Université de Lille

Laboratoire Paul Painlevé

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

Docteur en Mathématiques de l'Université de Lille

par

ALEXANDRE MAKSOUD

THÉORIE D'IWASAWA DES MOTIFS D'ARTIN

Soutenue le 13 juin 2019 devant le jury composé de :

MME. GAUTAMI BHOWMIK	Examinatrice	Université de Lille
M. HENRI DARMON	Rapporteur	Université McGill
M. MLADEN DIMITROV	Directeur	Université de Lille
M. OLIVIER FOUQUET	Rapporteur	Université Paris-Sud
M. VINCENT PILLONI	Examinateur	CNRS (ÉNS de Lyon)
M. JACQUES TILOUINE	Examinateur	Université Paris-XIII

Remerciements

On croit parfois que la recherche en mathématiques fondamentales est une activité solitaire, que le travail et la passion suffisent à mener à bien. L'expérience du doctorat m'a montré à quel point cette croyance était absurde. Cette thèse est la somme des contributions d'un grand nombre de personnes à qui je tiens, par ces quelques mots, à exprimer ma profonde reconnaissance.

Mes première pensées vont à mon directeur de thèse Mladen Dimitrov, qui m'a introduit au monde de la recherche et qui m'a fait découvrir certaines thématiques fascinantes de la théorie des nombres. Sa passion des maths et son optimisme à toute épreuve m'ont beaucoup inspiré durant ces trois années. Merci Mladen !

C'est un grand honneur pour moi que Henri Darmon et Olivier Fouquet aient accepté d'être les rapporteurs de ma thèse, et je les remercie pour leurs commentaires qui ont amélioré le contenu de ma thèse. Je remercie aussi chaleureusement Gautami Bhowmik, Vincent Pilloni et Jacques Tilouine d'avoir fait partie du jury de ma soutenance de thèse.

Ma visite de l'IISER Pune en Inde au nouvel An 2019 a été mathématiquement très stimulante pour moi. Je remercie Prof. Raghuram pour son invitation, et pour toutes les discussions enrichissantes que j'ai eues avec lui et ses collègues. D'une manière générale, l'accueil chaleureux que j'ai reçu en Inde (et les petits gâteaux au safran !) ont rendu ce voyage très agréable.

Avec le recul, je prends maintenant conscience à quel point j'ai été chanceux d'avoir été entouré par autant de personnes bienveillantes à mon égard durant toutes ces années. Cela concerne autant les amis et les collègues que j'ai fréquentés au laboratoire Paul Painlevé, les amis que je me suis fait à Lille, les potes de Paris, les italiens, les non-italiens, et tous les gens rencontrés ici et là, au gré des aventures, éphémères ou pour la vie. C'est aussi à toutes ces belles rencontres que je voudrais dédier ces remerciements.

Enfin, et surtout, c'est à ma famille, et tout particulièrement mes parents, que j'aimerais exprimer ma gratitude. J'ai très tôt exprimé ce désir singulier de devenir mathématicien et, plutôt que de prendre peur, ils m'ont toujours encouragé et donné les moyens nécessaires pour réaliser mon rêve. Je leur en suis infiniment reconnaissant.

Table des matières

Introduction

Initiée par Kenkichi Iwasawa ([**Iwa59, Iwa73**]), la théorie des Γ-extensions, maintenant appelée théorie d'Iwasawa en son honneur, est relativement récente au regard de la longue histoire de la théorie des nombres. Pourtant, la diversité de ses généralisations, ainsi que la popularité croissante des activités scientifiques qui lui sont dédiées, témoignent de la fécondité des idées qui la traversent. Il serait vain de tenter de résumer ici tout ce à quoi renvoie la théorie d'Iwasawa de nos jours, mais citons deux découvertes dues à Ernst Kummer qui ont inspirés Iwasawa.

En 1741, Euler résout le problème de Bâle, en montrant que la somme infinie $1+1/4+1/9+1/16+1/25+\ldots$ vaut $\pi^2/6$. Il trouve aussi une méthode pour calculer correctement les valeurs aux entiers ≤ 0 de la fonction ζ de Riemann (sans pour autant connaître la théorie de la continuation analytique !). En particulier, $\zeta(1-2r)$ est un nombre rationnel non-nul lorsque $r \in \mathbb{Z}_{>0}$. Aux alentours des années 1850, Kummer montre que ces valeurs spéciales jouissent de deux propriétés d'origine arithmétique, à savoir un lien avec le groupe des classes des corps cyclotomiques $\mathbb{Q}(\mu_p)$, où p est un nombre premier, ainsi qu'une propriété de congruence p-adique. Selon l'interprétation moderne de ces résultats, il existe une "version méromorphe p-adique" de la fonction ζ de Riemann et, de plus, celle-ci porte une grande quantité d'informations sur l'arithmétique des corps cyclotomiques : c'est la Conjecture Principale d'Iwasawa.

Autour des années 1990, Greenberg, Coates, Perrin-Riou [**Gre94, Coa91, PR95a**] (entre autres) entreprennent d'élargir considérablement ces thématiques à un motif p-ordinaire M, en conjecturant l'existence de "fonctions L p-adiques" interpolant les valeurs critiques des fonctions L des "déformations p-adiques" de M. Ils proposent en outre une interprétation arithmétique de ces objets, sous la forme d'une Conjecture Principale.

Le premier chapitre prend la forme de prolégomènes et discute des fonctions L (complexes et p-adiques) de motifs d'Artin sur $\mathbb{Q}$, et de leurs valeurs spéciales. Soit $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique du corps des rationnels, et soit Γ son groupe de Galois. Dans la plupart des cas, aucune des déformations cyclotomiques $[\rho\otimes\chi]$, $\chi\in\widehat{\Gamma}$, d'un motif d'Artin $[\rho]$ n'a d'entier critique, ce qui pose problème pour construire une fonction L

p-adique. Une stratégie que l'on mettra en avant consiste à élargir la famille des déformations p-ordinaires de $[\rho]$, et espérer qu'elle possède suffisamment de spécialisations motiviques critiques. On pourra typiquement penser au cas d'un motif automorphe qui est limite de séries discrètes.

Plus précisément, notons V_ρ la réalisation p-adique de $[\rho]$, munie d'un réseau $G_{\mathbb{Q}}$-stable $T_\rho \subseteq V_\rho$ et d'une p-stabilisation ordinaire $T_\rho^+ \subseteq T_\rho$ (cf. Définition 4.2.5). Supposons qu'il existe une déformation ordinaire de $[\rho]$, c'est-à-dire un module libre $\mathcal{T}$ sur un anneau de coefficients $\mathcal{A}$ muni d'un sous-module $\mathcal{T}^+$ et d'une action galoisienne, avec "beaucoup" de spécialisations $T_\kappa = \mathcal{T} \otimes_{\mathcal{A},\kappa} \kappa(\mathcal{A})$ motiviques critiques, et tel que $\mathcal{T}^+ \subseteq \mathcal{T}$ se spécialise sur $T_\rho^+ \subseteq T_\rho$ via $\kappa_\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. Admettant l'existence d'un élément $\mathcal{L}_p(\mathcal{T},\mathcal{T}^+) \in \mathcal{A}[[\Gamma]]$ se spécialisant sur les fonctions L p-adiques cyclotomiques $\mathcal{L}_p(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)$ des spécialisations motiviques, on est amenés à définir la fonction L p-adique de $[\rho]$ comme étant simplement $\mathcal{L}_p(\rho,\rho^+) := \kappa_\rho\left(\mathcal{L}_p(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)\right) \in \overline{\mathbb{Q}}_p[[\Gamma]]$.

On illustre cette stratégie pour certains motifs d'Artin de dimension 2. Contrairement aux formes de Maass qui sont p-adiquement rigides, les formes modulaires de poids 1 varient convenablement en famille. Supposons que ρ correspond à une forme modulaire cuspidale primitive f de poids 1 qui est p-régulière (munie d'une p-stabilisation f_α) et à coefficients dans une extension finie $\mathcal{O}$ de $\mathbb{Z}_p$. Alors le théorème de lissité de la courbe de Hecke de Bellaïche et Dimitrov permet de construire un voisinage affinoïde $\mathcal{U}$ de f_α, et une fonction L p-adique à coefficients dans $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathcal{U})$ interpolant les fonctions L p-adiques des points classiques $g \in \mathcal{U}$ (Corollaire 5.1.6). L'élément $\mathcal{L}_p^{\mathrm{BD}}(f_\alpha) \in \mathcal{O}[[\Gamma]] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ obtenu par spécialisation est bien défini à multiplication par un élément de $\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ près.

Admettant l'applicabilité de cette méthode pour un motif d'Artin $[\rho]$ plus général, on est en droit de vouloir mieux connaître $\mathcal{L}_p(\rho,\rho^+)$. Il n'est *a priori* pas clair que $\mathcal{L}_p(\rho,\rho^+) \neq 0$. Supposant que $\mathcal{L}_p(\rho,\rho^+) \neq 0$, nous aimerions déterminer le lieu de ses zéros, ainsi que ses "valeurs spéciales" en les caractères finis de Γ. Cette thématique entre en écho avec les conjectures de Stark complexes et p-adiques et sur lesquelles nous revenons. Nous terminons ce chapitre en rappelant une conjecture de type Stark p-adique formulée par Ferrara dans sa thèse [**Fer18**] sur la valeur du quotient $\mathcal{L}_p^{\mathrm{BD}}(f_\alpha)(\chi)/\mathcal{L}_p^{\mathrm{BD}}(f_\alpha)(\chi')$, où $\chi,\chi' \in \widehat{\Gamma}$ sont deux caractères d'ordre fini, sous réserve que le dénominateur ne s'annule pas (Conjecture 5.2.1).

Nous revenons à présent sur le contenu du deuxième Chapitre. La théorie d'Iwasawa interprète arithmétiquement les fonctions L p-adiques analytiques comme générateurs d'idéaux caractéristiques de groupes de Selmer. Dans ce Chapitre, nous définissons le groupe de Selmer d'une représentation d'Artin et nous en étudions sa structure. En vue du Chapitre III, nous discutons aussi des propriétés de spécialisation d'idéaux caractéristiques, ainsi que de changement de bases de groupes de Selmer de représentations ordinaires générales.

La première section rappelle comment définir un idéal caractéristique $\mathrm{car}_A(M)$ d'un module de type fini et de torsion M sur un anneau noethérien intégralement clos A. Lorsque A est factoriel, $\mathrm{car}_A(M)$ est principal et on appellera fonction L p-adique *algébrique* de M tout générateur de $\mathrm{car}_A(M)$ (Définition 1.3.1). Puis, nous montrons pourquoi il est nécessaire de supposer que M n'a pas de sous-modules pseudo-nuls non-nuls pour que sa fonction L p-adique algébrique admette de bonnes propriétés de spécialisation (Proposition 1.2.2).

La deuxième section définit le groupe de Selmer (dual) $X_\infty(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)$ d'une représentation ordinaire $(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)$ sur une $\mathbb{Z}_p$-algèbre profinie $\mathcal{A}$ (Définition 2.2.1), et montre qu'elle a de bonnes propriétés de changement de bases sous des hypothèses générales (Proposition 2.4.1). Lorsque $\mathcal{A}$ est un anneau de séries formelles sur une extension finie de $\mathbb{Z}_p$, on montre que $X_\infty(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)$ n'a pas de sous-modules pseudo-nuls non-nuls à condition qu'il soit de *torsion*, en faisant appel à un théorème de Greenberg (Proposition 2.5.1).

Dans la dernière section, on étudie le groupe de Selmer $X_\infty(\rho,\rho^+)$ d'un motif d'Artin $[\rho]$ sur $\mathbb{Q}$, de réalisation p-adique V_ρ, muni d'un réseau stable $T_\rho \subseteq V_\rho$ et d'une p-stabilisation ordinaire $V_\rho^+ \subseteq V_\rho$. On suppose $[\rho]$ (absolument) irréductible et non-trivial, et on pose $D_\rho = T_\rho \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, $D_\rho^+ = T_\rho^+ \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Le groupe de Selmer $X_\infty(\rho,\rho^+)$ est le dual de Pontryagin du noyau de l'application de restriction global-local en cohomologie galoisienne

$$H^1(\mathbb{Q}_\infty, D_\rho) \longrightarrow H^1(I_p, D_\rho/D_\rho^+) \times \prod_{\ell \neq p} H^1(I_\ell, D_\rho)$$

(Définition 3.1.1 et Remarque 3.1.2). $X_\infty(\rho,\rho^+)$ est un module de type fini sur $\mathcal{O}[[\Gamma]]$, que l'on identifie désormais à l'algèbre d'Iwasawa $\mathcal{O}[[T]]$ en envoyant un générateur topologique $\gamma \in \Gamma$ sur $1+T$. Si $X_\infty(\rho,\rho^+)$ est de torsion, on notera $L_p(\rho,\rho^+;T) \in \mathcal{O}[[T]]-\{0\}$ sa fonction L p-adique algébrique. En général, changer de réseau multiplie $L_p(\rho,\rho^+;T)$ par une puissance de p, et la fonction L p-adique algébrique n'est définie qu'à une unité de $\mathcal{O}[[T]] \otimes \mathbb{Q}_p$ près (Proposition 3.1.3). Néanmoins, si ρ est résiduellement irréductible, ou si le μ-invariant de $L_p(\rho,\rho^+;T)$ est nul pour un choix de réseau, alors $L_p(\rho,\rho^+;T)$ ne dépendra pas du choix du réseau (Lemme 3.1.4).

Le Théorème principal de ce chapitre décrit la structure de $X_\infty(\rho,\rho^+)$ lorsque V_ρ^+ est de dimension 1. Soit $H \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ le corps corps de nombres découpé par ρ, et soit $\bar\rho$ la représentation résiduelle de ρ.

Théorème (= Théorème 3.1.5)**.** *Supposons* $\dim V_\rho^+ = 1$.

(i) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$*, le* $\mathcal{O}$*-module* $X_n(\rho,\rho^+)$ *est fini.*

(ii) Le $\mathcal{O}[[T]]$*-module* $X_\infty(\rho,\rho^+)$ *est de torsion.*

(iii) Si $H \cap \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q}$*, alors* $L_p(\rho,\rho^+;T)$ *ne s'annule pas sur* $\mu_{p^\infty} - \{1\}$.

En posant $e(\rho,\rho^+) := \dim H^0(\mathbb{Q}_p, V_\rho/V_\rho^+)$*, on a de plus :*

$$L_p(\rho,\rho^+;0) \neq 0 \Longleftrightarrow e(\rho,\rho^+) = 0,$$

$$\mathrm{ord}_T L_p(\rho,\rho^+;T) \geq e(\rho,\rho^+).$$

(iv) Supposons que ni $\bar\rho$ *ni* $\bar\rho^*(1)$ *n'a de* $G_{\mathbb{Q}}$*-invariants. Alors* $X_\infty(\rho,\rho^+)$ *n'a pas de sous-*Λ*-module fini non-nul.*

La preuve est étalée sur les Sections 3.2 à 3.5. Nous utilisons d'abord la suite d'inflation-restriction pour nous ramener à l'étude de $\mathfrak{X}_n$, groupe de Galois de la plus grande pro-p extension abélienne de $H_n = H\cdot\mathbb{Q}_n$ non-ramifiée en dehors de p. Sa structure galoisienne dépend, par la théorie des corps de classes locale, de la manière dont le p-complété des unités globales de H_n s'envoie dans le produit de ses unités locales. L'hypothèse $\dim V^+ = 1$ permet alors de nous passer de la conjecture de Leopoldt, en faisant appel à la version p-adique, due à Brumer, du célèbre Théorème de transcendance de Baker. On termine la preuve du point (i) dans la Section 3.4 grâce à une application astucieuse du théorème de Baker-Brumer due à Bellaïche-Dimitrov (Théorème 3.4.4). Lorsque $\dim V^+ > 1$, nous pensons que des arguments semblables s'appliqueraient à condition qu'un certain régulateur p-adique ne s'annule pas (cf. Théorème 1.1.4).

Dans la preuve des points (ii) et (iii), on décrit le noyau des flèches de contrôle

$$X_\infty(\rho,\rho^+)_{\Gamma^{p^n}} \longrightarrow X_n(\rho,\rho^+)$$

pour tout entier $n >> 0$, et dont les images sont finies d'après le point (i). Le rang de ce noyau est borné avec n (Proposition 3.5.3), prouvant que $X_\infty(\rho,\rho^+)$ est de torsion. Si de plus $H \cap \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q}$, alors les calculs se simplifient, et ce rang est égal à e_ρ pour tout entier $n \geq 0$, ce qui permet de montrer le point (iii) (Corollaire 3.5.4). Cela met en évidence un phénomène de zéros triviaux nous amenant à la conjecture suivante.

Conjecture (=Conjecture 3.5.5)**.** *Si* $H \cap \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q}$*, alors on a*

$$\mathrm{ord}_T L_p(\rho,\rho^+;T) = e(\rho,\rho^+).$$

Notons que les calculs menés dans cette section se simplifient sous l'hypothèse que p ne divise ni le conducteur, ni l'ordre de l'image de ρ. Des résultats similaires ont étés obtenus indépendamment par Greenberg et Vatsal [**GV18**] sous ces hypothèses supplémentaires dans une récente prépublication.

Le troisième chapitre se propose d'étudier le motif d'Artin $[\rho]$ associé par Deligne et Serre à une forme cuspidale primitive f de poids 1 et de niveau $\Gamma_1(N)$. On suppose que :

- **(nr)** ρ est non-ramifiée en p, i.e. $p \nmid N$,
- **(rég)** f est régulière en p, c'est-à-dire que les valeurs propres α, β de $\rho(\mathrm{Frob}_p)$ sont distinctes.
- **(hyp)** p ne divise pas l'ordre de l'image de ρ.

La représentation résiduelle $\bar\rho$ est en particulier irréductible et p-distinguée. On fixe une p-stabilisation ordinaire de ρ, ce qui revient au choix d'une p-stabilisation f_α de f. Comme $V_\rho^+ = V_\rho^{\mathrm{Frob}_p=\beta}$ est de dimension 1, le théorème principal du Chapitre II s'applique à $X_\infty(f_\alpha) = X_\infty(\rho,\rho^+)$. Par ailleurs, la fonction L p-adique algébrique $L_p(f_\alpha;T) := L_p(\rho,\rho^+;T)$ de f_α ne dépend pas du choix du réseau stable $T_\rho \subseteq V_\rho$ et est définie à une unité de $\mathcal{O}[[T]]$ près, car ρ est résiduellement irréductible par l'hypothèse **(hyp)**.

Dans le théorème principal de la première section, on calcule le terme constant de la fonction L p-adique algébrique lorsqu'elle n'a pas de zéro trivial, c'est-à-dire lorsque $\alpha \neq 1$. Notons $\mathrm{Cl}_p(H)^\rho$ la composante ρ-isotypique du p-groupe des classes de H, et choisissons ϵ_ρ^+ un générateur de la $\mathcal{O}$-droite de $\left(\mathcal{O}_H^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}\right)^\rho$ sur laquelle Frob_p a pour valeur propre β. On peut voir $\mathcal{O}_H^\times$ à l'intérieur de $\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ via un plongement $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ préalablement fixé, et appliquer le logarithme p-adique d'Iwasawa.

Théorème (=Théorème 1.1.3)**.** *Si $\alpha = 1$, alors $L_p(f_\alpha;0) = 0$.*

Si $\alpha \neq 1$, alors on a,

$$L_p(f_\alpha;0) = \frac{\log_p \circ \iota_p \left(\epsilon_\rho^+\right)}{p} \sqrt{\#\left(\mathrm{Cl}_p(H)^\rho\right)},$$

à multiplication par une unité p-adique près.

La preuve du théorème repose sur une description facilitée de $X_n(f_\alpha)$ sous nos hypothèses supplémentaires (Proposition 1.2.11). Elle se généralise par ailleurs au cas d'une représentation d'Artin de dimension d sous des hypothèses analogues. Lorsque $\dim V_\rho^+ > 1$, le terme $\log_p \circ \iota_p \left(\epsilon_\rho^+\right)$ est remplacé par le déterminant (conjecturalement non-nul) d'une matrice de taille $\dim V_\rho^+$ de logarithmes p-adiques de certaines unités globales de H (Théorème 1.1.4).

La fin de la première section s'attarde sur le cas des formes modulaires à multiplication complexes, c'est-à-dire quand ρ est l'induite d'un caractère de Hecke d'ordre fini ψ sur un corps quadratique imaginaire F. Lorsque p est décomposé dans F, l'isomorphisme de Shapiro (Proposition 1.3.1) identifie $X_\infty(f_\alpha)$ avec le module d'Iwasawa intervenant dans la Conjecture Principale pour ψ sur le corps quadratique F (**[Rub91]**). Le module obtenu lorsque p est inerte mériterait d'être comparé à la définition du groupe de Selmer $\mathrm{Sel}^{\pm}$ de Kobayashi pour une courbe elliptique à multiplication complexe et à réduction supersingulière en p (**[Kob03, PR04]**).

Le thème des deux dernières sections du Chapitre III est la formulation et l'étude d'une Conjecture Principale pour f_α. Bien que construite uniquement sous l'hypothèse de p-régularité, la fonction L p-adique de Bellaïche-Dimitrov $\mathcal{L}_p^{\mathrm{BD}}(f_\alpha;T) \in \mathcal{O}[[T]] \otimes \mathbb{Q}_p$ n'est définie qu'à multiplication par un élément de $\mathrm{Frac}(\mathcal{O})^\times$ près. Comme dans le cas des formes de poids $k \geq 2$, on peut abaisser cette indétermination à $\mathcal{O}^\times$ sous les hypothèses supplémentaires que $\bar{\rho}$ est irréductible et p-distinguée. On fait appel pour cela à la construction de **[EPW06]** d'une fonction L p-adique $\mathcal{L}_p(\bar{\rho};T) \in \mathbb{H}_{\bar{\rho}}[[T]]$ à coefficients dans la composante locale $\mathbb{H}_{\bar{\rho}}$ de l'algèbre de Hecke universelle ordinaire de niveau modéré N. Elle est définie à une unité de $\mathbb{H}_{\bar{\rho}}$ près, dépendant du choix d'une période canonique en famille, et se spécialisant sur la fonction L p-adique usuelle de formes propres ordinaires p-stabilisées de poids $k \geq 2$ et niveau modéré N (cf. Paragraphe 2.2). La forme f_α définit une spécialisation $\phi : \mathbb{H}_{\bar{\rho}} \longrightarrow \mathcal{O}$. L'application de ϕ aux coefficients de $\mathcal{L}_p(\bar{\rho};T)$ définit un élément $\mathcal{L}_p(f_\alpha;T)$ bien défini à $\mathcal{O}^\times$ près, que l'on appelle fonction L p-adique analytique de f_α. Par analogie avec la Conjecture Principale pour les formes paraboliques primitives p-ordinaires de poids $k \geq 2$ (**[SU14]**, Conjecture 3.24]), nous proposons une conjecture Principale pour f_α.

Conjecture (=Conjecture 2.3.5)**.** *Il existe une unité u de $\mathcal{O}[[T]]$ telle que*

$$u \cdot L_p(f_\alpha, T) = \mathcal{L}_p(f_\alpha, T).$$

Le théorème principal de cette partie fournit une évidence en faveur de cette conjecture.

Théorème (=Théorème 2.3.6)**.** *Il existe un élément $u \in \mathcal{O}[[T]]\otimes\mathbb{Q}_p$ tel que*

$$u \cdot L_p(f_\alpha, T) = \mathcal{L}_p(f_\alpha, T).$$

De plus, si la Conjecture Principale pour les formes paraboliques primitives p-ordinaires de poids $k \geq 2$ est vraie, alors la Conjecture Principale pour f_α est vraie.

Un théorème de Wiles [**Wil88**, Theorem 3] montre l'existence d'une famille de Hida $\mathbf{f}$ se spécialisant en f_α. Nous prouvons ce théorème par un argument de passage à la limite sur les spécialisations $\mathbf{f}_k$ de poids k de $\mathbf{f}$, lorsque k tend p-adiquement vers 1. La famille de Hida $\mathbf{f}$ définit un certain quotient $\mathbb{H}_{\mathbf{f}}$ de $\mathbb{H}_{\bar{\rho}}$ qui est une algèbre finie intègre sur l'anneau $\Lambda^{\text{poids}} := \mathbb{Z}_p[[X]]$. Nous illustrons d'abord la preuve sous l'hypothèse (très forte !) que $\mathbb{H}_{\mathbf{f}}$ est isomorphe à l'anneau de séries formelles $\mathcal{O}[[X]]$, et nous expliquerons ensuite comment s'en passer. Après un changement de variables, la forme f_α correspond à la spécialisation $X = 0$, et plus généralement, une spécialisation classique de $\mathbf{f}$ de poids k, de niveau Np^r et caractère $\epsilon_f\chi_\zeta\omega^{1-k}$ correspond à la spécialisation $X = \zeta(1+p)^{k-1} - 1$. En notant g_n la forme obtenue en spécialisant $X = (1+p)^{(p-1)p^n} - 1$, on peut schématiquement illustrer la preuve de la divisibilité :

$$\begin{tikzcd}
L_p(g_n;T) \arrow[d, "(c)"', "n\to+\infty"] & \overset{(a)}{\text{divise}} & \mathcal{L}_p(g_n;T) \arrow[d, "n\to+\infty"', "(b)"] \\
L_p(f_\alpha;T) & & \mathcal{L}_p(f_\alpha;T)
\end{tikzcd}$$

Toutes les fonctions L p-adiques sont des éléments de l'anneau topologique $\mathcal{O}[[T]]$, et les divisibilités sont dans $\mathcal{O}[[T]]\otimes\mathbb{Q}_p$. L'élément $L_p(g_n;T)$ est la fonction L p-adique algébrique du groupe de Selmer attaché à g_n, et la divisibilité (a) est une application d'un célèbre Théorème de Kato [**Kat04**]. Pour le passage à la limite (b), on considère la fonction L p-adique analytique de $\mathbf{f}$ obtenue à partir de $\mathcal{L}_p(\bar{\rho};T)$. C'est une série formelle à deux variables $\mathcal{L}_p(X,T)$ par notre hypothèse simplificatrice, et (b) signifie que $\mathcal{L}_p((1+p)^{(p-1)p^n}-1, T)$ converge vers $\mathcal{L}_p(0,T)$, ce qui est clair. Pour (c), on construit la représentation ordinaire $\mathcal{T}_{\mathbf{f}}$ associée à $\mathbf{f}$ et à coefficients dans $\mathbb{H}_{\mathbf{f}}$. On montre que le groupe de Selmer $X_\infty(\mathbf{f})$ associé n'a pas de sous-modules pseudo-nuls non-triviaux (Lemme 3.4.3). Comme l'anneau des coefficients $\mathbb{H}_{\mathbf{f}}[[T]]$ est un anneau de séries formelles, la fonction L p-adique algébrique $L_p(X,T)$ de $X_\infty(\mathbf{f})$ possède les propriétés de spécialisation attendues, d'après les résultats généraux du Chapitre II. Le point (c) se montre alors comme le (b), et comme $L_p(f_\alpha;T) \neq 0$, on peut conclure que $L_p(f_\alpha;T)$ divise $\mathcal{L}_p(f_\alpha;T)$ par un passage à la limite dans les divisibilités (Lemme 3.1.1).

L'hypothèse $\mathbb{H}_{\mathbf{f}} \simeq \mathcal{O}[[X]]$ est beaucoup trop forte et implique notamment que son localisé $(\mathbb{H}_{\mathbf{f}})_{\mathfrak{p}}$ en f_α est régulier, ce qui est précisément l'énoncé du théorème lissité de la courbe de Hecke en f_α prouvé par Bellaïche et Dimitrov. En fait, on montre que leur résultat suffit à adapter les arguments précédents. En effet, l'anneau complété $\left(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbf{f}}\right)_{\mathfrak{p}}$ est isomorphe à $\overline{\mathbb{Q}}_p[[X^{1/e}]]$, où $e \geq 1$ est l'indice de ramification de l'application de poids en f_α. L'image de $\mathbb{H}_{\mathbf{f}}$ dans cet anneau est finie sur Λ^{poids}, et le Théorème d'approximation d'Artin [**Art68**] montre qu'elle est contenue dans un anneau de séries convergentes $\mathcal{O}'[[Y]]$ de la variable $Y = X^{1/e}/p^r$ (pour un certain $r \geq 0$) et à coefficients dans une extension finie de $\mathcal{O}$ (Proposition 3.2.2). Cela fournit un paramétrage $\mathbf{f}^\dagger(Y)$ de $\mathbf{f}$ permettant d'adapter entièrement la preuve précédente en remplaçant $L_p(X,T)$ et $\mathcal{L}_p(X,T)$ par leurs analogues respectifs $L_p^\dagger(Y,T)$ et $\mathcal{L}_p^\dagger(Y,T) \in \mathcal{O}'[[Y,T]]$.

Notations générales

Corps de nombres et plongements : On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$. On notera $G_E = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ le groupe de Galois d'une extension algébrique $E \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$. On fixera aussi un plongement $\iota_\infty : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ du corps des nombres algébriques dans le corps des nombres complexes.

Pour tout nombre premier ℓ, on fixe aussi un plongement $\iota_\ell : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, ce qui revient à choisir une place de $\overline{\mathbb{Q}}$ au-dessus de ℓ. Lorsque $\ell = p$, le nombre premier fixé dans les Chapitres 2 et 3, on notera toujours v cette place. Pour une extension $E \subseteq F \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ on notera aussi $I_\ell(F/E) \subseteq \mathrm{Gal}(F/E)$ le groupe d'inertie de la place de F définie par ι_ℓ.

Représentations de groupes finis : Soit G un groupe fini et soit $\mathbf{C}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Toute $\mathbf{C}$-représentation irréductible (π, V_π) de G définit un idempotent

$$e_\pi = \frac{\dim \pi}{\# G} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr} \circ \pi(g^{-1}) g \in \mathbf{C}[G]$$

Étant donnée une $\mathbf{C}$-représentation W de G, on notera $W^\rho := e_\pi W \subseteq W$ sa composante π-isotypique.

Dualité de Pontryagin : Soit p un nombre premier impair. Pour un $\mathbb{Z}_p$-module localement compact M, on note $M^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ le dual de Pontryagin de M. Le foncteur $M \mapsto M^\vee$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathbb{Z}_p$-modules discrets de torsion et les $\mathbb{Z}_p$-modules compacts. Un $\mathbb{Z}_p$-module localement compact est autodual si et seulement si il est fini.

