Campus São Mateus
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Departamento de Ciências Naturais - DCN

Física Experimental I

Mecânica

Teoria, Roteiro e Folha de Dados

Licenciatura em Física

Sumário

APRESENTAÇÃO

O laboratório fornece ao estudante uma oportunidade única de vivenciar diversos fenômenos físicos de uma maneira quantitativa num experimento real. A experiência no laboratório ensina ao estudante as limitações inerentes à aplicação das teorias físicas, a situações físicas reais e introduz várias maneiras de minimizar esta incerteza experimental. O propósito dos laboratórios de Física é tanto o de demonstrar algum princípio físico geral, quanto permitir ao estudante aprender e apreciar a realização de uma medida experimental cuidadosa.

Esta apostila desenvolvida pelo grupo de professores de Física da UFES/ CEUNES contempla um estudo introdutório à teoria de erros com vista ao tratamento de dados obtidos no Laboratório e a construção de gráficos lineares, além da descrição detalhada de 11 experimentos de mecânica (*sendo um opcional*) que contemplam a cinemática, leis de Newton, oscilações e movimento circular.

Professores Autores:

Eduardo Perini Muniz
André Luíz Alves

DESENVOLVIMENTO DO CURSO

As três primeiras aulas estão reservadas para um estudo introdutório à teoria dos erros, com vistas ao tratamento dos dados obtidos no Laboratório, sendo que a segunda aula será reservada, especificamente, para o estudo de gráficos em papel milimetrado e/ou monolog.

No restante das aulas serão realizadas oito experiências, divididas em duas séries de quatro, havendo a possibilidade de uma experiência extra.

Os alunos serão distribuídos em quatro grupos, sendo que cada grupo desenvolverá uma experiência em cada aula.

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO

As avaliações de relatórios, provas e testes ficarão a critério de cada professor. Uma sugestão é usar o seguinte critério:

$$M_{Parcial} = \frac{3M_{Provas} + M_{testes} + M_{relatórios}}{5}$$

M_{Provas} = Média aritmética das notas obtidas nas 2 provas parciais

M_{testes} = Média aritmética das notas obtidas nos 2 testes

$M_{relatórios}$ = Média aritmética das notas obtidas nos relatórios.

Testes:

O primeiro teste consistirá de questões referentes ao conteúdo de teoria de erros.

O segundo teste consistirá na elaboração de um gráfico (em papel milimetrado e/ou monolog) incluindo todos os procedimentos e cálculos pertinentes.

Provas:

A primeira prova será aplicada após as quatro primeiras experiências, portanto com o conteúdo abordado nestas experiências.

A segunda prova será aplicada após se completarem as quatro experiências finais, sendo abordado o conteúdo referente a estas experiências.

As provas consistirão de problemas ou questões que poderão abordar qualquer aspecto das experiências, como procedimentos, conceitos físicos envolvidos diretamente com as mesmas, dedução de fórmulas específicas para os cálculos das grandezas, cálculos numéricos, etc.

Relatórios:

Após cada aula com experiência, o grupo deverá elaborar um relatório seguindo os roteiros disponibilizados pelos professores contendo: os cálculos, os gráficos (quando houver), discussão das questões propostas, dedução de fórmulas se forem solicitadas na apostila e conclusão que deverá incluir comentários referentes aos resultados obtidos, aos procedimentos adotados e sua relação com a teoria envolvida.

Observações:

- ✓ Cada grupo deverá apresentar apenas um relatório elaborado por todos os seus membros.
- ✓ Os grupos deverão apresentar o relatório, na aula seguinte àquela da realização da experiência, sem prorrogação.
- ✓ Pontualidade: será dada uma tolerância de, no máximo, 15 minutos. Um atraso maior será considerado na nota do relatório correspondente.

INFORMAÇÕES GERAIS SOBRE O CURSO

- **NÃO** será permitido, **em hipótese nenhuma**, o uso de **calculadoras programáveis** (tipo HP ou similares), em **provas** e **testes**. Entretanto, recomenda-se a utilização de uma calculadora científica comum.
- Em caso de reutilização de apostilas de anos anteriores, **NÃO** deverão constar, **em hipótese nenhuma**, os dados tomados naquela ocasião: estes deverão estar **todos apagados**.
- O aluno poderá repor, em caso de falta, **apenas UMA** experiência da primeira série e **UMA** experiência da segunda série, nos **dias e horários** de **'Reposição de Experiências'** indicados no calendário.
- A 'Reposição de Experiências' é feita somente com a presença do monitor e o relatório relativo à experiência reposta só poderá atingir o **valor máximo de 7,0**.
- É importante repetir: os relatórios das experiências (**1 relatório por grupo**) deverão ser apresentados na aula seguinte daquela da realização da experiência, **sem prorrogação**.
- Em caso de falta do aluno às aulas dos dias dos testes, **NÃO** caberá reposição dos mesmos. Em caso de falta do aluno a uma das provas e **somente mediante a apresentação de atestado médico** na aula seguinte ao dia da prova, esta poderá ser reposta.

CRONOGRAMA

Semana 1: Apresentação do curso;

Semana 2: Teoria da Medida e dos Erros;

Semana 3: Gráficos lineares;

Semana 4: Experimentos;

Semana 5: Experimentos;

Semana 6: Experimentos;

Semana 7: Experimentos;

Semana 8: Experimentos;

Semana 9: Semana de Reposição de Experimentos;

Semana 10: Primeira prova;

Semana 11: Experimentos;

Semana 12: Experimentos;

Semana 13: Experimentos;

Semana 14: Experimentos;

Semana 15: Experimentos;

Semana 16: Semana de Reposição de Experimentos;

Semana 17: Segunda prova;

Semana 18: Prova final.

RELATÓRIOS

De uma forma geral, em ciência os resultados de um dado estudo são registrados e divulgados na forma de relatórios científicos. Entende-se por relatório científico um documento que segue um padrão previamente definido e redigido de forma que o leitor, a partir das indicações do texto, possa realizar as seguintes tarefas:

- ✓ Reproduzir as experiências e obter os resultados descritos no trabalho, com igual ou menor número de erros;
- ✓ Repetir as observações e formar opinião sobre as conclusões do autor;
- ✓ Verificar a exatidão das análises, induções e deduções, nas quais estiverem baseadas as conclusões do autor, usando como fonte as informações dadas no relatório.

PARTES DE UM RELATÓRIO

1. **Capa:** Deve incluir os dados do local onde a experiência foi realizada (Universidade, Instituto e Departamento), disciplina, professor, equipe envolvida, data e título da experiência.
2. **Introdução:** A introdução não deve possuir mais que duas páginas em texto. Esta parte deve incluir um as equações mais relevantes (devidamente numeradas), as previsões do modelo teórico (de preferência em forma de tabela ou lista) e todos os símbolos utilizados para representar as grandezas físicas envolvidas.
3. **Dados experimentais:** Deve apresentar os dados obtidos (preferencialmente em forma de tabelas), ou seja, todas as grandezas físicas medidas, incluindo suas unidades. Dados

considerados anômalos devem ser identificados com uma anotação. **As incertezas de cada medida devem estar indicadas.** As tabelas devem ser numeradas em sequência e conter uma legenda descritiva.

4. **Cálculos:** Todos os cálculos devem ser apresentados, incluindo as etapas intermediárias (cálculo de erros, métodos de análise gráfica, etc.), para permitir a conferência e recálculo pelo mesmo caminho. Os resultados experimentais devem ser apresentados com os algarismos significativos apropriados.

   Em caso de repetição de procedimentos idênticos de cálculo, como, por exemplo, a multiplicação de 10 valores da posição de um corpo por uma constante é permitido que apenas o primeiro cálculo seja detalhado no relatório, mas os resultados de todos eles devem ser apresentados sob a forma de tabela.

   Aliás, os valores de cada grandeza obtida por meio dos cálculos devem ser apresentados de forma organizada (preferencialmente sob a forma de tabelas) no fim desta seção.

   Caso a tabela com os resultados dos cálculos claramente apresentados não seja incluída, o professor tem a opção de cortar todos os pontos referentes a esta seção do relatório.

   Quando houver gráficos, com cálculo de coeficiente angular, estes devem ser incluídos nesta seção. O cálculo do coeficiente deve ser feito nas costas da folha de gráfico.

   Deve-se evitar que sucessivos arredondamentos e/ou truncamentos conduzam a valores incorretos para as incertezas resultantes dos cálculos efetuados. Assim, recomenda-se:

- ✓ Efetuar os cálculos intermediários para a propagação das incertezas com, no mínimo, **três** algarismos "significativos" nas incertezas.
- ✓ Ao avaliar graficamente o coeficiente angular de uma reta e sua incerteza, considere esta avaliação como um cálculo intermediário.
- ✓ Os resultados finais devem ser apresentados com **um** só algarismo significativo na incerteza.

5. **Análise de dados:** Nesta parte o aluno verifica **quantitativamente** se o objetivo inicialmente proposto foi atingido. As previsões teóricas mostradas na introdução devem ser confrontadas com os resultados experimentais e a diferença numérica entre os valores esperados e obtidos deve ser discutida. Sempre que possível, a comparação deve ser feita sob a forma de tabelas ou gráficos que devem ser comentado (as) no texto. Também é razoável comentar aqui valores de coeficientes angulares obtidos na seção anterior. O objetivo é comprovar ou não as hipóteses feitas na teoria.
6. **Conclusão:** A conclusão apresenta um resumo dos resultados mais significativos da experiência e sintetiza os resultados que conduziram à comprovação ou rejeição da hipótese de estudo. Aqui deve ser explicitado se os objetivos foram atingidos, utilizando preferencialmente critérios quantitativos. Também deve-se indicar os aspectos que mereciam mais estudo e aprofundamento.
7. **Bibliografia:** São as referências bibliográficas que serviram de embasamento teórico.

1. Introdução à Física Experimental

A Física Experimental ou, em termos mais amplos, o método experimental, é um dos pilares fundamentais da Ciência. Embora haja ramos da ciência onde a experimentação seja desnecessária, o método experimental é parte essencial do chamado método científico. Para nosso propósito imediato podemos dizer que o método científico compreende um conjunto de procedimentos e critérios que permitem compreender e explicar de modo confiável as leis e fenômenos naturais. De modo esquemático e bastante simplificado podemos resumir o método científico com o diagrama abaixo (Figura 1).

Figura 1- Diagrama esquemático para definir método científico.

O processo compreende as seguintes fases importantes:

- ✓ Observação. Nesta fase de coleta de dados por meio de medidas diversas ocorrem, simultaneamente, dúvidas e ideias acerca do fenômeno observado;
- ✓ Busca de uma relação entre os fatos observados e conceitos ou fatos pré-estabelecidos;
- ✓ Hipóteses, modelos e planejamento de experiências de verificação;
- ✓ Realização dos experimentos. Nesta fase novamente são efetuadas diversas medições criteriosas e cuidadosas;
- ✓ Interpretação dos dados obtidos, conclusões e divulgação dos resultados para que possam ser apreciados, reproduzidos e realimentados por ideias de outros pesquisadores.

Deve-se notar que ao longo de todo o processo, a capacidade interrogativa e criativa do homem acha-se presente e atuante, criando um ciclo dinâmico de retroalimentação de novas dúvidas, novas observações e novas experimentações, Isto gera resultados cada vez mais detalhados e confiáveis ou ainda novas conclusões, estabelecendo-se um acúmulo continuado de conhecimentos.

Para maior confiabilidade, o método experimental deve obedecer ainda a dois requisitos fundamentais. Em primeiro lugar os experimentos devem ser, obrigatoriamente, reprodutíveis por qualquer pessoa e em qualquer lugar, respeitadas as condições e métodos empregados. Em segundo lugar, temos o princípio da falsificação, isto é, toda proposição científica deve admitir experimentos que, caso não forneçam os resultados esperados permitam refutar a hipótese levantada. Uma consequência importante destes aspectos é que qualquer resultado inesperado exige o reexame completo e minucioso das hipóteses e modelos construídos.

A Física é uma ciência que se baseia quase sempre na observação do fenômeno natural e na identificação e medida das propriedades que o caracterizam. Frequentemente, essas observações e medidas não são feitas diretamente pelos nossos sentidos, mas através de equipamentos complexos, desenvolvidos para essa finalidade e fruto, eles também, de experiências anteriores sobre o mesmo tema. A Física, ao mesmo tempo em que busca a solução dos problemas fundamentais de *como* e *porque* as coisas ocorrem ou são como são, busca, em primeiro lugar, responder às questões *quando*, *quanto*, a que *distância*, de que *tamanho* dentre outras de igual teor. A ciência sempre parte do mais simples para o mais complexo. Uma postura contrária, fatalmente prejudicaria a análise e conduziria a um alto índice de erros.

Como ciência exata, a Física busca desvendar não apenas os aspectos qualitativos dos mistérios da natureza, mas também os aspectos quantitativos. É fácil então entender que a matemática é um instrumento essencial para o físico, pois a matemática é a linguagem que permite expressar de modo exato, unívoco e universal as regularidades e padrões de comportamento observados na natureza. Entretanto, o uso da chamada intuição física é essencial, pois muitas vezes a essência de um fenômeno não pode ser entendida apenas através de equações. Os princípios físicos fundamentais também podem e devem ser entendidos sem auxílio da matemática.

A Física Teórica constrói modelos para explicar fenômenos observados experimentalmente, procurando a partir deles, predizer os resultados de novos experimentos. O critério final de sucesso é a concordância das previsões do modelo com os resultados determinados de forma experimental. Isto cria uma interação e realimentação permanente entre a experiência e a teoria, com desafios cada vez maiores para a inteligência humana.

Percebe-se neste processo todo que a realização de medições é um aspecto muito importante para a Ciência sendo parte fundamental da metodologia científica. Não existe observação ou análise sem alguma forma de medição. Por este motivo, o conhecimento das unidades de medida e dos instrumentos adequados ao tipo de medida que se pretende realizar tem relevância prática fundamental. Além disto, qualquer medição está sujeita a erros. Erros devido a defeitos do instrumento, erros devido à falhas do operador e erros inerentes ao problema em foco. Disto, segue a importância de se conhecer bem os instrumentos e métodos a serem utilizados bem como procurar adquirir um bom embasamento teórico do fenômeno a ser estudado.

2. Teoria da Medida e dos Erros

Grandezas Físicas e Padrões de Medidas

Grandezas físicas são propriedades às quais podemos atribuir um valor *impessoal*, ou seja, um valor numérico obtido por comparação com um v*alor padrão*. Por exemplo, duas grandezas físicas para um ser humano são: seu peso e sua altura. Quando dizemos, por exemplo, que a altura de um homem é de 1,90 metros, queremos dizer que ele possui uma altura 1,90 vezes o comprimento de um *padrão* (o metro) gravado em uma barra metálica que está guardada em *Sèvres*, nos arredores de Paris, no *Bureau International dês Poids et Mesures*. Repare que não medimos o homem e sim uma de suas propriedades: a altura. Neste exemplo, o *padrão* (metro) define uma *unidade* da grandeza comprimento: uma *unidade padrão* de comprimento chamada metro. Generalizando, todas as grandezas físicas podem ser expressas em termos de um pequeno número de *unidades padrões* fundamentais. Neste contexto, fazer uma medida significa comparar uma quantidade de uma dada grandeza, com outra quantidade definida como unidade padrão da mesma grandeza.

A escolha de *unidades padrões* de grandezas determina o sistema de unidades de todas as grandezas usadas em Física. O sistema de unidades "oficial" usado pela maioria dos cientistas e engenheiros denomina-se normalmente sistema métrico, porém desde 1960, ele é conhecido oficialmente como Sistema Internacional, ou SI (das iniciais do nome francês Système International), porém, ainda existem outros sistemas de unidades utilizados, como o CGS. O SI é baseado em sete unidades padrões fundamentais:

Grandeza	Nome da Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	ampère	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Quantidade de substância	mol	mol
Intensidade luminosa	candela	cd

As unidades de outras grandezas como velocidade, força, energia e torque são derivadas das sete grandezas acima. Na tabela abaixo estão listadas algumas destas grandezas:

Grandeza	Dimensão	Unidade
Velocidade	m/s	
Trabalho	1 N . m	Joule (J)
Potência	1 J/s	Watt (W)

Força	1 Kg . m/s^2	Newton (N)
Aceleração	1 m/ s^2	
Densidade	1 kg/m^3	

No quadro abaixo também estão listados os prefixos dos múltiplos e submúltiplos mais comuns das grandezas fundamentais, todos na base de potências de 10. Os prefixos podem ser aplicados a qualquer unidade:

Múltiplo	**Pref**	**Símb**
10^{12}	tera	*T*
10^{9}	giga	*G*
10^{6}	meg	*M*
10^{3}	kilo	*k*
10^{-2}	cent	*c*
10^{-3}	mili	*m*
10^{-6}	micr	μ
10^{-9}	nan	*n*
10^{-12}	pico	*p*

Como exemplo de algumas ordens de grandeza do universo:

Próton	10^{-15} m , 10^{-27} kg
Átomo	10^{-10} m
Vírus	10^{-7} m , 10^{-19} kg
Gota de chuva	10^{-6} kg
Período da radiação da luz visível	10^{-15} s
Terra	10^{7} m , 10^{24} kg , 10^{17} kg
Sol	10^{9} m , 10^{30} kg
Via-Láctea	10^{21} m , 10^{41} kg
Universo Visível	10^{26} m , 10^{52} kg , 10^{18} s

Medidas Físicas

As medidas de grandezas físicas podem ser classificadas em duas categorias: medidas DIRETAS e INDIRETAS. A medida direta de uma grandeza é o resultado da leitura de uma magnitude mediante o uso de instrumento de medida, como por exemplo, um comprimento com régua graduada, ou ainda a de uma corrente elétrica com um amperímetro, a de uma massa com uma balança ou de um intervalo de tempo com um cronômetro.

Uma medida indireta é a que resulta da aplicação de uma relação matemática que vincula a grandeza a ser medida com outras diretamente mensuráveis. Como exemplo, a medida da velocidade média v de um carro pode ser obtida através da medida da distância percorrida ΔS e o intervalo de tempo Δt, sendo $v = {}^{\Delta S}/_{\Delta t}$.

Erros e Desvios

Algumas grandezas possuem seus valores reais conhecidos e outras não. Quando conhecemos o valor real de uma grandeza e experimentalmente encontramos um resultado diferente, dizemos que o valor observado está afetado de um erro, o qual pode ser definido como:

ERRO ➔ Diferença entre um valor observado (V_{obs}) ao se medir uma grandeza e o valor real (V_{Real}) ou correto da mesma.

$$Erro = V_{obs} - V_{Real} \tag{1}$$

Conforme teremos oportunidade de estudar, obter o valor real da maioria das grandezas físicas, através de uma medida, é quase impossível. Apesar de não podermos encontrar o valor real de determinada grandeza, podemos estabelecer, através de critérios que estudaremos oportunamente, um valor adotado que mais se aproxima do valor real, como é o caso da aceleração da gravidade. Neste caso, ao efetuarmos uma medida, falamos em **desvios** e não em **erros**.

O desvio é definido como:

DESVIO ➔ Diferença entre um valor observado (V_{obs}) ao se medir uma grandeza e o valor adotado (V_{adot}) que mais se aproxima teoricamente do valor real.

$$Desvio = V_{obs} - V_{adot} \tag{2}$$

Na prática se trabalha na maioria das vezes com desvios e não com erros. Os desvios podem ser apresentados sob duas formas:

- Desvio - já definido
- Desvio Relativo - é a relação entre o desvio absoluto e o valor adotado como o mais próximo teoricamente do valor real desta grandeza.

$$\text{Desvio Relativo} = \frac{Desvio}{V_{adotado}} \tag{3}$$

O desvio relativo percentual é obtido, multiplicando-se o desvio relativo por 100%. Este desvio nos dá, de certa forma, uma informação a mais acerca da qualidade do processo de medida e nos permite decidir, entre duas medidas, qual a melhor.

Classificação de Erros

Por mais cuidadosa que seja uma medição e por mais preciso que seja o instrumento, não é possível realizar uma medida direta perfeita. Ou seja, sempre existe uma incerteza ao se comparar uma quantidade de uma grandeza física com sua unidade.

Segundo sua natureza, os erros são geralmente classificados em três categorias: grosseiros, sistemáticos e aleatórios ou acidentais.

Erros Grosseiros

Erros que ocorrem devido à imperícia ou distração do operador. Como exemplos, podemos citar a escolha errada de escalas, erros de cálculo e erro de paralaxe. Devem ser evitados pela repetição cuidadosa das medições.

Erros Sistemáticos

Os erros sistemáticos são causados por fontes identificáveis, e em princípio, podem ser eliminados ou compensados. Estes erros fazem com que as medidas efetuadas estejam consistentemente acima ou abaixo do valor real, prejudicando a **exatidão** das medidas. Erros sistemáticos podem ser devidos a vários fatores, tais como:

• ao instrumento que foi utilizado, por exemplo, intervalos de tempo medidos com um relógio que atrasa;

• ao método de observação utilizado, por exemplo, medir o instante da ocorrência de um relâmpago pelo ruído do trovão associado;

• a efeitos ambientais, por exemplo, a medida do comprimento de uma barra de metal, que pode depender da temperatura ambiente;

• a simplificações do modelo teórico utilizado, por exemplo, não incluir o efeito da resistência do ar numa medida da gravidade baseada na medida do tempo de queda de um objeto a partir de uma dada altura.

