} [4 + (1 + \cos\theta)^2] \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \sim \frac{1}{\theta^4}$$

(eq. 216.2)

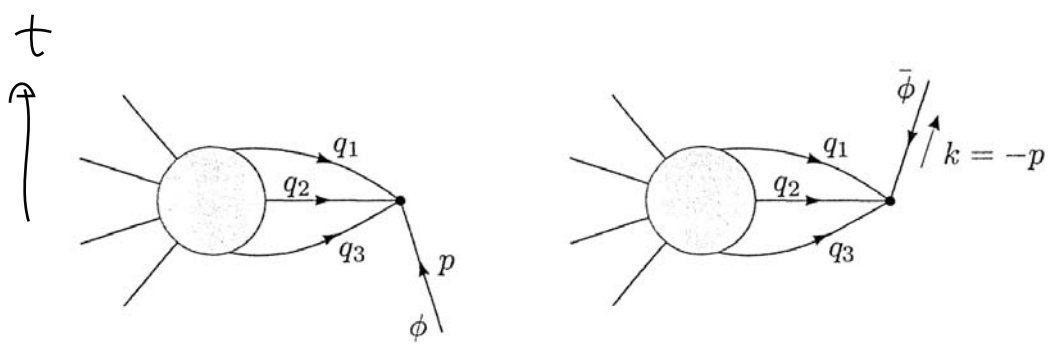
Note a divergência para ângulos pequenos, este tipo de divergência que aparece no espalhamento de partículas sem massa (neste a partícula em questão é o fóton) é chamada de **divergência IR** (infra-red, pois para pequenos ângulos o momento q trocado é pequeno) e será tratada no curso de TQCII.

A simetria acima, entre diagramas que podem ser levados um no outro "cruzando" linhas do passado para o futuro é chamada de **Crossing Symmetry** e pode ser generalizada:

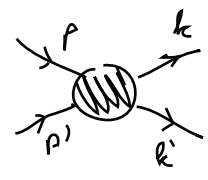
$$\mathcal{M}(\phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\phi}(k) + \dots) \quad k = -p$$

(eq. 216.3)

$$\sum u(p) \bar{u}(p) = \not{p} + m = -(\not{k} - m) = -\sum v(k) \bar{v}(k)$$



É mais fácil definir bem esta simetria em termos das **Variáveis de Mandelstam**, que definiremos agora. Dado um processo $2 \rightarrow 2$

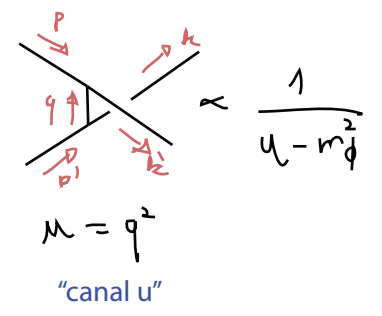
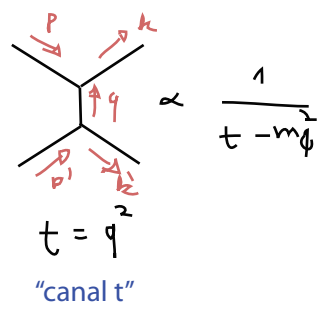
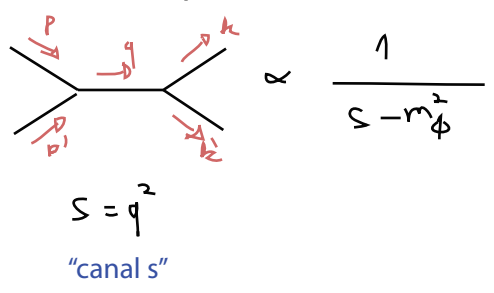


$$\begin{aligned}
 s &\equiv (p + p')^2 = (k + k')^2 = E_{cm}^2 \\
 t &\equiv (k - p)^2 = (k' - p')^2 \\
 u &\equiv (k' - p)^2 = (k - p')^2
 \end{aligned}$$

"t is the squared difference of the initial and final momenta of the most similar particles"

Variáveis de Mandelstam (eq. 217.1)

Note que:



$$s + t + u = p^2 + p'^2 + k^2 + k'^2 = \sum_{i=1}^4 m_i^2 \quad (\text{eq. 217.2})$$

Os três canais terão distribuições angulares diferentes, para ver isso, considere o caso em que todas as massas são iguais:

$S = E_{cm}^2$ (independe do ângulo)

$t \propto (1 - \cos \theta)$ $t \rightarrow 0$ / $\theta \rightarrow 0$

$u \propto (1 + \cos \theta)$ $u \rightarrow 0$ / $\theta \rightarrow \pi$

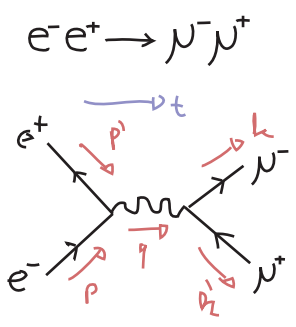
Em termos destas variáveis, podemos re-escrever 210.3 (para o processo $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$):

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+)|^2 = \frac{8e^4}{s^2} \left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right]^{0 \rightarrow 0}$$

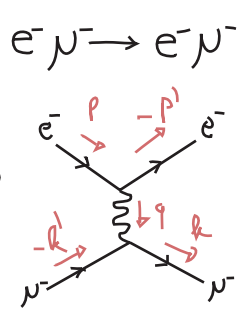
$$\begin{aligned}
 s &= q^2 \\
 t &= (k - p)^2 = -2p \cdot k = -2p' \cdot k' \\
 u &= (p - k')^2 = -2p \cdot k' = -2p' \cdot k
 \end{aligned}$$

$m_e \sim 0$
 $m_\mu \sim 0$

Agora façamos:



$$\begin{aligned} \bar{s} &= (p+p')^2 \\ \bar{t} &= (k-p)^2 \\ \bar{u} &= (p-k')^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} s &= (p-k')^2 = \bar{u} \\ t &= (-p'-p)^2 = \bar{s} \\ u &= (k-p)^2 = \bar{t} \end{aligned}$$

\Rightarrow

Logo podemos fazer o crossing direto nas variáveis de Mandelstam e obter:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+)|^2 \xrightarrow[\bar{u} \rightarrow s]{\substack{\bar{s} \rightarrow t \\ \bar{t} \rightarrow u}} \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-)|^2 = \frac{8e^4}{t^2} \left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right]$$