Caractères cyclotomiques et algèbre d'Iwasawa : Soit $\tilde{\chi}_{\mathrm{cyc}} : G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique et soit $\omega : G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mu_{p-1}$ le caractère de Teichmüller. $\tilde{\chi}_{\mathrm{cyc}}$ induit un isomorphisme entre $\tilde{\Gamma} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})$ et $\mathbb{Z}_p^\times$, et ω induit un isomorphisme entre $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})$ et μ_{p-1}. Le caractère $\chi_{\mathrm{cyc}} := \tilde{\chi}_{\mathrm{cyc}} \omega^{-1}$ se factorise via le groupe de Galois Γ de la $\mathbb{Z}_p$-extension extension cyclotomique, notée $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$, et réalise un isomorphisme $\Gamma \simeq 1 + p\mathbb{Z}_p$. On notera $\gamma \in \Gamma$ l'image inverse du générateur topologique $u = 1 + p$ de $1 + p\mathbb{Z}_p$. On a ainsi $\Gamma \simeq \gamma^{\mathbb{Z}_p}$. L'algèbre d'Iwasawa sur une extension finie $\mathcal{O}$ de $\mathbb{Z}_p$ est l'anneau de groupe complété $\mathcal{O}[[\Gamma]]$. Elle est isomorphe à l'anneau des séries formelles en une variable $\mathcal{O}[[T]]$ après identification de γ avec $1+T$. On la notera souvent Λ, mais on rajoutera parfois un indice pour suggérer la dépendance au choix de $\mathcal{O}$.

Tour cyclotomique et caractères : On note $\mathbb{Q}_n$ le n-ème étage de la tour cyclotomique, c'est-à-dire le sous-corps de $\mathbb{Q}_\infty$ fixé par Γ^{p^n}, ainsi que $\Gamma_n = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Si $\zeta \in \mu_{p^\infty}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est une racine de l'unité d'ordre p^n, on notera $\chi_\zeta : G_\mathbb{Q} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ le caractère galoisien se factorisant par Γ_n et envoyant γ sur ζ. Le caractère χ_ζ est d'ordre p^n et de conducteur p^{n+1}.

Chapitre I

Les fonctions L des représentations d'Artin et leurs valeurs spéciales

1. Représentations d'Artin

1.1. Prolégomènes. Soit $F \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ un corps de nombres. Un des buts de la théorie algébrique des nombres moderne est d'étudier la structure du groupe de Galois absolu $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$. Celui-ci est naturellement isomorphe à la limite projective $\varprojlim_{F \subseteq K \subseteq \overline{\mathbb{Q}}} \mathrm{Gal}(K/F)$, où K varie dans l'ensemble des extensions finies de F, et est muni de la topologie limite, qui fait de G_F un groupe topologique profini. Étant donné un corps topologique E, on peut étudier G_F en étudiant ses représentations continues à coefficients dans E, c'est-à-dire les morphismes continus

$$\rho : G_F \longrightarrow \mathrm{GL}_n(E)$$

où n est un entier et $\mathrm{GL}_n(E)$ est le groupe des matrices inversibles à coefficients dans E, muni de la topologie induite par celle de E. On notera $V = E^n$ le E-espace vectoriel sur lequel ρ agit. Pour tout nombre premier p, on parle de représentation p-adique lorsque $E = \overline{\mathbb{Q}}_p$, et de représentation modulo p lorsque $E = \overline{\mathbb{F}}_p$ (muni de la topologie discrète). Lorsque $E = \mathbb{C}$ (muni de sa topologie usuelle), on parle de **représentation d'Artin** sur F et on la notera (ρ, V) pour insister sur l'espace vectoriel réalisant ρ. On montre facilement que ρ est d'image finie, et donc se factorise par le groupe de Galois d'une extension finie de F. La théorie des représentations des groupes finis montre alors que ρ est décomposable en somme directe de sous-représentations irréductibles, et que ρ est de plus réalisable sur un corps de nombres.

Deux représentations d'Artin (ρ, V) et (ρ', V') sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme $V \longrightarrow V'$ de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels qui est G_F-équivariant, ce qui revient à dire par semi-simplicité que leurs caractères sont égaux. Étant donné une extension finie $F' \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ de F et une représentation d'Artin (ρ, V) sur F', on notera $\mathrm{Ind}_{F'}^{F} \rho$ l'induite de ρ à G_F, définie par $\mathrm{Ind}_{F'}^{F} V = \mathbb{C}[G_F] \otimes_{\mathbb{C}[G_E]} V$. Le théorème d'induction de Brauer [**Bra47**] permet d'étudier les caractères d'Artin et leurs fonctions L (complexes et p-adiques) en se ramenant à la dimension 1.

Théorème 1.1.1 (Théorème d'induction de Brauer (pour un groupe de Galois))**.** *Soit V une représentation complexe d'un groupe fini G. Il existe des sous-groupes H_i de G (indexés par $i \in I \sqcup J$), ainsi que des représentations W_i de H_i de dimension 1 telles que*

$$\left(\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Ind}_{H_i}^G W_i\right) \bigoplus V \simeq \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Ind}_{H_j}^G W_j$$

De plus, les H_i peuvent être choisis parmi les sous-groupes de G isomorphes à un produit d'un groupe cyclique et d'un p_i-groupe (pour un certain nombre premier p_i).

1.2. Conducteur d'Artin. Soit (ρ, V) une représentation d'Artin, de caractère χ, se factorisant par le groupe de Galois G d'une extension finie K/F. Toute place w de K au-dessus d'une place v de F définit un sous-groupe de décomposition $G_w \subseteq G$ s'identifiant au groupe de Galois de l'extension locale K_w/F_v. Lorsque w est non-archimédienne, le groupe G_w admet une filtration décroissante $(G_{w,i})_{i\in\mathbb{N}}$ en sous-groupes de ramification définie de la manière suivante. Soit $(\mathcal{O}_w, \mathfrak{m}_w)$ l'anneau local des entiers de K_w. Alors pour tout entier $i \geq 0$, $G_{w,i}$ est le sous-groupe des éléments $g \in G_w$ agissant trivialement sur $\mathcal{O}_w/\mathfrak{m}_w^{i+1}$. En particulier, $I_w := G_{w,0}$ est le groupe d'inertie de la place w. On définit le conducteur additif d'Artin local de ρ en w par la formule :

$$\mathfrak{f}_w(\rho) = \sum_i \frac{g_{w,i}}{g_{w,0}} \left(\dim V - \dim V^{G_{w,i}}\right)$$

où $g_{w,i} = \# G_{w,i}$ et où $V^{G_{w,i}}$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de V par l'action de $G_{w,i}$. Notons que $\mathfrak{f}_w(\rho)$ ne dépend que de v et pas de w, car les groupes de décomposition sont conjugués et χ est une fonction centrale. Artin a prouvé que $\mathfrak{f}_w(\rho)$ était un entier naturel (cf. [**Ser67**, Chap VI, §4.4, Th. 2]). Par ailleurs, on voit que $\mathfrak{f}_w(\rho) = 0$ si et seulement si ρ est non-ramifiée en w, c'est-à-dire si I_w agit trivialement sur V.

On définit à présent le conducteur d'Artin global attaché à ρ à l'aide des conducteurs d'Artin locaux. Pour toute place v non-archimédienne de F, notons $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de $\mathcal{O}_F$ associé à v.

Définition 1.2.1. On définit le conducteur d'Artin global de ρ comme étant l'idéal entier de $\mathcal{O}_F$:

$$\mathfrak{f}(\rho) = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\mathfrak{f}_w(\rho)}$$

1.3. Fonctions L d'Artin et équation fonctionnelle. Soit (ρ, V) une représentation d'Artin de caractère χ, se factorisant par le groupe de Galois G d'une extension K/F. Soit v une place non-archimédienne de F, et soit w une extension de v à K. On note Frob_w le relèvement à G_w de l'automorphisme de Frobenius $x \mapsto x^{q_v}$. Celui-ci agit sur le sous-espace $V^{I_w} \subseteq V$ des vecteurs fixes par l'action de I_w. On définit le facteur L local d'Artin en v comme étant la fonction méromorphe de la variable $s \in \mathbb{C}$

$$L_v(\rho,s) = \det\left(1 - q_v^{-s}\rho(\mathrm{Frob}_w^{-1})|V^{I_w}\right)^{-1}$$

La définition ne dépend pas du choix de K, de w ou de Frob_w. Soit S un ensemble fini de places de F contenant toutes les places archimédiennes de F. On définit la fonction L d'Artin attachée à ρ comme étant le produit infini (convergeant absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1$) :

$$L_S(\rho,s) = \prod_{v \notin S} L_v(\rho,s),$$

v parcourant l'ensemble des places de F hors de S. On enlèvera l'indice S lorsque S est égal à l'ensemble des places archimédiennes de F. Deux représentations d'Artin équivalentes définissent la même fonction L, donc on notera aussi cette dernière $L_S(\chi,s)$. Par ailleurs, le formalisme d'Artin montre que l'on a les propriétés suivantes ([**Neu99**, Chap. VII, §10, Prop. 10.4]) : $L_S(\rho \oplus \rho', s) = L_S(\rho,s) \cdot L_S(\rho',s)$ pour ρ et ρ' se factorisant par G ; $L_{S_0}(\mathrm{Ind}_F^{F_0}\rho, s) = L_S(\rho,s)$ pour K/F_0 une extension galoisienne telle que $F \supseteq F_0$ et pour S_0 l'ensemble des places de F_0 en dessous de places appartenant à S. Enfin, lorsque ρ est de dimension 1, il définit un caractère de Hecke d'ordre fini, et sa fonction L de Hecke coïncide avec celle d'Artin. Ces observations, ainsi que l'usage du Théorème 1.1.1, montrent que les fonctions L d'Artin héritent des mêmes propriétés que celles de Hecke : elles admettent un prolongement analytique en des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ et vérifient une équation fonctionnelle. Rappelons la conjecture d'Artin :

Conjecture 1.3.1. *Soit (ρ,V) une représentation d'Artin sur F. Le prolongement méromorphe de $L(\rho,s)$ à $\mathbb{C}$ est holomorphe, excepté en $s = 1$ où elle a un zéro d'ordre $r = \dim_{\mathbb{C}} V^{G_F}$.*

Soit (ρ,V) une représentation d'Artin sur F de dimension n et se factorisant par $G = \mathrm{Gal}(K/F)$. L'équation fonctionnelle relie la fonction L d'Artin complétée de ρ à celle de sa contragrédiente (ρ^*,V^*) définie par $V^* = \mathrm{Hom}(V,\mathbb{C})$. Rappelons d'abord l'expression du facteur L de ρ en une place archimédienne v. Soit w une place de K au-dessus de v, et soit Frob_w un générateur de $\mathrm{Gal}(K_w/F_v)$ (qui est trivial à moins que v ne soit réelle et w complexe, auquel cas Frob_w est simplement la conjugaison complexe). On pose

$$L_v(\rho,s) = \begin{cases} \Gamma_{\mathbb{C}}(s)^n & \text{si v est complexe} \\ \Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{n^+}\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)^{n^-} & \text{si v est réelle} \end{cases}$$

où $n^{\pm}$ est la dimension du sous-espace propre de Frob_w associé à la valeur propre ± 1, et où

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2), \qquad \Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s).$$

La définition de $L_v(\rho,s)$ ne dépend pas du choix de w. La fonction L complétée de ρ est donnée par la formule

$$\Lambda(\rho,s)=\left(\prod_{v|\infty}L_v(\rho,s)\right)L(\rho,s).$$

Artin a déterminé la forme de l'équation fonctionnelle satisfaite par $\Lambda(\rho,s)$. Posons

$$c(\rho)=|\operatorname{Disc}(F/\mathbb{Q})|^n\cdot N_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f}(\rho)),$$

où $\operatorname{Disc}(F/\mathbb{Q})$ est le discriminant absolu de F et $N_{F/\mathbb{Q}}$ est la norme de $F/\mathbb{Q}$.

Théorème 1.3.2. *La fonction L complétée de ρ satisfait l'équation fonctionnelle suivante :*

$$c(\rho)^{s/2}\Lambda(\rho,s)=W(\rho)c(\rho^*)^{(1-s)/2}\Lambda(\rho^*,1-s)$$

où $W(\rho)$ est nombre complexe de norme 1, appelé (en anglais) Artin root number.

2. Conjectures de Stark complexes

Les conjectures de Stark, complexes et p-adiques, visent à donner une interprétation arithmétique aux valeurs spéciales en $s=0$ et $s=1$ des différentes fonctions L complexes et p-adiques attachées à des représentations d'Artin.

2.1. Formule analytique du nombre de classes. On fixe K un corps de nombres. Soit S_∞ l'ensemble des places archimédiennes de K. Le premier exemple historique de fonctions L est la fonction zêta de Dedekind, définie par le produit eulérien

$$\zeta_K(s)=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-N\mathfrak{p}^{-s}},\quad \operatorname{Re}(s)>1$$

où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$. Elle coïncide avec la fonction L d'Artin du caractère trivial sur K et satisfait la Conjecture 1.3.1 et le Théorème 1.3.2 grâce au travail de Hecke. Avant lui, Dirichlet, dans le cas de corps quadratiques imaginaires, puis Dedekind, pour un corps de nombres quelconque, ont calculé le résidu en $s=1$ de $\zeta_K(s)$. En utilisant l'équation fonctionnelle, on obtient le développement de Taylor suivant de $\zeta_K(s)$ en $s=0$:

Théorème 2.1.1 (Dirichlet, Dedekind, Hecke)**.** *Le développement de Taylor en $s=0$ de $\zeta_K(s)$ est*

$$\zeta_K(s)=-\frac{h_KR_K}{e_K}\cdot s^{|S_\infty|-1}+O(s^{|S_\infty|}),$$

où h_K désigne le nombre de classes d'idéaux de $\mathcal{O}_K$, R_K le régulateur de K et $e_K=|\mu(K)|$ est le nombre de racines de l'unité dans K.

DÉMONSTRATION. Le résidu du pôle simple en $s = 1$ de $\zeta_K(s)$ est $\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} h_K R_K}{e_K \operatorname{Disc}(K/\mathbb{Q})^{1/2}}$ (cf. [**Neu99**, Corollary 5.11, §5, Chap. VII] ou [**Lan94**, Chap. VIII, §2, Theorem 5]), où r_1 (resp. r_2) est le nombre de places réelles (resp. complexes) de K. Par ailleurs, la fonction L complétée $\Lambda_K(s) = \zeta_K(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{r_1}\Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{r_2}$ satisfait $d_K^{s/2}\Lambda_K(s) = d_K^{(1-s)/2}\Lambda_K(1-s)$ et a un pôle simple en $s = 1$, de même que $\Gamma_{\mathbb{R}}(s)$ et $\Gamma_{\mathbb{C}}(s)$ en $s = 0$. Donc l'équation fonctionnelle montre que $\zeta_K(s)$ a un zéro d'ordre $r_1 + r_2 - 1 = |S_\infty| - 1$ en $s = 0$, et donne le résidu voulu. $\square$

On peut plus généralement considérer un ensemble fini de places S de K contenant S_∞, et définir

$$\zeta_{K,S}(s) = \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \frac{1}{1 - N\mathfrak{p}^{-s}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Corollaire 2.1.2. *Le développement de Taylor en $s = 0$ de $\zeta_{K,S}(s)$ est*

$$\zeta_{K,S}(s) = -\frac{h_S R_S}{e_K} \cdot s^{|S|-1} + O(s^{|S|}),$$

où h_S désigne le nombre de classes d'idéaux des S-unités $\mathcal{O}_{K,S}^\times$, et R_S le S-régulateur de K (cf. Section 2.3).

DÉMONSTRATION. Voir [**Tat84**, Chap. I, Corollaire 2.2]. $\square$

Soit K/F une extension galoisienne de corps de nombres, de groupe de Galois G. La théorie des représentation des groupes finis montre que la représentation régulière de G, définie comme étant $\operatorname{Ind}_K^F \mathbb{C}$, est la somme directe de toutes les représentations irréductibles ρ de G, avec multiplicité $\chi(1) = \dim \rho$. Le formalisme d'Artin rappelé dans la Section 1.3 montre en particulier que l'on a la factorisation :

$$\zeta_{K,S}(s) = \prod_{\chi} L_S(\chi, s)^{\chi(1)},$$

où χ parcourt l'ensemble des caractères linéaires irréductibles de G. Au regard du Théorème 2.1.1 et du Corollaire 2.1.2, il est naturel de chercher une expression arithmétique du terme dominant du développement de Taylor en $s = 0$ des fonctions L d'Artin (compatible à la factorisation précédente). Autrement dit :

Question 2.1.3. *Étant donné un caractère linéaire irréductible χ de G, peut-on calculer les nombres $c_S(\chi) \in \mathbb{C}$ et $r_S(\chi) \in \mathbb{N}$ tels que*

$$L_S(\chi, s) = c_S(\chi) s^{r_S(\chi)} + O(s^{r_S(\chi)+1})$$

au voisinage de $s = 0$?

Dans la suite, nous rappelons la recette pour calculer $r_S(\chi)$, ainsi que quelques conjectures énoncées par Stark dans sa suite remarquable d'articles [**Sta71, Sta75, Sta76, Sta80**]. Nos références sont [**Tat84**] et [**Das**].

2.2. Théorème des unités de Dirichlet et plongement logarithmique. Nous rappelons ici comment calculer l'ordre d'annulation des fonctions L d'Artin en $s=0$. Soit S_F un ensemble fini de places de F contenant toutes les places archimédiennes, et soit S_K l'ensemble des places de K au-dessus des places de S_F. Pour une place $w \in S_K$ au-dessus de $v \in S_F$, on note $G_w \subseteq G$ le groupe de décomposition associé à w. On définit le $\mathbb{Z}[G]$-module

$$\begin{array}{rcl} Y = Y_{S_K} & := & \bigoplus_{w \in S_K} \mathbb{Z}.w \\ & \simeq & \bigoplus_{v \in S_F} \mathrm{Ind}_{G_w}^{G} \mathbb{Z}, \end{array}$$

ainsi que le sous-module $X \subseteq Y$ par $X = \left\{\sum_w n_w.w \in Y \ / \ \sum_w n_w = 0\right\}$. On a en particulier une suite exacte de G-modules :

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Elle se traduit, en termes de caractères linéaires χ_X et χ_Y des complexifiés $\mathbb{C}X$ et $\mathbb{C}Y$, par la relation $\chi_Y = \chi_X + 1$.

Proposition 2.2.1. *Soit V la réalisation d'un caractère linéaire complexe χ de G. On a*

$$\begin{array}{rcl} r_{S_K}(\chi) & = & \sum_{v \in S_F} \dim_{\mathbb{C}} V^{G_w} - \dim_{\mathbb{C}} V^G \\ & = & \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V^*, \mathbb{C}X) \end{array}$$

Ici, w désigne n'importe quelle place au-dessus de v ($\dim_{\mathbb{C}} V^{G_w}$ ne dépend pas du choix de w) et $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ désigne la représentation contragrédiente de V.

DÉMONSTRATION. Voir [**Das**, Proposition 3.2.2]. □

Nous terminons ce paragraphe en rappelant l'énoncé du théorème des unités de Dirichlet, ce qui nous sera utile pour étudier la structure galoisienne du (complexifié du) groupe des S-unités d'un corps de nombre. Notons, pour toute place $w \in K$, $|-|_w$ la valeur absolue sur K associée à w. On définit un "plongement logarithmique"

$$\begin{array}{rcl} \lambda : \mathcal{O}_{K,S_K}^{\times} & \longrightarrow & \mathbb{R}Y \\ \epsilon & \longmapsto & \sum_w \log(|\epsilon|_w).w \end{array}$$

On voit que le noyau de λ est égal $\mu(K)$. Par ailleurs, λ est à valeurs dans $\mathbb{R}X$ d'après la formule du produit.

Théorème 2.2.2 (Théorème des unités de Dirichlet-Minkowski)**.** *λ induit un isomorphisme $\mathbb{R}[G]$-équivariant $\lambda : \mathbb{R}\mathcal{O}_{K,S_K}^{\times} \longrightarrow \mathbb{R}X$. En particulier, le groupe abélien $\mathcal{O}_{K,S_K}^{\times}$ est de type fini et de rang $|S_K| - 1$.*

DÉMONSTRATION. Voir [**Lan94**, Chap V, §1]. □

2.3. Conjecture de Stark non-abélienne. Le régulateur R_S apparaissant dans le Corollaire 2.1.2 est lié au covolume du réseau $\lambda(\mathcal{O}_{K,S})$ dans $\mathbb{R}X$. Plus précisément, fixons $w_0 \in S = S_K$, et choisissons une base $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{|S|-1}$ de la partie libre de $\mathcal{O}_{K,S}$. Alors R_S est défini comme étant la valeur absolue du déterminant de la matrice $(\log|\epsilon_i|_w)_{i,w}$ où i parcourt $1, \dots, |S|-1$ et w parcourt $S - \{w_0\}$. Plutôt qu'avec les ϵ_i, on peut définir R_S à partir d'un choix de morphisme injectif G-équivariant $f : X \hookrightarrow \mathcal{O}_{K,S}^\times$. En complexifiant f, on obtient un automorphisme $\lambda \circ f$ de $\mathbb{C}X$, et, d'après la preuve de [**Das**, Proposition 3.3.4], on a

$$\det(\lambda \circ f) = \pm R_S[\mathcal{O}_{K,S}^\times : f(X)\mu(K)]$$

Définition 2.3.1 (Régulateur de Stark)**.** Soit $f : X \hookrightarrow \mathcal{O}_{K,S}^\times$ un morphisme injectif G-équivariant, et soit V une représentation complexe du groupe de Galois d'une extension K/F de corps de nombres. On pose

$$R_S(\chi, f) = \det((\lambda \circ f)_V)$$

où $(\lambda \circ f)_V$ désigne l'automorphisme complexe de $\mathrm{Hom}_G(V^*, \mathbb{C}X)$ induit par la post-composition par $\lambda \circ f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}X)$. Il s'agit d'un déterminant $r_S(\chi) \times r_S(\chi)$, d'après la Proposition 2.2.1.

Exemple 2.3.2. Supposons $F = \mathbb{Q}$, $S_F = \{\infty\}$, et $V^G = \{0\}$. Fixons w une place archimédienne de K, et notons τ un générateur du groupe de G_w (i.e. $\tau = \mathrm{id}$ si K est réel, et τ est une conjugaison complexe si K est complexe). Soit $\{e_i\}_i$ une base de V dans laquelle la matrice de τ est donnée par

$$A(\tau) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{id}_a & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{id}_b \end{array}\right)$$

Notons que $a = \dim V^{G_w} = r_S(\chi)$. Notons plus généralement $A(\sigma) = [a_{i,j}(\sigma)]_{i,j}$ la matrice de l'automorphisme $\sigma \in G$ dans la base $\{e_i\}_i$. On peut définir un morphisme injectif f à l'aide d'une unité de Minkowski, dont la définition et l'existence sont rappelées dans le résultat suivant (cf. [**Min00**]) :

Proposition 2.3.3 (Théorème des unités de Minkowski)**.** *Il existe une unité $\epsilon \in \mathcal{O}_K^\times$ fixée par τ, telle que l'unique relation multiplicative entre les $\sigma(\epsilon)$ pour σ parcourant G/G_w est*

$$\prod_{\sigma \in G/G_w} \sigma(\epsilon) = \pm 1$$

Une telle unité est appelée unité de Minkowski.

Étant donnée une unité de Minkowski ϵ, on peut définir un morphisme de $\mathbb{Z}[G]$-module $Y \longrightarrow \mathcal{O}_K^\times$ envoyant la place $w' = \sigma w$ sur l'unité $\epsilon' = \sigma(\epsilon)$. Sa restriction à X, notée f_ϵ, est injective par définition de ϵ. On obtient l'expression suivante pour le régulateur de Stark :

$$R(\chi, f_\epsilon) = \det\left(\sum_{\sigma\in G/G_w} a_{i,j}(\sigma)\log|\sigma(\epsilon)|_w\right)_{1\leq i,j\leq a}$$

Nous donnons à présent l'énoncé de la conjecture de Stark non-abélienne.

Conjecture 2.3.4 (Conjecture de Stark non-abélienne)**.** *Soit K/F une extension galoisienne de corps de nombres, de groupe de Galois G. Soit S_F un ensemble fini de places de places de F, et soit $S = S_K$ l'ensemble des places de K au-dessus de S_F. Soit χ un caractère linéaire complexe de G et soit $f : X \hookrightarrow \mathcal{O}_{K,S}^\times$ une injection G-équivariante. Définissons*

$$A(\chi, f) = \frac{R_S(\chi, f)}{c_S(\chi)} \in \mathbb{C}$$

Alors pour tout automorphisme $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$, on a

$$A(\alpha\circ\chi, f) = \alpha\left(A(\chi, f)\right)$$

En particulier, on a $A(\chi, f) \in \mathbb{Q}(\chi)$.

Remarque 2.3.5. (1) La véracité de la conjecture est indépendante des choix de f et de S (cf. [**Das**, Section 3.6 & 3.7])

(2) Un argument utilisant le théorème d'induction de Brauer montre que la Conjecture 2.3.4 est vraie en toute généralité, si elle est vraie pour toutes les extensions galoisiennes $K/\mathbb{Q}$, ou bien si elle est vraie pour toutes les extensions abéliennes K/F (cf. [**Das**, Proposition 3.7.3]).

(3) Lorsque $r_S(\chi) = 0$, la Conjecture 2.3.4 est une conséquence du théorème de rationalité des valeurs spéciales de fonctions ζ partielles, dû à Siegel [**Sie70**].

2.4. Conjecture de Stark abélienne de rang 1. Lorsque l'extension K/F est abélienne et $r_S(\chi) = 1$, Stark ([**Sta80**]) a proposé un raffinement de la conjecture 2.3.4. Elle prédit l'existence d'une S-unité $\varepsilon_{K/F,S}$ de K engendrant des extensions abéliennes de F, et propose pour tout caractère χ de G une formule pour $L'_S(\chi, 0)$ en termes de $\varepsilon_{K/F,S}$. Rubin [**Rub96**] a plus tard proposé une formule conjecturale générale lorsque l'ordre d'annulation en $s = 0$ est supérieur ou égal à 1.

Notons que pour tout caractère linéaire χ de dimension 1 de G, c'est-à-dire un caractère multiplicatif complexe de G, on a

$$r_S(\chi) = \begin{cases} |S| - 1 & \text{si } \chi = 1 \\ |\{v \in S_F \ / \ \chi(G_w) = 1\}| & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous énonçons à présent la conjecture de Stark abélienne de rang 1. Soit K/F une extension abélienne de corps de nombres de groupe de Galois G, et soit S_F un ensemble fini de places de F satisfaisant les conditions suivantes :

- S_F contient les places archimédiennes et les places ramifiées de K,
- S_F contient exactement une place totalement décomposée, notée v,
- $|S_F| \geq 2$.

Soit S_K l'ensemble des places de K au-dessus de S_F, et soit $w \in S_K$ une place de K au-dessus de v. On pose

$$\mathcal{O}_{K,S,v}^\times = \{\epsilon \in \mathcal{O}_{K,S}^\times \ / \ |\epsilon|_{w'} = 1 \text{ pour tout } w' \nmid v\} \quad \text{si } |S_F| \geq 3,$$

et

$$\mathcal{O}_{K,S,v}^\times = \{\epsilon \in \mathcal{O}_{K,S}^\times \ / \ |\epsilon|_{w'} = |\epsilon|_{gw'} \text{ pour tout } g \in G\},$$

si $S = \{v, v'\}$ et si w' est un prolongement de v' à K.

Conjecture 2.4.1 (Conjecture de Stark abélienne de rang 1)**.** *Avec les hypothèses et notations si-dessus, il existe une unité $\epsilon_{K/F,S} \in \mathcal{O}_{K,S,v}^\times$ telle que, pour tout caractère multiplicatif χ de G,*

$$L_S'(\chi,0) = -\frac{1}{e}\sum_g \chi(g)\log\left|g\left(\epsilon_{K/F,S}\right)\right|_w,$$

où $e = |\mu(K)|$. De plus, l'extension $K(\epsilon_{K/F,S}^{1/e})/F$ est abélienne.

Remarque 2.4.2. (1) Stark a prouvé la Conjecture 2.4.1 lorsque $F = \mathbb{Q}$ en utilisant le théorème de Stickelberger, et lorsque F est un corps quadratique imaginaire ([**Sta80**, Theorem 2]) en utilisant les unités elliptiques et la seconde formule limite de Kronecker. Voir [**Tat84**, Chap IV Prop. 3.9.] pour un résumé des preuves.

(2) On voit aisément, grâce aux conditions en les places de S_K, que l'unité $\epsilon_{K/F,S}$ est uniquement déterminée à une racine de l'unité près. Dans le cas important improuvé où F est un corps quadratique réel, la formule de la Conjecture 2.4.1 est équivalente à la formule suivante de la fonction L en $s = 1$ (voir [**Fer18**, Conjecture 1.1.5]). Supposons que le terme $E_S(\chi)$ défini plus bas ne s'annule pour aucun caractère χ tel que $r_S(\chi) = 1$. Il existe une unité $\epsilon_{K/F,S} \in \mathcal{O}_{K,S,v}^\times$ telle que, pour tout caractère multiplicatif χ de G de signature mixte, on ait

$$L_{K/F}(\chi,1) = -\frac{2\pi}{e}\frac{W(\chi)}{\sqrt{c_{K/F}(\chi)}}E_S(\chi)\sum_g \chi(g^{-1})\log\left|g\left(\epsilon_{K/F,S}\right)\right|_w,$$

où $E_S(\chi) = \prod_{\mathfrak{p}\in S-S_\infty}\left(1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)\left(1-\bar{\chi}(\mathfrak{p})^{-1}\right)$.

On peut formuler une conjecture plus faible en ne travaillant qu'avec un seul caractère multiplicatif χ et en ne travaillant qu'à un multiple rationnel près. Notons $\left(\mathcal{O}_{K,S}^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(\chi)\right)^{(\chi^{-1})}$ la composante χ^{-1}-isotypique du $\mathbb{Q}(\chi)$-espace vectoriel $\mathcal{O}_{K,S}^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(\chi)$, auquel on étend linéairement l'application $\log|\cdot|_w$.

Conjecture 2.4.3. *Soit χ un caractère multiplicatif de G. Sous les hypothèses de la Conjecture 2.4.1 et les notations ci-dessus, il existe un élément $\epsilon_\chi^* \in \left(\mathcal{O}_{K,S}^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(\chi)\right)^{(\chi^{-1})}$ tel que*

$$L_S'(\chi,0) = \log\left|\epsilon_\chi^*\right|_w$$

La Conjecture 2.4.3 se déduit immédiatement de la Conjecture 2.4.1 en posant $\epsilon_\chi^* = -\frac{1}{e}\sum_{g\in G}\chi(g)\otimes g\left(\epsilon_{K/F,S}\right)$.

On peut formuler une conjecture analogue en $s=1$, en s'inspirant de la conjecture de la Remarque 2.4.2. On se restreint au cas où F est quadratique réel.