Erros Aleatórios ou Acidentais

Erros devidos a causas diversas, bem como a causas temporais que variam durante observações sucessivas e que escapam a uma análise em função de sua imprevisibilidade, prejudicando a precisão das medidas. Podem ter várias origens, entre elas:

• Instabilidades nos instrumentos de medidas;

• Erros no momento da medida como, por exemplo, uma leitura com precisão maior do que aquela fornecida pela escala;

• Pequenas variações das condições ambientais (pressão, temperatura, umidade, fontes de ruídos, etc.).

Erros aleatórios podem ser tratados quantitativamente através de métodos estatísticos, de maneira que seus efeitos sobre a grandeza física medida, podem ser, em geral, determinados.

A distinção entre erros aleatórios ou sistemáticos é, até certo ponto, subjetiva, entretanto, existe uma diferença clara, a contribuição dos erros aleatórios pode ser reduzida pela repetição das medidas, enquanto àquela relativa a erros sistemáticos em geral é insensível à repetição.

Incertezas

O erro é inerente ao processo de medida, isto é, nunca será completamente eliminado. O erro poderá ser minimizado, procurando-se eliminar o máximo possível as fontes de erro acima citadas. Portanto, ao realizar medidas é necessário avaliar quantitativamente as INCERTEZAS nas medições (Δx). Aqui devem ser diferenciadas duas situações: a primeira trata de medidas diretas, e a segunda de indiretas.

Incertezas em Medidas Diretas

A medida direta de uma grandeza X com sua incerteza estimada pode ser feita de duas formas distintas:

a) Medindo-se apenas uma vez a grandeza x: neste caso, a estimativa de incerteza na medida, Δx, é feita a partir do instrumento de medida utilizado e, o resultado será expresso por:

$$x \pm \Delta x$$

Obs: O sinal $\pm$ não indica que Δx pode ser tanto positivo como negativo (como no caso $x^2 = 4$, logo $x = \pm\, 2$), mas sim que o valor obtido na medida é único, porém, devido à limitação do instrumento de medida, não é exatamente o valor lido, e pode ser qualquer número do intervalo $[\, x - \Delta x, x + \Delta x\,]$. Se forem detectadas outras fontes de erro, o valor de Δx deve ser incrementado com o valor estimado da contribuição do referido erro.

b) Medindo-se N vezes a mesma grandeza x, sob as mesmas condições físicas. Os valores medidos x_1, x_2, ..., x_N não são geralmente iguais entre si e descontando os erros grosseiros e sistemáticos, as diferenças entre eles são atribuídas aos erros aleatórios. Neste caso, o resultado da medida é expresso em função das incertezas como: $x = x_m \pm \Delta x$. Nesta representação, x_m é o valor médio das N medidas e Δx é a incerteza da medida e representa a variabilidade e a dispersão das medidas.

O valor de x_m é calculado como: $x_m = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}$

Existem outros parâmetros que podem representar os valores centrais em torno dos quais estes dados se distribuem, tais como: a moda, a média quadrática e a mediana. A escolha do parâmetro depende do tipo de distribuição dos dados e do sistema.

A incerteza pode ser determinada de várias formas. Neste curso, trabalharemos com a incerteza absoluta e o desvio padrão.

✓ *Incerteza Absoluta:*

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{N} \frac{|\, x_m - x_i\,|}{N}$$

✓ *Desvio Padrão:*

$$\Delta x = \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_m - x_i)^2}{N}}$$

Para um pequeno número de medidas, a incerteza (ou erro) associado a cada medida será dada por:

$$\Delta x = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{\left(x_i - x_m\right)^2}{N-1}}$$

Outra grandeza importante é a incerteza relativa $\delta = \frac{\Delta x}{x_m}$. Por exemplo, se uma barra de aço tem comprimento dado por $(2,5 \pm 0,5)\,m$, significa que esse comprimento está sendo comparado com o padrão denominado metro e que a incerteza associada à medida é de $0,5\ m$. A incerteza relativa nesta medida é de $\frac{0,5}{2,5} = 0,2$ ou 20%.

Quando o número de medidas cresce indefinidamente, a distribuição de frequência das medidas tende, usualmente, à **distribuição de Gauss**. Medidas diretas que se distribuem segundo a distribuição de Gauss, tem a seguinte propriedade:

- 68,3% das medidas estão entre $(x_m - \sigma)\ e\ (x_m + \sigma)$
- 95,5% das medidas estão entre $(x_m - 2\sigma)\ e\ (x_m + 2\sigma)$
- 97,7% das medidas estão entre $(x_m - 3\sigma)\ e\ (x_m + 3\sigma)$

Dependendo do tipo de sistema, outros tipos de distribuições estatísticas podem ser mais indicados, como por exemplo: a **distribuição de Poisson**, **distribuição Binomial**, **distribuição Gama**, etc.

Os valores médios e os desvios padrões podem ser obtidos por programas de ajustes, como por exemplo, o **Origin** e algoritmos do **MATLAB**, a partir de um conjunto de medidas.

Incertezas em Medidas Indiretas

Geralmente é necessário usar valores medidos e afetados por incertezas para realizar cálculos a fim de se obter o valor de outras grandezas indiretas. É necessário conhecer como a incerteza na medida original afeta a grandeza final.

Propagação de incertezas

Nas medidas indiretas o valor da grandeza final dependerá das incertezas de cada uma das grandezas obtidas direta ou indiretamente, bem como da forma da expressão matemática utilizada para obtê-las.

Consideremos que a grandeza V a ser determinada esteja relacionada com outras duas ou mais, através da relação: $V = f(x_1 \pm \Delta x_1, x_2 \pm \Delta x_2, ..., x_n \pm \Delta x_n)$, onde f é uma função conhecida de $x_1 \pm \Delta x_1, x_2 \pm \Delta x_2, ..., x_n \pm \Delta x_n$.

Examinaremos então como se obtém a incerteza do valor da grandeza que se mede indiretamente, em função das incertezas das medidas diretas.

Um método usualmente aplicado e que nos dá o valor de ΔV, imediatamente, em termos de $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, é baseado na aplicação do cálculo diferencial:

MÉTODO I:

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial V}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

Uma derivada parcial, como por exemplo $\frac{\partial V}{\partial x_1}$, é a derivada de V em relação a x_2, assumindo as demais *n-1* variáveis (as demais grandezas diretas) constantes. Para maiores detalhes, consulte livros de cálculo diferencial e numérico.

Os termos do tipo $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ são chamados *fatores de sensibilidade* de V em relação a x_i.

Outra equação encontrada na literatura (deduzida a partir do cálculo estatístico considerando uma distribuição Gaussiana) é:

MÉTODO II:

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 \Delta x_i^2}$$

Consideremos agora, um método mais imediato, envolvendo apenas operações de álgebra elementar.

Soma ou subtração

Considerando as medidas de n grandezas: *A*, *B*, *C*, ..., e suas respectivas incertezas:

$$\left.\begin{array}{l} A = a \pm \Delta a \\ B = b \pm \Delta b \\ C = c \pm \Delta c \\ \quad \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} a,\ b,\ c, \cdots = valores\ medidos \\ \pm\Delta a,\ \pm\Delta b,\ \pm\Delta c, \cdots = incertezas\ absolutas \end{array} \right)$$

$$S = A + B + C + ...$$

$$S = s \pm \Delta s \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s = \text{valor da soma} \\ \pm\Delta r = \text{incerteza absoluta da soma} \end{array} \right\}$$

Aplicando o MÉTODO I:

$$s \pm \Delta s = (a+b+c+...) \pm (|\Delta a| + |\Delta b| + |\Delta c| + ...)$$

Aplicando o MÉTODO II:

$$\Delta s = \sqrt{\left(\frac{\partial s}{\partial a}\right)^2 (\Delta a)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial b}\right)^2 (\Delta b)^2 + ...} = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + ...}$$

Para o caso da subtração as expressões análogas são:

$$d \pm \Delta d = (a-b-c-...) \pm (|\Delta a| + |\Delta b| + |\Delta c| + ...)$$

$$\Delta d = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial a}\right)^2 (\Delta a)^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial b}\right)^2 (\Delta b)^2 + ...} = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + ...}$$

Outras operações

A multiplicação, a divisão, a radiciação e a potenciação, poderão ser englobadas na fórmula monômio.

$$F = K.A.B^{\alpha}.C^{\beta}$$

Demonstra-se teoricamente (faça a derivada e analise) que, adotando o MÉTODO I a incerteza absoluta $\pm \Delta f$ poderá ser colocada em função das incertezas absolutas das grandezas que a compõem pela seguinte fórmula:

$$\pm \Delta f = \pm f \left[\left|\frac{\Delta k}{k}\right| + \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\alpha \frac{\Delta b}{b}\right| + \left|\beta \frac{\Delta c}{c}\right| \right]$$

onde:

$A = a \pm \Delta a$

$B = b \pm \Delta b$

$C = c \pm \Delta c$

$K = k \pm \Delta k \Rightarrow$ Constante que não depende da medida

$F = f \pm \Delta f \Rightarrow f = k.a.b^{\alpha}.c^{\beta}$

Discussão sobre a constante K

A constante **K** poderá aparecer nas seguintes formas:

✓ Número formado por quantidade finita de dígitos (número exato). Neste caso a incerteza absoluta é nula.

- ✓ Número que matematicamente comporte infinitos dígitos (irracional, dízima). Neste caso a incerteza absoluta dependerá da quantidade de dígitos adotada. Se utilizarmos uma calculadora que opere com dez dígitos, teremos π = 3,141592654. O último dígito foi arredondado pela máquina; está afetado por uma "incerteza" de uma unidade (no máximo = 0,000000001).

Algarismos Significativos

A medida de uma grandeza física é sempre aproximada, por mais capaz que seja o operador e por mais preciso que seja o aparelho utilizado. Esta limitação reflete-se no número de algarismos que usamos para representar as medidas. Devemos utilizar só os algarismos medidos ou calculados pela média que são confiáveis devido à precisão do instrumento utilizado, admitindo-se apenas o uso de um único algarismo duvidoso. Por exemplo, se afirmarmos que o resultado de uma medida é $3,24\ cm$ estamos dizendo que os algarismos 3 e 2 são precisos e que o algarismo 4 é o duvidoso, não tendo sentido físico escrever qualquer algarismo após o número 4.

Algumas observações devem ser feitas:

1. Não é algarismo significativo o zero à esquerda do primeiro algarismo significativo diferente de zero. Assim, tanto $l = 32,5m$ como $l = 0,325x10^2\ m$ representam a mesma medida e têm 3 algarismos significativos. Outros exemplos:
   - ✓ 4 = 0,4 x 10 = 0,04 x 10^2 = 0,004 x 10^3 (1 algarismo significativo);
   - ✓ 0,00036606 = 0,36606 x 10^{-3} = 3,6606 x 10^{-4} (5 algarismos significativos).
2. Zero à direita de algarismo significativo também é algarismo significativo. Portanto, $l = 32,5\ cm$ e $l = 32,50\ cm$ são diferentes, ou seja, a primeira medida têm 3 algarismos significativos, enquanto a segunda é mais precisa e têm 4 algarismos significativos.
3. Quando for necessário fazer arredondamento de algum número utilizaremos a seguinte regra: quando o último algarismo depois dos significativos for menor que 5 este é abandonado; quando o último algarismo for maior ou igual a 5, somamos1 unidade ao algarismo significativo anterior. Exemplo:
   - ✓ 8,234 cm é arredondado para 8,23 cm;
   - ✓ 8,235 cm é arredondado para 8,24 cm;
   - ✓ 8,238 cm é arredondado para 8,24 cm.

Operações com algarismos significativos:

1. **Soma e subtração:** Após realizar a soma, o resultado deve apresentar apenas um algarismo duvidoso. Exemplo:
   - ✓ 133,35cm – 46,7cm = 86,65cm = 86,7cm.
2. **Produto e divisão:** O resultado da operação deve ser fornecido com o mesmo número de algarismos significativos do fator que tiver o menor número de algarismos significativos. Exemplos:

- ✓ 32,74cm x 25,2cm = 825,048cm^2 = 825cm^2
- ✓ $\dfrac{37,32}{7,45} = 5,00940\ \dfrac{m}{s} = 5,01\dfrac{m}{s}$

3. **Algarismos significativos em medidas com incerteza:** Suponhamos que uma pessoa ao fazer uma série de medidas do comprimento de uma barra l, tenha obtido os seguintes resultados:

- ✓ Comprimento médio: $l = 82,7390$ *cm;*
- ✓ Incerteza estimada: $\Delta l = 0,538$ *cm;*

Como a incerteza da medida está na casa dos décimos de *cm*, não faz sentido fornecer os algarismos correspondentes aos centésimos, milésimos de *cm* e assim por diante. Ou seja, a incerteza estimada de uma medida deve conter apenas um algarismo significativo. Os algarismos a direita deste, serão utilizados apenas para efetuar os cálculos e arredondamentos ou simplesmente desprezados. Neste caso Δl deve ser expresso apenas por:

$$\Delta l = 0,5cm$$

Os algarismos 8 e 2 do valor médio são exatos, porém o algarismo 7 já é duvidoso porque o erro estimado afeta a casa que lhe corresponde. Deste modo, os algarismos 3, 9 e 0 são desprovidos de significado físico e não é correto escrevê-los: estes algarismos são utilizados para efetuar os cálculos e arredondamentos ou simplesmente desprezados. O modo correto de escrever o resultado final desta medida será então:

$$l = (82,7 \pm 0,5)cm$$

Quando se trabalha com uma grandeza sem explicitar a sua incerteza é preciso ter em mente a noção exposta no texto referente ao conceito de algarismo significativo. Mesmo que não esteja explicitada, você sabe que a incerteza afeta "diretamente" o último dígito de cada número. Para verificar esta afirmação sugerimos que assinale com um traço todos os algarismos cuja ordem seja superior ou igual à ordem de grandeza da incerteza. Considere algarismo significativo, os algarismos assinalados.

Exemplos:

a) $\overline{186},3 \pm 1,7 \ \rightarrow 186 \ \ ou \ \ 1,86x10^{-2}$

b) $\overline{45,37} \pm 0,13 \ \rightarrow 45,4 \ \ ou \ \ 4,54x10$

c) $\overline{2523}1 \pm 15 \ \rightarrow 2,523x10^{4}$

As operações que você efetuar com qualquer grandeza retornarão, como resultado, números que tem uma quantidade "bem definida" de algarismos significativos.

Exercícios

1) Verifique quantos algarismos significativos apresentam os números abaixo:

a) 0,003055 b) 1,0003436 c) 0,0069000 d) 162,32 x 10^6.

2) Aproxime os números acima para 3 algarismos significativos.

3) Efetue as seguintes operações levando em conta os algarismos significativos:

a) (2,5 ± 0,6) cm + (7.06 ± 0,07) cm;

b) (0,42 ± 0,04) g/(0,7 ± 0,3) cm;

c) (0,7381 ± 0,0004) cm x (1,82 ± 0,07) cm;

d) (4,450 ± 0,003) m - (0,456 ± 0,006) m.

4) Efetue as seguintes operações levando em conta os algarismos significativos:

a) 2,3462 cm + 1,4 mm + 0,05 m;

b) 0,052 cm/1,112 s;

c) 10,56 m – 36 cm.

5) As medidas da massa, comprimento e largura de uma folha foram obtidas 4 vezes e os resultados estão colocados na tabela abaixo. Determine:

a) Os valores médios da massa, comprimento e largura da folha;
b) As incertezas absolutas das medidas da massa, comprimento e largura da folha;
c) Os desvios padrão das medidas de massa, comprimento e largura da folha;
d) As incertezas relativas das medidas da massa, comprimento e largura da folha.

Massa	Largura	Comprimento
4,51	21,0	30,2
4,46	21,2	29,8
4,56	20,8	29,9
4,61	21,1	30,1

6) Utilizando os resultados do exercício 5 e a teoria de propagação de erros, determine:

a) A área da folha e sua respectiva incerteza;

b) A densidade superficial da folha e sua respectiva incerteza.

3. Instrumentos de Medida

Introdução

Descreveremos em detalhes alguns dos instrumentos mais utilizados para medir grandezas físicas de massa, tempo e comprimentos, com enfoque nos aparelhos disponíveis no laboratório. São eles:

Grandeza	Aparelho	Precisão
Comprimento	Régua	1 mm
Comprimento	Paquímetro	0.1 mm
Massa	Balança Digital	-
Tempo	Cronômetro	0,01s até 0,0001s

A precisão de um instrumento de medida corresponde à quantidade mínima da grandeza física que o instrumento é capaz de diferenciar. Por exemplo, numa régua centimetrada, a precisão é de 1cm.

O resultado de uma medida deve vir sempre na forma:

$$m \pm \Delta m$$

Onde *m* é o valor medido na escala do instrumento e Δm é a incerteza associada á medida. Esta incerteza depende do aparelho utilizado e dos erros aleatórios ocorridos durante a medida. Portanto, podemos escrever Δm como a soma de duas contribuições, e será chamada incerteza total:

$$\Delta m = \Delta m_{aparelho} + \Delta m_{aleatórios}$$

O cálculo das incertezas aleatórias, como já foi mostrado, depende do número de medidas e das operações envolvidas na obtenção da grandeza *m*. O cálculo de $\Delta m_{aparelho}$ (incerteza do aparelho) depende do instrumento utilizado e há diversos critérios para determiná-la (quando a mesma não for informada pelo fabricante). Nesse sentido, é interessante classificar os aparelhos em analógicos e não analógicos. Esta classificação surge em função da escala do aparelho, e da possibilidade de estimativa de incerteza, conforme veremos a seguir.

Aparelhos Analógicos

Os instrumentos analógicos são aqueles onde a análise das escalas permite que o algarismo duvidoso da medida seja avaliado. Neste caso, é usual adotar a incerteza da escala como sendo a metade da precisão, ou seja:

$$\Delta m_{aparelho} = \frac{1}{2}(\text{precisão do aparelho})$$

Alguns exemplos são: réguas, multímetros, cronômetros, balança de braço e termômetros.

A Régua Milimetrada

Instrumento capaz de medir comprimentos com a precisão máxima de milímetros. O erro de escala é:

$$\Delta m_{aparelho} = \frac{1}{2}\left(\text{precisão do aparelho}\right) = 0,5\,mm$$

Para entender a origem deste critério, considere, por exemplo, que desejamos medir o tamanho de uma folha de papel usando uma régua milimetrada. Com o olho bem treinado ou com o auxílio de uma lupa, e se os traços da marcação dos milímetros inteiros da régua forem suficientemente estreitos, pode-se avaliar até décimos de milímetro. Contudo, este procedimento pode não ser válido. Se uma régua é graduada em milímetros é porque o material com que é feito pode resultar em variações do comprimento total comparáveis com a sua menor divisão. Ou então, o próprio processo de fabricação pode não ser seguro, dando variações comparáveis com a menor divisão. Nestes casos, supor a régua exata e avaliar décimos de milímetro pode se irrealista. Por outro lado, arredondando até o milímetro inteiro mais próximo pode acarretar perda de informação. Assim, avaliar a incerteza em metade da precisão é um meio termo aceitável. É importante notar que esta incerteza corresponde na verdade ao erro máximo que pode ser cometido utilizando uma régua milimetrada, excluindo-se os erros aleatórios. A figura abaixo mostra um exemplo de leitura utilizando uma régua.

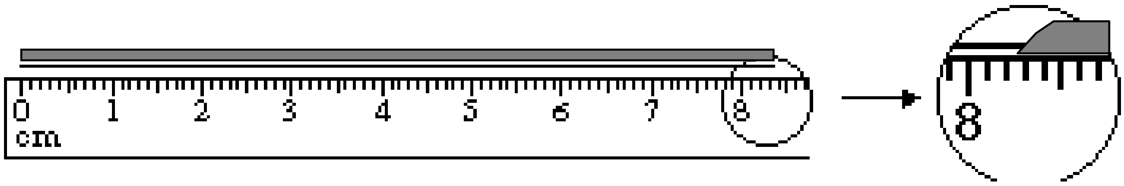


Figura 2- Exemplo de uma medida feita com régua milimetrada.

Neste caso podemos avaliar o comprimento da barra em 8,36 cm. Assim, os algarismos exatos são 8 e 3, ao passo que o duvidoso é 6, uma vez que sua obtenção surgiu de uma apreciação do experimentador. Portanto, o resultado final da medida deve ser l=(8,36 $\pm$ 0,05) cm. Se utilizássemos um paquímetro poderíamos obter para a grandeza em foco um valor de 8,371 cm. Neste caso, quais os algarismos duvidosos e quais os exatos? Já um micrômetro nos permitiria obter um valor que poderia ser 8,3713 cm.