Conjecture 2.4.4. *Soit χ un caractère de G de signature mixte tel que $E_S(\chi) \neq 0$ (voir Remarque 2.4.2). Il existe une unité $\epsilon_\chi \in \left(\mathcal{O}_{K,S}^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(\chi)\right)^{(\chi)}$ telle que*

$$L_{K/F}(\chi,1) = \pi \cdot \frac{W(\chi)E_S(\chi)}{\sqrt{c_{K/F}(\chi)}} \log\left|\epsilon_\chi\right|_w.$$

Remarque 2.4.5. Les espaces vectoriels $\left(\mathcal{O}_{K,S}^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(\chi)\right)^{(\chi)}$ et $\left(\mathcal{O}_{K,S}^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(\chi)\right)^{(\chi^{-1})}$ sont de dimension 1, donc les énoncés des Conjectures 2.4.3 et 2.4.4 donnent uniquement une expression de la "période" pour ces valeurs spéciales de fonctions L abéliennes.

2.5. Conjecture de Stark d'une forme modulaire de poids 1. La fonction L d'une forme modulaire parabolique primitive de poids 1 à multiplication complexe par un corps quadratique imaginaire F coïncide avec celle d'un caractère χ du groupe de Galois d'une extension K abélienne de F. Stark montre dans [**Sta77**, Theorem 2] comment déduire de la seconde formule limite de Kronecker une expression pour $L'(\chi,0)$ en terme de logarithmes d'unités elliptiques, et conjecture l'existence de telles unités pour des formes modulaires sans multiplication complexe. Nous suivons l'exposition de [**Tat84**, Chapitre 3, §4.].

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n q^n$ une forme modulaire parabolique primitive de poids 1 de niveau $\Gamma_1(N)$, et soit χ_f le caractère linéaire de sa représentation de Deligne-Serre ρ (cf. Théorème 5.1.1). Posons $K = \overline{\mathbb{Q}}^{\ker\rho}$, $F = \mathbb{Q}$, et $S_F = \{\infty\}$. Comme ρ est impaire, on a $r(\chi_f) = 1$ d'après la Proposition 2.2.1.

Notons $E = \mathbb{Q}(\chi_f)$, et pour tout $\sigma \in \Delta = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$, notons $\sigma(f)$ la forme parabolique conjuguée dont la q-expansion en ∞ est donnée par

$$\sigma(f)(z) = \sum_{n\geq 1} \sigma(a_n) q^n.$$

Pour $b \in E^*$, on peut considérer la forme modulaire à coefficients rationnels

$$g = \sum_{\sigma\in\Delta} \sigma(b)\sigma(f)$$

et définir

$$I(g) = \int_0^\infty g(iy)\frac{dy}{y} = \sum_{\sigma\in\Delta} \sigma(b) L'(\sigma(f), 0)$$

La conjecture de Stark prédit l'existence d'une unité ϵ de $K \subseteq \mathbb{C}$ engendrant K et d'un entier m tel que

$$I(g) = \frac{1}{m}\log(\epsilon).$$

Ainsi, le calcul $\exp mI(g)$ donne une manière concrète de construire K. Chinburg précise cette conjecture dans sa thèse [**Chi80**] en prédisant que l'on peut choisir $m = 1$ dès lors que g est à coefficients entiers. Il vérifie la conjecture dans cinq cas particuliers où ρ est tétraédrale.

3. Représentations d'Artin totalement paires et Conjecture de Gross-Stark

3.1. Fonction L p-adique de Deligne-Ribet. Fixons un nombre premier p impair. Kummer découvre en 1851 ([**Kum51**]) une relation de congruence p-adique satisfaites par les nombres de Bernouilli $B_n \in \mathbb{Q}$, définis par la série génératrice

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n\geq 0} B_n \frac{t^n}{n!}$$

Il montre que toute paire d'entiers strictement positifs pairs (m,n) tels que $m \equiv n \not\equiv 0 \mod (p-1)p^a$ où $a \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(1 - p^{m-1}\right)\frac{B_m}{m} \equiv \left(1 - p^{n-1}\right)\frac{B_n}{n} \mod p^{a+1}.$$

Cette congruence se traduit par la congruence p-adique des valeurs spéciales de fonctions L de Dirichlet en des entiers proches p-adiquement, et suggère que l'on peut interpoler p-adiquement ces valeurs spéciales.

Les résultats suivants, dûs à Kubota et Leopoldt (pour $F = \mathbb{Q}$), puis Deligne-Ribet, Cassou-Noguès, Barsky dans le cas général, montrent l'existence d'une fonction analytique méromorphe de la variable p-adique interpolant les valeurs spéciales de la fonction L d'une représentation d'Artin se factorisant par le groupe de Galois d'une extension de corps totalement réels. Pour une telle représentation d'Artin ρ et un entier $n \geq 1$, posons

$$L^*(\rho, 1-n) := L_{K/F,S_p}(\rho\omega^{-n}, 1-n),$$

où S_p désigne l'ensemble des places de F au-dessus de p, et où ω désigne le caractère de Teichmüller, vu comme une représentation d'Artin de dimension 1 sur F. Plus généralement, pour un ensemble fini $S \supseteq S_p$ de places non-archimédiennes de F contenant S_p, on pose

$$L_S^*(\rho, 1-n) := L_{K/F,S}(\rho\omega^{-n}, 1-n).$$

Le théorème de Klingen-Siegel montre que ce sont des éléments du corps de nombres $\mathbb{Q}(\rho\omega)$, et on peut donc les voir dans $\mathbb{C}_p$ grâce au plongement ι_p. On peut par ailleurs montrer qu'ils sont non-nuls en utilisant l'équation fonctionnelle du Théorème 1.3.2. En dimension 1, on a le Théorème suivant.

Théorème 3.1.1. *Soit χ un caractère multiplicatif du groupe de Galois d'une extension de corps totalement réels K/F, et soit S un ensemble de places non-archimédiennes de F contenant S_p. Il existe une (unique) fonction analytique p-adique sur $\mathbb{Z}_p - \{1\}$ (et même sur $\mathbb{Z}_p$ si $\chi \neq 1$) telle que, pour tout entier $n \geq 1$,*

$$L_{p,S}(\chi, 1-n) = L_S^*(\chi, 1-n) \tag{1}$$

On oubliera l'indice S dans la fonction $L_{p,S}$ lorsque $S = S_p$. Plus généralement, si ρ est une représentation d'Artin découpant une extension de corps totalement réels, alors le théorème 1.1.1 montre que l'on peut construire une (unique) fonction méromorphe p-adique $L_{p,S}(\rho, s)$ satisfaisant la même propriété d'interpolation 1 pour tout entier $n \geq 1$ sauf un nombre fini.

Notation 3.1.2 (Greenberg)**.** Soit ρ une représentation d'Artin sur un corps de nombres F. On note $K = \overline{\mathbb{Q}}^{\ker\rho}$ l'extension de F découpée par ρ, et on note $F_\infty = F\mathbb{Q}_\infty$ l'extension cyclotomique de F. On dit que ρ est de type (S) si $K \cap F_\infty = F$. On dit que ρ est de type (W) si ρ est de dimension 1 et si $K \subseteq F_\infty$.

Iwasawa pour $F = \mathbb{Q}$, puis Deligne-Ribet pour F général, ont utilisé les éléments de Stickelberger pour construire des séries formelles à partir desquelles on peut définir les éléments $L_{p,S}(\chi, s)$. On appelle parfois encore ces séries formelles des fonctions L p-adiques. Soit $\gamma \in \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ un générateur topologique de $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$, d'image $u \in 1+p\mathbb{Z}_p$ via $\mathrm{Gal}(F_\infty/F) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}) \simeq 1+p\mathbb{Z}_p$. Notons $H(\rho;T)$ le polynôme de $\mathbb{Z}_p[\rho][T]$ défini par $\rho(\gamma)(1+T)-1$ si ρ est de type (W), ou bien $H(\rho;T) = 1$ sinon.

Théorème 3.1.3 (Deligne-Ribet,Wiles)**.** *Soit ρ une représentation d'Artin découpant une extension K/F de corps totalement réels, et soit S un ensemble fini de places non-archimédiennes contenant S_p. Il existe une unique série formelle $\mathcal{L}_{p,S}(\rho;T) \in \mathbb{Z}_p[\rho][[T]] \otimes$*

$\mathbb{Q}_p$ telle que, pour tout $s \in \mathbb{Z}_p$, on ait

$$\frac{\mathcal{L}_{p,S}(\rho, u^s - 1)}{H(\rho, u^s - 1)} = L_{p,S}(\rho, s)$$

De plus, si ψ est un caractère d'Artin sur F de type (W), alors

$$\mathcal{L}_p(\rho\psi; T) = \mathcal{L}_p(\rho; \psi(\gamma)(1+T) - 1)$$

DÉMONSTRATION. La contribution de Deligne et Ribet concerne les cas où ρ est de dimension 1. Lorsque ρ est de dimension supérieure, le Théorème 1.1.1 montre l'existence de représentations totalement paires de dimension 1 $(\psi_i)_{i \in I \sqcup J}$ définies sur des sous-extensions de K/F telles que

$$L_S^*(\rho, 1-n) = \frac{\prod_{i \in I} L_S^*(\psi_i, 1-n)}{\prod_{j \in J} L_S^*(\psi_j, 1-n)}$$

pour presque tout $n \geq 1$. On peut alors définir $\mathcal{L}_{p,S}(\rho; T)$ comme étant égal au quotient

$$\prod_{i \in I} \mathcal{L}_{p,S}(\psi_i; T) / \prod_{j \in J} \mathcal{L}_{p,S}(\psi_j; T).$$

$\mathcal{L}_{p,S}(\rho; T)$ vit a priori dans le corps des fractions de $\mathbb{Z}_p[\rho][[T]]$, mais on sait d'après Greenberg que c'est un élément de $\mathbb{Z}_p[\rho][[T]] \otimes \mathbb{Q}_p$, comme conséquence directe de la Conjecture Principale d'Iwasawa sur les corps totalement réels prouvée par Wiles (cf. [**Wil90**, Theorem 1.1] et [**Gre14**]). □

3.2. Conjecture de Gross-Stark. Soit ψ un caractère d'Artin totalement pair sur un corps totalement réel. Gross ([**Gro81**]) propose un analogue p-adique à la conjecture de Stark, donnant l'ordre d'annulation et le terme dominant de la fonction $L_p(\psi, s)$ en $s = 0$, en fonction de $L(\chi, 0)$ où $\chi = \psi\omega^{-1}$.

Soit H le corps CM découpé par χ. On partitionne l'ensemble S_p des places de F au-dessus de p en $R \sqcup R'$, avec

$$R = \{\mathfrak{p} \mid \chi(\mathfrak{p}) = 1\}, \qquad R = \{\mathfrak{p} \mid \chi(\mathfrak{p}) \neq 1\}$$

et où $\chi(\mathfrak{p}) = 0$ par définition lorsque $\mathfrak{p}$ est ramifié dans H/F. Comme χ est totalement impair, on voit que $L^*(\chi, s)$ s'annule à l'ordre $r = \#R$ d'après la Proposition 2.2.1.

Conjecture 3.2.1 (Gross)**.** *On a*

$$\mathrm{ord}_{s=0} L_p(\psi, s) = r$$

Nous rappelons à présent la formule pour le terme dominant $L_p^{(r)}(\psi, 0)$ proposée par Gross, et démontrée récemment par Dasgupta-Kakde-Ventullo.

Pour tout $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_H$ au-dessus de p, on considère les morphismes continus

$$o_{\mathfrak{P}} := \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}} : H_{\mathfrak{P}}^{\times} \longrightarrow \mathbb{Z},$$
$$\ell_{\mathfrak{P}} := \log_p \circ N_{H_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_p} : H_{\mathfrak{P}}^{\times} \longrightarrow \mathbb{Z}_p.$$

On considère $E_p = \mathcal{O}_H[\frac{1}{p}]^{\times}$, ainsi que le groupe abélien libre $Y_p = \bigoplus_{\mathfrak{P}|p} \mathbb{Z}\mathfrak{P}$. Ce sont des modules sur $G = \mathrm{Gal}(H/F)$, et l'on note respectivement E_p^- et Y_p^- les sous-modules sur lesquels la conjugaison complexe $\mathrm{Frob}_\infty \in G$ agit par multiplication par -1. On a deux applications, similaires au plongement logarithmique (cf. Section 2.2), données par

$$\begin{array}{ll} o_p : U^- \longrightarrow X^- & o_p(u) = (o_{\mathfrak{P}}(u))_{\mathfrak{P} \in S_p} \\ \ell_p : U^- \longrightarrow \mathbb{Z}_p X^- & \ell_p(u) = (-\ell_{\mathfrak{P}}(u))_{\mathfrak{P} \in S_p} \end{array}$$

Le noyau de o_p est fini. En effet, $\ker o_p$ est le sous-groupe de $\mathcal{O}_H^{\times}$ des unités u satisfaisant $\mathrm{Frob}_\infty(u) = u^{-1}$, donc d'après le Théorème 2.2.2, $\ker o_p \otimes \mathbb{R}$ s'injecte dans $\left(\bigoplus_{v \in S_\infty} \mathrm{Ind}_{G_w}^{G} \mathbb{R}\right)^-$ qui est trivial. Les modules $\mathbb{R}U^-$ et $\mathbb{R}X^-$ sont en fait isomorphes d'après le même théorème, et donc o_p induit un isomorphisme G-équivariant

$$\mathbb{Q}E_p^- \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Q}Y_p^-$$

Soit L une extension de $\mathbb{Q}_p$ contenant l'image de χ. Notons o_p^χ (resp. ℓ_p^χ) la restriction des applications o_p et ℓ_p aux composantes χ-isotypiques $(L \otimes E_p)^{(\chi)}$ et $(L \otimes Y_p)^{(\chi)}$. Par analogie au régulateur de Stark (2.3), le régulateur p-adique de Gross est défini par

$$\mathscr{R}_p(\chi) = \det\left(\ell_p^\chi \circ (o_p^\chi)^{-1}\right) \in L$$

Le théorème principal de [**DKV18**] est le suivant.

Théorème 3.2.2. *On a*

$$\frac{1}{r!} L_p^{(r)}(\psi, 0) = L(\chi, 0)\, \mathscr{R}_p(\chi) \prod_{\mathfrak{p} \in R'} \left(1 - \chi(\mathfrak{p})\right)$$

Ce Théorème n'a pas été démontré en supposant la Conjecture 3.2.1 vraie. L'inégalité $\mathrm{ord}_{s=0}\, L_p(\psi, s) \geq r$ étant déjà connue (voir par exemple [**CD14**, Theorem 3]), on voit que la Conjecture 3.2.1 est équivalente à la non-annulation du régulateur p-adique $\mathscr{R}_p(\chi)$.

4. Et les autres représentations d'Artin ?

4.1. Point de vue motivique. Il nous semble nécessaire, pour comprendre les fonctions L p-adiques et la théorie d'Iwasawa des autres représentations d'Artin, d'élargir notre cadre aux motifs. Ici, la donnée d'un motif M sur $\mathbb{Q}$ à coefficients dans un corps de nombres $E \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ sera la donnée de ses réalisations $H_{\mathrm{B}}(M)$ (Betti), $H_{\mathrm{dR}}(M)$ (de Rham), et $H_\lambda(M)$ (λ-adique), qui sont des espaces vectoriels sur respectivement E et sur E_λ (où λ est une place finie de E), et munis des structures additionnelles suivantes.

(1) $H_{\mathrm{B}}(M)$ est muni d'une involution linéaire F_∞.

(2) Le groupe de Galois $G_{\mathbb{Q}}$ a une action linéaire ρ_λ sur $H_\lambda(M)$.

(3) Il existe un isomorphisme $I_\lambda : H_{\mathrm{B}}(M) \otimes E_\lambda \simeq H_\lambda(M)$ compatible aux actions de F_∞ et de la conjugaison complexe, i.e. $I_\lambda(F_\infty) = \rho_\lambda(\mathrm{Frob}_\infty)$.

(4) $H_{\mathrm{dR}}(M)$ admet une filtration décroissante $\{F^k H_{\mathrm{dR}}(M)\}_k$.

(5) On a une décomposition de Hodge $H_{\mathrm{B}}(M) \otimes \mathbb{C} = \sum_{i+j} H^{i,j}(M)$ telle que $F_\infty\left(H^{i,j}(M)\right) = H^{j,i}(M)$ pour tout couple d'entiers (i,j).

(6) Il existe un isomorphisme de comparaison $I_\infty : H_{\mathrm{B}}(M) \otimes \mathbb{C} \simeq H_{\mathrm{dR}}(M) \otimes \mathbb{C}$ tel que $I_\infty\left(\bigoplus_{i \geq k} H^{i,j}(M)\right) = F^k H_{\mathrm{dR}}(M) \otimes \mathbb{C}$.

On dit que M est pur de poids $w \in \mathbb{Z}$ si l'on a de plus $H^{i,j}(M) = 0$ dès que $i + j \neq w$. On peut par ailleurs définir un motif dual $M^* = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q})$, pur de poids $-w$, en considérant les duaux (algébriques) de ses réalisations. On a aussi une version motivique du n-ième tordu à la Tate, que l'on notera $M(n)$.

Une représentation d'Artin (ρ, V) sur $\mathbb{Q}$ et réalisable sur un corps de nombres E définit un motif pur de poids 0 (voir [**Del79**, Paragraphe 6]), noté $[\rho]$, avec les réalisations suivantes : $H_{\mathrm{B}}([\rho]) = V$, $F_\infty = \rho(\mathrm{Frob}_\infty)$, $H^{i,j}([\rho]) = V \otimes \mathbb{C}$ si $i = j = 0$ et $H^{i,j}([\rho]) = 0$ sinon, $H_{\mathrm{dR}}([\rho]) = \left(V \otimes \overline{\mathbb{Q}}\right)^{G_{\mathbb{Q}}}$ avec $\mathrm{gr}^0 H_{\mathrm{dR}}([\rho]) = H_{\mathrm{dR}}([\rho])$ et I_∞ égal à l'inverse de l'isomorphisme $(v \otimes \alpha) \otimes z \mapsto v \otimes \iota_\infty(\alpha) z$, et enfin $H_\lambda([\rho]) = V \otimes E_\lambda$. On a par ailleurs $[\rho]^* = [\rho^*]$, où ρ^* désigne la représentation contragrédiente de ρ. Enfin, on peut tordre tout motif M sur $\mathbb{Q}$ par ρ, et l'on notera $M(\rho)$ le motif résultant.

On peut généraliser ([**Del79, Ser70**]) la définition du facteur local d'Artin $L_v(\rho, s)$ à tout motif M pur de poids w sur $\mathbb{Q}$ en considérant le polynôme

$$E_p(T) := \det\left(\mathrm{id} - T\rho(\mathrm{Frob}_p^{-1}) | H_\lambda(M)^{I_p}\right).$$

Il est conjecturé que ses coefficients ne dépendent pas du choix de $\lambda \nmid p$, et sont algébriques. Les racines de $E_p(T)$ ont par ailleurs toutes une valeur absolue complexe égale à $p^{w/2}$, et la fonction L ainsi obtenue, notée $L(M; s)$, converge sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1 + w/2$. Celle-ci peut de plus être complétée par le produit de facteurs L à l'infini, défini par

$$\Gamma(M; s) := \prod_{i<j} \Gamma_{\mathbb{C}}(s-i)^{h^{i,j}} \times \prod_i \prod_{\varepsilon \in \{0,1\}} \Gamma_{\mathbb{R}}(s - i + \varepsilon)^{h^{i,i,\varepsilon}},$$

où $h^{i,j}$, $h^{i,i,0}$ et $h^{i,i,1}$ sont les $\mathbb{C}$-dimensions respectives de $H^{i,j}(M)$, de $H^{i,i}(M)^{F_\infty=1}$ et de $H^{i,i}(M)^{F_\infty=-1}$. La conjecture suivante généralise les résultats de la section 1.3.

Conjecture 4.1.1. *La fonction $L(M;s)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, et même holomorphe si w est impair, ou bien si w est pair et $\mathbb{Q}(-w/2)$ n'est pas un facteur direct de M. Elle satisfait de plus une équation fonctionnelle de la forme*

$$\Lambda(M;s) = A \cdot B^s \cdot \Lambda(M^*;1-s)$$

où $\Lambda(M;s) := L(M;s) \cdot \Gamma(M;s)$, $A \in \mathbb{C}$ et $B \in \mathbb{R}_{>0}$.

La transcendance de certaines valeurs spéciales de $L(M;s)$ font l'objet de conjectures formulées par Deligne ([**Del79**]).

Définition 4.1.2 (Deligne)**.** Un entier $n \in \mathbb{Z}$ est dit critique pour M, si les fonctions méromorphes $\Gamma(M;s)$ et $\Gamma(M^*;1-s)$ n'ont pas de pôle en $s = n$. On dit qu'un motif M est critique si l'entier 0 est critique pour M.

Soit M un motif critique et pur de poids w. Si w est pair, on suppose que F_∞ agit scalairement sur $H^{p,p}(M)$, où $w = 2p$. Deligne définit une période $c^+(M) \in \mathbb{C}^\times/E^\times$ comme étant le déterminant dans une E-base de la restriction de I_∞ à $(H_{\mathrm{B}}(M)\otimes\mathbb{C})^{F_\infty=+1}$, et conjecture que :

$$L(M;0)/c^+(M) \in E.$$

4.2. Fonctions L p-adiques de motifs. Soit p un nombre premier. Étant donné un motif pur M de poids w sur $\mathbb{Q}$ et à coefficients dans E satisfaisant toutes les conjectures précédentes, on peut espérer interpoler p-adiquement les valeurs critiques des tordus $M(\chi)$ de M, normalisées par les périodes de Deligne de sorte qu'elles puissent vues comme éléments de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ via ι_p. Ici, χ varie parmi les caractères pairs de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})$. Notons que si $s = n$ est critique pour M, il en sera alors de même pour $M(\chi)$. On peut interpréter ces twists comme étant une "déformation cyclotomique de M". Par analogie avec la construction de la fonction L p-adique de Kubota-Leopoldt, on peut (dans de situations favorables) espérer construire une distribution (voire une mesure) sur $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})^+/\mathbb{Q})$ interpolant ces valeurs critiques de fonctions L. La formulation de conjectures sur l'existence et les propriétés de telles mesures cyclotomiques commencent avec les travaux de Coates et Perrin-Riou ([**CPR89, Coa91, Coa89**]), que nous transcrivons "en termes de séries formelles" par souci de cohérence avec le paragraphe précédent. Ils font les hypothèses que M a bonne réduction ordinaire en p, que nous rappelons.

Définition 4.2.1. On dit que M a bonne réduction en p si, pour tout $\lambda \nmid p$, la réalisation λ-adique $H_\lambda(M)$ de M est non-ramifiée en p.

Notons $\mathfrak{p}$ l'idéal de E au-dessus de p qui est déterminé par notre plongement ι_p.

Définition 4.2.2. On dit que M est ordinaire au sens de Greenberg s'il existe une filtration décroissante exhaustive séparée de $G_{\mathbb{Q}_p}$-modules $\mathrm{Fil}^k V$ de $V := H_{\mathfrak{p}}(M)$ telle que les tordus de Tate $(\mathrm{gr}^k V)(-k)$ des gradués de V sont non-ramifiés pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Soit M un motif avec bonne réduction ordinaire au sens de Greenberg. La Conjecture A de [**Coa89**] prédit que si $\mathbb{Q}(-w/2)$ n'est pas un facteur de M, alors il existe une unique série formelle $\mathcal{L}_p(M;T) \in \mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}[[T]] \otimes \mathbb{Q}_p$ telle que pour toute racine de l'unité $\zeta \in \mu_{p^\infty}$ et tout entier pair $n \in \mathbb{Z}$ tel que $M(\chi_\zeta \omega^{-n})(n)$ est critique, on a

$$\mathcal{L}_p(M;\zeta \cdot u^{n-1} - 1) = \frac{\Lambda_{(\infty,p)}(M(\chi_\zeta \omega^{-n}), n)}{c^+(M) \cdot (2\pi i)^r},$$

où l'indice (∞, p) signifie que l'on a corrigé les facteurs à l'infini et en p de la fonction L complétée, et où $r = \sum_{j<0} j \cdot h^{j,k}$. On peut définir une fonction L p-adique analytique en posant simplement

$$L_p(M;s) := \mathcal{L}_p(M;u^s - 1).$$

La correction du facteur en p, dans le cas de motifs d'Artin totalement pairs, consiste simplement à le retirer de la fonction L, comme l'illustre l'équation 1. Enfin, il est intéressant de noter que la conjecture précédente implique l'existence d'une équation fonctionnelle reliant $\mathcal{L}_p(M;T)$ à $\mathcal{L}_p(M^*(1); \frac{1}{1+T} - 1)$ faisant intervenir le conducteur de M et un facteur ε global p-adique (cf. [**Coa89**, eq. 57 p. 170]).

Remarque 4.2.3. Lorsque M est un motif critique qui n'est plus ordinaire, mais que $V = H_{\mathfrak{p}}(M)$ est quand même semi-stable, la théorie de Perrin-Riou [**PR95a**] (qui utilise le langage des (φ, Γ)-modules) suggère que l'on puisse attacher une fonction méromorphe p-adique $L_p(M;D,s)$ dépendant du choix d'un sous-(ϕ, N)-module $D \subseteq D_{\mathrm{st}}(V)$ supplémentaire à $\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{st}}(V)$ (un tel D est dit régulier, cf. [**Ben11**, §0.2.]).

Il y a ici a priori indétermination à multiplication par un nombre algébrique près, du fait de la même indétermination du choix de la période de Deligne. On peut néanmoins parfois espérer construire la série $\mathcal{L}_p(M;T)$ à une unité $\mathfrak{p}$-adique près, ce qui dépendra du choix :

- de périodes de Deligne à une unité $\mathfrak{p}$-adique près,
- d'une structure intégrale de la réalisation $\mathfrak{p}$-adique de M, c'est-à-dire d'un $\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}$-réseau $G_{\mathbb{Q}}$-stable $T \subseteq V$.

Si M est ordinaire au sens de Greenberg, la filtration ordinaire sur $V = H_{\mathfrak{p}}(M)$ induit une filtration similaire sur tout $\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}$-réseau $G_{\mathbb{Q}}$-stable $T \subseteq V$, en posant $\mathrm{Fil}^k T = \mathrm{Fil}^k V \cap T \subseteq T$.

Toutes ces constructions, même conjecturales dans leur plus grande généralité, supposent toujours l'existence de valeurs critiques pour M. Cependant, le lemme suivant nous dit que les motifs d'Artin ont rarement des valeurs critiques.

Lemme 4.2.4. *Soit ρ une représentation d'Artin sur $\mathbb{Q}$. Alors il n'y a pas d'entier critique pour le motif d'Artin $[\rho]$, excepté lorsque $\rho(\mathrm{Frob}_\infty)$ est scalaire.*

DÉMONSTRATION. Le facteur Γ pour le motif ρ est égal au facteur L en la place ∞ défini dans la section 1.3. Si la conjugaison complexe n'agit pas par un scalaire, alors la fonction $\Gamma([\rho],s)$ (resp. la fonction $\Gamma([\rho^*],1-s)$) a les mêmes pôles que $\Gamma_{\mathbb{R}}(s)\cdot\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)$ (resp. que $\Gamma_{\mathbb{R}}(1-s)\cdot\Gamma_{\mathbb{R}}(2-s)$). Or on vérifie que tout entier $n\in\mathbb{Z}$ est un pôle de l'une de ces deux dernières fonctions, donc aucun entier n'est critique pour $[\rho]$. □

Le Lemme 4.2.4 montre qu'il existe beaucoup de motifs sans entier critique, et donc qui ne rentrent pas dans le cadre des conjectures précédentes sur la construction de fonctions L p-adiques. Une idée, évoquée dans [**Gre94**] et inspirée de la théorie des déformations de Mazur [**Maz89**], consiste en mettre un motif M_0 dans une famille analytique p-adique de motifs contenant "beaucoup" de motifs critiques. S'il on a de plus une fonction L p-adique interpolant les fonctions L p-adiques de ces motifs critiques, alors il paraît raisonnable de la spécialiser en M_0 et d'appeler cette spécialisation "fonction L p-adique de M_0". Il faut néanmoins garder en mémoire que cette procédure, quand elle est effective, *dépend* de la famille analytique p-adique déformant M_0. Pour rigidifier la déformation p-adique de M_0, on ne considérera que des déformations "ordinaires" dans un sens proche celui de la Définition 4.2.2 mais plus adapté à nos motifs non-critiques.

S'inspirant de [**Gre91, Gre94, Och06, FO12**], et de la théorie de Hida (que nous utiliserons intensivement plus tard), on considérera dans la suite un module libre $\mathcal{T}$ de rang fini et muni d'une action linéaire et continue de $G_{\mathbb{Q}}$ sur un anneau local noethérien intègre $\mathcal{A}$, complet de caractéristique 0 et de corps résiduel une extension finie de $\mathbb{F}_p$ et satisfaisant les propriétés suivantes :

- L'action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathcal{T}$ est non-ramifiée en-dehors d'un nombre fini de places.
- Pour tout κ dans un sous-ensemble Zariski-dense $\mathcal{C}\subseteq\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(\mathcal{A},\overline{\mathbb{Q}}_p)$, la spécialisation $T_\kappa := \mathcal{T}\otimes_{\mathcal{A}}\kappa(\mathcal{A})$ définit un réseau de la réalisation p-adique d'un motif critique M_κ satisfaisant les conjectures précédentes.
- La $G_{\mathbb{Q}}$-représentation $\mathcal{T}$ est ordinaire en p, au sens où il existe un sous $\mathcal{A}$-module libre et $G_{\mathbb{Q}_p}$-stable $\mathcal{T}^+$ de $\mathcal{T}$, tel que le quotient $\mathcal{T}^- := \mathcal{T}/\mathcal{T}^+$ soit $\mathcal{A}$-libre et $G_{\mathbb{Q}_p}$-non-ramifié (condition de Panchishkin).

Soit T_0 un réseau $G_{\mathbb{Q}}$-stable de la réalisation $\mathfrak{p}$-adique $V_0 = H_{\mathfrak{p}}(M_0)$ d'un motif M_0, obtenu comme la spécialisation en $\kappa_0\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(\mathcal{A},\overline{\mathbb{Q}}_p)$ de $\mathcal{T}$, c'est-à-dire $\kappa_0(\mathcal{A})\subseteq\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}$ et $T_0\simeq\mathcal{T}\otimes_{\mathcal{A},\kappa}\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}$.

Définition 4.2.5. (1) Une p-stabilisation ordinaire de M_0 est la donnée d'un sous-espace $G_{\mathbb{Q}_p}$-stable V_0^+ de V_0, de quotient $G_{\mathbb{Q}_p}$-non-ramifié, et de la même dimension que $V_0^{\mathrm{Frob}_\infty=1}$ (condition de $\pm$-criticalité, voir [**PR95b**, §2.4.7]).

(2) Soit (V_0, V_0^+) une p-stabilisation ordinaire de M_0, et soit $T_0^+ = V_0^+ \cap T$. On dit que $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^+)$ est une déformation ordinaire de (T_0, T_0^+) si l'isomorphisme $\mathcal{T} \otimes_{\mathcal{A},\kappa} \mathcal{O}_{E_\mathfrak{p}} \simeq T_0$ envoie $\mathcal{T}^+ \otimes_{\mathcal{A},\kappa} \mathcal{O}_{E_\mathfrak{p}}$ sur T_0^+.

Notons que comme p est impair, une déformation ordinaire $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^+)$ d'un motif satisfait $\mathrm{Rang}\,\mathcal{T}^+ = \mathrm{Rang}\,\mathcal{T}^{\mathrm{Frob}_\infty=1}$. Il est suggéré (par exemple dans [**Gre94**]) qu'il existe un élément non-nul $\mathcal{L}_p(\mathcal{T}, \mathcal{T}^+; T) \in \mathrm{Frac}(\mathcal{A}[[T]])$ interpolant en tout $T = \zeta - 1$ (où $\zeta \in \mu_{p^\infty}$) et pour tout $\kappa \in \mathcal{C}$ (sauf un nombre fini), les valeurs critiques $\Lambda_{(\infty,p)}(M_\kappa(\chi_\zeta), 0)/c^+(M_\kappa)$ de fonctions L, modifiées en p et en ∞, de tordus de M_κ, possiblement corrigées par un facteur d'interpolation $e_\kappa \in \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ (voir [**Gre94**, Pages 218-219]). Supposons par ailleurs que l'on a $\mathcal{L}_p(\mathcal{T}; T) = A(T)/B(T)$, avec $\kappa_0(B(T)) \neq 0$. Si M_0 est non-critique, un candidat naturel pour $\mathcal{L}_p(M_0; T)$ serait alors $\kappa_0(\mathcal{L}_p(\mathcal{T}; T))$, et donnant ainsi une fonction méromorphe p-adique $L_p(M_0, s) := \mathcal{L}_p(M_0; u^s - 1)$.

Bien que notre cadre des "déformations ordinaires" ne soit pas "twist-invariant" comme pour les déformations quasi-ordinaires introduites par Hida, nous allons voir qu'il est très adapté à l'étude que nous allons entreprendre sur la déformation de motifs d'Artin non-critiques les plus simples, à savoir les motifs provenant de formes modulaires paraboliques primitives de poids 1.

5. Représentations d'Artin attachées aux formes modulaires de poids 1

5.1. La fonction L p-adique de Bellaïche-Dimitrov.

Soit (ρ, V) une représentation d'Artin de dimension 2 sur $\mathbb{Q}$. Si la conjugaison complexe Frob_∞ n'agit pas scalairement, alors $\det\rho(\mathrm{Frob}_\infty) = -1$ et l'on dit classiquement que ρ est impaire. Deligne et Serre ont montré que l'on pouvait produire de telles représentations à partir de formes modulaires classiques de poids 1.

Théorème 5.1.1. *Soit $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n q^n$ une forme parabolique primitive de poids 1 de niveau $\Gamma_1(N)$ et caractère ε. Il existe une unique représentation d'Artin ρ de dimension 2 sur $\mathbb{Q}$, impaire et irréductible, de conducteur N tel que, pour tout nombre premier $\ell \nmid N$, on ait*

$$\mathrm{Tr}\,\rho(\mathrm{Frob}_\ell) = a_\ell$$

DÉMONSTRATION. C'est le théorème principal de [**DS74**, Théorème 4.1]. L'unicité découle directement du théorème de Cebotarev. □

Réciproquement, on sait depuis le travail de Khare et Wintenberger que toute représentation d'Artin de dimension 2 sur $\mathbb{Q}$, impaire et irréductible est modulaire, autrement dit on a le :

Théorème 5.1.2. *Toute représentation d'Artin ρ de dimension 2 sur $\mathbb{Q}$, impaire et irréductible est isomorphe à la représentation de Deligne-Serre d'une forme modulaire parabolique primitive de poids 1.*

DÉMONSTRATION. Voir [**KW09**, Corollary 10.2.(ii)]. □

Une application majeure de ce résultat est la preuve de la conjecture d'Artin 1.3.1 pour de telles représentations. En effet, on peut reformuler le théorème précédent en termes de fonctions L : la fonction $L(\rho,s)$ coïncide avec la fonction L d'une forme modulaire, dont on sait déjà qu'elle est holomorphe et qu'elle satisfait l'équation fonctionnelle attendue. La généralisation de cette preuve aux représentations d'Artin de dimension 2, totalement impaires et irréductibles sur un corps totalement réel a été achevée par [**PS16**], complétant les travaux de [**BDSBT01, Tay03, Sas13, Pil17, Kas13, KST14**].

En utilisant la géométrie de la coubre de Hecke, Bellaïche et Dimitrov ont proposé une première définition de la fonction L p-adique dans le cadre des formes modulaires paraboliques primitives de poids 1. Fixons une forme modulaire $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n q^n$ parabolique primitive de poids 1, niveau M et caractère ε, et rappelons d'abord quelques définitions. Le corps E engendré par les coefficients $a_n, \varepsilon(l) \in \overline{\mathbb{Q}}$ est un corps de nombres, que l'on voit à l'intérieur de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ via ι_p.

Définition 5.1.3. On dit que f est régulière en p, si les racines du p-ième polynôme de Hecke $X^2 - a_p X + \varepsilon(p)$ sont distinctes.

Définition 5.1.4. Une p-stabilisation de pente finie de f est une forme modulaire de niveau $\Gamma_1(M)\cap\Gamma_0(p)$, propre pour les opérateurs de Hecke, qui a les mêmes valeurs propres que f en-dehors de p et qui a une valeur propre non-nulle pour U_p.

On peut construire toute p-stabilisation f_α de pente finie de f à partir du choix d'une racine α non-nulle du p-ième polynôme de Hecke de f. Supposons f régulière en p. Il y a deux choix pour α lorsque $p \nmid M$, et un unique choix lorsque $p|M$. Notons β l'autre racine de $X^2 - a_p X + \varepsilon(p)$. Si $p \nmid M$, alors on définit $f_\alpha(z) = f(z) - \beta f(pz)$, et $f_\beta(z) = f(z) - \alpha f(pz)$. Ces deux formes modulaires (distinctes) sont les p-stabilisations de f avec valeur propre α et β respectivement, pour l'opérateur U_p. Si $p|M$, on a nécessairement $\alpha = a_p$, $\beta = 0$ et $f_\alpha(z) = f(z)$. Dans tous les cas, la p-stabilisation f_α est p-ordinaire, car α est une racine de l'unité (comme conséquence du Théorème 5.1.1) donc est une p-unité.

Soit N la partie première à p de M, et soit $\mathcal{E}$ la coubre de Hecke parabolique de niveau modéré N, construite avec les opérateurs de Hecke U_p et T_ℓ, $\ell \nmid Np$. Elle est réduite et munie d'un morphisme localement fini et plat $\kappa : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{W}_N$, appelée "application de poids", où l'espace des poids $\mathcal{W}_N$ est l'espace rigide analytique sur $\mathbb{Q}_p$ qui a pour $\mathbb{C}_p$-points $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(\mathbb{Z}_p^\times \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times, \mathbb{C}_p^\times)$ (voir [**CM98**] pour $N = 1$ et [**Buz07**] pour N quelconque). Par ailleurs, la forme f_α définit un $E_\mathfrak{p}$-point sur $\mathcal{E}$, qui appartient en fait à l'ouvert admissible $\mathcal{E}^{\mathrm{ord}}$, défini par $|U_p| = 1$, et appelé *lieu ordinaire* de la coubre de Hecke. Le résultat principal de [**BD16**] étudie la géométrie de $\mathcal{E}$ au point f_α lorsque f est régulière en p.

Théorème 5.1.5. *Soit f une forme parabolique primitive de poids 1 et niveau $\Gamma_1(M)$ qui est régulière en p. Alors la coubre de Hecke $\mathcal{E}$ est lisse en f_α. De plus, κ est étale en f_α si et seulement si il n'existe pas de corps quadratique réel F dans lequel p décompose et tel que la restriction à G_F de la représentation de Deligne-Serre de f est réductible.*

Le Paragraphe V.4 de [**Bel**] explique comment déduire du Théorème 5.1.5 l'existence d'une fonction L p-adique rigide analytique sur $U \times \mathcal{W}_1$, où U est un voisinage affinoïde admissible de f_α dans $\mathcal{E}^{\mathrm{ord}}$, qui interpole les fonctions L p-adiques de tous les points $y \in U$ correspondant à des formes propres classiques p-ordinaires de poids $k \geq 2$. Elle est construite comme étant la transformée de Mellin p-adique (cf. [**Bel**, Chap. III, §5.3.]) d'une certaine mesure μ sur $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_p^\times$. On peut par ailleurs obtenir une série formelle à partir de μ en appliquant la transformée Γ de Leopoldt à la restriction de μ à $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}) \simeq \Gamma$. On obtient le corollaire suivant.

Corollaire 5.1.6. *Il existe un voisinage ouvert admissible affinoïde $U = Spm(\mathcal{A})$ (où $\mathcal{A}$ est une $E_\mathfrak{p}$-algèbre affinoïde) de f_α dans $\mathcal{E}^{ord}$, deux constantes $0 < c < C$ et une série formelle $\mathcal{L}_p^\dagger(T) \in \mathcal{A}[[T]]$, tels que :*

(1) pour tout point $g \in U$ correspondant à un morphisme $\kappa : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}_p$, la série formelle $\mathcal{L}_p^\dagger(g;T) := \kappa(\mathcal{L}_p^\dagger(T)) \in \mathbb{C}_p[[T]]$ converge et est bornée sur $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}$,

(2) pour toute forme classique $g \in U$ de poids ≥ 2, on a

$$\mathcal{L}_p^\dagger(g;T) = e(g)\mathcal{L}_p(g;T)$$

où $\mathcal{L}_p(g;T)$ est la fonction L p-adique usuelle de g (cf. Proposition 2.2.1) et où $e(g) \in \mathbb{C}_p^\times$ est un terme d'erreur p-adique satisfaisant $c < |e(g)|_p < C$.

De plus, $\mathcal{L}_p^\dagger(T)$ unique à multiplication par un élément de $\mathcal{A}^\times$ près.

Rappelons qu'une série $F(T) \in \mathbb{C}_p[[T]]$ converge et est bornée sur $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}$ si et seulement si ses coefficients sont bornés, autrement dit si $F(T) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T]] \otimes \mathbb{Q}_p$.

Définition 5.1.7. Soit $\kappa_0 : \mathcal{A} \longrightarrow E_\mathfrak{p}$ le morphisme correspondant à $f_\alpha \in U(E_\mathfrak{p})$. On définit la fonction L p-adique de f_α, que l'on note $\mathcal{L}_p^{\mathrm{BD}}(f_\alpha;T) \in \mathcal{O}_{E_\mathfrak{p}}[[T]] \otimes \mathbb{Q}_p$, comme étant la spécialisation $\kappa_0(\mathcal{L}_p^\dagger(T))$ de $\mathcal{L}_p^\dagger(T)$ en f_α. Elle est bien définie à multiplication par un élément de $E_{\mathfrak{p}}^{\times}$ près. On notera aussi $L_p^{\mathrm{BD}}(f_\alpha, s) := \mathcal{L}_p^{\mathrm{BD}}(f_\alpha, u^s - 1)$ la fonction L p-adique holomorphe associée.

Nous terminons ce paragraphe en discutant le lien avec l'approche de la Section 4.2. Soit (ρ, V) la représentation de Deligne-Serre de f. Lorsque f est régulière, le choix d'une p-stabilisation de pente finie de f correspond au choix d'une racine α du p-ième polynôme de Hecke de f. Cela revient donc au choix d'une p-stabilisation ordinaire (V, V^+) du motif d'Artin $[\rho]$, le Frobenius arithmétique Frob_p agissant sur V^- par multiplication par α. D'après [**BD16**, Proposition 5.1], (V, V^+) peut par ailleurs être déformée p-adiquement, au sens où il existe une représentation continue

$$\rho_U : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{A})$$

se spécialisant en ρ, c'est-à-dire $\kappa_0 \circ \rho_U \simeq \rho$. Elle satisfait en outre $\rho_U(\mathrm{Frob}_\ell) = (T_\ell)_{|U}$ pour tout $\ell \nmid Np$, et donc elle interpole la réalisation p-adique des motifs attachés aux formes modulaires classiques $g \in U$ de poids ≥ 2, qui forment un ensemble Zariski-dense dans U. Enfin, ρ_U est une déformation ordinaire de $[\rho]$ en un sens analogue à la Définition 4.2.5, la principale différence étant que l'on a inversé p, c'est-à-dire que $\mathcal{A}$ est une $\mathbb{Q}_p$ algèbre et non pas de caractéristique mixte. Nous verrons comment obtenir une vraie déformation ordinaire de (V, V^+), qui plus est universelle, sous certaines conditions dans la Section 2.1 du Chapitre 3.

5.2. Conjecture de Stark p-adique pour les formes modulaires de poids 1. Dans sa thèse de doctorat, Ferrara [**Fer18**] considère la fonction $L_p^{\mathrm{BD}}(f_\alpha, s)$ et formule une conjecture de Stark p-adique, lorsque f est à multiplication complexe, et sous l'hypothèse que p est premier à M et à l'ordre de l'image de ρ, la représentation de Deligne-Serre de f.

Une forme f de poids 1 et à multiplication complexe par un corps quadratique imaginaire F admet un q-développement de la forme

$$f(z) = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathcal{O}_F,\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = 1} \chi(\mathfrak{a}) q^{N_{F/\mathbb{Q}}\mathfrak{a}},$$

où $\chi : G_F \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ est un caractère d'Artin sur F de conducteur $\mathfrak{f}$, vu comme un caractère de Hecke sur F. En termes galoisiens, cela équivaut à ce que ρ est l'induite de χ à $G_{\mathbb{Q}}$, c'est-à-dire $\rho \simeq \mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}} \chi$. Le niveau de f est $N = |\mathrm{Disc}(F/\mathbb{Q})| \cdot N_{F/\mathbb{Q}}\mathfrak{f}$ d'après [**Neu99**, Chap. VII, Proposition 11.7.(iii)]. Les racines du p-ième polynôme de Hecke de f sont $\chi(\mathfrak{p})$ et $\chi(\bar{\mathfrak{p}})$ lorsque $p\mathcal{O}_F = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ est décomposé dans F, et sont $\pm\sqrt{\chi(p\mathcal{O}_F)}$ lorsque p est inerte dans F. On prendra $\alpha = \chi(\mathfrak{p})$ lorsque p est décomposé dans F (avec la convention que $\mathfrak{p}$ est l'idéal de F défini par ι_p), et on prendra $\alpha = \sqrt{\chi(p\mathcal{O}_F)}$ si p est inerte. Notons $H/\mathbb{Q}$ (resp. K/F), l'extension de corps découpée par ρ (resp. par χ), et notons $H_n = H\mathbb{Q}_n$ (resp. $K_n = K\mathbb{Q}_n$). On note τ la restriction de Frob_∞ à H_n, K_n ou F indifféremment. L'extension $K/\mathbb{Q}$ n'est pas nécessairement galoisienne, et on a $H_n = K_n\tau(K_n)$. Comme K_n

et $\tau(K_n)$ sont des extensions abéliennes de F, il en est de même pour l'extension H_n/F. On est ainsi dans le cadre de la conjecture de Stark abélienne de rang 1, démontrée par Stark, pour S égal à l'ensemble des places de F au-dessus de p et des places ramifiant dans H. On pose

$$\varepsilon_n := \varepsilon_{H_n/F,S} \in \mathcal{O}_{H_n}^\times$$

l'unité de Stark pour l'extension H_n/F, pour l'ensemble de places S et pour la place archimédienne déistinguée v_0 définie par ι_∞.

L'hypothèse $p \nmid N \cdot [H : \mathbb{Q}]$ entraîne la factorisation $G_n \simeq G \times \Gamma_n$ où $G_n = \mathrm{Gal}(H_n/\mathbb{Q})$ et $G = G_0$. Pour tout $\zeta \in \mu_{p^\infty}$, on considère la projection $\rho \otimes \chi_\zeta$-isotypique de ε_n, vu comme élément du G_n-module $\overline{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{H_n}^\times$, c'est-à-dire l'élément

$$\varepsilon_n^{(\rho\otimes\chi_\zeta)} := \frac{2}{[H:\mathbb{Q}]\cdot p^n} \sum_{g \in G, 0 \le i \le p^n-1} \mathrm{Tr}\,\rho(g^{-1}) \cdot \zeta^{-i} \otimes g\gamma^i(\varepsilon_n) \in \left(\overline{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{H_n}^\times\right)^{(\rho\otimes\chi_\zeta)}$$

Le sous-groupe de décomposition de G en p déterminé par ι_p est engendré par le Frobenius arithmétique $\mathrm{Frob}_p \in G \subseteq G_n$. Celui-ci agit sur la composante $\rho\otimes\chi_\zeta$-isotypique des unités de H_n avec valeurs propres α et β. On considère la "β-projection" de $\varepsilon_n^{(\rho\otimes\chi_\zeta)}$, donnée par

$$|\varepsilon_n^{(\rho\otimes\chi_\zeta)}|_\beta = \frac{1}{f} \sum_{0 \le j \le f-1} \beta^{-j} \cdot \mathrm{Frob}_p^j(\varepsilon_n^{(\rho\otimes\chi_\zeta)}),$$

où f est l'ordre dans G de Frob_p. En utilisant ι_p, on peut définir un logarithme p-adique sur $\mathcal{O}_{H_n}^\times$, que l'on étend linéairement en un morphisme $\log_p : \overline{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{H_n}^\times \longrightarrow \mathbb{C}_p$, par la formule $\log_p\left(\sum_j a_j \otimes z_j\right) = \sum_j \iota_p(a_j) \log_p(\iota_p(z_j))$. Ferrara ([**Fer18**, Conjecture 3.2.3]) propose la conjecture suivante.

Conjecture 5.2.1. *Soient $\zeta, \zeta' \in \mu_{p^\infty}$ deux racines de l'unité d'ordres respectifs p^n et p^m. Sous réserve que $\mathcal{L}_p^{BD}(\zeta'-1) \neq 0$, on a :*

$$\frac{\mathcal{L}_p^{BD}(\zeta-1)}{\mathcal{L}_p^{BD}(\zeta'-1)} = \frac{\left(1-\frac{\chi_\zeta^{-1}(p)}{\alpha}\right)\left(1-\frac{\chi_\zeta(p)\beta}{p}\right)\frac{\mathfrak{G}(\chi_\zeta)}{\chi_\zeta(N)}}{\left(1-\frac{\chi_{\zeta'}^{-1}(p)}{\alpha}\right)\left(1-\frac{\chi_{\zeta'}(p)\beta}{p}\right)\frac{\mathfrak{G}(\chi_{\zeta'})}{\chi_{\zeta'}(N)}} \cdot \frac{\log_p |\varepsilon_n^{(\rho\otimes\chi_\zeta)}|_\beta}{\log_p |\varepsilon_n^{(\rho\otimes\chi_{\zeta'})}|_\beta},$$

où $\mathfrak{G}(\chi)$ désigne la somme de Gauss d'un caractère de Dirichlet χ.

On peut vérifier la véracité de cette conjecture dans le cas où p est décomposé dans F, comme dans [**Fer18**, Chap. IV]. L'idée est de montrer que la fonction L p-adique $\mathcal{L}_p^{\mathrm{BD}}(T)$ est proportionnelle à la restriction cyclotomique de la fonction L p-adique de Katz sur F, centrée en le caractère χ, et de faire appel à la formule limite de Kronecker p-adique, due à Katz. Lorsque p est inerte, la Conjecture 5.2.1 reste non-prouvée. Il y a en outre une conjecture analogue en $T = \zeta \cdot u^{-1} - 1$, correspondant à la spécialisation $s = 0$ de la variable s, quand $\zeta = 1$.

Donner une interprétation arithmétique des fonctions L p-adiques est le but de la théorie d'Iwasawa. Il est naturel d'essayer de prouver la Conjecture 5.2.1 sous cette angle, et nous donnerons quelques résultats dans ce sens dans le chapitre 3 (voir Théorème 1.1.3).

Chapitre II

Aspects algébriques de la théorie d'Iwasawa des motifs d'Artin

1. Idéaux caractéristiques et fonctions L p-adiques algébriques

Nous rappelons dans cette section comment attacher un idéal caractéristique $\mathrm{car}_A(M)$ à un module M sur un anneau A. Il faut pour cela supposer que A est un anneau de Krull, et que M est de type fini et de torsion sur A. Notre référence principale est [**Bou07**, Chapitre VII]. Comme tous nos anneaux sont noethériens, il suffit de supposer que A est intégralement clos. Si de plus A est un anneau factoriel, alors $\mathrm{car}_A(M)$ est principal et on définira la fonction L p-adique algébrique de M comme étant un générateur de $\mathrm{car}_A(M)$. Dans les applications nous considérerons typiquement des anneaux de séries formelles à coefficients dans $\mathcal{O}$ ou dans $\mathbb{Z}_p$. Nous étudions dans un deuxième temps le lien entre idéaux caractéristiques et changements de bases, en vue d'applications à l'étude des groupes de Selmer "en famille".

Dans toute la suite, A désigne un anneau noethérien intégralement clos, de corps des fractions K.

1.1. Idéaux premiers de hauteur 1 et idéaux divisoriels. Soit $\mathcal{P}_A$ l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de A, c'est-à-dire l'ensemble des idéaux premiers non-nuls $\mathfrak{p}$ ne contenant pas d'autre idéal premier que (0). On a le théorème classique suivant ([**Bou07**, Chap. VII, Théorème 1.7.4]).

Théorème 1.1.1. *(1) Pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A$, le localisé $A_\mathfrak{p}$ est un anneau de valuation discrète.*

(2) On a

$$A = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}_A} A_\mathfrak{p}$$

(3) Pour tout $x \neq 0$ dans A, il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A$ tels que $x \in \mathfrak{p}$.

On notera $\mathrm{ord}_\mathfrak{p}$ la valuation essentielle attachée à $\mathfrak{p}$, c'est-à-dire la valuation (normalisée)

$$\mathrm{ord}_\mathfrak{p} : K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

qui étend celle de $A_{\mathfrak{p}}$. Si M est un A-module de type fini et de torsion, on note $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(M)$ la longueur (finie) du $A_{\mathfrak{p}}$-module localisé $M_{\mathfrak{p}}$ de M en $\mathfrak{p}$. D'après le point (3) du Théorème 1.1.1, le uplet d'entiers $(\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(M))_{\mathfrak{p}}$ est presque nul. Par ailleurs, on a clairement $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(A/(x))$ pour tout $x \neq 0$ dans A.

Définition 1.1.2 (Idéal divisoriel)**.** Soit $\mathfrak{a}$ un idéal fractionnaire de A. On dit que $\mathfrak{a}$ est un idéal divisoriel s'il est égal à l'intersection des idéaux principaux le contenant.

D'après le point (2) du théorème 1.1.1, pour tout $x \in A$ et pour tout idéal entier divisoriel $\mathfrak{a}$, on a $x \in \mathfrak{a}$ si et seulement si $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x) \geq \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{a})$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A$. Réciproquement, si $(m_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ est un uplet d'entiers presque tous nuls, alors l'ensemble

$$\mathfrak{a} = \{x \in A \ : \ \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x) \geq m_{\mathfrak{p}}, \quad \forall \mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A\}$$

est un idéal divisoriel de A, et l'on a $m_{\mathfrak{p}} = \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})$. En particulier, si $\mathfrak{a}$ est un idéal entier divisoriel et $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_d$ sont les idéaux premiers de hauteur 1 contenant $\mathfrak{a}$, alors, en posant $m_i = \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_i}(A/\mathfrak{a})$, on a

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{m_1} \dots \mathfrak{p}_d^{m_d}.$$

Ainsi, pour deux idéaux divisoriels $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, on a $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ si et seulement si $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) \geq \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})$ pour tout idéal $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A$.

Définition 1.1.3 (Idéal caractéristique)**.** Soit M un A-module de type fini et de torsion. On appelle idéal caractéristique de M, et l'on note $\mathrm{car}_A(M)$, l'idéal entier divisoriel

$$\mathrm{car}_A(M) = \{x \in A \ : \ \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x) \geq \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(M), \quad \forall \mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A\}.$$

Comme l'application qui à un module de longueur finie associe sa longueur est additive sur les suites exactes, on en déduit le lemme suivant :

Lemme 1.1.4. *L'application qui, à un A-module de type fini et de torsion, associe son idéal caractéristique est multiplicative sur les suites exactes. Autrement dit, si l'on a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

alors $\mathrm{car}_A(M) = \mathrm{car}_A(N)\mathrm{car}_A(P)$.

Définition 1.1.5. Soit M un A-module de type fini. M est dit pseudo-nul s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

(1) Pour tout idéal $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A \cup \{(0)\}$, on a $M_{\mathfrak{p}} = 0$

(2) L'annulateur de M n'est contenu dans aucun idéal premier de hauteur 1.

Soit M un A-module de type fini. Si M est pseudo-nul, alors M est nécessairement de torsion, car on a $M \otimes_A K = M_{(0)} = 0$. Par ailleurs, si M est de torsion, alors M est pseudo-nul si et seulement si $\mathrm{car}_A(M) = A$.

Définition 1.1.6. Soit $\phi : M \longrightarrow N$ une application linéaire entre A-modules de type fini. On dit que ϕ est un peudo-isomorphisme si le noyau et le conoyau de ϕ sont pseudo-nuls. Si un tel ϕ existe, on dit que M est pseudo-isomorphe à N.

De manière équivalente, ϕ est un pseudo-isomorphisme si et seulement si les applications localisées $\phi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow N_{\mathfrak{p}}$ sont des isomorphismes pour tout idéal $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A$. Si M est pseudo-isomorphe à N, alors M est de torsion si et seulement si N l'est, auquel cas on a $\mathrm{car}_A(M) = \mathrm{car}_A(N)$ d'après le lemme 1.1.4. Par ailleurs, la relation "être pseudo-isomorphe à" n'est généralement pas symétrique. Lorsque $A = \mathbb{Z}_p[[T]]$, $M = pA + TA$ et $N = A$, on montre en utilisant l'algorithme de division que M est pseudo-isomorphe à N, mais que N n'est pas pseudo-isomorphe à M (voir par exemple [**Was97**, Chap. 13, §2.]). La relation devient néanmoins symétrique si on la restreint à la catégorie des modules de type fini et de torsion sur A, ce qui se déduit de la preuve du théorème suivant.

Théorème 1.1.7 (Théorème de structure)**.** *Soit M un A-module de type fini et de torsion. Il existe $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_d \in \mathcal{P}_A$ (se répétant possiblement), des entiers $m_i > 0$ et un pseudo-isomorphisme de M vers $\bigoplus_i A/\mathfrak{p}_i^{m_i}$. Autrement dit, il existe une suite exacte*

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow M \longrightarrow \bigoplus_i A/\mathfrak{p}_i^{m_i} \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

où C, D sont des modules pseudo-nuls.

DÉMONSTRATION. Voir [**Bou07**, Chap. VII, §4.4, Théorème 5]. □

Les idéaux $\mathfrak{p}_i$ et les entiers m_i sont uniquement déterminés, comme conséquence du théorème d'unicité des diviseurs élémentaires sur un anneau principal (et en particulier sur les anneaux de valuation discrète $A_{\mathfrak{p}}$). Grâce au Lemme 1.1.4, l'idéal caractéristique du module M est donné par :

$$\mathrm{car}_A(M) = \mathfrak{p}_1^{m_1} \ldots \mathfrak{p}_d^{m_d}$$

Lorsque A est isomorphe à un anneau des séries formelles $\mathcal{O}[[T]]$ sur un anneau complet de valuation discrète $\mathcal{O}$, on peut étendre l'énoncé du Théorème 1.1.7 aux A-modules de type fini. Supposons par commodité que $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, et notons $\varpi \in \mathcal{O}$ une uniformisante. Les idéaux premiers de hauteur 1 de $\mathcal{O}[[T]]$ sont principaux et engendrés soit par ϖ, soit par un polynôme $P(T) \in \mathcal{O}[T]$ distingué (i.e. un polynôme monique tel que $P(T) \equiv T^n \mod \varpi$).

Théorème 1.1.8 (Théorème de structure sur l'algèbre d'Iwasawa)**.** *Les modules de type fini et pseudo-nuls sur $\mathcal{O}[[T]]$ sont finis. Si M est un $\mathcal{O}[[T]]$-module de type fini, alors il existe des entiers $r \in \mathbb{N}$, $\mu_i > 0$ et $m_j > 0$, des polynômes distingués irréductibles $P_j(T)$ et une suite exacte de $\mathcal{O}[[T]]$-modules :*

$$(\textit{fini}) \longrightarrow M \longrightarrow \left(\bigoplus_i \mathcal{O}[[T]]/(\varpi^{\mu_i})\right) \bigoplus \left(\bigoplus_j \mathcal{O}[T]/(P_j(T)^{m_j})\right) \longrightarrow (\textit{fini})$$

DÉMONSTRATION. Si M est de type fini et pseudo-nul, alors son annihilateur $\mathfrak{a}$ est de hauteur 2. L'existence de la division euclidienne dans $\mathcal{O}[[T]]$ (cf. par exemple [**Was97**, Chap. 7, Prop. 2]) montre qu'il existe deux éléments $f, g \in \mathfrak{a}$ premier entre eux, et donc que $\mathfrak{a}$ contient une puissance $\mathfrak{m}^N$ de l'idéal maximal $\mathfrak{m} = (\varpi, T)$. Donc M est de longueur finie sur $\mathcal{O}[[T]]/\mathfrak{m}^N$ qui est d'ordre fini, donc M est fini. Pour le théorème de structure des modules de type fini, voir par exemple [**Lan90**, Chap. 5, Theorem 3.1]. $\square$

1.2. Idéaux caractéristiques et changement de bases. Les résultats de ce paragraphe sont probablement bien connus des experts, mais nous les reprouvons ici, faute de référence. La preuve du point (1) de la proposition 1.2.2 est tirée de [**Och05**, Lemma 3.1].

Lemme 1.2.1. *Soit M un A-module de type fini et de torsion, soit $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A$.*

(1) Si M est pseudo-nul, alors $M[\mathfrak{p}]$ et $M/\mathfrak{p}M$ sont de torsion sur $A/\mathfrak{p}$.

(2) Si $M/\mathfrak{p}M$ est de torsion sur $A/\mathfrak{p}$, alors $\mathfrak{p}$ ne divise pas $\mathrm{car}_A(M)$.

DÉMONSTRATION. Supposons M pseudo-nul. Alors il existe un élément $x \in A - \mathfrak{p}$ tel que $xM = 0$. Donc l'image de x dans $A/\mathfrak{p}$ est un élément non-nul tuant $M[\mathfrak{p}]$ et $M/\mathfrak{p}M$, ce qui prouve que ces deux modules sont de torsion sur $A/\mathfrak{p}$.