Balanças Tri-escala

A balança tri-escala é assim denominada porque possui três escalas: uma graduada em gramas, outra em dezenas de gramas, outra em centésimos de gramas. Assim o resultado de uma medida com esta balança pode ser apresentado com algarismos até a casa do milésimo da grama, sendo este algarismo duvidoso. A precisão da balança é na casa do centésimo de grama. Antes de fazer uma medida com a balança, deve-se verificar se a mesma está zerada. Para isto, sem nenhum objeto no prato da balança, deve ser verificado se, ao colocar os pesos das escalas nos zeros das mesmas, o ponteiro situado na extremidade do braço da balança está apontando para o zero de uma escala vertical, situado nesta extremidade. A inclinação do braço da balança pode ser ajustada girando um parafuso situado na base da balança. A balança deve ser zerada para evitar erros sistemáticos nas medidas.

Ao pesar um objeto colocando-o no prato da balança, o braço desta ficará levantado, sendo necessário posicionar os pesos das escalas de forma que o ponteiro volte para o zero da escala vertical. Assim feito, os números nas escalas, indicados pelos pesos das escalas, poderão ser lidos.

Como exemplo, a leitura feita na figura abaixo (e indicada pelas flechas) seria de $m = (165,345 \pm 0,005)\ g$, onde $0,005\ g$ corresponde á incerteza da medida.

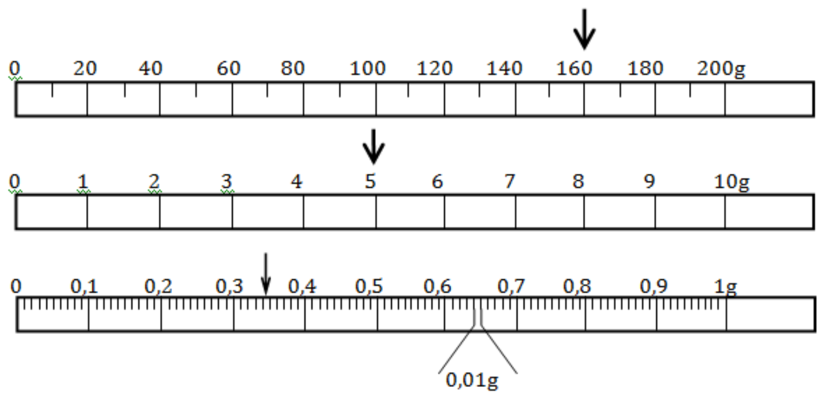


Figura 3 - Balança tri-escala.

Aparelhos não Analógicos

Aparelhos Digitais

Os aparelhos digitais não permitem que o erro de escala seja avaliado: o algarismo duvidoso é simplesmente lido no display do aparelho, ou conforme especificado pelo fabricante. Usualmente, o erro corresponde ao menor valor que o aparelho pode medir:

$$\Delta m_{aparelho} = \text{precisão do aparelho}$$

Alguns exemplos de aparelhos digitais são: o cronômetro digital, termômetro digital e multímetro digital.

Cronômetros Digitais:

Cronômetros são aparelhos que medem intervalos de tempo e cuja precisão depende do fabricante. Os cronômetros utilizados neste curso apresentam um display digital com intervalos de tempo no formato:

XX XX' XX’’ XX’”

horas minutos segundos décimos de segundos

Portanto, o último dígito de precisão encontra-se na casa dos centésimos de segundo. Assim, o erro de escala deste aparelho corresponde à menor medida que o mesmo pode fazer, ou seja:

$$\Delta m_{aparelho} = 0,01 s$$

Desta forma, um exemplo de leitura com display indicando 0201 significa (2,01 $\pm$ 0,01) s.

Obs: Lembre-se quando o cronômetro for acionado manualmente, deve ser incluído também o tempo de reação humano, que é de aproximadamente 0,1 s para cada acionamento.

Multímetro

Multímetros digitais são aparelhos que medem várias grandezas elétricas, como: resistência, tensão, corrente, capacitância, indutância, tensões de junções de diodos e de transistores, etc. Os multímetros apresentam um *display* digital e várias escalas para cada função, que podem ser selecionadas por um cursor. Para perfeita utilização.

Para o caso do multímetro, existem duas fontes de erro possíveis:

a) O último algarismo (z) pode flutuar em torno do valor mais estável e neste caso a incerteza devido à flutuação é calculada, estimando-se a flutuação média em torno do valor mais provável do último algarismo, da seguinte forma:

$$\Delta x_f = (z_{\max} - z_{\min}) / 2$$

O limite de erro instrumental (Δx_i) fornecido pelo fabricante que possui a forma:

$$\Delta x_i = a\% \ \textit{da leitura} + b \ \textit{dígitos no último} \ \text{algarismo}$$

A incerteza absoluta resultante das duas contribuições é:

$$\Delta x = \Delta x_f + \Delta x_i$$

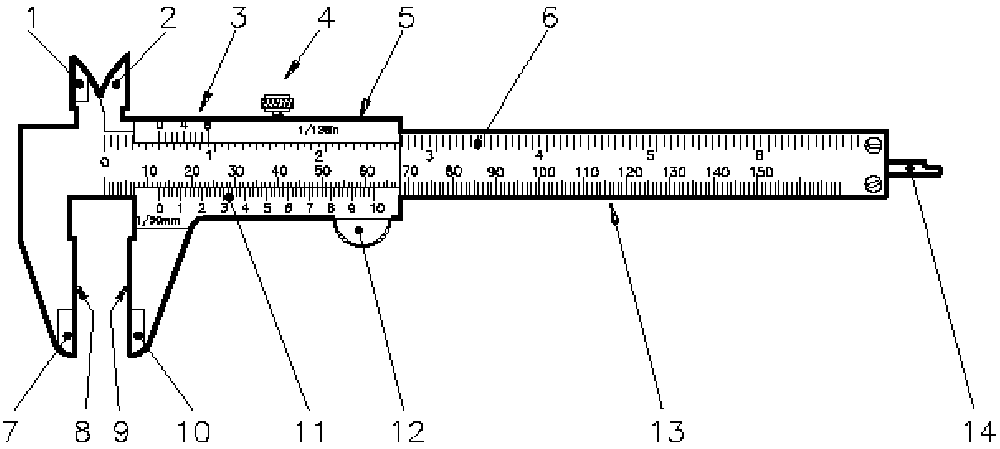
Como exemplo, se uma leitura mais estável no amperímetro foi 33,04 mA e flutuou entre 33,02 e 33,05 mA na escala de 200 mA, que por sua vez, possui uma incerteza de 0,05% da leitura + 2 dígitos, então:

$$\Delta x_f = (0,05 - 0,02) / 2 = 0,015$$
$$\Delta x_i = 0,0005 \cdot 33,03 + 0,02 = 0.036515$$
$$\Delta x = 0,015 + 0.036515 = 0,051515 = 0,05$$

O valor da medida é então: $i = 33,04 \pm 0,05$ mA.

Aparelho com Nônio: Paquímetro

O paquímetro é um instrumento usado para medir as dimensões lineares internas, externas e de profundidade de um corpo. Consiste em uma régua graduada, com encosto fixo, sobre a qual desliza um cursor. O cursor ajusta-se à régua e permite sua livre movimentação, com um mínimo de folga. Para muitas medidas com escalas graduadas é desejável estimar-se uma fração da menor divisão das mesmas. Existe um dispositivo que aumenta a precisão desta estimativa: o nônio ou vernier (acoplado ao cursor). Esta escala especial foi criada por Pierre Vernier (1580-1637), para obter medidas lineares menores que a menor divisão de uma escala graduada.



1. Orelha fixa
2. Orelha móvel
3. Nônio ou vernier (polegada)
4. Parafuso de trava
8. Encosto fixo
9. Encosto móvel
10. Bico móvel
11. Nônio ou vernier (milímetro)
12. Impulsor

Figura 4 - Paquímetro.

O nônio ou vernier nos permite efetuar a leitura de uma fração da menor divisão de uma régua ou escala graduada. Ele é constituído de uma pequena escala com N divisões de valores conhecidos, que se move ao longo da régua principal, porém relacionam-se entre si de uma maneira simples. Por exemplo, considere um paquímetro possuindo um nônio com N = 10 divisões que correspondem, em comprimento, a 9 divisões da escala principal. Cada divisão do nônio é mais curta que a divisão da escala principal de $\frac{1}{N}$ da divisão desta escala.

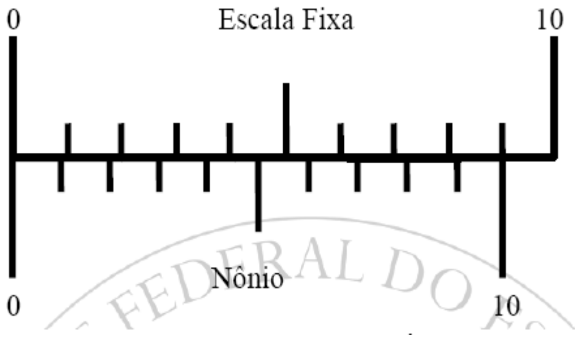


Figura 5 - Representação do Nônio.

Neste caso, a primeira divisão do nônio é $\frac{1}{10}$ mais curta que a divisão da escala principal. A segunda divisão do nônio está a $\frac{2}{10}$ de divisão a esquerda da próxima marca da escala principal, e assim por diante, até a décima marca do nônio coincida com a nona marca da escala principal. Se a escala Vernier é movida para a direita até que uma marca sua coincida com uma marca da escala principal, o número de décimos de divisões da escala principal que a escala do nônio se deslocou é o número de divisões do nônio, ***n***, contadas a partir de sua marca zero até a marca do nônio que coincidiu com uma marca qualquer da régua principal. Um exemplo de leitura é mostrado na figura abaixo, na qual o comprimento l corresponde a $(12,4 \pm 0,1)\ mm$, onde neste caso, a incerteza do aparelho corresponde à precisão do mesmo.

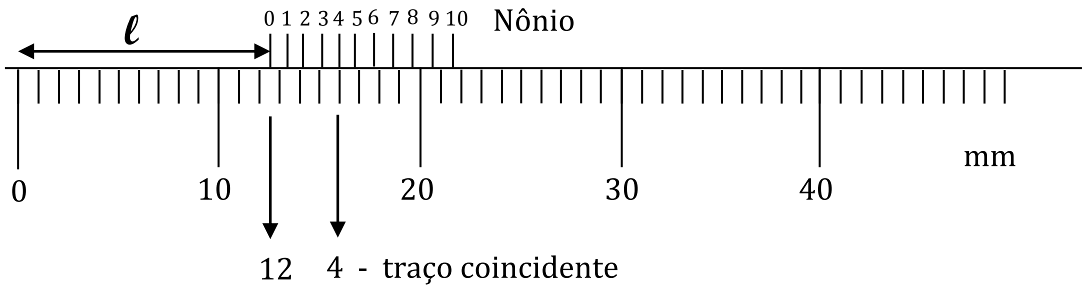


Figura 6- Exemplos de medidas utilizando um paquímetro.

Para se obter bons resultados na medição:

1. O contato dos encostos com as superfícies do objeto deve ser suave. Exageros na pressão do impulsor podem danificar o objeto e resultar em medidas falsas.
2. Manter a posição correta do paquímetro relativamente ao objeto. Inclinações do instrumento alteram as medidas.
3. Antes de efetuar as medições, limpar as superfícies dos encostos e as faces de contato do objeto.
4. Medir o objeto a temperatura ambiente. As possíveis dilatações térmicas acarretam erros sistemáticos.

Ao fazer a leitura, orientar a visão na direção dos traços e perpendicular a linha longitudinal do instrumento.

Em nosso laboratório o paquímetro possui um nônio com N = 20 divisões que correspondem, em comprimento, a 39 divisões da escala principal. A precisão do mesmo é de 0,05 m, que corresponde ao valor da incerteza.

Exercício em Grupo: Medidas de Densidade Superficial

Materiais: *Folha, Régua, Paquímetro e Balança.*

1. Densidade superficial de uma folha.

a) Cada aluno do grupo deve medir, utilizando uma régua milimetrada, as dimensões L_1 e L_2 da folha;

b) Fazer a média das medidas de L_1 e L_2 , com seus respectivos erros totais ΔL_1 e ΔL_2;

c) Determinar a área média (A) da folha, com sua incerteza ΔA.

d) Cada aluno do grupo deve medir a massa da folha com a balança;

e) Fazer a média das medidas da massa (m) da folha e obter a incerteza total (Δm);

f) Obter a densidade superficial da folha (ρ), com a respectiva incerteza ($\Delta\rho$).

2. Repetir as medidas do item 1, com o paquímetro.
3. Comparar a densidade superficial média da folha (com sua respectiva incerteza total) obtida utilizando a régua milimetrada e o paquímetro.

   Use as tabelas abaixo para expressar as medidas e os cálculos:

   Medidas da densidade superficial (ρ) da folha:

Régua		Paquímetro		Balança
L_1 (cm)	L_2 (cm)	L_1 (cm)	L_2 (cm)	m (g)

Cálculos:

Tipos de cálculos	Régua		Paquímetro		Balança
	L_1 (cm)	L_2 (cm)	L_1 (cm)	L_2 (cm)	m (g)
Valor médio					
Incerteza absoluta					
Desvio Padrão					
Incerteza Total*					

A incerteza devido aos erros aleatórios deve ser escolhida entre a incerteza absoluta ou desvio padrão.

Resultados finais:

Régua		Paquímetro	
A (cm^2)	ΔA (cm^2)	A (cm^2)	ΔA (cm^2)
Δ(cm^2)	$\Delta\rho$ (g/cm^2)	Δ(cm^2)	$\Delta\rho$ (g/cm^2)

4. Gráficos

Introdução

Um gráfico é uma curva que mostra a relação entre duas variáveis medidas. Quando, em um fenômeno físico, duas grandezas estão relacionadas entre si o gráfico dá uma ideia clara de como a variação de uma das quantidades afeta a outra.

Assim, um gráfico bem feito pode ser a melhor forma de apresentar os dados experimentais. Ao realizarmos uma medida sugere-se colocar num gráfico todos os pontos experimentais e traçar curvas que se ajustem o mais aproximadamente possível a esses pontos. A forma dessas curvas pode auxiliar o experimentador a verificar a existência de leis físicas ou leva-lo a sugerir outras leis não previamente conhecidas.

Muitas vezes nos defrontaremos com o problema de encontrar uma função que descreva apropriadamente a dependência entre duas grandezas medidas no laboratório. Algumas das curvas mais comuns são: a reta, parábolas, exponenciais, senóides, etc.

Construção de Gráficos

Há algumas regras básicas que devem ser seguidas na construção de gráficos:

1. Colocar um título, especificando o fenômeno físico em estudo, que relaciona as grandezas medidas;
2. Escrever nos eixos coordenados as grandezas representadas, com suas respectivas unidades. A escala deve conter a informação do número de algarismos significativos das medidas. No eixo horizontal (abscissa) é lançada a *variável independente*, isto é, a variável cujos valores são escolhidos pelo experimentador, e no eixo vertical é lançada a *variável dependente*, ou seja, aquela obtida em função da primeira;
3. Em geral, a relação de aspecto (altura/largura) deve ser menor do que 1, pois o gráfico será de mais fácil leitura (por esta razão é que a tela de cinema e a da televisão tem relação de aspecto menor do que 1);
4. Se possível cada eixo deve começar em zero;
5. Escolher escalas convenientes tais que facilitem tanto a construção quanto a leitura dos gráficos. A escala deve ser simples e sugere-se adotar valores múltiplos ou submúltiplos de números inteiros;
6. A escala adotada num eixo não precisa ser igual à do outro;
7. Escolher escalas tais que a curva cubra aproximadamente toda a folha disponível do papel do gráfico;
8. Deve-se ter o cuidado de nunca assinalar na escala as coordenadas dos dados experimentais;
9. Marque cada um dos pontos do gráfico, cuidadosamente e claramente, escolhendo para isto um símbolo adequado e de tamanho facilmente visível (por exemplo, um círculo ou um quadradinho) com um pontinho no centro. Nunca marque os pontos apenas com um pontinho do lápis;

10. Marque claramente as barras de erro em cada ponto. Se o erro for muito pequeno para aparecer na escala escolhida anote ao lado: as barras de erro são muito pequenas para aparecer na figura.

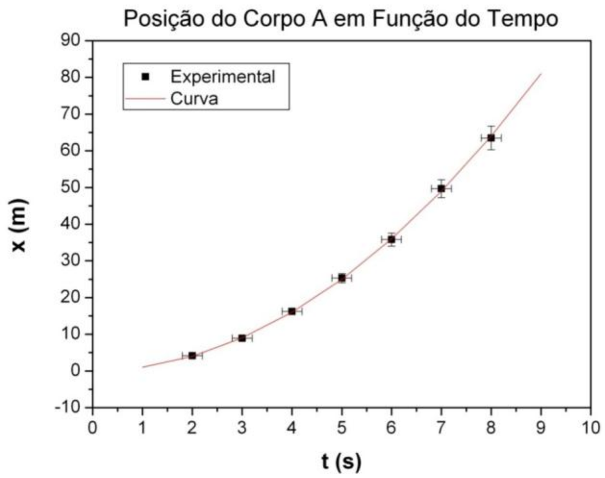


Figura 7 – Gráfico mostrando os dados experimentais e a curva traçada**.**

Quando todos os pontos experimentais já estiverem marcados no gráfico, resta traçar a curva. Esta não precisa passar sobre todos os pontos; de fato, é possível que a curva não passe por nenhum ponto do gráfico. Sendo assim, não é necessário que a curva tenha início no primeiro e termine no último ponto experimental. A figura 7 mostra um exemplo de dados experimentais cuja dependência é caracterizada por uma parábola. Os quadrados (▪) representam os dados experimentais e sua dispersão é devida aos erros cometidos durante a experiência. A linha contínua representa a curva que melhor descreve a dependência quadrática da grandeza x com a grandeza y.

Gráficos e Equações Lineares

A seguir trataremos apenas de grandezas físicas (x e y) relacionadas por uma função y = f(x) = *a*x + *b*, com a e b constantes, onde a é o coeficiente angular e b é o coeficiente linear.

O coeficiente angular corresponde à inclinação da reta, ou seja, $a = \Delta y / \Delta x$, enquanto que o coeficiente linear b é obtido pela interseção da reta com o eixo y (veja Figura 8).

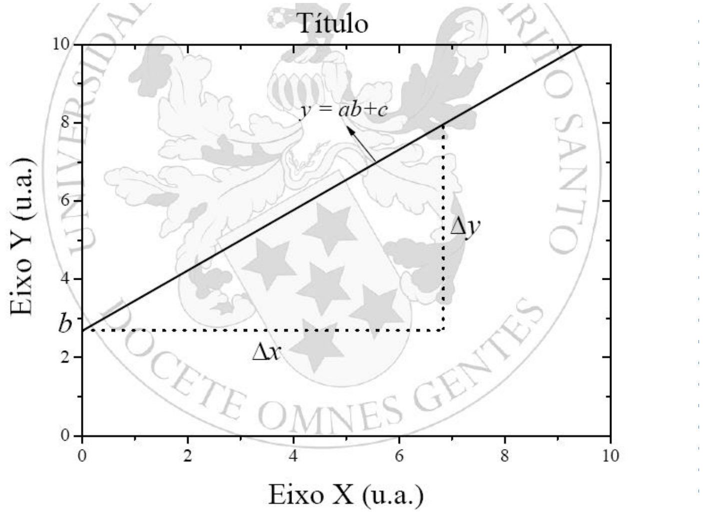


Figura 8 – Determinação dos coeficientes a e b da curva y.

Alguns exemplos típicos são:

Movimento Retilíneo Uniforme (MRU):

Neste caso têm-se duas grandezas físicas (posição x e tempo t) relacionadas pela função linear:

$$x = v_0 t + x_0 \ ,$$

onde v_0 é a velocidade do corpo (constante) e x_0 sua posição inicial. Portanto, lançando num gráfico os pontos medidos de t (no eixo x) e x (no eixo y), conforme a Figura 9, teremos o coeficiente angular correspondente a v_0 e o coeficiente linear a x_0.

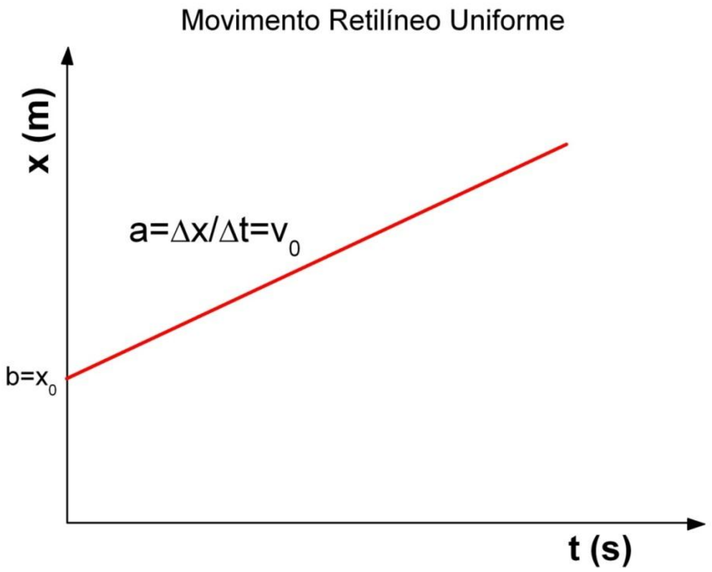


Figura 9 – Exemplo de gráfico do movimento retilíneo uniforme.

Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV):

Neste tipo de movimento temos duas grandezas físicas: tempo t e velocidade v de um corpo sujeito a uma aceleração constante a, descrito pela função:

$$v = at + v_0$$

Neste caso, a construção de uma reta com eixo x correspondendo ao tempo t e a velocidade v ao eixo y, implicará que os coeficientes angular e linear fornecerão os valores da aceleração a e da velocidade inicial v_0 do movimento, respectivamente.

A seguir, descreveremos dois métodos que nos permitem determinar estes coeficientes a partir dos dados experimentais.

Métodos de Determinação dos Coeficientes *a* e *b*

Conforme já foi mencionado, será comum em laboratório nos defrontarmos com medidas de grandezas correlacionadas com as quais não temos uma relação estabelecida. Nestes casos quase sempre a primeira atitude é buscar através de gráficos uma lei simples ligando uma grandeza à outra. Aqui apresentaremos dois métodos para determinar esta relação no caso de uma dependência linear, a partir de dados experimentais.

Método Gráfico

Este método permite estimar os parâmetros de uma reta e é recomendado quando não se dispõe de calculadora ou computador para realização de cálculos. As únicas ferramentas necessárias são: um lápis (ou caneta) e uma régua (de preferência transparente).

Para ilustrar o método, consideremos os dados representados na figura 10.

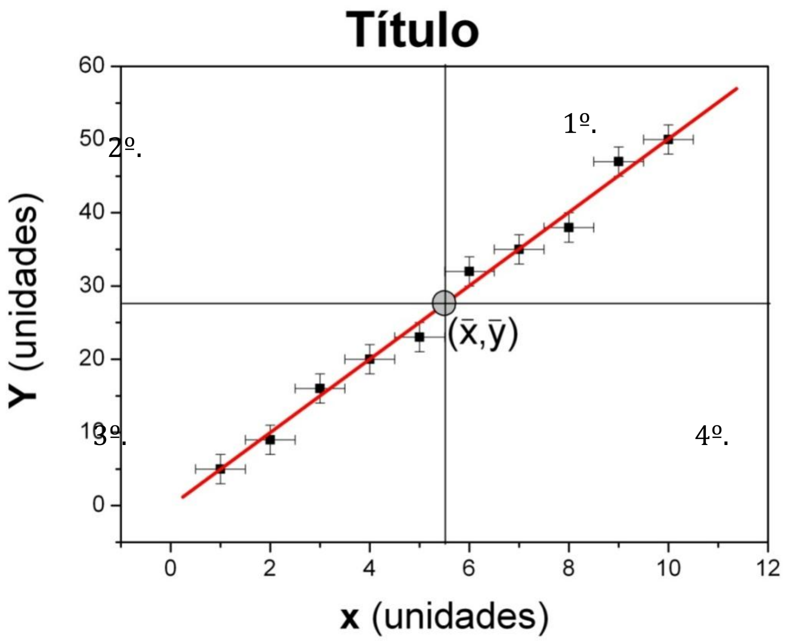


Figura 10 – Pontos experimentais e reta média**.**

Siga os passos abaixo:

1. Estime o centro de gravidade dos pontos $(\bar{x},\bar{y})$, onde $\bar{x}=(x_{\min}+x_{\max})/2$ e $\bar{y}=(y_{\min}+y_{\max})/2$. Os índices *min* e *max* referem-se aos valores mínimos e máximos de x e y medidos. As retas, vertical e horizontal, que passam por este ponto divide o gráfico em quatro quadrantes. No exemplo da figura 10, os dados estão metade no quadrante 1 e metade no quadrante 3.
2. Coloque a ponta do lápis no ponto $(\bar{x},\bar{y})$ e apoie a régua no lápis.
3. Gire a régua em torno do ponto $(\bar{x},\bar{y})$ até que 50% dos pontos **de cada quadrante** estejam por cima, e 50% abaixo da régua. (Note que mais de uma reta satisfazem esta condição e você deve escolher uma média.) Trace a **reta média**. A reta não necessariamente precisa passar por todos os pontos e nem pelos pontos iniciais e finais. A equação desta reta será:

$$y = mx + b$$

Coeficiente Angular (m) e Linear (b) da Reta Média

Para avaliar o coeficiente angular da reta média escolha dois pontos sobre a reta, como sugerido na figura 11 (pontos P e Q).

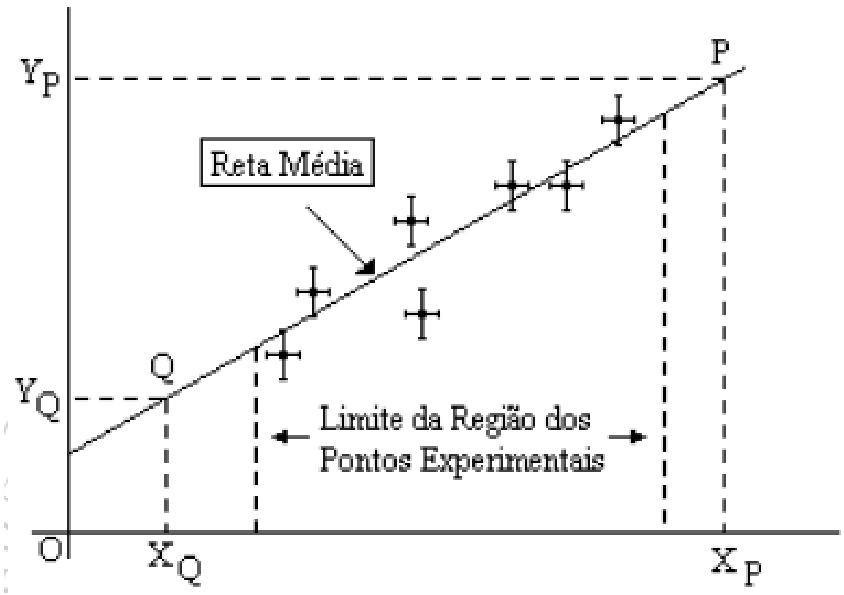


Figura 11 – Determinação do coeficiente angular da reta média.

Os pontos P e Q não são pontos experimentais e devem ser escolhidos em uma posição fora da região delimitada pelos dados experimentais. O coeficiente angular da reta será dado por:

$$m = \frac{Y_P - Y_Q}{X_P - X_Q}$$

O coeficiente linear (b), por sua vez, permanece, sendo, simplesmente, o ponto em que a reta toca o eixo y.

Incertezas dos coeficientes das retas médias

Método Gráfico

Para estimar a incerteza no coeficiente angular da reta média, considere as duas diagonais do quadrilátero ABCD como mostra a figura 12. Para obter os segmentos de reta AB e CD proceda da seguinte forma. Assinale em cada janela de incerteza, o vértice mais distante da reta média. Esse procedimento vai gerar um conjunto de pontos acima e abaixo da reta média. O conjunto de pontos que ficou acima permite traçar uma reta média auxiliar e determinar o segmento AB pela interseção desta reta com as verticais que passam por X_i e X_f. O segmento CD é obtido de forma análoga.

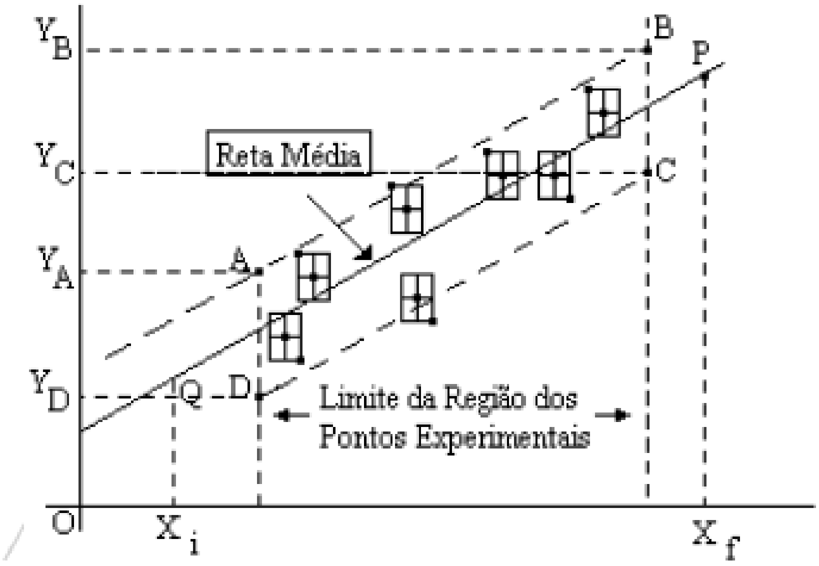


Figura 12 – Procedimento gráfico para obtenção dos coeficientes da reta média.

Então é possível calcular $\pm m\ e \pm b$, a partir das duas diagonais do quadrilátero ABCD:

$$\pm\Delta m = \pm\frac{(m_{\max} - m_{\min})}{2}\ e$$

$$\pm\Delta b = \pm\frac{(b_{\max} - b_{\min})}{2}$$

onde $m_{max} = (Y_B - Y_D)/(X_f - X_i)$ e $m_{min} = (Y_C – Y_A)/(X_f - X_i)$; b_{max} e b_{min} são as extrapolações das duas diagonais até o eixo y.

Método dos Mínimos Quadrados

O ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados é importante, pois ao contrário do método gráfico, é independente da avaliação do experimentador.

Este método consiste em minimizar o erro quadrático médio (S) das medidas. Considere então um conjunto de N medidas (x_i, y_i), com i assumindo valores inteiros desde 1 até N. S é definido como:

$$S = \sum_{i=1}^{N}\Delta S_i = \sum_{i=1}^{N}(y - y_i)^2 \ ,$$

onde y é o valor da curva ajustada (y = a.x + b). O objetivo é somar os ΔS_i das N medidas e traçar uma reta que torne a soma dos ΔS_i mínima. Matematicamente isso corresponde a $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$ e $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$. É razoável acreditar que para que isso aconteça a reta desejada deve passar entre todos os pontos experimentais. Destas duas expressões extraímos os valores dos parâmetros a e b. O resultado é:

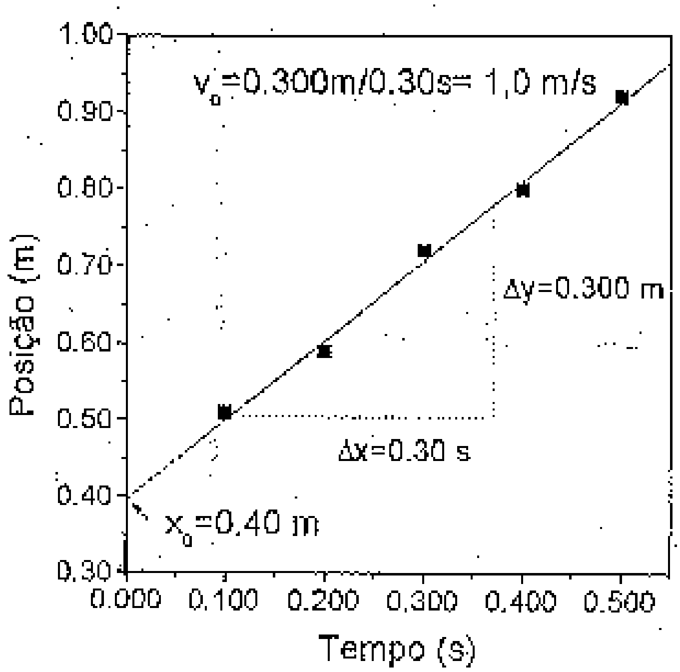
$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \sum_{i=1}^{N} x_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2},$$

onde usou-se a notação de somatório: $\sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_N$.

Exemplo de Determinação dos Coeficientes Angular e Linear

Considere uma medida de movimento retilíneo uniforme efetuado por um carrinho no laboratório. Foram medidos tanto sua posição x (em metros) quanto o tempo t (em segundos) e os resultados estão conforme a tabela abaixo. Construa o gráfico que representa o movimento e determine a velocidade e a posição inicial do carrinho usando o método dos mínimos quadrados e o método gráfico.

X tempo (s)	Y posição (m)
0.100	0.51
0.200	0.59
0.300	0.72
0.400	0.80
0.500	0.92



Para usarmos o método dos mínimos quadrados, sugere-se a construção de uma tabela, conforme indicado abaixo, lembrando qu aqui o eixo x corresponde ao tempo t e o eixo y, à posição x:

x(s)	y(m)	xy	x^2
0,100	0,51	0,051	0,0100
0,200	0,59	0,12	0,0400
0,300	0,72	0,22	0,0900
0,400	0,80	0,32	0,160
0,500	0,92	0,46	0,250
Σ x = 1,500	Σ y = 3,54	Σ xy=1,17	Σx^2 = 0,550

Com esses resultados, basta substituir os valores nas fórmulas para a e b e lembrar que neste caso temos N = 5 medidas:

$$a = \frac{5x1,17 - 1,500x3,54}{5x0,550 - (1,500)^2} = \frac{0,54}{0,50} = 1,08\,m/s = 1,1\,m/s$$

$$b = \frac{\left(0,550x3,54 - 1,17x1,500\right)}{5x0,550 - (1,500)^2} = \frac{0,20}{0,50} = 0,40\,m$$

Portanto, temos v_0 = 1,1m/s e x_0 = 0,40m.

Para construir a curva, basta atribuir pelo menos dois valores para t e encontrar os correspondentes x. Verifica-se que $\bar{x}$ = 0,30s e $\bar{y}$ = 0,71m. Com este centro de gravidade determina-se conforme a figura anterior os valores v_0 = 1,0m/s e x_0 = 0,40m. Observe a concordância dos dois métodos.

Exercícios

1) Na Tabela abaixo estão apresentadas as posições sucessivas de um certo objeto, em movimento retilíneo e uniforme.

Tempo(s) $\pm$ 0,01	0,14	0,20	0,32	0,44	0,52	0,64
Posição (mm) $\pm$ 4	879	895	919	949	964	970

Marque os pontos em papel milimetrada, trace a reta média e obtenha a velocidade do objeto. A seguir desenhe as barras de incerteza e obtenha $v \pm \Delta v$ pelo método gráfico.

Obs: As barras de erro ou incerteza indicam a faixa de valores prováveis para a grandeza medida.

2) Estudando o movimento de um carrinho, efetuado ao longo de um trilho de ar (movimento retilíneo uniforme) obteve-se os seguintes dados experimentais, após:

Posição (mm)	t_1(s)	t_2(s)	t_3(s)	t_4(s)	t_5(s)
879	0,1400	0,1500	0,1400	0,1200	0,1200
895	0,2000	0,2200	0,2400	0,2500	0,2000
919	0,3200	0,3300	0,2900	0,3400	0,3300
949	0,4400	0,4500	0,4600	0,4600	0,4500
964	0,5200	0,5200	0,5100	0,5300	0,5900
970	0,6400	0,7200	0,7000	0,6900	0,6000

Acima uma posição para o sensor de medida no trilho foi escolhida e então mediu-se o tempo gasto pelo carrinho para atingi-lo. Esta medida foi feita 5 vezes, correspondendo aos valores t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5. Em seguida repetiu-se o procedimento para outras 5 posições do sensor ao longo do trilho.

Determine utilizando o método dos mínimos quadrados a velocidade do carrinho e sua posição inicial com os erros associados.

5. Primeira Sequência de Experiências

Experiência 1: Estudo de Cinemática Utilizando Colchão de Ar

Objetivos

- ✓ Reconhecer o movimento retilíneo uniforme (MRU) e o uniformemente variado (MRUV);
- ✓ Obter a velocidade média de um corpo em movimento retilíneo de translação a partir do gráfico de distância percorrida em função do tempo;
- ✓ Obter a aceleração média de um corpo em movimento retilíneo de translação a partir do gráfico da velocidade em função do tempo;
- ✓ Entender a diferença experimental entre medidas instantâneas e médias.

Materiais Necessários

- ✓ Um colchão de ar com elevação através de fuso milimétrico;
- ✓ Um carro com imã, haste e mola com suporte na cabeceira esquerda;
- ✓ Quatro massas acopláveis de 0,5 N;
- ✓ Um computador para ser utilizado como cronômetro digital;
- ✓ Dois sensores fotoelétricos.

Procedimento Experimental

Parte 1 – MRU

1. Para os procedimentos experimentais de 2 a 15, observe a Figura 1.
2. Cuidado: Não arraste o carro sobre o trilho com o colchão de ar desligado.
3. Com o colchão de ar sem inclinação, colocar o imã na extremidade direita do carro e 04 pesos de 50 N sobre este, conforme Figura 1.
4. Coloque a extremidade esquerda do carro sobre a posição 250 mm da escala (800 mm na escala do outro lado). O primeiro sensor deve ser posicionado de forma a que a sombra da haste lateral do carro esteja sobre o buraco do mesmo, quando o carro se encontrar na posição descrita.
5. Coloque a extremidade esquerda do carro sobre a posição 300 mm da escala. Utilize a sombra da haste lateral do mesmo para posicionar o segundo sensor. Determine a incerteza na medida da posição por este método.
6. Ligue o colchão de ar e verifique se o fluxo de ar é suficiente para eliminar o atrito entre o carrinho e o trilho, se não, regule com cuidado a bomba de ar.

7. Use o medidor de nível para verificar se o trilho está nivelado, se não, realize os ajustes necessários.

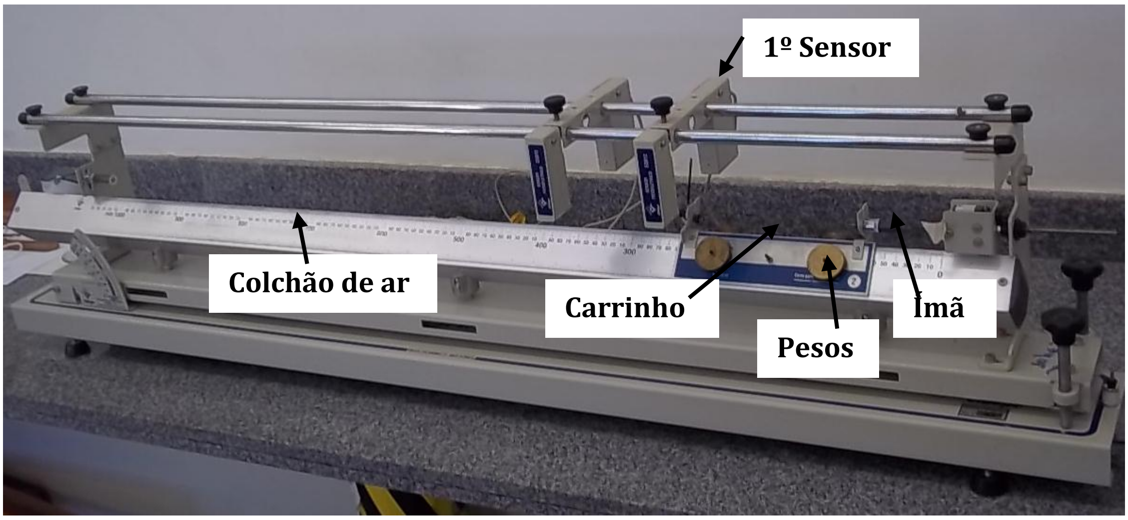


Figura 1 – Montagem experimental do colchão de ar.

8. Posicione o carro de forma a que o imã em sua extremidade direita fique encostado exatamente no centro da bobina posicionada na extremidade direita do trilho. Quando solto nesta posição o carro não deve se mover.
9. Um dos integrantes do grupo deve posicionar-se junto ao computador e colocar o cronômetro do experimento para funcionar.
10. Dispare o carro da posição anterior usando o botão de acionamento da bobina. Verifique se o carro não está "pulando" ao ser lançado pela bobina, se o movimento não for horizontal desde o inicio chame o professor.
11. Anote o tempo que o carro levou para percorrer a distância entre os sensores.
12. Após o carro chegar ao outro lado do colchão, pare o movimento e retire o carro.
13. Repita os procedimentos 3 até 11, quatro vezes, anote os tempos obtidos na Tabela 1. O desvio padrão destas medições será adotado como a incerteza no tempo.
14. Mova o segundo sensor 50 mm na escala (para 350 mm). Repita os procedimentos 8 a 13 para esta nova distância, depois aumente a distância mais 50 mm ... repita até que a posição final do segundo cursor seja de 600 mm.
15. Anote os valores obtidos na Tabela 1.

Parte 2 – MRUV

1. Substitua o imã no carro por um componente metálico, de forma a que a bobina passe a atrair ao invés de repelir o carro. Você também pode optar por segurar o carrinho, no movimento inicial.
2. Incline a rampa em torno de 10 graus. Avalie a incerteza no ângulo medido.
3. Coloque a haste o mais próximo possível do primeiro sensor, no movimento inicial, para garantir que $v_o \sim 0$ m/s. Isto simplificará os cálculos de velocidade instantânea.
4. Refaça as medições em analogia com a parte 1 deste roteiro. Preencha a Tabela 2.