Montrons le point (2) par contraposée et supposons que $\mathfrak{p}$ divise l'idéal caractéristique de M. Alors d'après le théorème 1.1.7, il existe une application A-linéaire $M \longrightarrow A/\mathfrak{p}$ de conoyau pseudo-nul. En tensorisant par $A/\mathfrak{p}$ au-dessus de A, on obtient un morphisme de $A/\mathfrak{p}$-modules $M/\mathfrak{p}M \longrightarrow A/\mathfrak{p}$ dont le conoyau est de torsion d'après le point (1). Donc $M/\mathfrak{p}M$ n'est pas de torsion sur $A/\mathfrak{p}$. $\square$

Proposition 1.2.2. *Soit M un A-module de type fini et de torsion, soit $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A$. Supposons que $\mathfrak{p}$ est principal et que $A/\mathfrak{p}$ est encore un anneau intégralement clos.*

(1) Si M est pseudo-nul, alors on a $\mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}(M[\mathfrak{p}]) = \mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}(M/\mathfrak{p}M)$.

(2) Si M n'a pas de sous-A-modules pseudo-nuls différents de $\{0\}$ et si $M/\mathfrak{p}M$ est de torsion sur $A/\mathfrak{p}$, alors

$$\mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}(M/\mathfrak{p}M) = \mathrm{car}_A(M)/\mathfrak{p}\,\mathrm{car}_A(M).$$

(3) Plus généralement, si l'on suppose uniquement que $M/\mathfrak{p}M$ est de torsion sur $A/\mathfrak{p}$, alors $M[\mathfrak{p}]$ est aussi de torsion sur $A/\mathfrak{p}$ et on a la relation

$$\mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}(M/\mathfrak{p}M) = \mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}(M[\mathfrak{p}]).(\mathrm{car}_A(M)/\mathfrak{p}\,\mathrm{car}_A(M)).$$

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité, on peut supposer que A est de dimension de Krull au moins égale à 2. Soit $x \in A$ un générateur de $\mathfrak{p}$. Supposons d'abord

M pseudo-nul. D'après le lemme 1.2.1, les $A/\mathfrak{p}$-modules $M[\mathfrak{p}]$ et $M/\mathfrak{p}M$ sont de torsion. Comme $A/\mathfrak{p}$ est supposé intégralement clos, il a un sens de considérer leurs idéaux caractéristiques. La multiplication par x sur M induit une suite exacte de A-modules :

$$0 \longrightarrow M[\mathfrak{p}] \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow M/\mathfrak{p}M \longrightarrow 0$$

Fixons maintenant un idéal $\mathfrak{q} \in \mathcal{P}_{A/\mathfrak{p}}$, et montrons que $\mathrm{ord}_{\mathfrak{q}}(M[\mathfrak{p}]) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{q}}(M/\mathfrak{p}M)$. Notons $\mathfrak{Q} \subseteq A$ l'image inverse de $\mathfrak{q}$ par la projection $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{p}$. C'est un idéal premier de A de hauteur 2 contenant $\mathfrak{p}$. En localisant en $\mathfrak{Q}$ la suite exacte précédente, on obtient une suite exacte :

$$0 \longrightarrow M[\mathfrak{p}]_{\mathfrak{Q}} \longrightarrow M_{\mathfrak{Q}} \longrightarrow M_{\mathfrak{Q}} \longrightarrow (M/\mathfrak{p}M)_{\mathfrak{Q}} \longrightarrow 0$$

Comme M est pseudo-nul, le localisé $M_{\mathfrak{Q}}$ est pseudo-nul sur $A_{\mathfrak{Q}}$, qui est un anneau noethérien intégralement clos de dimension de Krull égale à 2. L'annulateur de $M_{\mathfrak{Q}}$ contient donc une puissance de l'idéal maximal $\mathfrak{Q}A_{\mathfrak{Q}}$, et ainsi $M_{\mathfrak{Q}}$ est de longueur finie. On en déduit que $\mathrm{ord}_{\mathfrak{Q}}M[\mathfrak{p}] = \mathrm{ord}_{\mathfrak{Q}}(M/\mathfrak{p}M)$. Comme $\mathrm{ord}_{\mathfrak{q}}M[\mathfrak{p}] = \mathrm{ord}_{\mathfrak{Q}}M[\mathfrak{p}]$ et $\mathrm{ord}_{\mathfrak{q}}(M/\mathfrak{p}M) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{Q}}(M/\mathfrak{p}M)$, cela montre que les $A/\mathfrak{p}$-modules $M[\mathfrak{p}]$ et $M/\mathfrak{p}M$ ont la même $\mathfrak{q}$-longueur, ce qui termine la preuve du point (1).

Traitons les point (2). Supposons maintenant que M n'a pas de sous-modules pseudo-nuls non-triviaux, et que $M/\mathfrak{p}M$ est de torsion sur $A/\mathfrak{p}$. Alors d'après le lemme 1.2.1, on sait que $\mathfrak{p}$ n'apparaît pas dans la suite des idéaux premiers $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_d \in \mathcal{P}_A$ divisant $\mathrm{car}_A M$. Par ailleurs, le pseudo-isomorphisme donné par le théorème 1.1.7 est injectif, et donc définit une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \bigoplus_i A/\mathfrak{p}_i^{m_i} \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

où les m_i sont des entiers positifs et D est un A-module pseudo-nul. En considérant la multiplication par x, on en déduit une suite exacte longue

$$\bigoplus_i A/\mathfrak{p}_i^{m_i}[\mathfrak{p}] \longrightarrow D[\mathfrak{p}] \longrightarrow M/\mathfrak{p}M \longrightarrow \bigoplus_i A/\mathfrak{p}_i^{m_i} \otimes_A A/\mathfrak{p} \longrightarrow D/\mathfrak{p}D \longrightarrow 0$$

Comme x n'appartient pas aux $\mathfrak{p}_i$, le premier terme de cette suite exacte est nul. D'après le point (1) appliqué à D et d'après le lemme 1.1.4, on a donc $\mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}(M/\mathfrak{p}M) = \mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}\left(\bigoplus_i A/\mathfrak{p}_i^{m_i} \otimes_A A/\mathfrak{p}\right)$, c'est-à-dire,

$$\mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}(M/\mathfrak{p}M) = \prod_i \mathfrak{p}_i^{m_i}/\mathfrak{p}\mathfrak{p}_i^{m_i} = \mathrm{car}_A(M)/\mathfrak{p}\,\mathrm{car}_A(M).$$

Montrons maintenant le point (3). Supposons uniquement que $M/\mathfrak{p}M$ est de torsion sur $A/\mathfrak{p}$. D'après le théorème 1.1.7, il existe un pseudo-isomorphisme ϕ définissant une suite exacte

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow M \longrightarrow \bigoplus_i A/\mathfrak{p}_i^{m_i} \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

où C,D sont des A-modules pseudo-nuls. D'après le lemme 1.2.1, on sait que $\mathfrak{p}$ est distinct des $\mathfrak{p}_i$, et donc $A/\mathfrak{p}_i^{m_i}[\mathfrak{p}] = 0$. On a en particulier $C[\mathfrak{p}] = M[\mathfrak{p}]$. Comme C est pseudo-nul, $C[\mathfrak{p}]$ est de torsion sur $A/\mathfrak{p}$ d'après le lemme 1.2.1, et donc $M[\mathfrak{p}]$ aussi. Définissions le A-module M' comme étant l'image de M par ϕ. Alors M' est pseudo-isomorphe à M et donc a le même idéal caractéristique que M. De plus, c'est un sous-module de $\bigoplus_i A/\mathfrak{p}_i^{m_i}$, donc il n'a pas de sous-modules pseudo-nuls non-triviaux. Enfin, $M'/\mathfrak{p}M'$ est un quotient de $M/\mathfrak{p}M$, donc il est de torsion sur $A/\mathfrak{p}$. D'après le point (2) précédemment démontré, on a donc

$$\mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}(M'/\mathfrak{p}M') = \mathrm{car}_A(M)/\mathfrak{p}\,\mathrm{car}_A(M)$$

Il reste à montrer que $\mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}(M/\mathfrak{p}M) = \mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}(M[\mathfrak{p}]).\mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}(M'/\mathfrak{p}M')$. On a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

Comme $A/\mathfrak{p}_i^{m_i}[\mathfrak{p}] = 0$ pour tout $1 \leq i \leq d$, on a $M'[\mathfrak{p}] = 0$, d'où une suite exacte courte de $A/\mathfrak{p}$-modules de torsion induite par la multiplication par x :

$$0 \longrightarrow C/\mathfrak{p}C \longrightarrow M/\mathfrak{p}M \longrightarrow M'/\mathfrak{p}M' \longrightarrow 0$$

D'après le lemme 1.1.4, on a donc $\mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}(M/\mathfrak{p}M) = \mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}(C/\mathfrak{p}C).\,\mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}(M'/\mathfrak{p}M')$. D'après le point (1), on a de plus $\mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}(C/\mathfrak{p}C) = \mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}\,C[\mathfrak{p}]$. Comme $C[\mathfrak{p}] = M[\mathfrak{p}]$, on a ainsi montré que

$$\begin{aligned}\mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}(M/\mathfrak{p}M) &= \mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}(M[\mathfrak{p}]).\,\mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}(M'/\mathfrak{p}M') \\ &= \mathrm{car}_{A/\mathfrak{p}}(M[\mathfrak{p}]).\,\mathrm{car}_A(M)/\mathfrak{p}\,\mathrm{car}_A(M),\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de la proposition. □

1.3. Séries caractéristiques et invariants d'Iwasawa.

Définition 1.3.1. Soit M un module de type fini et de torsion sur A. La série caractéristique de M, notée $L_p(M) \in A - \{0\}$, est un générateur de l'idéal caractéristique de M. Lorsqu'elle existe, elle est unique à multiplication par une unité de A près.

Dans la littérature, on étend parfois cette définition en posant $L_p(M) = 0$ lorsque M n'est pas de torsion. Lorsque A est factoriel, ses idéaux premiers de hauteur 1 sont tous principaux, et donc la série caractéristique existe toujours. C'est le cas, par exemple, quand A est régulier d'après le théorème de Auslander–Buchsbaum, et *a fortiori* lorsque A est une algèbre de séries formelles sur un anneau de valuation discrète.

Considérons le cas particulier où $A = \mathcal{O}[[T]]$, où $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, d'uniformisante ϖ. Rappelons que, d'après le théorème de préparation de Weierstrass (cf. [**Was97**, Chap. 7, §1, Theorem 7.3]), une série formelle non-nulle $f(T) \in A$ se décompose de manière unique en un produit $f(T) = \varpi^\mu U(T)P(T)$, où $\mu \in \mathbb{N}$, $U(T) \in \mathcal{A}^\times$ et $P(T) \in \mathcal{O}[T]$ est un polynôme distingué. On s'intéresse en théorie d'Iwasawa aux invariants suivants.

Définition 1.3.2. Supposons que $A = \mathcal{O}[[T]]$, et soit M un A-module de type fini et de torsion. Soit $L_p(M;T) \in \mathcal{O}[[T]] - \{0\}$ la série caractéristique de M, que l'on décompose en $L_p(M;T) = \varpi^\mu U(T) P(T)$. Les λ- et μ-invariants de M sont définis comme étant

$$\lambda(M) := \deg_T P(T), \qquad \mu(M) := \mu.$$

Nous terminons cette section avec un lemme utile interprétant le terme constant de la série caractéristique comme étant un quotient de Herbrand. Rappelons d'abord qu'un A-module de type fini et de torsion est pseudo-nul si et seulement si il est fini. Rappelons aussi qu'un $\mathcal{O}$-module N de type fini est de torsion si et seulement si il est fini, auquel cas $\mathrm{car}_{\mathcal{O}} N$ est engendré par $\# N$.

Lemme 1.3.3. *Supposons que $A = \mathcal{O}[[T]]$ et soit M un A-module de type fini et de torsion, de série caractéristique $L_p(M;T)$. Si M/TM est fini, alors $M[T]$ est aussi fini, et l'on a*

$$L_p(M;0) \doteq \frac{\#(M/TM)}{\# M[T]}$$

où $\doteq$ désigne l'égalité à multiplication par une unité de $\mathcal{O}$ près.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de hauteur 1 de A engendré par T. On a $A/\mathfrak{p} = \mathcal{O}$, et par définition, $L_p(M;0)$ est un générateur de $\mathrm{car}_A(M)/\mathfrak{p}\,\mathrm{car}_A(M)$. Si $M/\mathfrak{p}M$ est de torsion sur $A/\mathfrak{p}$, alors, d'après le point (3) de la proposition 1.2.2, $M[\mathfrak{p}]$ est fini, et l'on a une égalité entre idéaux principaux

$$(\# M[\mathfrak{p}]).(L_p(M;0)) = (\#(M/\mathfrak{p}M)),$$

d'où l'égalité $L_p(M;0) \doteq \frac{\#(M/TM)}{\# M[T]}$. □

2. Groupe de Selmer d'une représentation ordinaire

2.1. Motivation. En théorie d'Iwasawa, les groupes de Selmer sont des objets algébriques généralisant les modules d'Iwasawa, et apportant une interprétation de nature arithmétique aux fonctions L p-adiques. Ils apparaissent dans les travaux de Mazur ([**Maz72**]) sur la structure de $A(F_\infty)$, où A/F est une variété abélienne sur un corps de nombres F et où F_∞/F est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F.

Soit M le motif (pur de poids -1) sur $\mathbb{Q}$ attaché à une courbe elliptique $E/\mathbb{Q}$. Sa réalisation p-adique est $V = T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$, où $T = T_p(E)$ est le module de Tate de E. Notons $D = V/T \simeq E[p^\infty]$ le groupe p-divisible des points de p^∞-torsion de E sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Lorsque E a bonne réduction ordinaire en p, le groupe formel sur $\mathbb{Z}_p$ attaché au modèle de Néron de E sur $\mathbb{Z}_p$ est de hauteur 1 et de dimension 1, et le groupe p-divisible associé D^+ est un sous-$\mathbb{Z}_p$-module de D isomorphe à $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Il est de plus $G_{\mathbb{Q}_p}$-stable, et le quotient

$D^- = D/D^+$ est un groupe p-divisible étale donc $G_{\mathbb{Q}_p}$-non-ramifié. En considérant les modules de Tate, on obtient une suite exacte de $G_{\mathbb{Q}_p}$-modules

$$0 \longrightarrow T^+ \longrightarrow T \longrightarrow T^- \longrightarrow 0,$$

où $T^\pm$ est libre de rang 1 sur $\mathbb{Z}_p$, et telle que T^- non-ramifié. Les propriétés de l'accouplement de Weil montre par ailleurs que la $G_{\mathbb{Q}_p}$-action sur T^+ est donnée par le caractère p-cyclotomique, et donc V satisfait à la fois les définitions d'ordinarité de Greenberg (Définition 4.2.2, avec $\mathrm{Fil}^0 V := V$ et $\mathrm{Fil}^1 V := V^+ := T^+ \otimes \mathbb{Q}_p$) et de p-stabilisation ordinaire (Définition 4.2.5). Coates et Greenberg ont montré (comme corollaire direct des résultats de [**CG96**, Section 4]) que le p-groupe de Selmer de la déformation $\mathbb{Z}_p$-cyclotomique de $E/\mathbb{Q}$ était coïncidait

$$\mathrm{Sel}_\infty(T, T^+) = \ker\left[H^1(\mathbb{Q}_\infty, D) \longrightarrow H^1(I_p, D^-) \times \prod_{\ell \neq p} H^1(I_\ell, D) \right], \tag{2}$$

où I_ℓ désigne le sous-groupe d'inertie du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_\infty$ défini par le plongement ι_ℓ. Plus généralement, Greenberg propose dans [**Gre89**] et [**Gre91**] de prendre l'égalité 2 comme définition du groupe de Selmer attaché à un motif ordinaire en p (au sens de Greenberg), de réalisation p-adique V, en choisissant un réseau $G_{\mathbb{Q}}$-stable T de V, en posant $D = V/T$ et en définissant $D^+ \subseteq D$ comme étant l'image de $\mathrm{Fil}^1 V$ dans D. Cette définition est ambiguë à cause du choix du réseau, et deux réseaux non-homothétiques peuvent conduire à deux groupes de Selmer différents, comme l'a déjà remarqué Mazur dans son travail sur les μ-invariants de courbes elliptiques isogènes.

Nous donnons à présent une définition générale d'un groupe de Selmer qui convient particulièrement à notre cadre, c'est-à-dire convenant aux p-stabilisations ordinaires de motifs, et aux déformations ordinaires. La définition donnée est apparentée à celles trouvées, entre autres, dans [**SU14**, Section 3] ou [**Gre16**].

2.2. Groupe de Greenberg-Selmer et fonction L p-adique algébrique. Soient $\mathcal{A}$ une $\mathbb{Z}_p$-algèbre profinie, et $\mathcal{T}$ un $\mathcal{A}$-module libre de rang fini muni d'une action continue de $G_\Sigma := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q})$, où Σ est un ensemble fini de places de $\mathbb{Q}$ contenant p et ∞, et $\mathbb{Q}_\Sigma \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ est la plus grande extension algébrique de $\mathbb{Q}$ non-ramifiée en dehors de Σ. On se donne une suite exacte courte de $G_{\mathbb{Q}_p}$-modules libres sur $\mathcal{A}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}^+ \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}^- \longrightarrow 0$$

On pose $\mathcal{D} = \mathcal{T} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^\vee$ et $\mathcal{D}^\pm = \mathcal{T}^\pm \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^\vee$, où $\mathcal{A}^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(\mathcal{A}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ désigne le dual de Pontryagin de $\mathcal{A}$. Ce sont des $\mathcal{A}$-modules co-libres, c'est-à-dire que leurs duaux de Pontryagin sont libres sur $\mathcal{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on définit la déformation cyclotomique

$\mathcal{D}_n := \mathrm{Ind}_{\mathbb{Q}_n}^{\mathbb{Q}} \mathcal{D}$ de niveau n de $\mathcal{D}$ comme étant l'induite de $G_{\mathbb{Q}_n}$ à $G_{\mathbb{Q}}$ de $\mathcal{D}$, vu comme $G_{\mathbb{Q}_n}$-module discret. Autrement dit, il s'agit du $\mathcal{A}$-module des fonctions localement constantes $f : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{D}$ telles que

$$\forall g \in G_{\mathbb{Q}},\ \forall h \in G_{\mathbb{Q}_n},\ f(hg) = hf(g).$$

Il est muni de l'action de $G_{\mathbb{Q}}$ donnée par la formule $(\gamma.f)(g) = f(g\gamma)$, et il est canoniquement isomorphe à $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{A}} A[\Gamma_n]$ si n est fini (resp. à $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{A}} A[[\Gamma]]$ si $n = \infty$), muni de l'action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur les deux facteurs du produit tensoriel. On peut voir $\mathcal{D}_n$ (resp. $\mathcal{D}_\infty$) comme un module co-libre de rang d sur l'anneau $\mathcal{A}[\Gamma_n]$ (resp. sur l'anneau $\mathcal{A}[[\Gamma]]$). On définit similairement $\mathcal{D}_n^{\pm}$, et on a aussi une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_n^+ \longrightarrow \mathcal{D}_n \longrightarrow \mathcal{D}_n^- \longrightarrow 0$$

Nous travaillerons avec la définition suivante.

Définition 2.2.1. Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On appelle groupe de Selmer de niveau n attaché à $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^+)$ le noyau de la flèche de restriction globale-locale :

$$\mathrm{Sel}_n(\mathcal{T}, \mathcal{T}^+) := \ker \left[H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}, \mathcal{D}_n) \longrightarrow H^1(I_p, \mathcal{D}_n^-) \times \prod_{\ell \in \Sigma, \ell \neq p} H^1(I_\ell, \mathcal{D}_n) \right],$$

où $I_p = I_p(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q})$ et $I_\ell = I_\ell(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q})$. Le groupe de Selmer dual est défini comme étant

$$X_n(\mathcal{T}, \mathcal{T}^+) = \mathrm{Sel}_n(\mathcal{T}, \mathcal{T}^+)^\vee$$

Ce sont des modules sur l'anneau de groupe $\mathcal{A}[\Gamma_n]$ si n est fini (resp. sur l'anneau de groupe complété $\mathcal{A}[[\Gamma]]$ si $n = \infty$).

D'après les propriétés de base de la cohomologie des modules discrets, on a $\mathrm{Sel}_\infty(\mathcal{T}, \mathcal{T}^+) = \varinjlim_n \mathrm{Sel}_n(\mathcal{T}, \mathcal{T}^+)$. Par ailleurs, $H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}, \mathcal{D}_n)^\vee$ étant de type fini sur $\mathcal{A}[\Gamma_n]$ pour n fini (resp. sur $\mathcal{A}[[\Gamma]]$ pour $n = \infty$), cela est encore vrai pour $X_n(\mathcal{T}, \mathcal{T}^+)$ (voir par exemple [**NSW08**, Chap VIII, §3, Theorem 20]). Par ailleurs, on ne considérera jamais la cohomologie locale aux places archimédiennes, puisque qu'elle est toujours triviale lorsque p est impair.

Remarque 2.2.2. Le morphisme d'inflation en cohomologie des groupes définit une application linéaire injective $\inf : H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}, \mathcal{D}_n) \hookrightarrow H^1(\mathbb{Q}, \mathcal{D}_n)$. Une classe de cocycle continu $\varsigma \in H^1(\mathbb{Q}, \mathcal{D}_n)$ appartenant à l'image de l'application inf satisfait $\mathrm{res}_\ell \varsigma = 0$ pour tout $\ell \notin \Sigma$, où $\mathrm{res}_\ell \varsigma \in H^1(I_\ell, \mathcal{D}_n)$ est la restriction de ς au sous-groupe d'inertie en ℓ. Réciproquement, supposons que $\varsigma \in H^1(\mathbb{Q}, \mathcal{D}_n)$ satisfait $\mathrm{res}_\ell \varsigma = 0$ pour tout $\ell \notin \Sigma$. Comme $\mathcal{D}_n$ est non-ramifié en $\ell \notin \Sigma$, on a $H^1(I_\ell, \mathcal{D}_n) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(I_\ell, \mathcal{D}_n)$, et donc tout représentant c de ς est nul sur le sous-groupe fermé engendré par les I_ℓ, c'est-à-dire sur $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}_\Sigma)$.

On en conclut que $\varsigma \in H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q},\mathcal{D}_n)$ d'après la suite exacte d'inflation-restriction. En particulier, l'application d'inflation fournit l'identification suivante :

$$\mathrm{Sel}_n(\mathcal{T},\mathcal{T}^+) \simeq \ker\left[H^1(\mathbb{Q},\mathcal{D}_n) \longrightarrow H^1(I_p,\mathcal{D}_n^-) \times \prod_{\ell\neq p} H^1(I_\ell,\mathcal{D}_n)\right].$$

Définition 2.2.3. Supposons que le groupe de Selmer dual $X_\infty(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)$ est de torsion sur $\mathcal{A}[[\Gamma]]$. La fonction L p-adique algébrique $L_p(\mathcal{T},\mathcal{T}^+) \in \mathcal{A}[[\Gamma]]-\{0\}$ attachée à $(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)$ est la série caractéristique associée à $X_\infty(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)$ (cf 1.3.1).

2.3. Lemme de Shapiro. Soit G un sous-groupe fermé de G_Σ et soit H un sous-groupe ouvert normal de G. Le lemme de Shapiro relie la cohomologie de $\mathcal{D}$, vu comme H-module, à la cohomologie du G-module induit $\mathrm{Ind}_H^G\mathcal{D}$. On a, pour tout entier $i \geq 0$, l'isomorphisme de Shapiro (fonctoriel par rapport à $\mathcal{D}$ et à H, voir [**Nek06**, Chap. 8, §1.]) :

$$H^i(H,\mathcal{D}) \simeq H^i(G,\mathrm{Ind}_H^G\mathcal{D}) \tag{3}$$

Lemme 2.3.1. *On a un isomorphisme :*

$$\mathrm{Sel}_n(\mathcal{T},\mathcal{T}^+) = \ker\left[H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_n,\mathcal{D}) \longrightarrow H^1(I_p(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_n),\mathcal{D}^-) \times \prod_{\ell\in\Sigma,\ell\neq p} H^1(I_\ell,\mathcal{D})\right]$$

Démonstration. Supposons n fini. D'après le lemme de Shapiro pour $G = G_\Sigma$ et $H = G_\Sigma \cap G_{\mathbb{Q}_n}$, on a ainsi $H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_n,\mathcal{D}) \simeq H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q},\mathcal{D}_n)$. Par ailleurs, on peut vérifier qu'un cocycle de $H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q},\mathcal{D}_n)$ est non-ramifié en $\ell \in \Sigma-\{p\}$ si et seulement si son image dans $H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_n,\mathcal{D})$ est non-ramifiée en au moins une place λ de $\mathbb{Q}_n$ au-dessus de ℓ (auquel cas il sera non-ramifié en toute place au-dessus de ℓ). Par ailleurs, la condition locale en p est aussi conservée sous cet isomorphisme. On a en effet $I_p(\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q}) = \Gamma_n$, et d'après le lemme de Shapiro on a un isomorphisme $H^1(I_p(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}_n),\mathcal{D}^-) \simeq H^1(I_p(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}),\mathcal{D}_n^-)$ compatible à l'isomorphisme précédent. L'isomorphisme recherché s'en déduit aisément. Le cas où $n=\infty$ s'obtient par passage à la limite injective sur $n \in \mathbb{N}$, qui est une opération exacte et commutant à la formation de groupes de cohomologie continue de modules discrets. $\square$

Remarque 2.3.2. Soit λ la place de $\mathbb{Q}_\infty$ définie par ι_ℓ, pour un nombre premier $\ell \neq p$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{nr}}/\mathbb{Q}_{\infty,\lambda}) = G_{\mathbb{Q}_{\infty,\lambda}}/I_\ell$ est d'ordre premier à p, donc la suite exacte d'inflation-restriction montre que l'application de restriction

$$H^1(\mathbb{Q}_{\infty,\lambda},\mathcal{D}) \longrightarrow H^1(I_\ell,\mathcal{D})$$

est injective. On a donc la description alternative suivante de $\mathrm{Sel}_\infty(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)$:

$$\mathrm{Sel}_\infty(\mathcal{T},\mathcal{T}^+) \simeq \ker\left[H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_\infty,\mathcal{D}) \longrightarrow H^1(I_p(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_\infty),\mathcal{D}^-) \times \prod_{\lambda|\ell\in\Sigma,\ell\neq p} H^1(\mathbb{Q}_{\infty,\lambda},\mathcal{D})\right]$$

Le lemme de Shapiro montre alors que l'on a aussi :

$$\mathrm{Sel}_\infty(\mathcal{T},\mathcal{T}^+) = \ker\left[H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q},\mathcal{D}_\infty) \longrightarrow H^1(I_p,\mathcal{D}_\infty^-) \times \prod_{\ell\in\Sigma,\ell\neq p} H^1(\mathbb{Q}_\ell,\mathcal{D}_\infty)\right]$$

2.4. Changement de bases. On conserve les notations précédentes. Pour tout idéal $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{A}$, on a un isomorphisme naturel

$$(\mathcal{A}/\mathfrak{a})^\vee = \mathcal{A}^\vee[\mathfrak{a}],$$

et donc on a $\mathcal{T}/\mathfrak{a} \otimes_{\mathcal{A}/\mathfrak{a}} (\mathcal{A}/\mathfrak{a})^\vee = \mathcal{D}[\mathfrak{a}]$ (et similairement pour $\mathcal{T}^+$). En particulier, on a une application naturelle

$$\mathrm{Sel}_\infty(\mathcal{T}/\mathfrak{a},\mathcal{T}^+/\mathfrak{a}) \longrightarrow \mathrm{Sel}_\infty(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)[\mathfrak{a}]. \tag{4}$$

Il s'agit d'un isomorphisme sous certaines conditions générales, comme le précise la proposition suivante, inspirée de [**SU14**, Proposition 3.7].

Proposition 2.4.1. *Soit $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Supposons que l'idéal $\mathfrak{a}$ est principal, que $I_p(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}_n)$ agit trivialement sur $\mathcal{D}^-$, et que les $\mathcal{A}$-modules $\mathcal{D}^{G_{\mathbb{Q}_n}}$ et $\mathcal{D}^{I_\ell}$ sont divisibles pour tout $\ell \in \Sigma$.*

Alors l'application de changement de base (4) induit un isomorphisme

$$\mathrm{Sel}_n(\mathcal{T}/\mathfrak{a},\mathcal{T}^+/\mathfrak{a}) \simeq \mathrm{Sel}_n(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)[\mathfrak{a}],$$

et donc, par dualité un isomorphisme

$$X_n(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)/\mathfrak{a}X_n(\mathcal{T},\mathcal{T}^+) \simeq X_n(\mathcal{T}/\mathfrak{a},\mathcal{T}^+/\mathfrak{a}).$$

DÉMONSTRATION. Soit $x \in A$ un générateur de $\mathfrak{a}$. D'après le lemme 3, on a

$$\mathrm{Sel}_n(\mathcal{T},\mathcal{T}^+) = \ker\left[H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_n,\mathcal{D}) \longrightarrow H^1(I_p(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_n),\mathcal{D}^-) \times \prod_{\ell\in\Sigma,\ell\neq p} H^1(I_\ell,\mathcal{D})\right]$$

On montre d'abord que l'application naturelle $\tau : H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_n,\mathcal{D}[\mathfrak{a}]) \longrightarrow H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_n,\mathcal{D})[\mathfrak{a}]$ est un isomorphisme. Comme $\mathfrak{a}$ est engendré par x et que $\mathcal{D}$ est $\mathcal{A}$-divisible, on a une suite exacte courte induite par la multiplication par x :

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}[\mathfrak{a}] \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow 0$$

Celle-ci induit une suite exacte longue associée en cohomologie :

$$\mathcal{D}^{G_{\mathbb{Q}_n}} \longrightarrow \mathcal{D}^{G_{\mathbb{Q}_n}} \longrightarrow H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_n,\mathcal{D}[\mathfrak{a}]) \xrightarrow{\tau} H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_n,\mathcal{D}) \longrightarrow H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_n,\mathcal{D})$$

où la première et la dernière flèche sont induites par la multiplication par x. Par hypothèse la première flèche est surjective, et par définition le noyau de la dernière flèche est égal à $H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_n,\mathcal{D})[\mathfrak{a}]$. Donc τ est un isomorphisme.