5. Obtenha uma equação para as velocidades instantâneas, utilizando as equações abaixo. Obtenha, deste cálculo, uma expressão para as incertezas nas velocidades. Lembre-se que v_o ~ 0 m/s.

$$v = v_0 + a\Delta t$$

$$x = x_0 + v_0\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2}$$

6. Preencha a Tabela 3, passando a unidade de velocidade para m/s.

Procedimentos e Cálculos a Serem Efetuados no Relatório

- Apresente a folha de dados experimentais. Certifique-se de que a incerteza contenha apenas um algarismo significativo. A precisão da grandeza medida deve ser correspondente com o da incerteza.
- No MRU obtenha a média das velocidades com incerteza a partir dos valores calculados diretamente da Tabela 1 (calculando os valores de velocidade linha por linha).
- No MRU, faça um gráfico de distância percorrida em função do tempo, utilizando a Tabela 1. Obtenha a velocidade do carro com incerteza.
- No MRUV, faça um gráfico de velocidade em função do tempo utilizando a Tabela 3. Obtenha a aceleração do carro com incerteza.
- Da aceleração calculada a partir do gráfico, obtenha a aceleração da gravidade com incerteza e compare com o valor tabelado na literatura (cite a referência).

Questões a Serem Abordadas no Relatório

- No MRU, faça uma comparação dos valores de velocidades calculadas através da média e pelo coeficiente angular da reta. Qual deles é mais confiável? Explique.
- No MRUV, foi considerado que v_0 = 0 m/s, no início do movimento. Se fizermos esta consideração para v_0, o cálculo da aceleração do carro será afetada por algum erro? Justifique sua resposta no relatório.
- É possível determinar se a aceleração foi mesmo constante nos dois casos? Demonstre que sim ou que não. Obs: Aceleração constante igual a zero ainda é aceleração constante.

FOLHA DE DADOS EXPERIMENTAIS

Experiência 1: Estudo de Cinemática Utilizando Colchão de Ar

Tabela 1 – Distâncias percorridas, tempos médios e desvios no MRU.

Distância (mm)	Tempo 1	Tempo 2	Tempo 3	Tempo 4	Média	Desvio
50 ± ______						
100 ± ______						
150 ± ______						
200 ± ______						
250 ± ______						
300 ± ______						
350 ± ______						
400 ± ______						
450 ± ______						
500 ± ______						
550 ± ______						
600 ± ______						

Tabela 2 – Distâncias percorridas, tempos médios e desvios no MRUV.

Distância (mm)	Tempo 1	Tempo 2	Tempo 3	Tempo 4	Média	Desvio
50 ± ______						
100 ± ______						
125 ± ______						
150 ± ______						
200 ± ______						
225 ± ______						
250 ± ______						
300 ± ______						
325± ______						
350 ± ______						
400 ± ______						
450 ± ______						
500 ± ______						
525 ± ______						
550 ± ______						
600 ± ______						

Tabela 3 – Valores calculados da velocidade no MRUV, a partir dos valores de distância e tempo.

Distância (mm)	Intervalo de Tempo (s) (com incerteza)	Velocidade instantânea no fim do percurso (m/s) (com incerteza)
50 ± ______		
100 ± ______		
125 ± ______		
150 ± ______		
200 ± ______		
225 ± ______		
250 ± ______		
300 ± ______		
325± ______		
350 ± ______		
400 ± ______		
450 ± ______		
500 ± ______		
525 ± ______		
550 ± ______		
600 ± ______		

Experiência 2: Sistema em Equilíbrio Estático (*Opcional*)

Objetivos

- ✓ Estudar um sistema de equilibrio estático;
- ✓ Utilizar as leis de Newton para verificar a condição de equilibrio estático.

Materiais Necessários

- ✓ Um suporte;
- ✓ Um conjunto de corpos de prova;
- ✓ Dois conjuntos de roldanas;
- ✓ Três ganchos metálicos;
- ✓ Um Dinamômetro.

Introdução

De acordo com a segunda Lei de Newton: *A força resultante* $\vec{F}_{res}$ *sobre um corpo de massa m (constante) está relacionada com a aceleração do corpo* $\vec{a}$ *por:*

$$\vec{F}_{res} = m.\vec{a}$$

Se um sistema encontra-se em equilíbrio estático, pode-se dizer que a soma de todas as forças que atuam sobre ele é zero. Neste experimento, estuda-se o equilíbrio em um ponto P de um sistema constituído por pesos e roldanas [Figura 1(a)]. Conforme o diagrama de corpo livre, na Figura 1 (b), tem-se no ponto P, a seguinte condição de equilíbrio $\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{T_3} = 0$.

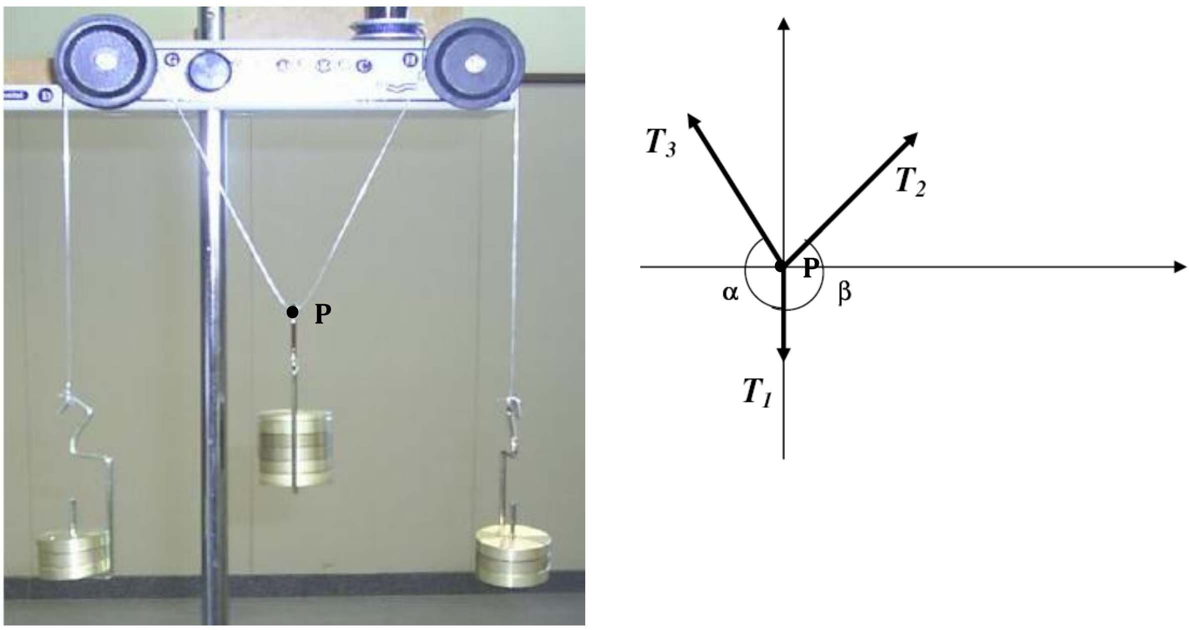


Figura 1 - (a) Sistema em equilíbrio estático. (b) Diagrama de corpo livre para o sistema.

Desprezando a massa e o atrito nas roldanas, pode-se afirmar que as trações são iguais aos pesos.

Procedimentos Experimentais

1. Escolha três conjuntos de pesos. Utilize um dinamômetro e registre na Tabela 1, seus valores com suas respectivas incertezas.
2. Para cada conjunto de pesos, monte um sistema em equilíbrio, conforme a Figura 1(a). Meça, para cada configuração de equilíbrio os ângulos α e β mostrados na Figura 2(b). Inclua as incertezas nas medições dos ângulos.
3. Preencha a Tabela 1 na folha de dados experimentais.

Procedimentos e Cálculos a serem Efetuados no Relatório

- Apresente a folha de dados experimentais. Certifique-se de que a incerteza contenha apenas um algarismo significativo. A precisão da grandeza medida deve ser correspondente com o da incerteza.
- Calcule os valores dos senos e cossenos dos ângulos α e β, com suas respectivas incertezas;
- Para as três configurações de equilíbrio, mostre que a soma das componentes horizontal e vertical das forças se anulam. Será necessário incluir os cálculos de incerteza, para fins comparativos.

FOLHA DE DADOS EXPERIMENTAIS

Experiência 2: Sistema em Equilíbrio Estático.

Tabela 1. Dados experimentais.

Medida	$P_1 \pm \Delta P_1$ (N)	$P_2 \pm \Delta P_2$ (N)	$P_3 \pm \Delta P_3$ (N)	α (graus)	β (graus)
01					
02					
03					

Experiência 3: Forças no Plano Inclinado com Atrito

Objetivos

- ✓ Reconhecer os efeitos da força motora P_x e de sua equilibrante (tensão, atrito, etc).
- ✓ Reconhecer os efeitos da componente do peso P perpendicular a rampa, P_y, e sua equilibrante (força normal N).
- ✓ Determinar a vantagem mecânica V_m da máquina simples, denominada plano inclinado.
- ✓ Saber interpretar o comportamento do atrito no sistema.
- ✓ Determinar o coeficiente de atrito estático de duas superfícies.

Materiais Necessários

- ✓ Um plano com ajuste de inclinação, com transferidor acoplad, escala de 0 a 45 graus;
- ✓ Duas massas acopláveis de 50 g;
- ✓ Um carrinho com conexão flexível para dinamômetro e indicador da orientação da força peso;
- ✓ Um dinamômetro de 2 N;
- ✓ Um corpo de prova de madeira com uma das faces revestida em material com alto coeficiente de atrito.

Procedimento Experimental

1. Calibre o dinamômetro para medições na posição vertical. Avalie a incerteza deste instrumento.
2. Pese o sistema carrinho + pesos com o uso do dinamômetro. Anote o valor obtido, bem como a incerteza avaliada.
3. Girando o manípulo do fuso de elevação contínua eleve o plano inclinado até um ângulo de 30 graus. Avalie a incerteza neste ângulo (Figura 1).

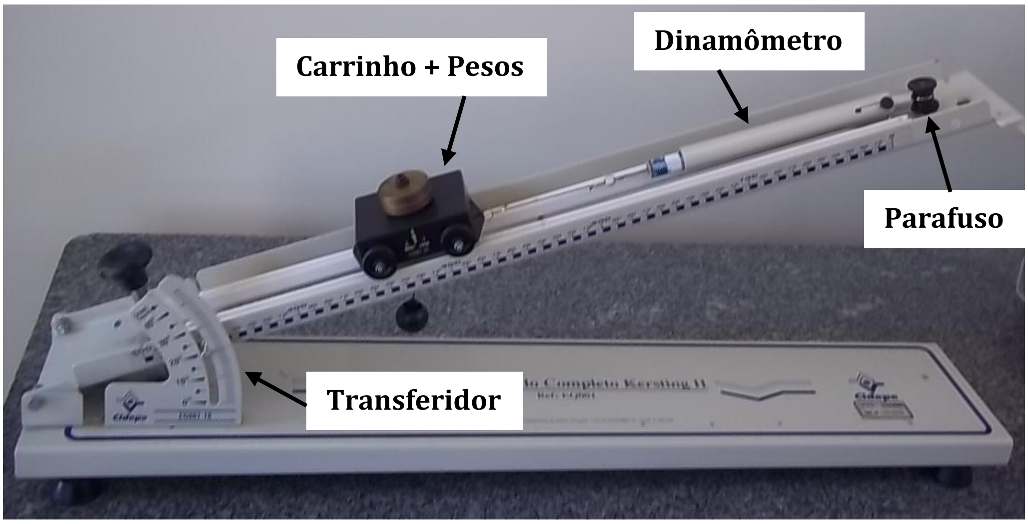


Figura 1- Montagem experimental para o sistema plano inclinado.

4. Calibre o dinamômetro para efetuar medições em um ângulo em torno de 30 graus. Prenda o dinamômetro no parafuso situado na parte superior da rampa do plano inclinado. Observe para que o dinamômetro fique paralelo ao plano inclinado (veja a Figura 1).

5. Prenda o carrinho ao dinamômetro.

6. Realize quatro valores de força medida pelo dinamômetro. Obtenha a média e calcule o desvio padrão. Este valor deverá ser adicionado à incerteza do dinamômetro, para a obtenção da incerteza total.

7. Diminua a inclinação do plano inclinado para 20 graus e repita o procedimento 6.

8. Retire o carro e o dinamômetro da rampa.

9. Use o dinamômetro para medir o peso dos corpos de prova. Lembre-se de calibrá-lo novamente.

10. Diminua a inclinação do plano, até que este fique na horizontal (Figura 2).

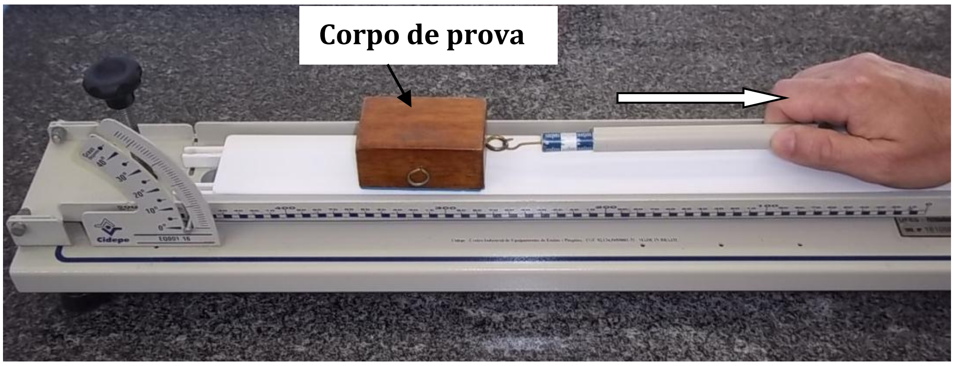


Figura 2 - Montagem experimental para o plano em posição horizontal.

11. Reajuste o zero do dinamômetro para que este trabalhe na posição horizontal.

12. Coloque o corpo de prova sobre o plano. Acople o dinamômetro e aumente lentamente a força, observando e anotando o valor correspondente a iminência de movimento. Esta corresponde à força de atrito estático máxima ($F_{emáx}$). Realize este procedimento para os dois corpos de prova.

13. Desacople o dinamômetro do corpo de prova. Aumente o ângulo de inclinação da rampa, batendo <u>levemente</u> nela em cada grau, até que o corpo de prova comece a se mover lentamente.

14. Retire o corpo, reduza um pouco o ângulo, recoloque o corpo sobre a rampa e verifique se o corpo ainda se move. Caso não se mova aumente o ângulo até ele começar a se mover. Anote este ângulo. Faça isto para os dois corpos de prova.

15. Repita a determinação do ângulo em que o corpo está na iminência de movimento cinco vezes.

16. Preencha a folha de dados experimentais.

Procedimentos e Cálculos a Serem Efetuados no Relatório

- Apresente a folha de dados experimentais. Certifique-se de que a incerteza contenha apenas um algarismo significativo. A precisão da grandeza medida deve ser correspondente com o da incerteza.

- Apresente, para cada sistema estudado, um diagrama de forças (com valores e cálculos de incerteza).
- Verifique se a força medida no dinamômetro para o carrinho no plano inclinado de $\theta = 20$ e 30^o confere com o valor medido no dinamômetro. Considere os cálculos de incerteza.
- Calcule a vantagem mecânica, V, do plano inclinado [V = Peso/(Força mínima para suspender o carro)], para $\theta = 20$ e 30^o.
- Calcule os coeficientes de atrito estático dos objetos (corpo de prova) em relação à rampa, utilizando o dinamômetro (com o plano horizontal) e sem o dinamômetro (com o plano inclinado). Inclua cálculos de incerteza.
- O coeficiente de atrito estático é numericamente igual a tangente do ângulo de inclinação da rampa quando o corpo se encontra na iminência de movimento? Por que?

Questões a serem Abordadas no Relatório

- Faça uma discussão sobre as vantagens e desvantagens do uso de planos inclinados com menor ângulo de inclinação.
- Pesquise sobre a influência da área de contato entre duas superfícies, nos valores de coeficiente de atrito estático e cinético.

FOLHA DE DADOS EXPERIMENTAIS

Experiência 3: Equilíbrio entre Forças no Plano Inclinado com Atrito

Peso (carrinho + massas 50 g) com incerteza = _____________±____________

Força medida pelo dinamômetro com o carrinho no plano inclinado.

Ângulo (o)	Força Medida				Força Média	Desvio	Incerteza
30,0 ±							
20,0 ±							

Peso do corpo de prova 1 com incerteza = ___________________________

Peso do corpo de prova 2 com incerteza = ___________________________

Força de atrito estático no plano horizontal.

Objeto	Medida 1	Medida 2	Medida 3	Medida 4	Medida 5	Média	Desvio	Incerteza
1								
2								

Ângulo de Iminência do Movimento (obtido variando o ângulo até que o objeto esteja na iminência de movimento).

Medições	*Objeto 1*	*Objeto 2*
Medida 1		
Medida 2		
Medida 3		
Medida 4		
Medida 5		
Média		
Desvio		
Incerteza		

Experiência 4: Lançamento Horizontal, Conservação da Energia e da Quantidade de Movimento

Objetivos

- ✓ Identificar corretamente a grandeza alcance em um lançamento horizontal de projétil a partir de uma rampa;
- ✓ Executar corretamente as medidas do alcance com o seu respectivo desvio;
- ✓ Utilizar o princípio de conservação de energia e equações de trajetória, para determinar a velocidade de lançamento de uma esfera (ao abandonar a rampa);
- ✓ Verificar a lei da conservação das quantidades de movimento em colisões frontais e laterais.

Materiais Necessários

- ✓ Uma rampa com altura regulável e sustentação ajustável para apoio da esfera alvo;
- ✓ Um fio de prumo;
- ✓ Uma esfera metálica maior para lançamento;
- ✓ Uma esfera metálica menor para lançamento;
- ✓ Uma folha de papel carbono;
- ✓ Uma folha de papel de seda;
- ✓ Uma régua milimetrada;

Procedimento Experimental

Parte 1 - Determinação do Alcance de um Projétil

1. Nivele a base da rampa.
2. Estique primeiramente a folha de papel carbono virada para cima sobre a mesa, depois estique a folha de papel de seda e a prenda por cima do papel carbono;
3. Utilizando o prumo, marque no papel a posição x_0, que fica verticalmente abaixo da saída da rampa (veja a Figura 1). Este ponto serve como referência para a medida dos alcances.
4. Meça com uma régua milimetrada a altura (H) do tripé (com incerteza), do tampo da mesa até a saída da rampa. Estime a incerteza e anote o valor na folha de dados.
5. Solte a esfera metálica maior do ponto de desnível 50 mm existente na escala da rampa. Ela percorrerá a canaleta e fará um voo até colidir com o papel carbono. (Fique atento para que a esfera toque somente uma vez sobre o papel).
6. Repita o processo acima em cinco lançamentos. Risque sobre o papel, as posições correspondentes ao máximo ($x_{máx}$) e mínimo ($x_{mín}$) alcance. O valor médio destas duas grandezas fornece o alcance médio da esfera e, a diferença entre elas representa a incerteza nos valores de alcance. Anote os valores obtidos na folha de dados experimentais.

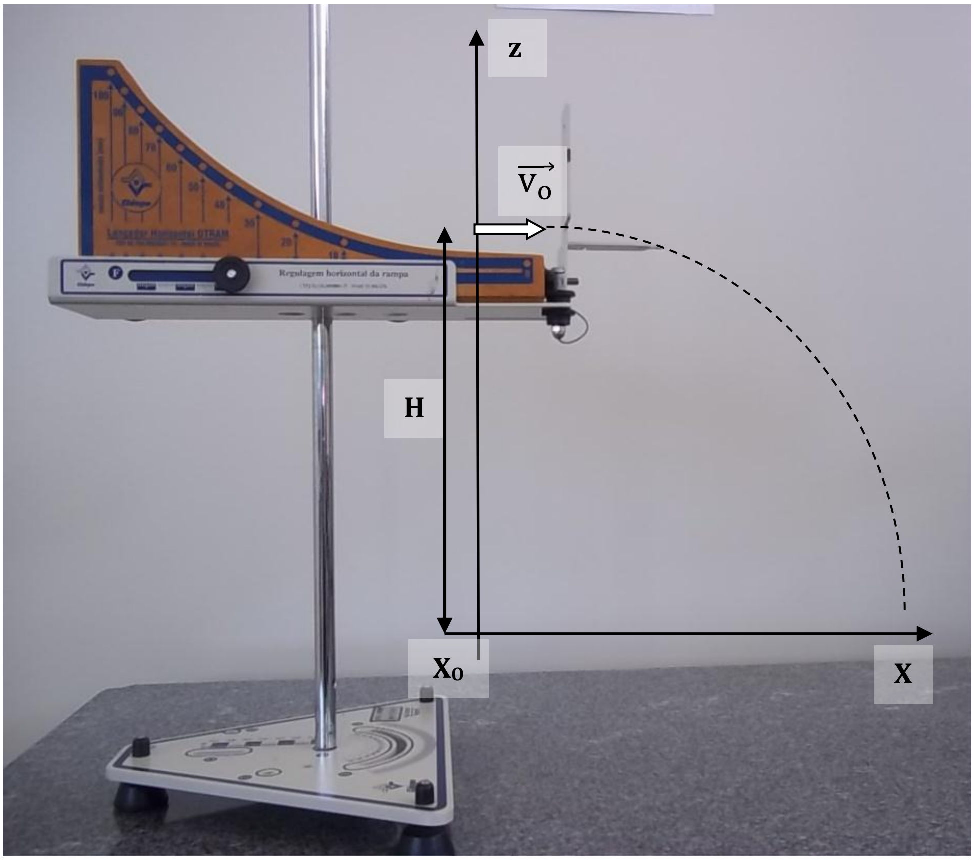


Figura 1 – Montagem experimental para o lançamento horizontal.

7. Caso algum lançamento caia muito distante dos demais, despreze-o e refaça o lançamento.

8. Repita os procedimentos 2 – 7 com os desníveis (h) de 20, 80 e 100 mm avaliando as respectivas incertezas. Anote os valores na folha de dados.

Parte 2 - Conservação da Quantidade de Movimento numa Colisão Frontal

1. Meça o peso, com incerteza, da esfera maior (P_G) e menor (P_P) utilizando o dinamômetro.

2. Observe a ilustração na Figura 2. Coloque a esfera menor sobre o suporte da esfera alvo e regule o sistema para a esfera metálica maior se choque frontalmente com ela ao abandonar a rampa. Faça testes, observando a posição dos alcances na folha de papel.

3. Solte a esfera metálica maior do ponto de desnível 100 mm existente na escala da rampa. Ela percorrerá a canaleta e fará um voo até colidir, primeiro com a esfera menor e depois com o papel carbono.

4. De forma semelhante ao procedimento 6 da parte 1, determine os valores de alcance para a esfera maior (X_G) e menor (X_P). Anote os valores na folha de dados.

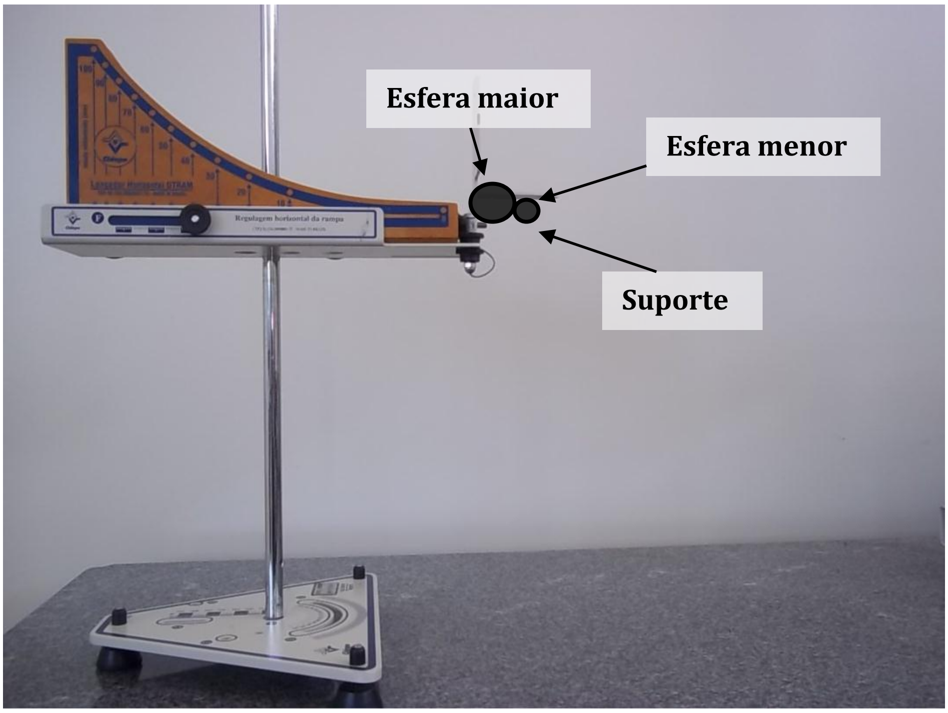


Figura 2 – Montagem experimental para o lançamento horizontal.

Parte 3 - Conservação da Quantidade do Movimento numa Colisão Lateral

1. Coloque a esfera metálica menor sobre o suporte da esfera alvo e regule o sistema para que a esfera metálica maior se choque na lateral da esfera menor ao abandonar a rampa.
2. Faça um teste e observe as marcações deixadas pelas esferas no papel. Verifique se a esfera maior não toca o suporte da esfera menor, após a colisão com esta. Se estiver tudo certo, realize mais quatro colisões.
3. Determine o alcance na direção x da esfera maior (X_G) e menor (X_P) e, na direção y (Y_G e Y_P). Anote os valores na folha de dados experimentais. O referencial para a determinação dos alcances em y (y_0) pode ser obtido, traçando uma reta média que une as marcações da esfera maior, quando não á colisão.

Procedimentos e Cálculos a serem Efetuados no Relatório

- Apresente a folha de dados experimentais. Certifique-se de que a incerteza contenha apenas um algarismo significativo. A precisão da grandeza medida deve ser correspondente com o da incerteza.

Parte 1 - Determinação do Alcance de um Projétil

- Calcule o módulo do vetor velocidade na saída da rampa usando conservação de energia e as equações das trajetórias. Inclua cálculos de incerteza. Compare os resultados e explique qualquer divergência se houver.
- Existe conservação de energia mecânica neste sistema? Se não, determine qual é a razão da perda de energia e determine sua magnitude para as três alturas das quais a esfera partiu.

Parte 2 - Para a Colisão Frontal

- Calcule a quantidade de movimento total das esferas, antes e após a colisão. Inclua os cálculos de incerteza. Houve conservação da quantidade de movimento? Justifique.

  Obs: Não inclua o movimento em z, nos cálculos da quantidade de movimento.

Parte 3 - Para a Colisão Lateral

- Calcule a quantidade de movimento total das esferas, antes e após a colisão. Faça isto separadamente, para os movimentos em x e em y. Não inclua o movimento em z, nos cálculos da quantidade de movimento.
- Houve conservação da quantidade de movimento? Justifique.

FOLHA DE DADOS EXPERIMENTAIS

Experiência 4: Lançamento Horizontal, Conservação da Energia e da Quantidade de Movimento

Altura ($H \pm \Delta H$) = ____________________

Quadro 1 – Valores medidos de alcance com incerteza.

Marca na Escala da Rampa (mm)	Alcance Horizontal Médio (**X**)	Incerteza em **X**
20 ± _________		
50 ± _________		
80 ± _________		
100 ± _________		

Quadro 2 – Valores medidos de peso das eferas maior e menor.

$P_G \pm \Delta P_G$	$P_P \pm \Delta P_P$

Quadro 3 – Valores medidos de alcance horizontal para as esferas maior e menor na colisão frontal.

$X_G \pm \Delta X_G$	
$X_P \pm \Delta X_P$	

Quadro 4 – valores medidos de alcance, nas direções x e y, das esferas maior e menor na colisão lateral.

Esfera Maior	$X_G \pm \Delta X_G$	
	$Y_G \pm \Delta Y_G$	
Esfera Menor	$X_P \pm \Delta X_P$	
	$Y_P \pm \Delta Y_P$	

Experiência 5: Deformações Elásticas

Objetivos

- ✓ Calcular a constante elástica de molas helicoidais;
- ✓ Interpretar o gráfico de força em função da elongação de uma mola;
- ✓ Determinar a constante de mola equivalente nas associações em paralelo e em série;

Materiais Necessários

- ✓ Sistema de sustentação formado por tripé triangular, haste e sapatas niveladoras e suporte para régua e molas;
- ✓ Duas molas helicoidais;
- ✓ Um dinamômetro e um conjunto de pesos (discos);
- ✓ Um gancho lastro e duas réguas.

Procedimento Experimental

Parte 1 – Constantes elásticas de molas individuais

1. Calibre o dinamômetro para realizar medições na vertical. Meça o valor do peso do gancho lastro (P_{Gancho}), bem como dos discos (P1, P2, ...). Não se esqueça de subtrair o peso do gancho, para a obtenção do peso dos discos. Avalie a incerteza nestes valores e anote os resultados na Tabela 1 da folha de dados experimentais.
2. Execute a montagem, conforme a Figura 1, prendendo a régua no aparato experimental e dependurando uma mola na marcação A ou B (indicadas na peça).

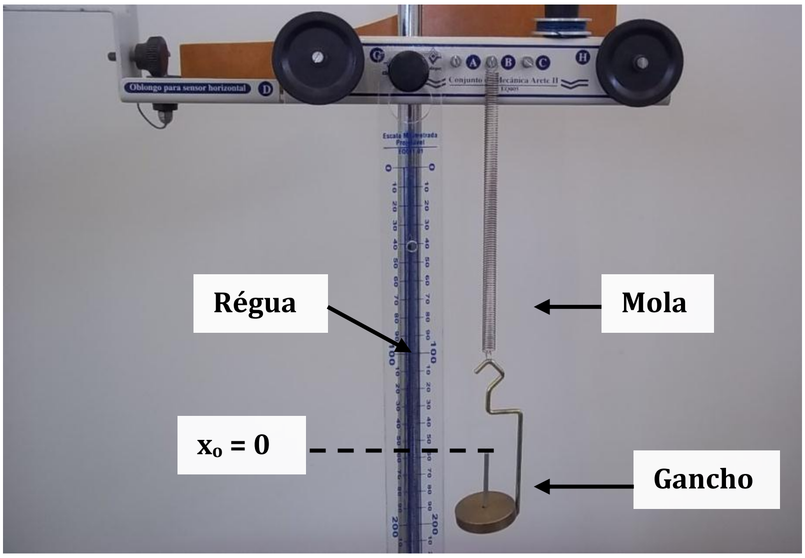


Figura 1 – Montagem experimental para o estudo de deformações elásticas.

3. Coloque o gancho lastro suspenso na mola, considerando a sua posição inicial de equilíbrio como zero. Defina um ponto de referência e assinale-o como zero na escala da régua.

4. Acrescente os pesos medidos, um de cada vez, medindo os valores correspondentes de elongação da mola. Complete a Tabela 1, na folha de dados, para a mola de constante K_1. Repita este procedimento e complete a Tabela 2, para a mola de constante K_2. Inclua incertezas em todos os valores obtidos.

Parte 2 – Constante elástica de molas em paralelo e em série

5. Acople as molas em paralelo, conforme a Figura 2 e obtenha valores de elongação correspondentes aos pesos. Complete a Tabela 3.
6. Repita o item anterior para as molas associadas em série. Complete a Tabela 4.

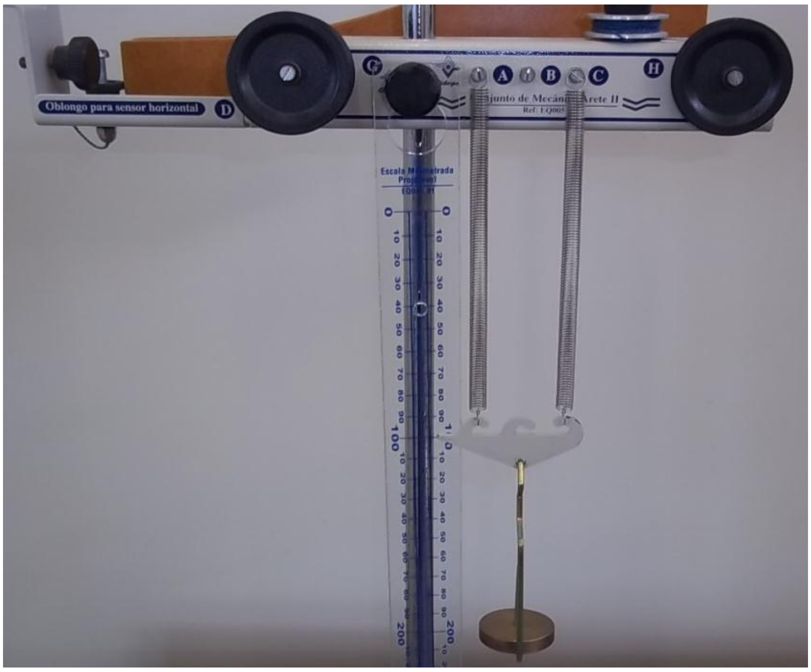


Figura 2 – Montagem experimental para a associação de molas em paralelo.

Procedimentos e Cálculos a Serem Efetuados no Relatório

- Apresente a folha de dados experimentais. Certifique-se de que a incerteza contenha apenas um algarismo significativo. A precisão da grandeza medida deve ser correspondente com o da incerteza.

Parte 1 – Constantes elásticas de molas individuais

- Calcule, linha por linha, nas Tabelas 1 e 2 as constantes elásticas (K_1 e K_2) das molas 1 e 2 respectivamente. Inclua os cálculos de incerteza.
- Obtenha um valor médio para as constantes K's, com incerteza total. Lembre-se que no cálculo de incerteza, o desvio padrão deve ser somado à incerteza média obtidas dos valores de k's.
- Das Tabelas 1 e 2, faça um gráfico de peso em função das elongações das molas. Trace as retas auxiliares e obtenha as constantes elásticas K_1 e K_2 com incerteza.
- Compare os valores de K_1 e K_2 obtidos pela média e via gráfico. Os valores são equivalentes? Qual dos métodos é mais confiável? Explique.

Parte 2 – Constantes elásticas de molas em paralelo e série

- Use as Tabelas 3 e 4 e obtenha, via gráfico, os valores das respectivas constantes elásticas, com incerteza, das molas associadas em série e em paralelo.

- Obtenha as constantes elásticas usando as expressões teóricas para a associação em paralelo, $k_{eq} = k_1 + k_2$, e em série, $k_{eq} = \frac{k_1 k2}{k_1 + k_2}$. Inclua os cálculos de incerteza.

- Faça uma comparação dos valores obtidos via gráfico, com os obtidos usando as expressões teóricas. Os valores coincidem? Justifique.

FOLHA DE DADOS EXPERIMENTAIS

Experiência 5: Deformações Elásticas

Tabela 1 – Elongação da mola helicoidal de constante elástica K_1.

Valores de Peso com incerteza (N)	Elongação (X) com incerteza (mm)	Deformação (ΔX) com incerteza (mm)
P_{Gancho} =	X_0 =	Arbitrando Zero = 0
P1 =	X_1 =	$X_1 - X_0$ =
P2 =	X_2 =	$X_2 - X_0$ =
P3 =	X_3 =	$X_3 - X_0$ =
P4 =	X_4 =	$X_4 - X_0$ =
P5 =	X_5 =	$X_5 - X_0$ =

Tabela 2 – Elongação da mola helicoidal de constante elástica K_2.

Valores de Peso com incerteza (N)	Elongação (X) com incerteza (mm)	Deformação (ΔX) com incerteza (mm)
P_{Gancho} =	X_0 =	Arbitrando Zero = 0
P1 =	X_1 =	$X_1 - X_0$ =
P2 =	X_2 =	$X_2 - X_0$ =
P3 =	X_3 =	$X_3 - X_0$ =
P4 =	X_4 =	$X_4 - X_0$ =
P5 =	X_5 =	$X_5 - X_0$ =

Tabela 3 - Elongação das molas helicoidais em uma associação em série.

Valores de Peso com incerteza (N)	Elongação (X) com incerteza (mm)	Deformação (ΔX) com incerteza (mm)
P_{Gancho} =	X_0 =	Arbitrando Zero = 0
P1 =	X_1 =	$X_1 - X_0$ =
P2 =	X_2 =	$X_2 - X_0$ =
P3 =	X_3 =	$X_3 - X_0$ =
P4 =	X_4 =	$X_4 - X_0$ =
P5 =	X_5 =	$X_5 - X_0$ =

Tabela 4 - Elongação das molas helicoidais em uma associação em paralelo.

Valores de Peso com incerteza (N)	Elongação (X) com incerteza (mm)	Deformação (ΔX) com incerteza (mm)
P_{Gancho} =	X_0 =	Arbitrando Zero = 0
P1 =	X_1 =	$X_1 – X_0$ =
P2 =	X_2 =	$X_2 – X_0$ =
P3 =	X_3 =	$X_3 – X_0$ =
P4 =	X_4 =	$X_4 – X_0$ =
P5 =	X_5 =	$X_5 – X_0$ =

Experiência 6: Determinação da Aceleração da Gravidade Utilizando Pêndulo Simples

Objetivos

- ✓ Medir o período de um pêndulo simples (T) em função de seu comprimento (L);
- ✓ Obter a aceleração da gravidade por meio de um gráfico de $\sqrt{L}\ x\ T$.

Materiais Necessários

- ✓ Sistema de sustentação formado por tripé triangular, haste, sapatas niveladoras e pêndulo simples;
- ✓ Cronômetro.

Procedimento Experimental

1. Monte um pêndulo simples prendendo uma massa na ponta da corda fornecida com o equipamento.
2. Estique a corda 30 cm do topo do equipamento ao centro do objeto colocado a oscilar.
3. Estime o valor da incerteza no comprimento do fio (ΔL) e, anote na Tabela 1 da folha de dados, o valor de L ± ΔL em unidades de metros.
4. Aplique uma pequena força de forma a fazer o sistema massa + corda ter uma oscilação de aproximadamente cinco graus a partir do repouso. Utilize o fato de que um ângulo de cinco graus corresponde a um comprimento de arco de cerca de 0,087*x*L, onde L é o comprimento do fio.
5. Deixe o pêndulo oscilar duas vezes, depois meça o tempo necessário para as próximas 10 oscilações e divida por 10 para obter o período médio de uma oscilação. Repita esta medida quatro vezes. Realize algumas destas medidas com pessoas diferentes medindo e marcando o tempo.
6. Desenrole mais a corda, e repita os procedimentos de 3 a 5 para os comprimentos L = 50, 60, 70, 80 e 90 cm. Complete a Tabela 1.

Procedimentos e Cálculos a Serem Efetuados no Relatório

- ➢ Apresente a folha de dados experimentais. Certifique-se de que a incerteza contenha apenas um algarismo significativo. A precisão da grandeza medida deve ser correspondente com o da incerteza.

- ➢ Da Tabela 1, faça um gráfico de $\sqrt{L}$ em função de T. Inclua no gráfico, as barras de incertezas em $\sqrt{L}$ e T (média ± desvio). Obtenha a reta média, as retas auxiliares e calcule o coeficiente angular com incerteza.
- ➢ A partir do coeficiente angular da reta, obtida anteriormente, calcule o valor da aceleração da gravidade com incerteza. Compare com valores da literatura. Os valores são equivalentes, dentro da faixa de incerteza? Caso haja alguma discrepância significativa, aponte as possíveis fontes de erros experimentais.

FOLHA DE DADOS EXPERIMENTAIS

Experiência 6: Determinação da Aceleração da Gravidade Utilizando Pêndulo Simples

Tabela 1: Período de um Pêndulo.

L ± ΔL (m)	(Período para 10 oscilações)/10						
	Medida 1	Medida 2	Medida 3	Medida 4	Medida 5	Média	Desvio
30 ± ______							
50 ± ______							
60 ± ______							
70 ± ______							
80 ± ______							
90 ± ______							

6. Roteiros da Segunda Sequência

Experiência 7: Momento de Inércia Rotacional

Objetivos

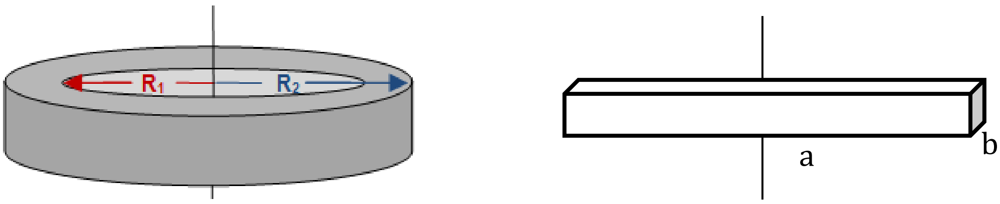
- ✓ Obter o momento de inércia rotacional de uma haste retangular;
- ✓ Obter o momento de inércia rotacional de um anel cilíndrico.

Materiais Necessários

- ✓ Um sensor de movimento rotacional;
- ✓ Pesos, um gancho lastro, uma haste retangular e um anel cilíndrico;
- ✓ Um dinamômetro ou uma balança;
- ✓ Uma roldana fixa;
- ✓ Uma linha inextensível;
- ✓ Programa de computador CAPSONE - PASCO *Scientific*;

Introdução

O objetivo deste experimento é encontrar a inércia rotacional de um anel cilíndrico e uma haste retangular (Figura 1) verificando se esses valores correspondem aos valores teóricos calculados. Um torque conhecido é aplicado à polia no sensor de movimento rotacional, fazendo com que a haste ou o disco gire. A aceleração angular resultante é medida usando a inclinação de um gráfico de velocidade angular versus tempo. A inércia rotacional é calculada a partir do torque e da aceleração angular.



$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2) \qquad I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$

Figura 1- Ilustração do anel cilíndrico e da haste retangular com seus respectivos momentos de inércia.

Para encontrar a inércia rotacional (I) do anel e da haste, experimentalmente, um torque ($\boldsymbol{\tau}$) conhecido é aplicado ao anel/ haste, e a aceleração angular resultante ($\boldsymbol{\alpha}$) é medida. De acordo com a segunda lei de Newton, estas grandezas se relacionam por $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{I\alpha}$.