Pour montrer que τ envoie $\mathrm{Sel}_n(\mathcal{T}/\mathfrak{a},\mathcal{T}^+/\mathfrak{a})$ sur $\mathrm{Sel}_n(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)[\mathfrak{a}]$, il suffit de prouver que les applications

$$H^1(I_p(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_n),\mathcal{D}^-[\mathfrak{a}]) \longrightarrow H^1(I_p(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_n),\mathcal{D}^-)[\mathfrak{a}]$$

et, pour $\ell \in \Sigma$,

$$H^1(I_\ell,\mathcal{D}[\mathfrak{a}]) \longrightarrow H^1(I_\ell,\mathcal{D})[\mathfrak{a}])$$

sont injectives. La première l'est clairement, car les H^1 sont des Hom par hypothèse, et la deuxième est injective par le même argument que précédemment (et utilisant le fait que $\mathcal{D}^{I_\ell}$ est $\mathcal{A}$-divisible). □

2.5. Structure des groupes de Selmer. Jusqu'à la fin de cette section, nous supposons que $\mathcal{A}$ est un anneau de séries formelles à coefficients dans une extension finie $\mathcal{O}$ de $\mathbb{Z}_p$, de corps résiduel $\mathbb{F}$. On a ainsi $\mathcal{A}=\mathcal{O}[[X_1,\dots,X_m]]$, $m\geq 1$ ou bien $\mathcal{A}=\mathcal{O}$. Notons $\mathfrak{m}_\mathcal{A}$ son idéal maximal. On conserve les notations des paragraphes précédents, et on note d (resp. $d^\pm$) le rang de $\mathcal{T}$ (resp. de $\mathcal{T}^\vee$). On introduit de plus le $\mathcal{A}$-module libre $\mathcal{T}^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{D},\mu_{p^\infty})$ de rang d et son dual $\mathcal{D}^*=\mathcal{T}^*\otimes_\mathcal{A}\mathcal{A}^\vee$. On note encore les modules induits avec un indice. Le résultat principal de [**Gre16**] donne des conditions suffisantes pour qu'un groupe de Selmer dual, défini de manière générale, n'admettent pas de sous-modules pseudo-nuls différents de 0. Combinée à la Proposition 1.2.2, cette propriété sera utile pour calculer les diverses spécialisations de fonctions L p-adiques algébriques. Nous simplifions le critère dans le but de l'appliquer dans la suite aux groupes de Selmer attachés à un motif muni d'une p-stabilisation ordinaire, ou bien à une déformation ordinaire.

Proposition 2.5.1. *Supposons que :*

(a) $X_\infty(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)$ *est de torsion sur* $\mathcal{A}[[\Gamma]]$.

(b) $H^2(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_\infty,\mathcal{D})^\vee$ *est de torsion sur* $\mathcal{A}[[\Gamma]]$.

(c) $\mathrm{Rang}_\mathcal{A}\,\mathcal{T}^{\mathrm{Frob}_\infty}=d^+$

(d) L'inertie en p *de* $\mathbb{Q}_\infty$ *agit trivialement sur* $\mathcal{D}^-$.

(e) En tant que $\mathbb{F}[G_\mathbb{Q}]$*-représentation,* $\mathcal{D}[\mathfrak{m}_\mathcal{A}]$ *n'a pas de quotient isomorphe à* $\mathbb{F}$ *ou à* μ_p.

Alors $X_\infty(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)$ *n'a pas de sous-modules pseudo-nuls non-nuls.*

Démonstration. On va montrer que l'on peut appliquer [**Gre16**, Proposition 4.1.1] au $\mathcal{A}[[\Gamma]]$-module $\mathcal{D}_\infty$. Avec les notations de *loc. cit.*, on pose $L_\ell=0$ pour $l\in\Sigma, l\neq p$ et enfin

$$L_p=\ker\left[H^1(\mathbb{Q}_p,\mathcal{D}_\infty)\longrightarrow H^1(I_p,\mathcal{D}_\infty^-)\right].$$

La remarque 2.3.2 montre que le groupe de Selmer défini dans *loc. cit.* est bien égal à $\mathrm{Sel}_\infty(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)$, et par ailleurs, la conclusion de la proposition 4.1.1 de *loc. cit.* est équivalente à ce que $X_\infty(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)$ n'a pas de sous-modules pseudo-nuls non-triviaux d'après [**Gre06**, Proposition 2.4].

La condition RFX($\mathcal{D}_\infty$) est vérifiée car $\mathcal{D}_\infty$ est réflexif, et LEO($\mathcal{D}_\infty$) l'est aussi d'après notre hypothèse (b). Montrons que l'on a $\mathrm{LOC}^{(1)}_\ell(\mathcal{D}_\infty)$ pour tout ℓ, c'est-à-dire que $(\mathcal{T}^*_\infty)^{G_{\mathbb{Q}_\ell}}=0$. Il suffit de prouver que le rang sur $\mathcal{A}[[\Gamma]]$ de $(\mathcal{T}^*_\infty)^{G_{\mathbb{Q}_\ell}}$ est nul. D'après [**Gre06**, Proposition 3.10], celui-ci est égal au corang de $\left(\mathcal{D}^*_\infty\right)^{G_{\mathbb{Q}_\ell}}=H^0(\mathbb{Q}_\ell,\mathcal{D}^*_\infty)$. D'après le lemme de Shapiro, on a $H^0(\mathbb{Q}_\ell,\mathcal{D}^*_\infty)=\prod_{\lambda|\ell}H^0(\mathbb{Q}_{\infty,\lambda},\mathcal{D}^*)$. Ce dernier module est de corang fini sur $\mathcal{A}$, en particulier son corang sur $\mathcal{A}[[\Gamma]]$ est nul, ce qu'on voulait démontrer.

Montrons maintenant que $L_p^\vee$ n'a pas de sous-$\mathcal{A}[[\Gamma]]$-modules pseudo-nuls non-triviaux. On a

$$L_p=\ker\left[\ H^1(\mathbb{Q}_p,\mathcal{D}_\infty)\xrightarrow{a}H^1(\mathbb{Q}_p,\mathcal{D}^-_\infty)\xrightarrow{b}H^1(I_p,\mathcal{D}^-_\infty)\ \right]$$

L'application a est surjective. En effet, $\mathrm{coker}\,a$ s'injecte dans $H^2(\mathbb{Q}_p,\mathcal{D}^+_\infty)$. D'après le théorème de dualité locale de Tate, on a $H^2(\mathbb{Q}_p,\mathcal{D}^+_\infty)\simeq\left((\mathcal{T}^{+,*}_\infty)^{G_{\mathbb{Q}_p}}\right)^\vee$ qui est trivial car $(\mathcal{T}^{+,*}_\infty)^{G_{\mathbb{Q}_p}}=0$ par le même argument que précédemment. On a ainsi une suite exacte courte :

$$0\longrightarrow\ker a\longrightarrow L_p\longrightarrow\ker b\longrightarrow 0$$

Il suffit de montrer que $(\ker a)^\vee$ et $(\ker b)^\vee$ n'ont pas de sous-modules pseudo-nuls non-triviaux. Comme $\ker a$ est un quotient de $H^1(\mathbb{Q}_p,\mathcal{D}^+_\infty)$, il suffit de montrer la même propriété pour $H^1(\mathbb{Q}_p,\mathcal{D}^+_\infty)^\vee$. Or ceci est vrai d'après [**Gre06**, Proposition 3.7], qui s'applique car on sait que $H^2(\mathbb{Q}_p,\mathcal{D}^+_\infty)=0$. Décrivons maintenant $\ker b$. D'après la suite exacte d'inflation-restriction, on a $\ker b\simeq H^1(\hat{\mathbb{Z}},H^0(I_p,\mathcal{D}^-_\infty))$ où $\hat{\mathbb{Z}}$ est topologiquement engendré par Frob_p. D'après le lemme de Shapiro, on a $H^0(I_p,\mathcal{D}^-_\infty)=H^0(I_p(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}_\infty),\mathcal{D}^-)$ qui est égal à $\mathcal{D}^-$ d'après notre hypothèse (d). On a donc $\ker b\simeq\mathcal{D}^-/(\mathrm{Frob}_p-1)\mathcal{D}^-$ et ainsi $(\ker b)^\vee$ est un sous-module de $(\mathcal{D}^-)^\vee$. En tant que modules sur l'anneau $\mathcal{A}[[\Gamma]]\simeq\mathcal{A}[[T]]$, on a $(\mathcal{D}^-)^\vee\simeq\mathcal{A}^{d^-}=(\mathcal{A}[[T]]/(T))^{d^-}$. Ce dernier module n'a pas de sous-modules pseudo-nuls non-triviaux, donc $(\ker b)^\vee$ non plus et donc $L_p^\vee$ non plus.

On vérifie maintenant l'hypothèse CRK($\mathcal{D}_\infty,\mathcal{L}$), c'est-à-dire l'égalité des corangs sur $\mathcal{A}[[\Gamma]]$:

$$\mathrm{Corang}(H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q},\mathcal{D}_\infty))=\mathrm{Corang}(\mathrm{Sel}_\infty(\mathcal{T},\mathcal{T}^+))+\sum_{\ell\in\Sigma-\{\infty\}}\mathrm{Corang}(Q_\ell(\mathcal{T},\mathcal{T}^+))$$

où $Q_\ell(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)=H^1(\mathbb{Q}_\ell,\mathcal{D}_\infty)/L_\ell$ pour tout premier $l\in\Sigma$. On va montrer que les deux termes de l'égalité sont égaux à d^- sous les hypothèses de la proposition. D'après

[**Gre06**, Proposition 4.1], on a

$$\mathrm{Corang}(H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q},\mathcal{D}_\infty)) = \mathrm{Corang}(\mathcal{D}^{G_\mathbb{Q}}) + \mathrm{Corang}(H^2(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_\infty,\mathcal{D})) + d - \mathrm{Corang}(\mathcal{D}_\infty^{\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})})$$

D'après les hypothèses (b) et (e), les deux premiers termes de la somme sont nuls. D'autre part, on a $\mathrm{Corang}(\mathcal{D}_\infty^{\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})}) = \mathrm{Corang}_\mathcal{A}(\mathcal{D}^{\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})}) = \mathrm{Rang}_\mathcal{A}\,\mathcal{T}^{\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})} = d^+$. Cela montre que le corang de $H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q},\mathcal{D}_\infty)$ est bien égal à d^-. Calculons maintenant le terme de droite de l'égalité de $\mathrm{CRK}(\mathcal{D}\infty,\mathcal{L})$. On va montrer que le corang de $Q_\ell(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)$ est 0 si $l \neq p$ et qu'il est égal à d^- pour $\ell = p$. Cela terminera la vérification de $\mathrm{CRK}(\mathcal{D}_\infty,\mathcal{L})$ vu que, d'après l'hypothèse (a), le $\mathcal{A}[[\Gamma]]$-module $\mathrm{Sel}_\infty(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)$ a un corang égal à 0. Si $\ell \neq p$, on a $Q_\ell(\mathcal{T},\mathcal{T}^+) = H^1(\mathbb{Q}_\ell,\mathcal{D}_\infty)$. Son corang est égal à la somme des corangs de $H^0(\mathbb{Q}_\ell,\mathcal{D}_\infty)$ et de $H^0(\mathbb{Q}_\ell,\mathcal{T}_\infty^*)^\vee$ d'après la proposition 4.2(b) de *loc. cit.* et d'après la dualité locale de Tate. Or ces deux modules sont de co-torsion sur $\mathcal{A}[[\Gamma]]$ d'après le même argument utilisant le lemme de Shapiro que précédemment, donc de corang nul. Enfin, pour $\ell = p$, on a vu que L_p et $\ker a$ ont le même corang. Comme a est surjectif, $Q_p(\mathcal{T},\mathcal{T}^+)$ et $H^1(\mathbb{Q}_p,\mathcal{D}_\infty^-)$ ont le même corang. D'après la proposition 4.2(a) de *loc. cit.* et un argument identique à celui pour $\ell \neq p$, ce dernier a un corang égal à d^-. Ceci termine la vérification de l'hypothèse $\mathrm{CRK}(\mathcal{D}_\infty,\mathcal{L})$.

Pour appliquer [**Gre16**, Proposition 4.1.1], il suffit maintenant de vérifier l'une des trois hypothèses supplémentaires. La condition (b) stipulant que $\mathcal{D}_\infty$ est co-libre et que la $G_\mathbb{Q}$-représentation résiduelle de $\mathcal{D}_\infty$ n'a pas de quotient isomorphe à μ_p est clairement vérifiée, car cette dernière est isomorphe à $\mathcal{D}[\mathfrak{m}_\mathcal{A}]$ et qu'elle vérifie la même condition d'après notre hypothèse (e). □

3. Groupe de Selmer d'un motif d'Artin

3.1. Notations et définition. Nous introduisons dans ce paragraphe le groupe de Selmer d'un motif d'Artin $[\rho]$ *absolument irréductible et non-trivial* sur $\mathbb{Q}$, à coefficients dans un corps de nombres E. Il dépendra du choix que l'on fixera dans toute la suite,

- d'une p-stabilisation ordinaire (V,V^+) de la réalisation p-adique de $[\rho]$ (cf. Définition 4.2.5),
- et d'un réseau $G_\mathbb{Q}$-stable T de V.

On posera $L = E_\mathfrak{p}$ et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_L$. Ainsi, V est un L-espace vectoriel de dimension d et T est un $\mathcal{O}$-module libre de rang d.

On note $H \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ le corps de nombres découpé par ρ, et H_n le compositum de H et de $\mathbb{Q}_n$ pour $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$. On pose $G := \mathrm{Gal}(H/\mathbb{Q})$, ainsi que

$$G_n := \mathrm{Gal}(H_n/\mathbb{Q}), \qquad G^{(n)} = \mathrm{Gal}(H_n/\mathbb{Q}_n).$$

Si n_0 est l'entier vérifiant $H \cap \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q}_{n_0}$, alors $G^{(n)}$ s'identifie au sous-groupe de G qui est isomorphe à $\mathrm{Gal}(H/\mathbb{Q}_{\min(n,n_0)})$. On notera encore ρ la représentation p-adique de dimension d à coefficients dans $\mathcal{O}$ des groupes G ou G_n induite par le motif d'Artin, et $\rho^{(n)}$ la restriction de ρ à $G^{(n)}$.

Rappelons que la dimension $d^\pm$ de $V^\pm$ est, par hypothèse, égale à la dimension du sous-espace propre de Frob_∞ agissant sur V et associé à la valeur propre ± 1. De plus, l'action galoisienne sur V^- est supposée non-ramifiée en p. On note $T^\pm := V^\pm \cap T$. C'est un $\mathcal{O}$-module libre de rang $d^\pm$, et définissant une suite exacte courte de $\mathcal{O}[G_{\mathbb{Q}_p}]$-modules

$$0 \longrightarrow T^+ \longrightarrow T \longrightarrow T^- \longrightarrow 0$$

La différente inverse $\mathfrak{d}_L^{-1}$ de l'extension $L/\mathbb{Q}_p$ est l'idéal fractionnaire de L constitué des éléments $x \in L$ tels que $\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}_p}(x\mathcal{O}) \subseteq \mathbb{Z}_p$. L'application $y \mapsto \big(x \mapsto \mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}_p}(xy)\big)$ induit un isomorphisme

$$L/\mathfrak{d}_L^{-1} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(\mathcal{O}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \mathcal{O}^\vee$$

(voir par exemple [**Neu99**, Chap. III, §2]). On fixe dans la suite un générateur de $\mathfrak{d}_L^{-1}$, ce qui permet d'identifier $\mathcal{O}^\vee$ avec $L/\mathcal{O}$, et donc d'identifier le $\mathcal{O}$-module co-libre $D := T \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^\vee$ avec V/T.

Définition 3.1.1. Soit $n \in \mathbb{N} \bigcup \{\infty\}$. Le groupe de Selmer de niveau n attaché au motif d'Artin $[\rho]$, muni d'une p-stabilisation ordinaire (V, V^+) et d'un réseau $G_{\mathbb{Q}}$-stable T, est défini comme étant

$$\mathrm{Sel}_n(\rho, \rho^+) = \mathrm{Sel}_n(T, T^+).$$

On note aussi

$$X_n(\rho, \rho^+) := \mathrm{Sel}_n(\rho, \rho^+)^\vee,$$

le groupe Selmer dual. C'est un module de type fini sur $\mathcal{O}[\Gamma_n]$ si $n \in \mathbb{N}$, et sur $\Lambda = \mathcal{O}[[\Gamma]]$ si $n = \infty$. Si $X_\infty(\rho, \rho^+)$ est de plus de torsion sur Λ, on note

$$L_p(\rho, \rho^+; T) := L_p(X_\infty(\rho, \rho^+); T)$$

sa fonction L p-adique algébrique (cf. 2.2.3).

Remarque 3.1.2. D'après le Lemme 2.3.1 et la Remarque 2.2.2, on a les descriptions alternatives suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Sel}_n(\rho, \rho^+) &= \ker\left[H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_n, D) \longrightarrow H^1(I_p, D^-) \times \textstyle\prod_{\ell \notin \Sigma, \ell \neq p} H^1(I_\ell, D)\right] \\ &= \ker\left[H^1(\mathbb{Q}_n, D) \longrightarrow H^1(I_p, D^-) \times \textstyle\prod_{\ell \neq p} H^1(I_\ell, D)\right]. \end{aligned}$$

Nous discutons à présent la dépendance du groupe de Selmer et de ses invariants en fonction du choix du réseau. Pour $T_1 \subseteq T_2$ sont deux $\mathcal{O}$-réseaux $G_{\mathbb{Q}}$-stables de V, on note $X^1_\infty(\rho,\rho^+)$ et $X^2_\infty(\rho,\rho^+)$ les groupes de Selmer duaux correspondants.

Proposition 3.1.3. *Les Λ-modules $X^1_\infty(\rho,\rho^+)$ et $X^2_\infty(\rho,\rho^+)$ ont le même rang. S'ils sont de torsion, alors leurs fonctions L p-adiques algébriques diffèrent d'une puissance de p. Si de plus ρ est résiduellement irréductible, ou si $\rho(\mathrm{Frob}_\infty) = 1$ (i.e. H est totalement réel), alors elles sont égales.*

DÉMONSTRATION. Si T_1 et T_2 sont homothétiques, alors leurs groupes de Selmer sont clairement isomorphes. On se ramène au cas où $\varpi T_1 \subseteq T_2 \subseteq T_1$ en considérant les réseaux ($G_{\mathbb{Q}}$-stables) intermédiaires $T_2 + \varpi^j T_1$ (égaux à T_1 pour $j = 0$ et à T_2 pour $j >> 0$). En particulier, le G-module $\Phi = T_2/T_1$ est tué par ϖ, et c'est même une sous-représentation de $\bar{\rho}$. On retrouve par ailleurs le fait (classique) que si ρ est résiduellement irréductible, alors tous les réseaux stables sont homothétiques (la réciproque étant aussi vraie).

Notons $D_i = V/T_i$, et $X_i = X^i_\infty(\rho,\rho^+)$ pour $i = 1,2$. Le module Φ est le noyau de la projection canonique $D_1 \twoheadrightarrow D_2$, d'où la suite exacte en cohomologie :

$$H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_\infty,\Phi) \longrightarrow H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_\infty,D_1) \longrightarrow H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_\infty,D_2) \longrightarrow H^2(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_\infty,\Phi)$$

Les Λ-modules $Y_i := H^i(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_\infty,\Phi)^\vee$ sont de torsion, car tués par ϖ. En particulier, le conoyau Y de l'application naturelle $X_2 \longrightarrow X_1$ est de torsion, comme quotient de Y_1, et donc $\mathrm{Rang}_\Lambda X_2 \geq \mathrm{Rang}_\Lambda X_1$. En considérant la paire de réseaux $\varpi T_1 \subseteq T_2$, on obtient l'autre inégalité et donc les deux modules ont même rang. Supposons maintenant que X_1 et X_2 sont de torsion, et soit F_1 et F_2 leurs fonctions L p-adiques algébriques. On vérifie d'abord que l'idéal caractéristique de Y divise une puissance de (ϖ). En effet, si P est un élément irréductible $\neq \varpi$ de Λ, alors Y/PY est pseudo-nul car tué par ϖ et P. Donc Y/PY est fini, et donc P ne divise pas $\mathrm{car}_\Lambda(Y)$ d'après le Lemme 1.2.1. Donc $\mathrm{car}_\Lambda(Y)$ divise (ϖ^K) pour $K >> 0$, et d'après le Lemme 1.1.4, F_1 divise $\varpi^K \cdot F_2$. En inversant les rôles de X_1 et X_2, on en déduit que $F_1 = \varpi^M F_2$ à une unité de Λ près, pour un certain entier $M \in \mathbb{Z}$.

Le fait que $F_1 = F_2$ (à une unité près) lorsque $\rho(\mathrm{Frob}_\infty) = 1$ est prouvé dans [**Gre14**, Prop. 2.4] en utilisant un calcul de caractéristique d'Euler-Poincaré. Il suffit de montrer que F_1 et F_2 ont la même valuation ϖ-adique, i.e. X_1 et X_2 ont même μ-invariant. L'idée de la preuve est la suivante : on montre d'abord que (le dual de Pontryagin de) l'image de l'application de restriction global-local définissant $\mathrm{Sel}_\infty(\rho,\rho^+)$ a un μ-invariant égal à 0 (cf. par exemple [**GV00**, §2]). Il suffit donc de voir que $H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_\infty,D_1)^\vee$ et $H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_\infty,D_2)^\vee$ ont le même μ-invariant. En complétant la suite exacte précédente on montre qu'il suffit de voir que Y_1 et Y_2 ont le même μ-invariant. Cela revient à prouver que $\#(Y_1)_{\Gamma^{p^n}}/\#(Y_1)_{\Gamma^{p^n}}$ est borné avec n, et en étudiant une flèche de contrôle, en appliquant le lemme de Shapiro et en utilisant un théorème de calcul de caractéristique d'Euler-Poincaré global ([**Mil86**, Chap. 1, Theorem 5.1], voir aussi [**DDT97**, Theorem 2.18]), il faut montrer que la quantité

$$\frac{\#(\Phi_n)^{\mathrm{Frob}_\infty=1}}{\#(\Phi_n)\cdot\#(\Phi_n)^{G_{\mathbb{Q}}}}$$

où $\Phi_n = \mathrm{Ind}_{\mathbb{Q}_n}^{\mathbb{Q}}\Phi$. Comme $\rho(\mathrm{Frob}_\infty)=1$ et ρ est irréductible, cette quantité est bornée (et égale à 1). □

La Proposition 3.1.3 montre que la fonction L p-adique du groupe de Selmer d'une p-stabilisation ordinaire d'un motif d'Artin est bien définie (lorsque celui-ci est de torsion) à une multiplication par une unité de $\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ près. Il reste toujours une indétermination du μ-invariant, et il est naturel de chercher comment le μ-invariant varie avec le choix du réseau, ou bien de calculer sa valeur minimale. Le début de la Section 3.2 permet de montrer aisément le lemme suivant.

Lemme 3.1.4. *Supposons $X_\infty(\rho,\rho^+)$ de torsion (cela ne dépend pas du choix du réseau $G_{\mathbb{Q}}$-stable, d'après la Proposition 3.1.3). Si $\mu=0$ pour un choix de réseau, alors $\mu=0$ pour n'importe quel choix de réseau, et en particulier, $L_p(\rho,\rho^+;T)$ ne dépendra pas du choix du réseau.*

DÉMONSTRATION. On fixe un choix de réseau, et on utilise le Lemme 3.5.1 (et ses notations) de la section suivante. $X_\infty(\rho,\rho^+)$ est pseudo-isomorphe au dual de $\mathrm{Sel}'_\infty(\rho,\rho^+)$, noté X'. Or, X' satisfait $\mu=0$ si et seulement si $X'/\varpi X'$ est fini (cf. Lemme 1.2.1). Comme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(-,D)[\varpi]=\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(-,D[\varpi])$, le dual de $X'/\varpi X'$ est :

$$\ker\left[\mathrm{Hom}_{G^{(\infty)}}(\mathfrak{X}_\infty, D[\varpi]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_v^{(\infty)}}(I_p(M_\infty/H_\infty), D^-[\varpi])\right]$$

qui ne dépend que de la représentation résiduelle $D[\varpi]$ de ρ. Comme ρ est une représentation d'Artin, cette dernière ne dépend pas du choix du réseau, et donc il en est de même de la finitude de $X'/\varpi X'$. Donc $\mu=0$ ne dépend pas du choix du réseau. D'après la Proposition 3.1.3, la fonction L p-adique de ρ ne dépend donc pas du choix du réseau. □

La suite et fin de ce chapitre est dédiée à la preuve du théorème suivant.

Théorème 3.1.5. *Supposons $d^+=1$.*

(i) Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, le $\mathcal{O}$-module $\mathrm{Sel}_n(\rho,\rho^+)$ est fini.

(ii) Le Λ-module $X_\infty(\rho,\rho^+)$ est de torsion.

(iii) *Si* $H \cap \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q}$*, alors* $L_p(\rho,\rho^+;T)$ *ne s'annule pas sur* $\mu_{p^\infty} - \{1\}$.

En posant $e(\rho,\rho^+) := \dim H^0(\mathbb{Q}_p, V^-)$*, on a de plus :*

$$L_p(\rho,\rho^+;0) \neq 0 \Longleftrightarrow e(\rho,\rho^+) = 0,$$

$$\mathrm{ord}_T L_p(\rho,\rho^+;T) \geq e(\rho,\rho^+).$$

(iv) *Supposons que* $D[\varpi]^G = \mathrm{Hom}_G(D[\varpi],\mu_p) = 0$*. Alors* $X_\infty(\rho,\rho^+)$ *n'a pas de sous-*Λ*-module fini non-nul.*

La preuve du (i) suit le Théorème 3.4.7 et repose sur les résultats des Sections 3.2 et 3.4. La preuve du (ii) et (iii) suit le Corollaire 3.5.4, et celle du (iv) est donnée après la Proposition 3.5.6.

3.2. Isomorphismes de restriction. Soit M_n/H_n la pro-p-extension abélienne maximale de H_n non-ramifiée en-dehors des places de H_n divisant p et ∞. On note $\mathfrak{X}_n$ son groupe de Galois. La suite d'inflation-restriction permet de comparer le groupe de Selmer d'un motif d'Artin à certains sous-groupes du groupe des homomorphismes de source $\mathfrak{X}_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a la suite exacte d'inflation-restriction :

$$0 \longrightarrow H^1(G^{(n)},D) \xrightarrow{\mathrm{inf}} H^1(\mathbb{Q}_n,D) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathrm{Hom}_{G^{(n)}}(G_{H_n},D) \longrightarrow H^2(G^{(n)},D)$$

L'image de $\mathrm{Sel}_n(\rho,\rho^+)$ par l'application de restriction dans $\mathrm{Hom}_{G^{(n)}}(G_{H_n},D)$ est incluse dans $\mathrm{Hom}_{G^{(n)}}(\mathfrak{X}_n,D)$, et plus précisément dans

$$\mathrm{Sel}'_n(\rho,\rho^+) := \ker\left[\mathrm{Hom}_{G^{(n)}}(\mathfrak{X}_n,D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_v^{(n)}}(I_p(M_n/H_n),D^-)\right],$$

où $G_v^{(n)}$ désigne le sous-groupe de décomposition de $G^{(n)}$ en la place v de H_n définie par ι_p.

Lemme 3.2.1. *L'application* $\mathrm{Sel}_n(\rho,\rho^+) \longrightarrow \mathrm{Sel}'_n(\rho,\rho^+)$ *induite par l'application de restriction à un noyau et un conoyau fini quelque soit* $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$*. C'est un isomorphisme si l'on suppose que* $p \nmid \#G$.

DÉMONSTRATION. On a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Sel}_n(\rho,\rho^+) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & H^1(\mathbb{Q}_n,D) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{res}"] & \mathrm{Hom}(I_p(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}_n),D^-) \times \prod_{\ell\neq p} H^1(I_\ell(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}_n),D) \arrow[d, "\alpha'"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Sel}'_n(\rho,\rho^+) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{G^{(n)}}(G_{H_n},D) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(I_p(\overline{\mathbb{Q}}/H_n),D^-) \times \prod_{\ell\neq p} H^1(I_\ell(\overline{\mathbb{Q}}/H_n),D)
\end{tikzcd}$$

Pour $i = 1,2$ on sait que $H^i(G^{(n)},D)$ est fini (car son dual de Pontryagin est de type fini $\mathcal{O}$ et tué par l'ordre de $G^{(n)}$), et il est même trivial si $p \nmid \#G^{(n)}$. Il en est donc de même pour les noyaux et conoyaux de la flèche res. Similairement, le noyau de α' est fini (car $H_n/\mathbb{Q}_n$ ramifie en un nombre fini de places), et même $\ker(\alpha') = 0$ si $p \nmid \#G$. Le lemme du serpent montre alors que α a un noyau et un conoyau fini, et que α est un isomorphisme lorsque p ne divise pas l'ordre de G. $\square$

Lemme 3.2.2. *Le conoyau de l'application* $\kappa_n : \mathrm{Hom}_{G^{(n)}}(\mathfrak{X}_n, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G^{(n)}}(\mathfrak{X}_n, D)$ *induite par la projection canonique* $V \twoheadrightarrow D$ *est fini, et même trivial si* p *ne divise pas l'ordre de* G.

DÉMONSTRATION. Notons $(\mathfrak{X}_n)_{\mathrm{div}}$ le quotient de $\mathfrak{X}_n$ par son sous-groupe de torsion. Comme $(\mathfrak{X}_n)_{\mathrm{div}}$est libre sur $\mathbb{Z}_p$, on a une suite exacte courte de $G^{(n)}$-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathfrak{X}_n, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathfrak{X}_n, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}((\mathfrak{X}_n)_{\mathrm{div}}, D) \longrightarrow 0 .$$

En prenant les $G^{(n)}$-invariants, on voit que $\mathrm{coker}(\kappa_n)$ s'injecte dans $H^1(G^{(n)}, \mathrm{Hom}(\mathfrak{X}_n, T))$ qui est fini car $\mathrm{Hom}(\mathfrak{X}_n, T)$ est de type fini, et même trivial dès que p est premier à l'ordre de $G^{(n)}$. $\square$

Considérons le diagramme commutatif suivant à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{G^{(n)}}(\mathfrak{X}_n, T) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"] & \mathrm{Hom}_{G^{(n)}}(\mathfrak{X}_n, V) \arrow[r, "\kappa_n"] \arrow[d, "\beta_n"] & \mathrm{Hom}_{G^{(n)}}(\mathfrak{X}_n, D) \arrow[d, "r_n"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{G_v^{(n)}}(I_p(M_n/H_n), T^-) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{G_v^{(n)}}(I_p(M_n/H_n), V^-) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{G_v^{(n)}}(I_p(M_n/H_n), D^-)
\end{tikzcd}$$

On a le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.3. *Si* β_n *est un isomorphisme, alors* $\mathrm{Sel}_n(\rho, \rho^+)$ *est fini.*

DÉMONSTRATION. Comme $\mathfrak{X}_n$ est compact, on a

$$\mathrm{Hom}_{G^{(n)}}(\mathfrak{X}_n, T) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \mathrm{Hom}_{G^{(n)}}(\mathfrak{X}_n, V).$$

On en déduit que, si β_n est surjective, alors $\mathrm{coker}(\alpha_n)$ est fini. Donc d'après le lemme du serpent, si β est un isomorphisme, alors $\mathrm{Sel}'_n(\rho, \rho^+) \cap \mathrm{im}(\kappa_n)$ est fini, et de même pour $\mathrm{Sel}_n(\rho, \rho^+)$ d'après les Lemmes 3.2.1 et 3.2.2. $\square$

Le morphisme $\beta_n \otimes 1 : \mathrm{Hom}_{G^{(n)}}(\mathfrak{X}_n, \overline{\mathbb{Q}}_p V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_v^{(n)}}(I_p(M_n/H_n), \overline{\mathbb{Q}}_p V^-)$ est équivariant pour l'action de $G_n/G^{(n)} \simeq \Gamma_n$, et on va le décomposer en une somme sur les caractères $\chi : \Gamma_n \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$. Considérons $V^{(n)}$ le $\overline{\mathbb{Q}}_p[G^{(n)}]$ sur lequel $\rho^{(n)}$ agit. D'après la loi de réciprocité de Frobenius, la source de $\beta \otimes 1$ est $\mathrm{Hom}_{G^{(n)}}(\mathfrak{X}_n, \overline{\mathbb{Q}}_p V) \simeq \mathrm{Hom}_{G_n}(\mathfrak{X}_n, \mathrm{Ind}_{G^{(n)}}^{G_n} V^{(n)})$. D'autre part, un calcul sur les idempotents montre que $\mathrm{Ind}_{G^{(n)}}^{G_n} V^{(n)} \simeq \bigoplus_{\chi \in \widehat{\Gamma_n}} V(\chi)$, où $V(\chi)$ est le $\overline{\mathbb{Q}}_p[G_n]$-module irréductible associé à la représentation $\rho \otimes \chi$.