Neste experimento, o torque é causado por um peso pendurado em uma linha inextensível que é enrolada em torno da polia do aparelho. O torque pode ser obtido a partir do produto do raio da polia (r), com a força (F) por: $\tau = rxF$.

A relação entre a aceleração linear da linha (**a**) e a aceleração angular, é dada por: a = αr. De acordo com a montagem da Figura 2 e a segunda lei de Newton aplicada no peso de massa (m):

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \;\; \rightarrow \;\; mg - F = ma$$

Figura 2 - Montagem do aparato experimental e diagrama de corpo livre para o peso pendurado na polia.

Resolvendo para a tensão na linha, obtém-se: $F = m(g - a)$. Uma vez que a aceleração linear do peso é determinada, o torque e a aceleração angular podem ser obtidos para o cálculo da inércia rotacional.

Procedimento Experimental

1. Instale o aparelho rotacional como mostrado na Figura 2. A linha deve ser envolvida em torno da etapa intermediária da polia.

2. No *software* do computador, crie um gráfico de velocidade angular em função tempo.

3. Meça as massas do anel cilíndrico e da haste retangular. Estime as incertezas e anote os valores na folha de dados.

3. Meça os diâmetros interno e externo e calcule os raios (R_1 e R_2) do anel e as dimensões a e b da haste. Meça também o diâmetro da polia do meio, do sensor de movimento, e calcule o seu raio (r). Estime as incertezas e anote os valores correspondentes na folha de dados experimentais.

4. Coloque a haste no sensor de movimento rotativo. Para encontrar a aceleração dessa combinação, coloque cerca de 5 g sobre a polia e registre, em um gráfico, a velocidade angular em função do tempo à medida que a massa desce.

5. Use o botão de ajuste de curva no gráfico para encontrar a linha reta que melhor se ajusta aos dados. Use o mouse para selecionar a parte do gráfico onde a massa estava caindo, então a linha será ajustada somente para esta parte dos dados.

6. A inclinação da linha de melhor ajuste é a aceleração angular do aparelho. Registre essa aceleração com incerteza, na folha de dados experimentais.

7. O sensor de movimento rotativo está girando, assim como o anel e a haste. É necessário determinar a aceleração e a inércia rotacional do sensor de movimento rotativo por si só, de modo que essa inércia rotacional possa ser subtraída do total, deixando apenas a inércia rotacional da haste. Para fazer isso, retire a haste do aparelho rotacional e repita os passos de 4 a 6 apenas para o sensor de movimento rotativo, usando apenas 1 g sobre a polia.

8. Para o disco com anel e a haste, coloque apenas massa suficiente na corda sobre a polia para fazê-lo se movimentar com velocidade constante depois de dar um pequeno empurrão inicial. Esta massa será, provavelmente, apenas cerca de 0,5g. Essa massa corresponde a uma quantidade de força necessária para superar o atrito, não para acelerar o objeto e deve ser subtraída da massa total suspensa, nos cálculos.

9. Remova a haste e repita os procedimentos de 4 a 8 apenas com o anel cilindrico no sensor de movimento rotativo.

Procedimentos e Cálculos a Serem Efetuados no Relatório

- Apresente a folha de dados experimentais. Certifique-se de que a incerteza contenha apenas um algarismo significativo. A precisão da grandeza medida deve ser correspondente com o da incerteza.
- Calcule, utilizando os valores medidos de R_1, R_2, $M_{Cilindro}$, a, b e M_{Haste}, os valores da inércia de rotação da haste (com incertezas) e do anel cilíndrico. Use as fórmulas contidas na Figura 1.
- Realize uma leitura na introdução deste roteiro e obtenha uma expressão para o momento de inércia (I) de qualquer objeto, em função de m, r e g/α.
- Use a expressão anterior e calcule o valor experimental (com incerteza) da inércia de rotação da haste e do sensor de movimento rotativo juntos. Lembre-se de subtrair a massa necessária para superar o atrito da massa suspensa (m).
- Calcule o valor experimental da inércia de rotação do sensor de movimento rotativo sozinho. Calcule a incerteza.
- Subtraia a inércia de rotação do sensor de movimento rotativo da inércia rotacional da combinação da haste e do sensor de movimento rotativo. Esta será a inércia rotacional da haste.
- Refaça os cálculos, a partir do terceiro procedimento, para o anel cilíndrico.
- Compare os valores obtidos, usando as fórmulas contidas na Figura 1, com os valores obtidos experimentalmente. Não se esqueça de incluir as incertezas nos cálculos. Os valores são equivalentes, dentro das faixas de incertezas? Caso haja alguma discordância, aponte as possíveis causas de erros.

Questões a serem Abordadas no Relatório

- Qual objeto teve maior inércia rotacional?
- Qual objeto foi mais difícil de acelerar? Como conciliar esta questão com a anterior?

FOLHA DE DADOS EXPERIMENTAIS

Experiência 7: Momento de Inércia Rotacional

Para a Haste retangular

Massa da haste (M_{haste}) = ___________________±__________________

Comprimento da haste (a) = ____________________±________________

Largura da haste (b) = ____________________±_____________________

Peso pendurado no sistema: haste + polia = ____________________±____________________

Aceleração angular (α) do sistema: haste + polia = ___________________±________________

Massa para determinação do atrito no sistema: haste + polia =______________±____________

Para o anel cilíndrico

Massa do anel cilíndrico ($M_{cilindro}$) = ____________________±_______________

Raio interno do cilindro (R_1) = ____________________±______________________

Raio externo do cilindro (R_2) = ____________________±______________________

Peso pendurado no sistema: anel cilíndrico + polia = ________________±_______________

Aceleração angular (α) do sistema: haste + polia = ________________ ±________________

Massa para determinação do atrito no sistema: anel + polia =______________±_____________

Para a polia do sensor de movimento rotativo

Raio da polia (r) = ____________________±______________________

Massa pendurada na polia sozinha= ____________________±______________________

Aceleração angular (α) da polia = ____________________±______________________

Experiência 8: Segunda Lei de Newton

Objetivo

- ✓ Verificar que a aceleração adquirida por um corpo sob a ação de uma força constante é inversamente proporcional à massa, ou ao peso do corpo.

Materiais Necessários

- ✓ Um colchão de ar com articulador dianteiro;
- ✓ Um carro com imã e haste ativadora na cabeceira direita e mola com suporte na cabeceira esquerda;
- ✓ Oito massas acopláveis;
- ✓ Um computador para ser utilizado como cronômetro digital;
- ✓ Dois sensores fotoelétricos;
- ✓ Uma polia;
- ✓ Um fio com gancho e massa acoplada.

Introdução

Considere dois objetos de pesos P e p, ligados por uma linha leve e inextensível, conforme a configuração exibida na Figura 1:

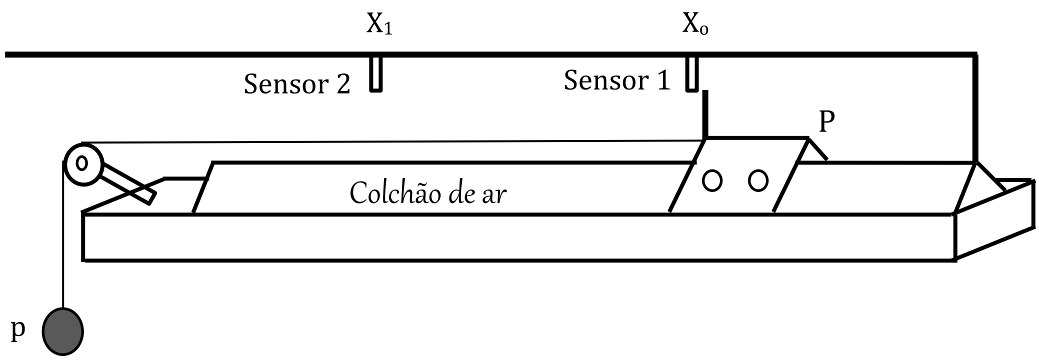


Figura 1- Um objeto de peso p é ligado por meio de uma linha ao carrinho de peso P. Despreza-se o atrito no sistema. Quando o peso p é liberado, este puxa o carrinho. Dois sensores, localizados em X_0 e X_1 marca o tempo de passagem no deslocamento $X_1 - X_0$.

Com esta montagem, as acelerações de P e p terão o mesmo módulo. Na ausência de atrito entre as superfícies, o módulo da aceleração (a) de cada um dos objetos deverá ser:

$$a = \left(\frac{p}{P + p}\right) g \qquad (1)$$

Onde g = (9,80 ± 0,01) m/s^2 é o valor adotado para o módulo da aceleração da gravidade.

A Equação (1) é obtida a partir da segunda lei de Newton, aplicada individualmente em cada um dos objetos de pesos P e p.

Este experimento é realizado com o carrinho sobre um “colchão de ar”. Este consiste de um trilho com orifícios laterais por onde o ar, proveniente de um compressor, escapa. O colchão de ar que se forma, impede o contato entre as superfícies, eliminando grande parte o atrito.

Neste experimento utilizam-se dois objetos de pesos P_1 e P_2, diferentes, puxados um de cada vez por um objeto de peso muito pequeno (p), se comparado com P_1 e P_2.

Procedimentos Experimentais

1. Escolha 04 pesos de massas iguais e acople ao carrinho. Pese o conjunto carro+pesos (chame de P_1) e anote este valor na Tabela 1 da folha de dados. Com o colchão de ar sem inclinação e desligado, coloque P_1 sobre este.

Obs: Não arraste o carro sobre o trilho com o colchão de ar desligado.

2. Pese o pequeno cilindro+gancho (chame de peso p) que será acoplado a P1 por meio de um fio, que passa por uma roldana. Veja Figura 1. Anote o valor de p na Tabela 1. Se preferir, pode usar somente o gancho como peso.

3. Coloque a extremidade esquerda de P_1 sobre a posição 250 mm da escala (800 mm na escala do outro lado). O primeiro sensor deve ser posicionado de forma que a sombra da haste lateral do carro esteja sobre o buraco do mesmo, quando o carro se encontrar na posição descrita.

4. Coloque a extremidade esquerda do carro sobre a posição 300 mm da escala. Utilize a sombra da haste lateral do mesmo para posicionar o segundo sensor. Determine a incerteza na medida da posição por este método.

5. Anote a distância como sendo 50 mm ± a incerteza, determinada no procedimento 4.

6. Ligue o colchão de ar.

7. Use o medidor de nível para verificar se o trilho está nivelado, se não, realize os ajustes necessários.

8. Posicione P_1 de forma que a haste fique o mais próximo possível do primeiro sensor (isto garante que a velocidade inicial é da ordem de zero).

9. Monte o sistema, de acordo com a Figura 1. Ao fazer isto, mantenha este sistema em repouso (segure P_1).

10. Um dos integrantes do grupo deve posicionar-se junto ao computador e colocar o cronômetro do experimento para funcionar.

11. Solte o carro da posição anterior. Se houver algum problema, chame o professor (ou monitor).

12. Anote, na Tabela 1, o tempo que o carro levou para percorrer a distância entre os sensores.

13. Repita os procedimentos 8 até 12, quatro vezes, anote na Tabela 1 os tempos (t) obtidos. Estes serão utilizados para a determinação da incerteza.

14. Mova o segundo sensor 50 mm na escala (para 350 mm). Repita os procedimentos 8 a 13 para esta nova distância, depois aumente a distância mais 50 mm ... repita este procedimento até completar a Tabela 1.

15. Troque os pesos que estão sobre o carro, por outros. Chame o novo conjunto carro+pesos de P_2. Repita os procedimentos de 8 a 14, para este novo sistema. Anote os dados na Tabela 2.

Procedimentos e Cálculos a Serem Efetuados no Relatório

- Apresente a folha de dados experimentais. Certifique-se de que a incerteza contenha apenas um algarismo significativo. A precisão da grandeza medida deve ser correspondente com o da incerteza.
- Faça gráficos de velocidade instantânea em função do tempo médio, para cada conjunto (P1, p; P2, p) e obtenha, destes gráficos, as respectivas acelerações (a_1 e a_2) com suas incertezas.
- Calcule e compare $(P_1 + p).a_1$ com $(P_2 + p).a_2$, levando em consideração, as incertezas.
- Calcule p.g e compare com os resultados acima**.** Use $g = (9{,}80 \pm 0{,}01)$ m/s^2. Considere as incertezas no cálculo de p.g.
- Calcule e compare $(P_1 + p)/(P_2 + p)$ com a_2/a_1, levando em consideração as incertezas.

Questões a Serem Abordadas no Relatório do Experimento

- Os resultados destas comparações são os esperados? Justifique. Caso não obtenha os resultados previstos, comente as possíveis causas de erros.
- Deduza a equação (1), representando todas as forças numa figura e aplicando as leis de Newton a cada um dos corpos isoladamente.

FOLHA DE DADOS EXPERIMENTAIS

Experiência 8: Segunda Lei de Newton

Tabela 1 – Valores experimentais de pesos (P1 e p), distâncias percorridas (Δx), velocidades instantâneas ($v \pm \Delta v$) no fim de cada percurso e, intervalos de tempo (t).

P_1 = ____________±______________				p = ____________±______________		
Δx (mm)	t_1	t_2	t_3	t_4	$t_m \pm \Delta t_m$	$v \pm \Delta v$
50±						v_1= ±
100±						v_2= ±
150±						v_3= ±
200±						v_4= ±
250±						v_5= ±
300±						v_6= ±
350±						v_7= ±
400±						v_8= ±
450±						v_9= ±
500±						v_{10}= ±
550±						v_{11}= ±

Tabela 2 – Valores experimentais de pesos (P2 e p), distâncias percorridas (Δx), velocidades instantâneas ($v \pm \Delta v$) no fim de cada percurso e, intervalos de tempo (t).

P_2 = ____________±______________				p = ____________±______________		
Δx (mm)	t_1	t_2	t_3	t_4	$t_m \pm \Delta t_m$	$v \pm \Delta v$
50±						v_1= ±
100±						v_2= ±
150±						v_3= ±
200±						v_4= ±
250±						v_5= ±
300±						v_6= ±
350±						v_7= ±
400±						v_8= ±
450±						v_9= ±
500±						v_{10}= ±
550±						v_{11}= ±

Experiência 9: Movimento Harmônico Simples e Lei de Hooke

Objetivos

- ✓ Verificar que o período de oscilação de um corpo suspenso por uma mola é inversamente proporcional à raiz quadrada da constante elástica da mola.

Materiais Necessários

- ✓ Régua milimetrada;
- ✓ Molas;
- ✓ Cronômetro;
- ✓ Gancho e marcador.

Introdução

O período de oscilação (T), a constante elástica (k) de uma mola e a massa (M) de um corpo de prova colocado para oscilar, estão relacionados pela equação:

$$T\sqrt{k} = 2\pi\sqrt{M} \qquad (1)$$

O produto $\boldsymbol{T\sqrt{k}}$ deverá ser constante, independente do valor de k, se M for fixada e as molas trocadas.

Essa afirmação seria válida se as molas, de massa m fossem ideais (massa nula). A massa da mola pode se incluída na expressão acima, de tal forma que:

$$T\sqrt{k} = 2\pi\sqrt{M + m/3} \qquad (2)$$

Para a obtenção do termo m/3 é necessário calcular a energia cinética total do sistema massa - mola e, admitir que no movimento oscilatório a mola se distende uniformemente, porque $m << M$.

Procedimentos Experimentais

Parte 1: Determinação da constante elástica da mola

1. De acordo com a Figura 1, instale o gancho+marcador na mola e use a régua para determinar a ordenada X_o (sem o peso acoplado ao gancho). Anote estes valores na folha de dados.
2. Acrescente pesos (discos) ao gancho e meça na régua os novos valores de X. Complete a Tabela 1, com os valores de pesos das massas+gancho+discos.

Parte 2: Determinação do período das oscilações

1. Retire parte das massas instaladas no gancho, faça o conjunto oscilar verticalmente com pequena amplitude (1 a 2 cm) e, meça o tempo para um número (N) grande de oscilações ($N \geq 30$). Chame agora, P_o de peso do objeto oscilante (gancho+marcador e massa). Repita o processo de oscilação mais três vezes. Anote na Tabela 2, os valores obtidos.
2. Obtenha uma média e admita o desvio da média com incerteza para o período das 30 oscilações. Divida o resultado por 30, para obter o período de uma oscilação.

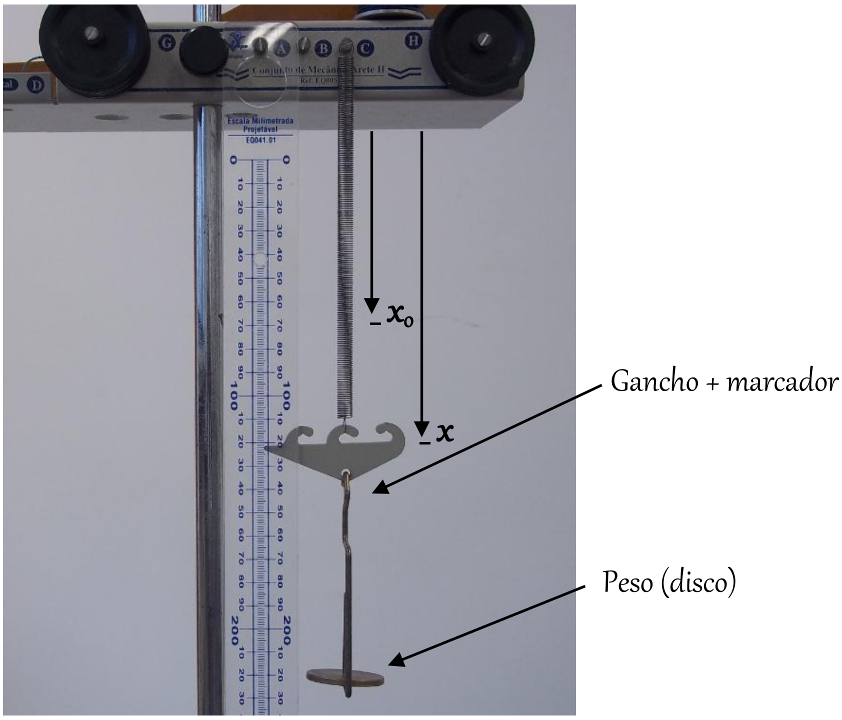


Figura 1 – Montagem do conjunto peso, mola e marcador.

Procedimentos e Cálculos a Serem Efetuados no Relatório

- Apresente a folha de dados experimentais. Certifique-se de que a incerteza contenha apenas um algarismo significativo. A precisão da grandeza medida deve ser correspondente com o da incerteza.
- Faça um gráfico de peso (P_i) em função de ΔX_i e determine, a partir do coeficiente angular da reta, a constante k da mola com incerteza.
- Faça cálculos de $T\sqrt{k}$, $2\pi\sqrt{M}$ e de $2\pi\sqrt{M+m/3}$, onde M a massa total (gancho+massa+disco). Para o cálculo de massa, use g = (9,80 ± 0,01) m/s^2.
- Compare os valores de $T\sqrt{k}$ com $2\pi\sqrt{M}$ e de $T\sqrt{k}$ com $2\pi\sqrt{M+m/3}$, levando em conta as incertezas de cada uma destas expressões. Conclua se o resultado das duas comparações é o esperado e justifique. Caso não obtenha o resultado previsto, comente as possíveis causas.

Questões a serem Abordadas no Relatório

- Comente sobre o efeito da massa da mola ($M \rightarrow M + m/3$).
- Você poderia ter desprezado a massa da mola? Discuta com base nos seus resultados.
- Deduza a equação (2).

FOLHA DE DADOS EXPERIMENTAIS

Experiência 9: Movimento Harmônico Simples e Lei de Hooke

Tabela 1 – Elongação da mola helicoidal de constante elástica K.

Valores de Peso com incerteza (N)	Elongação (X) com incerteza (mm)	Deformação (ΔX) com incerteza (mm)
	X_0 =_______±______	Arbitrando Zero = 0
P1 = ________±________	X_1 =_______±______	$X_1 - X_0$ =_______±______
P2 = ________±________	X_2 =_______±______	$X_2 - X_0$ =_______±______
P3 = ________±________	X_3 =_______±______	$X_3 - X_0$ =_______±______
P4 = ________±________	X_4 =_______±______	$X_4 - X_0$ =_______±______
P5 = ________±________	X_5 =_______±______	$X_5 - X_0$ =_______±______

Tabela 2 – Peso escolhido e período para 30 oscilações.

P_o (gancho+marcador+massa) =..................±..................
Período para 30 oscilações (s)
T_{30} (1) = _______________±______________
T_{30} (2) = _______________±______________
T_{30} (3) = _______________±______________
T_{30} (4) = _______________±______________

Experiência 10: Movimento Circular Uniforme (MCU)

Objetivo

- ✓ Determinar a relação entre a força centrípeta, massa, frequência e raio num MCU.

Materiais Necessários

- ✓ Um kit experimental com torre central e pilar móvel;
- ✓ Um disco cilindro (corpo de prova pendular);
- ✓ Um dinamômetro.

Fundamentação Teórica

Quando um objeto se move ao longo de uma circunferência com velocidade escalar constante dizemos que ela descreve um MCU. A aceleração do objeto aponta para o centro da trajetória e é chamada de aceleração centrípeta. A relação entre o raio da trajetória (R), a velocidade (v) e a aceleração centrípeta (a_c), é descrita pela fórmula:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \tag{1}$$

De acordo com a 2ª lei de Newton:

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \quad \rightarrow \quad \sum F = m\frac{v^2}{R} \tag{2}$$

Onde $\sum \boldsymbol{F}$ e m são, respectivamente, a resultante das forças e a massa do objeto. Se apenas uma força atua sobre o objeto, então esta denomina-se de força centrípeta. Neste experimento, a força de tração presa a um disco cilíndrico (peso), colocado para girar, fará o papel da força centrípeta. Sendo $v = 2\pi R f$, onde f é a frequência do movimento, a equação (2) pode ser reescrita como:

$$F_c = 4\pi^2 m R f^2 \tag{3}$$

Verifica-se neste experimento, a igualdade acima para diferentes R's e f's.

Montagem do Aparato Experimental

Para eliminar o atrito, o disco colocado a girar, deve se manter suspenso por uma linha, conforme a configuração ilustrada na Figura 1:

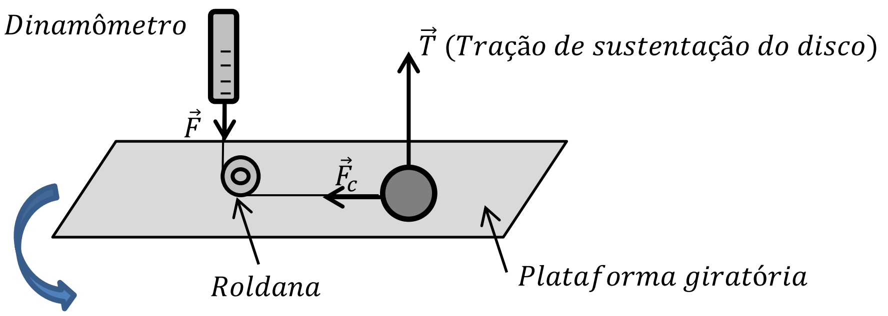


Figura 1 – Montagem do aparato experimental. A plataforma gira, assim como todo o aparato experimental.

Procedimento Experimental

1. Na Figura 1, com o sistema em repouso, o dinamômetro deve ser calibrado para estar marcando 0N. O procedimento segue, puxando o dinamômetro para cima, conforme a Figura 2, fazendo com que o pêndulo fique inclinado. Não zere o dinamômetro.

   Obs: Isto garantirá que quando o sistema estiver em movimento circular, não haverá nenhuma componente da tração na direção radial do movimento (será semelhante ao da Figura 1).

Parte 1: Dependência da força centrípeta com a frequência do movimento

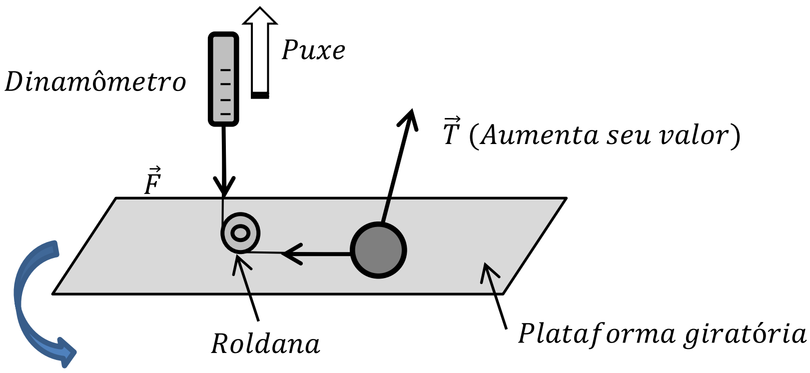


Figura 2 – Configuração do aparato experimental para o estudo da dependência da força centrípeta com a frequência.

2. Ligue o aparato, e regule a frequência de rotação até que a tração na corda, que sustenta o peso, fique na vertical. Anote na folha de dados, a força medida no dinamômetro, que corresponde à força centrípeta. Anote a incerteza.
3. Obtenha a frequência do movimento: Deixe com que o sistema execute um número $N \geq 50$ voltas e anote o tempo total. Calcule o tempo para que este execute 1 volta. Este valor corresponde à frequência em Hz. Repita este procedimento mais 2 vezes, para a obtenção de uma média e incerteza. Anote os resultados na folha de dados.
4. Meça o raio do movimento, desligando o sistema e, mantendo a tração na vertical. Estime a incerteza nesta medição e anote o valor na folha de dados.
5. Repita os procedimentos de 1 a 4, para diferentes inclinações iniciais no pêndulo mantendo o raio fixo. Anote os resultados correspondentes na folha de dados experimentais.

Parte 2: Dependência da força centrípeta com o raio da trajetória circular

1. Calibre o dinamômetro para zero Newton. Assim, como anteriormente puxe o dinamômetro para marcar uma determinada força. Anote o raio correspondente à situação em que, quando o disco estiver em movimento, a tração que sustenta o disco fique na vertical. Ligue o aparato experimental e anote a frequência correspondente.
2. Em nenhum momento, modifique a frequência. Anote o valor obtido na folha de dados. Repita este procedimento três vezes. Desligue o aparato experimental.
3. Modifique o raio da trajetória, de acordo com a Figura 3. Com o aparato ainda desligado, ajuste a força inicial no dinamômetro para que quando o aparato estiver em movimento a

tração que sustenta o peso, continue na vertical. Ligue o aparato e verifique se a situação anterior ocorre. Caso não ocorra, volte a repetir este procedimento.

4. Anote na folha de dados, os raios escolhidos bem como as forças correspondentes em cada caso. Estime a força no dinamômetro e repita este procedimento mais uma vez, completando a folha de dados.

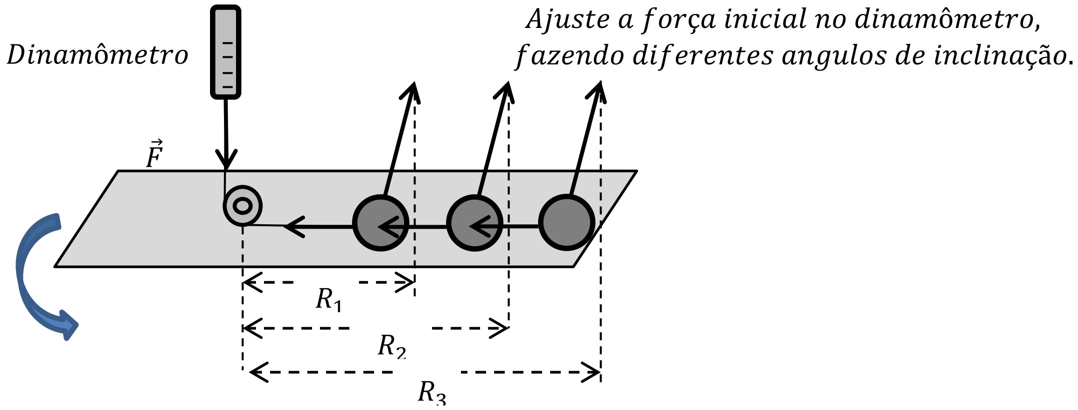


Figura 3- Configuração do aparato experimental para o estudo da dependência da força centrípeta com o raio da trajetória.

Procedimentos e Cálculos a Serem Efetuados no Relatório

- Apresente a folha de dados experimentais. Certifique-se de que a incerteza contenha apenas um algarismo significativo. A precisão da grandeza medida deve ser correspondente com o da incerteza.
- Com posse dos valores de M ± ΔM, R ± ΔR, $f_{média} \pm \Delta f_{média}$, compare para cada caso na Tabela 1, se:

$$\frac{Força\ Medida}{4\pi^2 mR} = f^2$$

Use as incertezas para as comparações.

- Utilize as Tabelas 2 e 3 e compare em cada caso se:

$$\frac{Força\ Medida}{4\pi^2 mf^2} = R$$

Use as incertezas para as comparações.

Questões a Serem Abordadas no Relatório

- Um objeto de massa M, preso a um fio, executa um MCU de raio R_1. Explique o que ocorre com a frequência dos movimentos e a força de tração no fio, se o raio é modificado para R_2, de tal forma que $R_2 < R_1$.

- Você dispõe de uma mesa, com furos, que forma um colchão de ar bem uniforme, capaz de sustentar com estabilidade, um disco de massa *m*. Como você poderia utilizar estes aparatos para o estudo da dependência da força centrípeta: com a massa, com o raio e com a frequência?

FOLHA DE DADOS EXPERIMENTAIS

Experiência 10: Movimento Circular Uniforme (MCU)

Massa do disco pendurado, M ± ΔM =

Parte 1: Dependência da Força centrípeta com a frequência do movimento

Tabela 1 – Dados correspondentes à dependência da força centrípeta com a frequência do movimento. A massa e o raio da trajetória se mantêm constantes.

Medida	Forças Medidas (N)	Raio do MCU (cm)	Frequências (Hz)	Valor médio e incerteza (σ)
1	F_1=________±_______	R_1=_______±______	f_1=	
			f_2=	
			f_3=	
2	F_2=________±_______	R_2=_______±______	f_1=	
			f_2=	
			f_3=	
3	F_3=________±_______	R_3=_______±______	f_1=	
			f_2=	
			f_3=	

Parte 2: Dependência da força centrípeta com o raio da trajetória circular

Tabela 2 – Dados correspondentes à escolha da frequência.

Frequências (Hz)	Valor médio e incerteza (σ)
f_1=	
f_2=	
f_3=	

Tabela 3 – Valores obtidos de raios e respectivas forças.

Raios do MCU	Forças medidas
R_1=________±_______	F_1=_________±_______
R_2=________±_______	F_2=_________±_______
R_3=________±_______	F_3=_________±_______

Experiência 11: Pêndulo Físico

Objetivos

- ✓ Determinar o período de oscilação de um pêndulo físico;
- ✓ Determinar o centro de oscilação de um pêndulo físico;
- ✓ Determinar o comprimento do pêndulo simples que oscila em sincronia com um pêndulo físico;
- ✓ Construir um gráfico de período de oscilação em função de diferentes eixos de giro;
- ✓ Determinar o período mínimo de oscilação de um pêndulo físico.

Material Utilizado

- ✓ Tripé com uma haste longa;
- ✓ Pêndulo simples;
- ✓ Sistema de regulagem de comprimento;
- ✓ Pêndulo físico: uma placa retangular fina de largura desprezível;
- ✓ Régua;
- ✓ Cronômetro.

Introdução

Um corpo rígido que pode oscilar verticalmente em torno de um eixo perpendicular ao seu plano pode ser chamado de um pêndulo físico. O período de oscilação (T) de um pêndulo físico dependerá da forma como o pêndulo foi construído e o ponto em que foi colocado para girar. Para pequenas oscilações, T ser escrito como:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad (1)$$

onde m é a massa do corpo e d é a distância entre eixo de oscilação e o centro de massa do corpo rígido.

O momento de inércia (I) relativo a um eixo paralelo ao centro de massa é dado por:

$$I = I_{CM} + md^2 \qquad (2)$$

onde I_{CM} é o momento de inércia do sistema relativo a um eixo que passa pelo centro de massa. Neste experimento, utiliza-se uma barra retangular fina de comprimento a e largura b, conforme a Figura 1. Neste caso, I_{CM} é dado por:

$$I_{CM} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2). \qquad (3)$$

Considerando que $b << a$, tem – se a aproximação:

$$I_{CM} = \frac{1}{12}ma^2 \qquad (4)$$

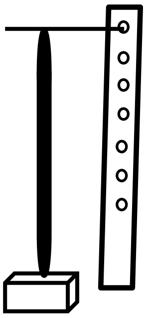


Figura 1 – Corpo rígido: barra metálica e alguns eixos de oscilação importantes para estudo.

Alguns pontos (eixos de oscilação) importantes na barra serão discutidos durante texto.

Para um pêndulo simples de comprimento (L) o período é dado pela fórmula:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{5}$$

Existe um comprimento L, tal que os períodos do pêndulo simples e do corpo rígido, se igualam. Para se obter este comprimento, basta igualar as equações (1) e (5) e obter:

$$L = \frac{I}{md}, \tag{6}$$

onde I é dado pela fórmula (2). Para a barra fina em questão, pendurada em uma de suas extremidades, $d = {}^{a}/_{2}$, então:

$$I = \frac{1}{12}ma^2 + m\frac{a^2}{4}$$

$$I = \frac{1}{3}ma^2 \tag{7}$$

Substituindo (7) em (6), obtém-se:

$$L = \frac{2}{3}a \tag{8}$$

O ponto O, localizado a uma distância L, dado por (8), do ponto de suspensão P, sobre a linha que une P (veja a Figura 1) e o centro de gravidade, é denominado centro de oscilação do pêndulo físico. Se toda a massa do corpo estivesse concentrada em O, seria equivalente um pêndulo simples, do ponto de vista dinâmico, ao pêndulo físico. Adicionalmente, se o pêndulo físico for colocado para oscilar em torno do ponto O, ele vai oscilar com o mesmo período que oscilava quando estava suspenso pelo ponto P. Nesse caso, O passa a ser o ponto de suspensão e P o centro de oscilação.

Há também um ponto abaixo da extremidade (Figura 1: ponto M), no qual o pêndulo oscilará com o menor período possível ($T_{mín}$). Substituindo a Equação (3) em (2) e usando o resultado na Equação (1), com $I_{CM} = mk^2$; $k^2 = \frac{1}{12}(a^2 + b^2)$, obtem-se:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + d^2}{gd}} \tag{9}$$

Derivando com relação a d e igualando a zero, obtém-se no ponto de mínimo:

$$\frac{dT}{dd} = 2\pi\frac{1}{2}\left(\frac{k^2+d^2}{gd}\right)^{-1/2}\left(-1\frac{k^2}{gd^2}+\frac{1}{g}\right) = 0$$

$$d = \pm\, k$$

Escolhendo k > 0, e lembrando que b << a, obtém-se:

$$d = \sqrt{1/12}\;.\,a \qquad (10)$$

Procedimento Experimental

Parte 1 – Determinação do centro de oscilação do pêndulo físico em forma de barra

1. Meça o comprimento a da barra e calcule o valor de L, usando a fórmula (8). Não se esqueça de incluir os cálculos de incerteza.

2. Verifique se a distância calculada no item anterior corresponde ao ponto O da barra.

3. Suspenda a barra retangular pelo orifício da extremidade (ponto *P*), sem se esquecer da porca de proteção.

4. Meça o tempo de 10 oscilações completas e determine o período de uma oscilação (*T*) da barra suspensa pelo ponto *P*. Execute este processo 4 vezes e determine o período médio das medidas. Adote o desvio padrão como a incerteza nas medições. Anote os dados na Tabela 1 da folha de dados.

5. Agora, suspenda a barra pelo ponto *O* e repita o procedimento (4).

6. Mantenha o pêndulo suspenso pelo ponto *O*. Regule o comprimento do fio do pêndulo simples até que a marca central do corpo suspenso esteja alinhada com a extremidade inferior do pêndulo físico.

7. Deixe o pêndulo simples completar 10 oscilações e anote o tempo de uma oscilação. Anote os valores completando a Tabela 1.

8. Coloque o pêndulo físico suspenso pelo ponto O e o pêndulo simples com o comprimento ajustado anteriormente para oscilarem simultaneamente e observe o que ocorre. Anote a sua observação.

Parte 2 – Determinação de I_{CM} da barra.

1. Meça os valores da massa (*m*), do comprimento (*a*) e da largura (*b*) da barra. Anote as incertezas em suas medições.

Parte 3 – Dados para o gráfico do período (T) em função da distância (d) ao CM da barra.

1. Para cada furo da barra, anote a distância (d) ao ponto C (Centro de Massa) da barra e meça o período de 10 oscilações. Divida o resultado por 10, para obter o período de uma oscilação. Repita este procedimento 3 vezes, para a obtenção de um valor médio. Anote os resultados na Tabela 2.

Procedimentos e Cálculos a Serem Efetuados no Relatório

- Apresente a folha de dados experimentais. Certifique-se de que a incerteza contenha apenas um algarismo significativo. A precisão da grandeza medida deve ser correspondente com o da incerteza.
- Verifique na Tabela 1, se o período médio da barra colocada para oscilar nos pontos P e O são equivalentes. Verifique também se estes períodos são equivalentes ao período do pêndulo simples, com $L = D_{PO}$. Considere as incertezas. Justifique os resultados obtidos.
- Com os dados da Tabela 2, faça um gráfico de T em função de d.
- Obtenha deste gráfico, a distância d, correspondente a oscilação mínima. Compare este valor com cálculos usando a fórmula (10). Considere as incertezas nos resultados. Os valores são equivalentes? Justifique seus resultados.
- Utilize um programa computacional e ajuste uma curva que passa pelos pontos do gráfico de T (médio) em função de d. Obtenha deste ajuste, o momento de inércia I_{CM} da barra. Use para um valor fixado de g em 9,8 m/s^2.
- Com os valores medidos de m, a e b, utilize as fórmulas (3) e (4) e obtenha I_{CM} para a barra. Considere as incertezas nos cálculos.
- Compare os valores de I_{CM} obtidos via ajuste do gráfico e via cálculo. Os valores são equivalentes? Aponte as possíveis causas de erro, se houverem.

Questões a Serem Abordadas no Relatório

- Os cabos de martelos e marretas são dimensionados de modo que o centro de percussão (oscilação) O fique localizado na parte metálica e o ponto de suspensão em P, na empunhadura. Explique quais as vantagens de se fabricar estes instrumentos destas formas.
- Demonstre matematicamente que se a barra, de comprimento a, for colocada para girar em torno do ponto de oscilação O, denominado de centro de oscilação, ele terá o mesmo período de oscilação do pêndulo simples de mesmo comprimento L.
- Seria possível realizar uma linearização do gráfico de T em função de d, tipo T^2 x d, ou T x d^2? Explique.

FOLHA DE DADOS EXPERIMENTAIS

Experiência 11: Pêndulo Físico

Distância de P a O, D_{PO} = ____________±___________

Valor de L calculado usando a fórmula (8) = ____________±___________

Tabela 1 – Períodos de oscilações para a barra colocada a oscilar nos pontos P e O e, do pêndulo simples com L = D_{PO}.

Medidas	(Período para 10 oscilações)/10 (s)		
	Barra Suspensa em P	Barra Suspensa em O	Pêndulo Simples, L = D_{PO}
1	T_1 =	T_1 =	T_1 =
2	T_2 =	T_2 =	T_2 =
3	T_3 =	T_3 =	T_3 =
4	T_4 =	T_4 =	T_4 =
Média	$T_{médio} \pm \Delta T$ =	$T_{médio} \pm \Delta T$ =	$T_{médio} \pm \Delta T$ =

✓ Observações do pêndulo físico a girar em *O* e pêndulo simples com $L = D_{PO}$:

____

____

Dados da barra:

m = _________± _________; a = _________± _________; b = _________± _________

Tabela 2 – Valores de distância ao centro de massa e períodos de oscilação da barra.

Pontos	d (cm)	(Período para 10 oscilações)/10 (s)			Média
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

7. Apêndice

Dedução da Equação dos Mínimos Quadrados

Em uma experiência na qual se efetuaram N medidas, tem-se um conjunto de N pares ordenados (x,y), os quais, quando representados graficamente, podem fornecer uma reta. Nosso objetivo é ajustar os dados com a equação:

$$y = ax + b \quad ,$$

onde os coeficientes a e b devem ser tais que minimizem a diferença entre os valores medidos y_i e os correspondentes valores calculados $y(x_i) = ax_i + b$ dados pela equação acima. É necessário estabelecer um critério para minimizar as diferenças e otimizar o cálculo dos coeficientes. Os desvios Δy_i entre cada valor medido e o valor calculado correspondente são: $\Delta y_i = y_i - y(x_i)$. No entanto, a soma destes desvios não fornece uma boa indicação do quanto os dados se aproximam dos valores calculados a partir da equação da reta, uma vez que grandes desvios positivos podem ser contrabalançados por grandes desvios negativos. Daí a definição do erro quadrático médio $S = \sum_{i=1}^{N} (\Delta y_i)^2$. Portanto, devemos encontrar a reta tal que:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \text{ e } \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \quad .$$

Calculando esses termos temos:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2 \right) = -2\sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)x_i = 0 \quad ;$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2 \right) = -2\sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b) = 0 \quad .$$

As duas equações acima podem ser escritas:

$$-\sum_{i=1}^{N} y_i x_i + a\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{N} x_i = 0 \quad ,$$

$$-\sum_{i=1}^{N} y_i + a\sum_{i=1}^{N} x_i + b = 0 \quad .$$

Resolvendo o sistema de equações acima para a e b obtemos finalmente:

$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2} \quad \text{e} \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \sum_{i=1}^{N} x_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2} \quad .$$

8. Bibliografia

SANTORO, A. *et al. Estimativas e Erros em Experimentos da Física*. Rio de Janeiro: Editora da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2005.

Apostila de Física Experimental do Curso PIACENTINI, J. J.et al. Introdução ao Laboratório de Física. São Paulo: Editora da Universidade Federal de São Carlos, 2008.