Notation 3.2.4. Pour tout caractère multiplicatif χ de Γ_n, on pose $V(\chi)^+ := \overline{\mathbb{Q}}_p V^+ \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \overline{\mathbb{Q}}_p(\chi)$, et on note $\beta_{n,\chi}$ l'application de restriction

$$\beta_{n,\chi} : \mathrm{Hom}_{G_n}(\mathfrak{X}_n, V(\chi)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_{n,v}}(I_p(M_n/H_n), V(\chi)^-),$$

où $G_{n,v}$ désigne le sous-groupe de décomposition de G_n en la place v de H_n définie par ι_p.

Remarquons que $\left(V(\chi), V(\chi)^+\right)$ définit une p-stabilisation ordinaire car χ est pair, et qu'on a donc $\dim V(\chi)^+ = d^+ = \dim V(\chi)^{\mathrm{Frob}_\infty = 1}$.

Corollaire 3.2.5. *Si $\beta_{n,\chi}$ est un isomorphisme pour tout $\chi \in \widehat{\Gamma_n}$, alors $\mathrm{Sel}_n(\rho, \rho^+)$ est fini.*

Lorsque $d^+ = 1$, nous montrons dans la Section 3.3 que la source et le but des applications $\beta_{n,\chi}$ ont la même dimension sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$, et nous montrons dans la Section 3.4 que les $\beta_{n,\chi}$ sont injectives. Ces deux résultats reposent sur la description de la partie $\rho \otimes \chi$-isotypique de $\mathfrak{X}_n$ à l'aide de la théorie du corps de classes et du théorème de Baker-Brumer.

3.3. Théorie du corps de classes et composantes ρ-isotypiques. On fixe comme précédemment un entier $n \in \mathbb{N}$. La théorie des corps de classes permet d'étudier la structure du $\mathbb{Z}_p$-module $\mathfrak{X}_n$. On a un isomorphisme de $\mathbb{Z}_p$-algèbres

$$\mathcal{O}_{H_n} \otimes \mathbb{Z}_p \simeq \prod_{w|p} \mathcal{O}_{H_{n,w}} \tag{5}$$

donné par les plongements de H dans ses complétés p-adiques. Par analogie avec le plongement logarithmique de Minkowski (cf. Chapitre 1, Section 2.2), on a des morphismes de G_n-modules à gauche :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{H_n}^\times & \longrightarrow & \left(O_{H_n} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p\right)^\times & \xrightarrow{\lambda_p} & \overline{\mathbb{Q}}_p[G_n] \\ \epsilon & \mapsto & \epsilon \otimes 1; \quad x \otimes c & \mapsto & \sum_{g \in G_n} \log_p\left(\iota_p(g^{-1}(x)c\right).g \end{array} \tag{6}$$

et l'on appellera "plongement logarithmique p-adique" l'application λ_p.

Notation 3.3.1. Pour un entier naturel n et une place w de H_n au-dessus de p, on note :

- $U_{n,w} = \left\{x \in \mathcal{O}_{H_{n,w}}^\times \ / \ x - 1 \notin \mathcal{O}_{H_{n,w}}^\times\right\}$ le $\mathbb{Z}_p$-module des unités locales principales de $H_{n,w}$.

- $U_n := \prod_{w|p} U_{n,w}$ le produit des unités locales principales de H_n au-dessus de p.
- $E_n := O_{H_n}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ le complété p-adique (formel) des unités globales de H_n.
- $\mathcal{C}_n$ est le p-Sylow du groupe des classes d'idéaux de H_n.

On enlèvera l'indice n lorsque $n = 0$. Notons que les suites $(U_{n,w})_n$, $(U_n)_n$ et $(E_n)_n$ forment des systèmes projectifs dont les flèches de transition sont les applications de norme.

L'isomorphisme 5 identifie U_n avec un sous-$\mathbb{Z}_p$-module d'indice fini de $\left(O_{H_n} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p\right)^\times$. On note encore λ_p la composée $U_n \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p[G_n]$. Elle est de noyau fini, et envoie par ailleurs $U_{n,v}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p[G_{n,v}]$. On a en particulier un isomorphisme $\lambda_p \otimes 1 : \overline{\mathbb{Q}}_p U_n \simeq \overline{\mathbb{Q}}_p[G_n]$, et donc une décomposition en facteurs irréductibles de $\overline{\mathbb{Q}}_p[G_n]$-modules :

$$\overline{\mathbb{Q}}_p U_n \simeq \bigoplus_{\pi} V_\pi^{\dim V_\pi},$$

où (π, V_π) parcourt l'ensemble des (classes d'isomorphisme de) représentations irréductibles de G_n sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$. D'autre part, d'après le Théorème 2.2.2 (et fixant un isomorphisme $\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}_p$), on a une décomposition similaire pour E_n, donnée par

$$\overline{\mathbb{Q}}_p E_n \simeq \bigoplus_{\pi \neq 1} V_\pi^{d_\pi^+},$$

où d_π^+ est la dimension du sous-espace propre de V_π pour Frob_∞ associé à la valeur propre $+1$.

D'après la théorie des corps de classes (voir par exemple [**NSW08**, Chap X, Lemma 3.13]), on a une suite exacte de $\mathbb{Z}_p[G_n]$-modules

$$E_n \xrightarrow{\iota} U_n \xrightarrow{\mathrm{rec}} \mathfrak{X}_n \longrightarrow \mathcal{C}_n \longrightarrow 0 \tag{7}$$

où rec est l'application de réciprocité d'Artin et où ι est l'extension $\mathbb{Z}_p$-linéaire du plongement diagonal $\mathcal{O}_{H_n}^\times \hookrightarrow \left(O_{H_n} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p\right)^\times$ décrit en 6. Par ailleurs, pour toute place w de H_n divisant p, on sait que rec envoie $U_{n,w}$ isomorphiquement sur le sous-groupe d'inertie de $\mathfrak{X}_n$ en w. En particulier, $I_p(M_n/H_n)$ est l'image isomorphe de $U_{n,v}$.

L'injectivité de ι équivaut à la non-annulation d'un analogue p-adique du régulateur de H_n (cf. Section 2.3) qui a été introduit par Leopoldt. Par analogie, on a la conjecture suivante ([**Leo62**]).

Conjecture 3.3.2 (Conjecture de Leopoldt pour H_n et p)**.** *L'application ι est injective.*

Pour un corps de nombres abélien sur $\mathbb{Q}$ ou sur un corps quadratique imaginaire à la place de H_n, la conjecture de Leopoldt est une conséquence du théorème de Baker-Brumer ([**Bru67**]).

Théorème 3.3.3 (Théorème de Baker-Brumer)**.** *Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ des nombres algébriques non-nuls. Si les nombres $\log_p(\alpha_1), \cdots, \log_p(\alpha_n) \in \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors ils le sont encore sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Bien que H_n ne soit jamais abélien sur $\mathbb{Q}$, le Théorème 3.3.3 permet quand même de montrer le résultat suivant (inspiré de la preuve de [**EKW84**, Théorème 1]).

Proposition 3.3.4. *Soit π une sous-$\overline{\mathbb{Q}}_p[G_n]$-représentation irréductible de $\overline{\mathbb{Q}}_p E_n$. Alors l'image par ι de la composante π-isotypique $\left(\overline{\mathbb{Q}}_p E_n\right)^\pi$ de $\overline{\mathbb{Q}}_p E_n$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p U_n$ est non-nulle.*

DÉMONSTRATION. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathbb{Q}}\mathcal{O}_{H_n}^\times \arrow[r] & \overline{\mathbb{Q}}_p U_n \arrow[r, "\lambda_p", "\simeq"'] & \overline{\mathbb{Q}}_p[G_n] \\ \overline{\mathbb{Q}}_p E_n = \overline{\mathbb{Q}}_p \mathcal{O}_{H_n}^\times \arrow[u, phantom, "\bigcap"] \arrow[ur, "\iota"] & & \end{tikzcd}$$

où la flèche en haut à gauche est l'extension linéaire à $\overline{\mathbb{Q}}$ du plongement diagonal des unités globales dans les unités locales. D'après la description de λ_p et le théorème 3.3.3, la composée des flèches de la ligne du haut est injective. D'autre part, π descend en une $\overline{\mathbb{Q}}$-représentation que l'on note encore π. Comme l'image de $\left(\overline{\mathbb{Q}} E_n\right)^\pi$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p U_n$ est non-nulle, on voit que l'image par ι de $\left(\overline{\mathbb{Q}}_p E_n\right)^\pi$ est bien non-nulle. □

Corollaire 3.3.5. *Supposons $d^+ = 1$. Alors pour tout $\chi \in \widehat{\Gamma_n}$, les dimensions de la source et du but du morphisme $\beta_{n,\chi}$ (cf. 3.2.4) sont toutes deux égales à $d-1$.*

DÉMONSTRATION. Considérons la source $\mathrm{Hom}_{G_n}(\mathfrak{X}_n, V(\chi))$ de $\beta_{n,\chi}$. Sa dimension est égale à la multiplicité de $\rho \otimes \chi$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p \mathfrak{X}_n$ d'après le lemme de Schur. Comme $d^+_{\rho\otimes\chi} = 1$, la représentation irréductible $\rho \otimes \chi$ apparaît avec multiplicité 1 dans $\overline{\mathbb{Q}}_p E_n$. Or la restriction de ι à $\left(\overline{\mathbb{Q}}_p E_n\right)^{\rho\otimes\chi}$ est non-nulle d'après la Proposition 3.3.4. Elle est donc injective, et on a d'après 7 une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{Q}}_p E_n\right)^{\rho\otimes\chi} \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{Q}}_p U_n\right)^{\rho\otimes\chi} \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{Q}}_p \mathfrak{X}_n\right)^{\rho\otimes\chi} \longrightarrow 0$$

Ainsi, la multiplicité de $\rho \otimes \chi$ dans $\left(\overline{\mathbb{Q}}_p \mathfrak{X}_n\right)^{\rho\otimes\chi}$ est bien $d-1$.

Calculons la dimension du but $\mathrm{Hom}_{G_{n,v}}(I_p(M_n/H_n), V(\chi)^-)$ de $\beta_{n,\chi}$. L'application de réciprocité d'Artin envoie isomorphiquement $U_{n,v} \subseteq U_n$ sur $I_p(M_n/H_n) \subseteq \mathfrak{X}_n$. D'autre part, le plongement logarithmique p-adique λ_p identifie $\overline{\mathbb{Q}}_p U_{n,v}$ avec la représentation régulière $\overline{\mathbb{Q}}_p[G_{n,v}]$ de $G_{n,v}$. Ainsi, on est amenés à montrer que la dimension de $\mathrm{Hom}_{G_{n,v}}(\overline{\mathbb{Q}}_p[G_{n,v}], V(\chi)^-) \simeq V(\chi)^-$ est $d-1$, ce qui est clair. □

3.4. Finitude des groupes de Selmer. On montre à présent que l'application $\beta_{n,\chi}$ (cf. Notation 3.2.4) est injective grâce à une nouvelle application du théorème de Baker-Brumer (cf. Théorème 3.3.3). Grâce à l'application de réciprocité d'Artin (cf. 7 dans la Section 3.3), le noyau de $\beta_{n,\chi}$ est égal à

$$\ker \beta_{n,\chi} = \ker \left[\mathrm{Hom}_{G_n}(\mathfrak{X}_n, V(\chi)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{G_n}(U_n, V(\chi)) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{G_{n,v}}(U_{n,v}, V(\chi)^-)\right] \tag{8}$$

Les résultats de ce paragraphe s'inspirent des idées de [**BD16**, §3 et §4]. Le $\overline{\mathbb{Q}}_p$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{G_n}(U_n, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ est muni d'une action à gauche de G_n donnée par $(g.f)(x \otimes c) = f(g^{-1}(x) \otimes c)$, pour $g \in G_n$ et $x \otimes c \in U_n$. On a un isomorphisme G_n-équivariant

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{Q}}_p[G_n] & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(U_n, \overline{\mathbb{Q}}_p) \\ g & \mapsto & \left(x \otimes c \mapsto \log_p\left(\iota_p(g^{-1}(x))c\right)\right) \end{array} \right. \tag{9}$$

Lemme 3.4.1. *Soit $f \in \mathrm{Hom}_{G_n}(U_n, V(\chi))$. Alors f s'écrit sous la forme*

$$f(x \otimes c) = \sum_{g \in G_n} \log_p\left(\iota_p(g^{-1}(x))c\right)\left(\rho \otimes \chi\right)(g)(\vec{v}) = \lambda_p(x \otimes c) \cdot \vec{v}$$

pour un unique vecteur $\vec{v} \in V(\chi)$, et la restriction à $U_{n,v}$ est donnée par

$$f(u) = \sum_{g \in G_{n,v}} \log_p\left(g^{-1}(u)\right)\left(\rho \otimes \chi\right)(g)(\vec{v}) = \lambda_p(u) \cdot \vec{v}$$

De plus, $f(U_{n,v}) \subseteq V(\chi)^+$ si et seulement si $\vec{v} \in V(\chi)^+$.

Démonstration. On a $\mathrm{Hom}_{G_n}(U_n, V(\chi)) = \left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(U_n, \overline{\mathbb{Q}}_p) \otimes V(\chi)\right)^{G_n}$, donc d'après l'isomorphisme 9 il existe des vecteurs $\vec{v}_g \in V(\chi)$ tels que

$$f(x \otimes c) = \sum_{g \in G_n} \log_p\left(\iota_p(g^{-1}(x))c\right)\vec{v}_g.$$

En utilisant la G_n-invariance, on a facilement $\vec{v}_g = \left(\rho \otimes \chi\right)(g)(\vec{v_1})$. On a donc bien $f(x \otimes c) = \lambda_p(x \otimes c) \cdot \vec{v}$ avec $\vec{v} = \vec{v_1}$. L'unicité de $\vec{v}$ est claire, car l'image de λ_p engendre $\overline{\mathbb{Q}}_p[G_n]$. La description de f sur $U_{n,v}$ se déduit de celle de λ_p. Enfin, comme $\lambda_p(\overline{\mathbb{Q}}_p U_{n,v}) = \overline{\mathbb{Q}}_p[G_{n,v}]$, on a aussi $f(\overline{\mathbb{Q}}_p U_{n,v}) = \overline{\mathbb{Q}}_p[G_{n,v}] \cdot \vec{v}$. Or, $V(\chi)^+$ est $G_{n,v}$-stable, donc $f(U_{n,v}) \subseteq V(\chi)^+$ si et seulement si $\vec{v} \in V(\chi)^+$. □

Définition 3.4.2. On définit $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(U_n, \overline{\mathbb{Q}}_p)_{\overline{\mathbb{Q}}}$ comme étant le sous-$\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(U_n, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ engendré par les éléments $\log_p(\iota_p \circ g^{-1} \otimes 1)$ quand g décrit G_n, c'est-à-dire l'image de $\overline{\mathbb{Q}}[G_n]$ via l'isomorphisme décrit en 9.

Définition 3.4.3. On définit $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(\mathfrak{X}_n, \overline{\mathbb{Q}}_p)_{\overline{\mathbb{Q}}}$ comme étant l'intersection de l'image de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(\mathfrak{X}_n, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ avec $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(U_n, \overline{\mathbb{Q}}_p)_{\overline{\mathbb{Q}}}$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(U_n, \overline{\mathbb{Q}}_p)$.

On peut déterminer la structure de $\overline{\mathbb{Q}}[G_n]$-module de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(\mathfrak{X}_n, \overline{\mathbb{Q}}_p)_{\overline{\mathbb{Q}}}$ à l'aide du théorème de Baker-Brumer :

Théorème 3.4.4 ([BD16], Theorem 3.5)**.** *On a la décomposition en $\overline{\mathbb{Q}}[G_n]$-modules irréductibles suivante :*

$$\mathrm{Hom}_{ct}(\mathfrak{X}_n, \overline{\mathbb{Q}}_p)_{\overline{\mathbb{Q}}} \simeq \bigoplus_{\pi=1 \text{ ou } \pi^{\mathrm{Frob}_\infty=1}=0} V_\pi^{\dim \pi}$$

où la somme est prise sur toutes les $\overline{\mathbb{Q}}$-représentations irréductibles π de G_n avec π triviale ou bien telle que la conjugaison complexe $\mathrm{Frob}_\infty \in G_n$ *ne fixe aucun vecteur non-nul de V_π.*

Soit $W \subseteq V(\chi)$ une $\overline{\mathbb{Q}}$-structure de $V(\chi)$. On a le corollaire immédiat suivant.

Corollaire 3.4.5. *Si $d^+ = 1$, alors*

$$\left(\mathrm{Hom}_{ct}(\mathfrak{X}_n, \overline{\mathbb{Q}}_p)_{\overline{\mathbb{Q}}} \otimes W\right)^{G_n} = 0.$$

Proposition 3.4.6. *Supposons $d^+ = 1$. Alors $\beta_{n,\chi}$ est injective.*

Démonstration. Par hypothèse, $V(\chi)$ est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On fixe une $\overline{\mathbb{Q}}$-droite $W^+ \subseteq V(\chi)^+$, et on note W le sous-$\overline{\mathbb{Q}}[G_n]$-module de $V(\chi)$ engendré par W^+. En paticulier, W est une $\overline{\mathbb{Q}}$-structure de $V(\chi)$.

Considérons $f \in \ker \beta_{n,\chi}$. C'est un morphisme de U_n dans $V(\chi)$ qui envoie $U_{n,v}$ dans $V(\chi)^+$, donc d'après le Lemme 3.4.1, il existe un vecteur $\vec{v} \in V(\chi)^+$ tel que

$$f(x \otimes c) = \sum_{g \in G_n} \log_p\left(\iota_p(g^{-1}(x))c\right)\left(\rho \otimes \chi\right)(g)(\vec{v})$$

pour tout $x \otimes c \in U_n$. Comme $V(\chi)$ est de dimension 1, quitte à normaliser f on peut supposer que $\vec{v} \in W^+$. On en déduit que $f \in \left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(\mathfrak{X}_n, \overline{\mathbb{Q}}_p)_{\overline{\mathbb{Q}}} \otimes W\right)^{G_n}$, et donc $f = 0$ d'après le corollaire 3.4.5. □

On a achevé de démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.4.7 (=Théorème 3.1.5 (i))**.** *Supposons $d^+ = 1$. Alors $\mathrm{Sel}_n(\rho,\rho^+)$ est fini pour tout entier n.*

Démonstration. D'après le Corollaire 3.2.5, il suffit de montrer que $\beta_{n,\chi}$ est un isomorphisme pour tout n et tout $\chi \in \widehat{\Gamma_n}$. Cela résulte immédiatement de la combinaison de la Proposition 3.4.6 et du Corollaire 3.3.5. □

3.5. Structure du groupe de Selmer et phénomène des zéros triviaux. On supposera dorénavant que $d^+ = 1$. On montre dans cette section que $X_\infty(\rho,\rho^+)$ est de torsion sur $\Lambda = \mathcal{O}[[\Gamma]]$ en calculant le $\mathcal{O}$-rang de ses co-invariants pour l'action du sous-groupe Γ^{p^n} de Γ. On mettra aussi en évidence l'existence d'un phénomène des zéros triviaux, et nous montrerons que $X_\infty(\rho,\rho^+)$ n'a pas de sous-modules pseudo-nuls non-triviaux sous une faible hypothèse.

Pour tout entier naturel n, le dual de Pontryagin de $X_\infty(\rho,\rho^+)_{\Gamma^{p^n}}$ s'identifie au $\mathcal{O}[[\Gamma_n]]$-module $\mathrm{Sel}_\infty(\rho,\rho^+)^{\Gamma^{p^n}}$ que l'on va étudier. Rappelons que $H \cap \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q}_{n_0}$, donc le groupe de Galois $\Gamma' := \mathrm{Gal}(H_\infty/H)$ s'identifie au sous-groupe $\Gamma^{p^{n_0}}$ de Γ par restriction des automorphismes.

Soit $n \geq n_0$, et soit $m = n - n_0$. L'application de restriction $H^1(\mathbb{Q}_\infty, D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G^{(\infty)}}(G_{H_\infty}, D)$ est équivariante pour l'action de $\Gamma^{p^n} \simeq \Gamma'^{p^m}$, et son noyau et conoyau sont finis. Comme Γ est cyclique, on montre facilement que $H^1(\mathbb{Q}_\infty, D)^{\Gamma^{p^n}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G^{(\infty)}}(G_{H_\infty}, D)^{\Gamma'^{p^m}}$ a aussi un noyau et conoyau finis. Un argument similaire à celui de la preuve du Lemme 3.2.1 montre que ceci est encore vrai pour la restriction aux groupes de Selmer. On en déduit le lemme suivant :

Lemme 3.5.1. *L'application naturelle de restriction*

$$\mathrm{Sel}_\infty(\rho,\rho^+)^{\Gamma^{p^n}} \longrightarrow \mathrm{Sel}'_\infty(\rho,\rho^+)^{\Gamma'^{p^m}}$$

a un noyau et conoyau finis pour tout $m = n - n_0 \geq 0$. C'est même un isomorphisme si p ne divise pas $[H : \mathbb{Q}]$.

D'après le Lemme 3.5.1, on est amenés à étudier les invariants de $\mathrm{Sel}'_\infty(\rho,\rho^+)$. Rappelons que l'on a par définition

$$\mathrm{Sel}'_m(\rho,\rho^+) = \ker\left[\ \mathrm{Hom}_{G^{(m)}}(\mathfrak{X}_m, D) \xrightarrow{r_m} \mathrm{Hom}_{G_v^{(m)}}(I_p(M_m/H_m), D^-)\ \right]$$

Nous étudions le noyau et conoyau des *applications de contrôle*,

$$\mathrm{Sel}'_m(\rho,\rho^+) \longrightarrow \mathrm{Sel}'_\infty(\rho,\rho^+)^{\Gamma'^{p^m}}$$

qui sont induites par l'application de restriction sur les groupes de Galois

$$\mathfrak{X}_\infty = \mathrm{Gal}(M_\infty/H_\infty) \longrightarrow \mathfrak{X}_m = \mathrm{Gal}(M_m/H_m)$$

Lemme 3.5.2. *On a un diagramme commutatif de $\mathbb{Z}_p[G_m]$-modules à lignes exactes :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\mathfrak{X}_\infty)_{\Gamma'^{p^m}} \arrow[r, "res"] \arrow[d, equal] & \mathfrak{X}_m \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Gal}(H_\infty/H_m) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_p(M_m/H_\infty) \arrow[r] & I_p(M_m/H_m) \arrow[r] & I_p(H_\infty/H_m) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. On a clairement $M_m \supseteq H_\infty$, et donc on a une tour d'extensions $M_\infty/M_m/H_\infty/H_m$. L'action de Γ'^{p^m} sur $\mathfrak{X}_\infty = \mathrm{Gal}(M_\infty/H_\infty)$ est donnée par la conjugaison, donc on peut écrire $(\mathfrak{X}_\infty)_{\Gamma'^{p^m}} = \mathrm{Gal}(K/H_\infty)$, où K/H_∞ est la sous-extension maximale de M_∞/H_∞ telle que K soit abélien sur H_m. Il suffit de prouver que $K = M_m$, ce que l'on montre par double inclusion. On a d'une part $K \subseteq M_m$, par maximalité de M_m/H_m car l'extension K/H_m est abélienne et est non-ramifiée en dehors de p (car K/H_∞ et H_∞/H_m le sont). On a d'autre part $M_m \subseteq K$, par maximalité de K car M_m/H_m est abélienne et M_m/H_∞ est une sous-extension de M_∞/H_∞ □

En appliquant le foncteur contravariant $\mathrm{Hom}_{G^{(m)}}(-,D)$ à la ligne du haut du diagramme commutatif du Lemme 3.5.2, on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G^{(m)}}(\mathrm{Gal}(H_\infty/H_m),D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G^{(m)}}(\mathfrak{X}_m,D) \xrightarrow{s_m} \mathrm{Hom}_{G^{(m)}}(\mathfrak{X}_\infty,D)^{\Gamma'^{p^m}},$$

et l'application s_m a conoyau fini. Notons aussi que $G^{(m)} = G^{(\infty)}$ dès que $m \geq n_0$, ce que l'on suppose dans la suite. On peut insérer s_m dans un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{G^{(m)}}(\mathrm{Gal}(H_\infty/H_m),D) \arrow[r] \arrow[d, "t_m"] & \mathrm{Hom}_{G^{(m)}}(\mathfrak{X}_m,D) \arrow[r, "s_m"] \arrow[d, "r_m"] & \mathrm{Hom}_{G^{(\infty)}}(\mathfrak{X}_\infty,D)^{\Gamma'^{p^m}} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{G_v^{(m)}}(I_p(H_\infty/H_m),D^-) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{G_v^{(m)}}(I_p(M_m/H_m),D^-) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{G_v^{(\infty)}}(I_p(M_m/H_\infty),D^-)
\end{tikzcd}$$

Le lemme du serpent donne ainsi une suite exacte :

$$\mathrm{Sel}'_m(\rho,\rho^+) \longrightarrow \mathrm{Sel}'_\infty(\rho,\rho^+)^{\Gamma'^{p^m}} \cap \mathrm{im}(s_m) \longrightarrow \mathrm{coker}(t_m) \longrightarrow \mathrm{coker}(r_m) \tag{10}$$

Proposition 3.5.3. *Supposons $n \geq 2n_0$. Le $\mathcal{O}$-rang de $X_\infty(\rho,\rho^+)_{\Gamma^{p^n}}$ est égal à*

$$e(\rho,\rho^+) := \dim H^0(\mathbb{Q}_{\infty,v},V^-) - \dim H^0(\mathbb{Q}_\infty,V)$$

DÉMONSTRATION. Fixons $n \geq 2n_0$ et posons comme précédemment $m = n - n_0$. D'après le lemme 3.5.1, le $\mathcal{O}$-rang de $X_\infty(\rho,\rho^+)_{\Gamma^{p^n}}$ est égal au $\mathcal{O}$-corang de $\mathrm{Sel}'_\infty(\rho,\rho^+)^{\Gamma'^{p^m}}$. D'après la suite exacte 10, il est égal au $\mathcal{O}$-corang de $\mathrm{coker}(t_m)$, car le conoyau de s_m fini, ainsi que $\mathrm{Sel}'_m(\rho,\rho^+) = \ker(r_m)$ et $\mathrm{coker}(r_m)$. Cela découle en effet du Théorème 3.4.7 et d'une adaptation du Corollaire 3.3.5 montrant que la source et le but de r_m ont même corang.

Il reste à montrer que le corang de $\mathrm{coker}(t_m)$ est $e(\rho,\rho^+)$. Le noyau de t_m est fini car il s'injecte dans $\mathrm{Sel}'_m(\rho,\rho^+)$. Une autre preuve plus directe, utilisant le fait que ρ est irréductible et que $d^+ = 1$, consiste en calculer explicitement $\ker(t_m)$. Le corang recherché est donc égal à la différence des corangs du but et de la source de t_m qui est exactement égal à $e(\rho,\rho^+)$. □

Corollaire 3.5.4 (=Théorème 3.1.5 (ii) et (iii))**.** *Le Λ-module $X_\infty(\rho,\rho^+)$ est de torsion. Si $H \cap \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q}$, alors la fonction L p-adique algébrique $L_p(\rho,\rho^+;T) \in \Lambda$ de $X_\infty(\rho,\rho^+)$ ne s'annule pas sur $\mu_{p^\infty} - \{1\}$. On a de plus $L_p(\rho,\rho^+;0) \neq 0$ si et seulement si $e(\rho,\rho^+) = 0$, et son ordre d'annulation en $T = 0$ est minoré par $e(\rho,\rho^+)$:*

$$\mathrm{ord}_T L_p(\rho,\rho^+;T) \geq e(\rho,\rho^+).$$

DÉMONSTRATION. Notons $\omega_n(T) = (1+T)^{p^n} - 1$. Avec l'identification $\gamma = 1+T$, le groupe Γ^{p^n} est généré par $\omega_n(T)+1$. Ainsi, pour un Λ-module Z, on a $Z_{\Gamma^{p^n}} = Z/\omega_n(T)Z$.

D'après la proposition 3.5.3, le $\mathcal{O}$-rang de $X_\infty(\rho,\rho^+)_{\Gamma^{p^n}}$ est égal à $e(\rho,\rho^+)$ pour tout entier $n \geq n_0$. Soit r le rang de $X_\infty(\rho,\rho^+)$ sur Λ. D'après le théorème de structure des Λ-modules de type fini (cf. Théorème 1.1.8), il existe des polynômes $P_i(T)$ de Λ, des entiers $\mu_j > 0$ et un pseudo-isomorphisme

$$\phi : X_\infty(\rho,\rho^+) \longrightarrow \Lambda^r \bigoplus \left(\bigoplus_i \Lambda/(P_i)\right) \bigoplus \left(\bigoplus_j \Lambda/(p^{\mu_j})\right)$$

Soit Y l'image de ϕ, et soient C son noyau et D son conoyau. On a deux suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow X_\infty(\rho,\rho^+) \longrightarrow Y \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow \Lambda^r \oplus (\oplus_i \Lambda/(P_i)) \oplus \left(\oplus_j \Lambda/(p^{\mu_j})\right) \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

La multiplication par $\omega_n(T)$ induit deux suites exactes longues $\mathcal{O}$-modules de type fini. Comme C et D sont finis, on en déduit les deux égalités :

$$\mathrm{Rang}_{\mathcal{O}}\, X_\infty(\rho,\rho^+)_{\Gamma^{p^n}} = \mathrm{Rang}_{\mathcal{O}}\, Y_{\Gamma^{p^n}},$$

$$\mathrm{Rang}_{\mathcal{O}}\, Y_{\Gamma^{p^n}} = \mathrm{Rang}_{\mathcal{O}} \left[(\mathcal{O}[T]/\omega_n(T))^r \bigoplus \left(\bigoplus_i \mathcal{O}[T]/(P_i(T),\omega_n(T))\right) \bigoplus \left(\bigoplus_j \Lambda/(p^{\mu_j},\omega_n(T))\right)\right]$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq n_0$, on a :

$$(\mathcal{E}_n): \qquad e(\rho,\rho^+) = rp^n + \sum_i \deg_T \mathrm{pgcd}(P_i(T), \omega_n(T)).$$

En particulier, on obtient $r = 0$, c'est-à-dire $X_\infty(f_\alpha)$ est de torsion sur Λ. Sa fonction L p-adique algébrique $L_p(\rho,\rho^+;T)$ peut être choisie comme étant égale à $p^{\sum_j \mu_j} \prod_i P_i(T)$.

Supposons maintenant de plus que $H \cap \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q}$, c'est-à-dire $n_0 = 0$. Comme $\omega_0(T) = T$, l'équation $(\mathcal{E}_0)$ montre que $L_p(\rho,\rho^+;0) \neq 0$ si et seulement si $e(\rho,\rho^+) = 0$, et en outre que $L_p(\rho,\rho^+;T)$ s'annule en 0 à un ordre $\geq e(\rho,\rho^+)$. Enfin, pour $n \geq 0$ quelconque, en retranchant $(\mathcal{E}_0)$ à $(\mathcal{E}_n)$ on voit que $L_p(\rho,\rho^+;T)$ est premier au polynôme $\frac{\omega_n(T)}{T}$, dont les racines sont exactement les $\zeta - 1$, où ζ parcourt $\mu_{p^n} - \{1\}$. Autrement dit, $L_p(\rho,\rho^+;\zeta-1) \neq 0$ pour tout $\zeta \in \mu_{p^\infty} - \{1\}$. □

Nous proposons une conjecture de type "zéros triviaux", imitant du côté algébrique les phénomènes prédits du côté analytique par le Théorème de Ferrero-Greenberg [**FG79**], la Conjecture 3.2.1 de Gross, ou la conjecture des zéros triviaux de [**Ben14**].

Conjecture 3.5.5. *Avec les notations du Corollaire 3.5.4, si $H \cap \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q}$, alors on a*

$$\mathrm{ord}_T L_p(\rho,\rho^+;T) = e(\rho,\rho^+).$$

Nous achevons la preuve du Théorème 3.1.5 en prouvant l'absence de sous-modules pseudo-nuls non-nuls de $X_\infty(\rho,\rho^+)$. Il s'agit d'une application du critère de la Proposition 1.1.7, rendue possible car on a démontré que $X_\infty(\rho,\rho^+)$ était de torsion.

Proposition 3.5.6. *Supposons que $D[\varpi]^G = \mathrm{Hom}_G(D[\varpi],\mu_p) = 0$. Alors le Λ-module $X_\infty(\rho,\rho^+)$ n'a pas de sous-modules pseudo-nuls non-triviaux.*

Démonstration. On va vérifier les hypothèses de la proposition 2.5.1, avec $\mathcal{A} = \mathcal{O}$ et $\mathcal{T} = T$. Le point (a) a été montré dans le Corollaire 3.5.4. Montrons que $H^2(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_\infty, D)$ est de cotorsion sur Λ. D'après la suite spectrale de Hochschild-Serre (cf. [**NSW08**, Chap. 2, §4, Theorem 1]), le noyau de l'application de restriction $H^2(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_\infty, D) \longrightarrow H^2(\mathbb{Q}_\Sigma/H_\infty, D)$ est contrôlé par la cohomologie du groupe fini $G^{(\infty)}$ à valeurs un $\mathcal{O}$-module co-finiment engendré. Ce noyau est donc fini, et il suffit de montrer que $H^2(\mathbb{Q}_\Sigma/H_\infty, D)$ est de cotorsion. Comme $\mathbb{Q}_\Sigma = H_\Sigma$, on peut utiliser la formule de caractéristique d'Euler-Poincaré prouvée dans [**Gre06**, Proposition 4.1] et donnant (après application du lemme de Shapiro) :

$$\mathrm{Corang}_\Lambda\left(H^2(H_\Sigma/H_\infty, D)\right) = \mathrm{Corang}_\Lambda\left(H^1(H_\Sigma/H_\infty, D)\right) - \mathrm{Corang}_\Lambda\left(H^0(H_\Sigma/H_\infty, D)\right) - d \cdot r_2$$

où r_2 est le nombre de places complexes de H. Le Λ-corang du H^0 est 0, car il est égal à $D \simeq (L/\mathcal{O})^d$, qui est de co-torsion sur Λ. Il faut donc montrer que le corang du H^1 est égal à $d \cdot r_2$. Comme $\mathbb{Q}_\Sigma$ est aussi la plus grande extension de H_∞ non-ramifiée en dehors de

Σ, et que l'action de G_{H_∞} sur D est triviale, on a $H^1(\mathbb{Q}_\Sigma/H_\infty, D) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(\mathfrak{X}_{\infty,\Sigma}/H_\infty), D)$ où $\mathfrak{X}_{\infty,\Sigma}$ est le groupe de Galois de la plus grande pro-p extension abélienne de H_∞ non-ramifiée en dehors de Σ. Or, $\mathfrak{X}_{\infty,\Sigma}$ a le même rang sur Λ que $\mathfrak{X}_\infty$, qui est égal à r_2 d'après [**Iwa73**, Theorem 17]. Ainsi, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(\mathfrak{X}_{\infty,\Sigma}, D)^\vee \simeq \mathfrak{X}_{\infty,\Sigma}^{\oplus d}$ a pour rang $d \cdot r_2$, ce qu'on voulait montrer. L'hypothèse (b) est donc vérifiée. Les hypothèses (c) et (d) font partie de la définition de la p-stabilisation ordinaire. Enfin, l'hypothèse (e) est vérifiée d'après nos hypothèses sur la représentation résiduelle de ρ. On peut conclure que $X_\infty(\rho, \rho^+)$ n'a pas de sous-modules pseudo-nuls non-nuls. $\square$

Chapitre III

Fonction L p-adique d'une forme de poids 1 et Conjecture Principale

Nous appliquons les résultats du chapitre précédent aux représentations d'Artin correspondant aux formes modulaires classiques de poids 1 de niveau premier à p et p-régulières. Sous de faibles hypothèses, on calcule aussi le terme constant de sa fonction L p-adique algébrique en termes du logarithme p-adique d'une unité globale. On construit ensuite une fonction L p-adique analytique par déformation de ρ. Enfin, on formule une Conjecture Principale, dont on démontre une divisibilité par un argument de passage à la limite.

1. Groupe de Selmer d'une forme modulaire classique de poids 1

1.1. Cadre et notations. Nous reprenons dans ce chapitre le cadre des formes modulaires de poids 1 du Chapitre 1, Section 5 et celui des représentations d'Artin du Chapitre 2, Section 3. Soit ρ une représentation d'Artin de dimension 2 et irréductible sur $\mathbb{Q}$, de conducteur N et à coefficients dans un corps de nombres E. On suppose que ρ est impaire, et on note f la forme modulaire parabolique primitive de poids 1 associée à ρ par le Théorème 5.1.2. f est de niveau N, a pour caractère $\epsilon = \det\rho$, et son q-développement $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n q^n \in E[[q]]$ à la pointe ∞ satisfait

$$\operatorname{Tr}\rho(\mathrm{Frob}_\ell) = a_\ell$$

pour tout nombre premier ℓ ne divisant pas N. Soient α et β les racines du p-ième polynôme de Hecke $X^2 - a_p X + \epsilon(p) \in E[X]$ de f. Nous supposerons dans toute la suite que :

(rég) f est régulière en p, i.e. $\alpha \neq \beta$,

(nr) ρ est non-ramifiée en p, i.e. $p \nmid N$,

(hyp) p ne divise par l'ordre de l'image de ρ, i.e. $p \nmid [H:\mathbb{Q}]$,

où $H \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ est le corps de nombres découpé par ρ. Cela entraîne que :

- ρ est (via le plongement ι_p) à valeurs dans l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ d'une extension *non-ramifiée* L de $\mathbb{Q}_p$,

- la réduction modulo p réalise un isomorphisme $\rho \simeq \bar{\rho}$, donc ρ est résiduellement irréductible,
- et l'idempotent $e_\rho \in L[G]$ associé à ρ est à coefficients dans $\mathcal{O}$.

Comme H et $\mathbb{Q}_\infty$ sont linéairement disjoints, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(H_\infty/H)$ s'identifie à Γ, et l'algèbre de groupe complétée $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(H_\infty/H)]]$ à l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda = \mathcal{O}[[T]]$. En outre, pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on a

$$G_n \simeq G \times \Gamma_n$$

où $G_n = \mathrm{Gal}(H_n/\mathbb{Q})$ et $G = \mathrm{Gal}(H/\mathbb{Q})$.

Le complété $H_v \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_p$ de H en v est une extension non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$. On choisira L assez grand pour que $H_v \subseteq L$ et $\mu_{\#G}(\overline{\mathbb{Q}}_p) \subseteq L$. Les valeurs propres $\alpha, \beta \in \mu_{\#G}(L)$ de $\rho(\mathrm{Frob}_v)$ sont distinctes, donc V admet exactement deux droites G_v-stables et supplémentaires $V^{\mathrm{Frob}_v=\alpha}$ et $V^{\mathrm{Frob}_v=\beta}$, sur lesquelles Frob_v agit respectivement par multiplication par α et β. Ainsi, le choix d'une p-stabilisation ordinaire de ρ revient au choix d'une de ces deux droites stables, c'est-à-dire au choix d'une p-stabilisation de f.

Définition 1.1.1. Soit f_α la p-stabilisation de f de valeur propre α pour U_p. Le groupe de Selmer de niveau $n \in \mathbb{N} \bigcup \{\infty\}$ attaché à f_α est le $\mathcal{O}$-module

$$\mathrm{Sel}_n(f_\alpha) := \mathrm{Sel}_n(\rho, \rho^+),$$

où l'on a choisi la p-stabilisation ordinaire $V^+ \subseteq V$ de ρ comme étant égale à la droite sur laquelle Frob_v agit par multiplication par β. On note aussi

$$X_n(f_\alpha) := \mathrm{Sel}_n(f_\alpha)^\vee$$

le groupe de Selmer dual de f_α.

On identifiera la droite sur laquelle Frob_v agit par multiplication par α avec son image V^- par la projection canonique $V \twoheadrightarrow V^-$. On a donc $V = V^+ \bigoplus V^-$, mais aussi $T = T^+ \bigoplus T^-$ et $D = D^+ \bigoplus D^-$. Dans une base adaptée à cette décomposition, on a $\rho(\mathrm{Frob}_v) \sim \begin{pmatrix} \beta & \\ & \alpha \end{pmatrix}$. Récapitulons les propriétés de $\mathrm{Sel}_n(f_\alpha)$ démontrées dans le chapitre précédent.

Proposition 1.1.2. *(1) La définition de* $\mathrm{Sel}_n(f_\alpha)$ *ne dépend pas du choix du réseau* $G_\mathbb{Q}$*-stable* T *de* V.

(2) $\mathrm{Sel}_n(f_\alpha)$ *s'identifie avec le noyau de l'application de restriction*

$$\mathrm{Hom}_G(\mathfrak{X}_n, D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_v}(I_p(M_n/H_n), D^-)$$

où $\mathfrak{X}_n$ *est le groupe de Galois de la pro-*p *extension maximale abélienne* M_n *de* H_n *qui est non-ramifiée en-dehors des places divisant* p.

(3) *Si n est fini, alors* $\mathrm{Sel}_n(f_\alpha)$ *est fini.*

(4) *Le Λ-module $X_\infty(f_\alpha)$ est de torsion. Il n'a de plus aucun sous-module fini différent de* $\{0\}$.

(5) *La fonction L p-adique algébrique $L_p(f_\alpha;T)$ de $X_\infty(f_\alpha)$ satisfait $L_p(f_\alpha;\zeta-1)\neq 0$ pour tout $\zeta\in\mu_{p^\infty}-\{1\}$, ainsi que*

$$L_p(f_\alpha;0)=0 \Longleftrightarrow \alpha=1$$

DÉMONSTRATION. Comme ρ est résiduellement irréductible, il n'y a qu'une classe d'homothétie de réseaux $G_{\mathbb{Q}}$-stables de V, donc $\mathrm{Sel}_n(f_\alpha)$ ne dépend pas du choix de T. La deuxième assertion est vraie car $p\nmid \# G$ et on peut appliquer le Lemme 3.2.1. Le reste résulte d'une application du Théorème 3.1.5. □

Dans la Section 1.2, nous donnons une description plus détaillée de $\mathrm{Sel}_n(f_\alpha)$, et nous obtenons en particulier une formule pour $L_p(f_\alpha;0)$ lorsque $\alpha\neq 1$, que nous décrivons à présent. Comme $\mathcal{O}$ contient $(\#G)^{-1}$ et les racines de l'unité d'ordre $\#G$, l'algèbre $\mathcal{O}[G]$ est semi-simple et admet une décomposition

$$\mathcal{O}[G]=\bigoplus_\pi e_\pi\mathcal{O}[G]\simeq\bigoplus_\pi T_\pi^{\dim\pi}$$

où (π,V_π) parcourt les représentations irréductibles de G et où T_π est un réseau G-stable de V_π (unique à homothétie près). Pour tout $\mathcal{O}[G]$-module M, on a ainsi une décomposition en somme directe $M=\bigoplus_\pi e_\pi M$. On notera $M^\rho=e_\rho M$ la composante ρ-isotypique d'un $\mathcal{O}[G]$-module M, et plus généralement $M^\rho=e_\rho(M\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O})$ pour un $\mathbb{Z}_p[G]$-module M.

Théorème 1.1.3 (=Corollaire 1.2.19)**.** *Supposons que $\alpha\neq 1$. Soit $\mathcal{C}$ la composante p-primaire du groupe des classes de H, et soit ϵ_ρ un générateur du $\mathcal{O}[G]$-module $E^\rho=\left(\mathcal{O}_H^\times\otimes\mathcal{O}\right)^\rho$. À multiplication par une unité p-adique près, on a*

$$L_p(f_\alpha;0)=\frac{\log_p\circ\iota_p|\epsilon_\rho|_\beta}{p}\sqrt{\#(\mathcal{C}^\rho)},$$

où $|\cdot|_\beta$ est la projection (défini dans 5.2) sur la $\mathcal{O}$-droite où Frob_v *agit par multiplication par β.*

Nous donnons un survol de la preuve, qui s'étalera sur la Section 1.2.

RÉSUMÉ DE LA PREUVE. Comme $X_\infty(f_\alpha)$ n'a pas de sous-modules finis non-nuls, $L_p(f_\alpha;0)$ est égal au cardinal du module de ses $\mathcal{O}$-invariants, et qui est lui-même égal au cardinal de $\mathrm{Sel}_0(f_\alpha)$. En utilisant la théorie des corps de classes, on décrit $\mathrm{Sel}_0(f_\alpha)$

comme extension d'un module d'ordre $\sqrt{\#(\mathcal{C}^\rho)}$ et d'un module $\mathrm{Sel}_0^\#$ qui s'insère dans la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(U,T) \longrightarrow \{f \in \mathrm{Hom}_G(U,V) \,:\, f(E) \subseteq T,\ f^-(U_v) \subseteq T^-\} \longrightarrow \mathrm{Sel}_0^\# \longrightarrow 0,$$

où U (comme dans le chapitre 2) le produit des unités p-locales principales de H et $U_v = \mathcal{O}_{H_v}^{\times,1}$, et où $f^\pm$ est la composée de f avec la projection $V \twoheadrightarrow V^\pm$.

Un élément $f \in \mathrm{Hom}_G(U,V)$ est de la forme $f(x \otimes c) = \lambda_p(x \otimes c) \cdot \vec{v}$ où λ_p est le plongement logarithmique p-adique (cf. équation 6) et $\vec{v} \in V$. Comme H_v est une extension non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, on a $\log_p(H_v^\times) = p\mathcal{O}_{H_v}$, et le Lemme 1.2.13 montrera que l'on a même $\mathcal{O} \cdot \lambda_p\left(U_v^{\mathrm{Frob}_v = \alpha}\right) = p\mathcal{O}[G_v]^{\mathrm{Frob}_v = \alpha}$. En particulier, $f^-(U_v) \subseteq T^-$ si et seulement si $p\vec{v}^- \in T^-$, et de même, $f(U) \subseteq T$ si et seulement si $p\vec{v} \in T$. Enfin, si l'on fixe une base (t^+, t^-) de $T = T^+ \bigoplus T^-$ et un isomorphisme $E^\rho \simeq T$ (donnant une base (ϵ^+, ϵ^-) de E^ρ), la Proposition 1.2.16 montrera que $f(E) \subseteq T$ si et seulement si $s^+z^+ + s^-z^- \in \mathcal{O}$, où $s^\pm = \log_p \circ \iota_p\left(\epsilon^\pm\right)$ et où (z^+, z^-) sont les coordonnées de $\vec{v}$.

On en déduit sans difficultés que $\mathrm{Sel}_0^\# \simeq \{z^+ \in L \,:\, s^+z^+ \in \mathcal{O}\}/\{z^+ \in L \,:\, pz^+ \in \mathcal{O}\}$, et donc on aura bien $\#\mathrm{Sel}_0^\# = \dfrac{\log_p \circ \iota_p\left(s^+\right)}{p} = \dfrac{\log_p \circ \iota_p |\epsilon_\rho|_\beta}{p}$ à une unité de $\mathcal{O}$ près, avec la notation de l'énoncé du théorème. □

Avant de donner les détails de la preuve du Théorème 1.1.3 dans la Section 1.2, nous donnons l'énoncé de la généralisation directe du théorème précédent aux représentations d'Artin de dimension supérieure. On reprend les notations de la Section 3.1.

Soit ρ une représentation d'Artin absolument irréductible de dimension d sur $\mathbb{Q}$, munie d'une p-stabilisation ordinaire $V^+ \subseteq V$. Supposons que p est premier à N, à $\#G$ et à d, et que les valeurs propres de $\rho(\mathrm{Frob}_v)$ sont distinctes. Fixons une $\mathcal{O}$-base $(t_i)_{1 \le i \le d}$ de T, un isomorphisme $E^\rho \simeq T^{d^+}$ et notons $(\epsilon_{ik})_{1 \le i \le d, 1 \le k \le d^+}$ la base de E^ρ correspondante.

Théorème 1.1.4. *Si la matrice carrée* $S = \left(\log_p \circ \iota_p(\epsilon_{ik})\right)_{1 \le i,k \le d^+} \in M_{d^+}(p\mathcal{O})$ *est inversible, et si* $H^0(\mathbb{Q}_p, V^-) = 0$, *alors* $X_\infty(\rho, \rho^+)$ *est de torsion sur* $\mathcal{O}[[T]]$, *et son terme constant est donné par*

$$L_p(\rho, \rho^+; 0) = \frac{\det(S)}{p^{d^+}} \cdot \sqrt[d]{\#(\mathcal{C}^\rho)}$$

à une unité de $\mathcal{O}$ *près.*

Remarque 1.1.5. L'élément $\det(S)$ ressemble à un régulateur p-adique et n'est défini qu'à une unité de $\mathcal{O}$ près. On a par ailleurs $\det(S) \neq 0$ si l'on croit à la conjecture de Schanuel p-adique ([**CM09**], Conjecture 3.10]).

1.2. Calcul de $\mathrm{Sel}_n(f_\alpha)$ et du terme constant de la fonction L p-adique algébrique.

1.2.1. *Groupes de Selmer auxilaires.* On conserve les notations de la section précédente. On commence par rappeler la compatibilité entre dualité de Pontryagin et l'action de G sur des $\mathcal{O}$-modules. Comme l'extension $\mathcal{O}/\mathbb{Z}_p$ est non-ramifiée, sa différente est l'idéal unité et l'application de trace induit un isomorphisme $L/\mathcal{O} \simeq \mathcal{O}^\vee$ donné par $y \mapsto \mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}_p}(\cdot y)$ (cf. 3.1), ainsi que $D \simeq V/T$. On utilisera plusieurs fois le lemme élémentaire suivant :

Lemme 1.2.2. *Soit M un $\mathcal{O}[G]$-module.*

(1) La partie ρ-isotypique M^ρ de M est (non-canoniquement) isomorphe à $\mathrm{Hom}_G(T,M)^{\oplus 2}$ en tant que $\mathcal{O}$-module.

(2) Si M est de type fini, alors on a $\mathrm{Hom}_G(T,M)^\vee \simeq \mathrm{Hom}_G(M,D)$.

DÉMONSTRATION. Montrons le point (1). Comme $\mathcal{O}[G] = \bigoplus_\pi T_\pi^{\dim \pi}$ et $e_\rho \mathcal{O}[G] = T^{\oplus 2}$, on a par orthogonalité des idempotents :

$$M^\rho = \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}[G], M) = \mathrm{Hom}_G(T^{\oplus 2}, M) = \mathrm{Hom}_G(T,M)^{\oplus 2}.$$

Montrons le point (2). Notons d'abord que $\mathrm{Hom}_\mathcal{O}(T,D) = \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}_\mathcal{O}(T,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\mathcal{O}(T,V))$ car T est libre sur $\mathcal{O}$, et donc $\mathrm{Hom}_G(T,D) = \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}_G(T,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(T,V))$ car G est d'ordre premier à p. Comme les réseaux G-stables de V sont tous L-homothétiques, $\mathrm{Hom}_G(T,D)$ s'identifie naturellement à $L/\mathcal{O}$. On a donc l'isomorphisme recherché pour $M = T$. Soit M un $\mathcal{O}[G]$-module de type fini. On peut supposer que $M = M^\rho$. On a une présentation finie $\mathcal{O}[G]^m \to \mathcal{O}[G]^n \to M \to 0$ qui, en appliquant l'idempotent e_ρ, donne la présentation

$$T^{2m} \xrightarrow{r} T^{2n} \xrightarrow{s} M \longrightarrow 0$$

de $\mathcal{O}[G]$-modules. On a $\mathrm{Hom}_G(M,D) = \ker r_*$ et $\mathrm{Hom}_G(T,M) = \mathrm{coker}\, r^*$ où $r_* : \mathrm{Hom}_G(T^{2n},D) \to \mathrm{Hom}_G(T^{2m},D)$ et $r^* : \mathrm{Hom}_G(T,T^{2m}) \to \mathrm{Hom}_G(T,T^{2n})$ sont respectivement la pré-composition et la post-composition par r. En utilisant l'isomorphisme construit précédemment et l'exactitude du foncteur de dualité, on a aisément $\mathrm{Hom}_G(T,M)^\vee = (\mathrm{coker}\, r^*)^\vee \simeq \ker r_* = \mathrm{Hom}_G(M,D)$. □

On introduit des groupes de Selmer auxiliaires pour étudier $\mathrm{Sel}_n(f_\alpha)$. À l'aide de la suite exacte 7 et grâce à la Proposition 3.3.4, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow E_n^\rho \xrightarrow{\iota} U_n^\rho \xrightarrow{\mathrm{rec}} \mathfrak{X}_n^\rho \longrightarrow \mathcal{C}_n^\rho \longrightarrow 0$$

où $E_n = \mathcal{O}_H^\times \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_p$ est le complété formel des unités de H_n, où U_n est le produit des unités locales principales de H_n, et où $\mathcal{C}_n$ est la p-partie du groupe des classes de H_n (voir la Section 3.3 où ces notations sont introduites). Comme $\mu_p \not\subseteq H_v$, les $\mathbb{Z}_p$-modules

E_n et U_n sont libres (de rang fini) pour tout n. En notant E_∞, U_∞ et $\mathcal{C}_\infty$ les limites projectives respectives pour les applications de norme, la suite exacte précédente est encore valable pour $n=\infty$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. En appliquant le foncteur contravariant (exact) $\mathrm{Hom}_G(-,D)$, on a une suite exacte courte de $\mathcal{O}[\Gamma_n]$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(\mathcal{C}_n,D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(\mathfrak{X}_n,D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(U_n/E_n,D) \longrightarrow 0$$

où l'on a abusivement noté $\mathrm{Hom}_G(U_n/E_n,D)$ à la place de $\mathrm{Hom}_G(U_n/\iota(E_n),D)$ (c'est-à-dire qu'on identifie E_n^ρ avec son image isomorphe par ι). Comme l'application de reciprocité locale envoie bijectivement le groupe d'inertie $I_v(M_n/H_n)$ sur $U_{n,v}$, on peut compléter la suite exacte précédente en un diagramme commutatif dont la ligne et la colonne centrale sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & \mathrm{Sel}_n(f_\alpha) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(\mathcal{C}_n,D) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(\mathfrak{X}_n,D) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_G(U_n/E_n,D) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \mathrm{Hom}_{G_v}(I_v(M_n/H_n),D^-) \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_{G_v}(U_{n,v},D^-) &
\end{tikzcd}$$

Définition 1.2.3. Pour tout $n\in\mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$, on définit :

$$\begin{array}{lcll}
\mathrm{Sel}_n^{\mathrm{Iw}} & := & \mathrm{Hom}_G(\mathcal{C}_n,D) & \text{resp.}\quad X_n^{\mathrm{Iw}} := \left(\mathrm{Sel}_n^{\mathrm{Iw}}\right)^\vee \\
\mathrm{Sel}_n^{\#} & := & \ker\left[\mathrm{Hom}_G(U_n/E_n,D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_v}(U_{n,v},D^-)\right] & \text{resp.}\quad X_n^{\#} := \left(\mathrm{Sel}_n^{\#}\right)^\vee
\end{array}$$

D'après le diagramme commutatif précédent, on a pour tout entier n une suite exacte courte de $\mathcal{O}[\Gamma_n]$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Sel}_n^{\mathrm{Iw}} \longrightarrow \mathrm{Sel}_n(f_\alpha) \longrightarrow \mathrm{Sel}_n^{\#} \longrightarrow 0 \tag{11}$$

Elle reste valable pour $n=\infty$ sur Λ, car le passage à la limite directe est une opération exacte sur les modules discrets. On obtient, d'après la Proposition 1.1.2 (4), trois Λ-modules qui sont de co-torsion, c'est-à-dire que leurs duaux de Pontryagin sont de torsion.

Remarque 1.2.4. La célèbre conjecture d'Iwasawa dit que le μ-invariant de $\mathcal{C}_\infty$ est nul (et H peut être remplacé par n'importe quel corps de nombres). En considérant les composantes isotypiques, cela équivaut à ce que le μ-invariant de $\mathcal{C}_\infty^\pi$ soit nul pour toute représentation irréductible π de G. D'autre part, la fonction L p-adique algébrique de $\left(\mathrm{Sel}_{\infty}^{\mathrm{Iw}}\right)^{\vee}$ est égale à $\sqrt{L_p(\mathcal{C}_{\infty}^{\rho};T)} \in \Lambda$ d'après le Lemme 1.2.2. En particulier, la "ρ-composante de la conjecture $\mu = 0$ d'Iwasawa" se déduit d'une conjecture $\mu = 0$ pour $X_{\infty}(f_{\alpha})$ (voir plus tard la Proposition 2.3.7).

1.2.5. *Traces et réseaux.* On décrit dans la suite le $\mathcal{O}[\Gamma_n]$-module $\mathrm{Sel}_n^{\sharp}$ et d'autres sous-modules de $\mathrm{Hom}_G(U_n,D)$. Comme U_n est libre sur $\mathbb{Z}_p$, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(U_n,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(U_n,V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(U_n,D) \longrightarrow 0 \tag{12}$$

Notation 1.2.6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathbb{Q}_{p,n} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_p$ le n-ième étage de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_p$ et $L_n = L \cdot \mathbb{Q}_{p,n}$, ainsi que $\mathbb{Z}_{p,n}$ et $\mathcal{O}_n$ leurs anneaux des entiers respectifs. Le choix de L non-ramifiée et contenant H_v entraîne que $L_n \supseteq H_{n,v}$ et aussi $L \cap \mathbb{Q}_{p,n} = \mathbb{Q}_p$. Pour $n = \infty$, on posera $\mathbb{Q}_{p,\infty} = \bigcup_n \mathbb{Q}_{p,n}$ et $L_{\infty} = \bigcup_n L_n$. On définit enfin sur l'extension L_{∞}/L un opérateur trace (normalisé) :

$$\mathrm{Tr}: \left\{ \begin{array}{ccc} L_{\infty} & \longrightarrow & L \\ x & \longmapsto & \frac{1}{p^n}\mathrm{Tr}_{L_n/L}(x) \quad \text{si } x \in L_n \end{array} \right.$$

L'application L-linéaire Tr est bien définie, car si $x \in L_n$ et si $m \geq n$, alors $\frac{1}{p^n}\mathrm{Tr}_{L_n/L}(x) = \frac{1}{p^m}\mathrm{Tr}_{L_m/L}(x)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application

$$(x,y) \longmapsto \mathrm{Tr}(xy)$$

est une forme L-bilinéaire sur L_n qui est symétrique et non-dégénérée. Pour R un sous-$\mathcal{O}$-module de L_n, on définit

$$R^{\perp} := \{y \in L_n \ / \ \forall x \in R,\ \mathrm{Tr}(xy) \in \mathcal{O}\}.$$

L'application $R \mapsto R^{\perp}$ est décroissante, et l'on a $(aR)^{\perp} = a^{-1}R^{\perp}$ pour tout $a \in L_n^{\times}$. Si $0 \neq R \subseteq L_n$ a une structure de $\mathcal{O}_n$-module (nécessairement libre de rang 1) alors il en est de même pour $R^{\perp}$. De même, si R est un $\mathcal{O}$-réseau de L_n (i.e. R est un sous-$\mathcal{O}$-module de rang p^n), alors $R^{\perp}$ aussi.

Notation 1.2.7. Dans toute la suite, on fixe une $\mathcal{O}$-base (t^+,t^-) de T (et donc aussi une L-base de V) adaptée à la décomposition $T = T^+ \bigoplus T^-$. On écrira systématiquement un vecteur de V dans cette base. De plus, on notera (f^+,f^-) les coordonnées relatives à cette base d'un morphisme f à valeurs dans V.

Proposition 1.2.8. *(1) Tout élément $f \in \mathrm{Hom}_G(U_n,V)$ s'écrit de manière unique dans la base (t^+,t^-) sous la forme*

$$f(x\otimes c) = \mathrm{Tr}\left(\sum_{g\in G}\log_p\left(\iota_p(g^{-1}(x))c\right)\rho(g)\begin{pmatrix}z^+\\ z^-\end{pmatrix}\right)$$

où $x\otimes c \in U_n \subseteq (O_{H_n}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)^\times$ *(cf. Section 3.3), et où* $z^+, z^- \in L_n$ *(la trace* Tr *est calculée coordonnée par coordonnée). La restriction de* f *à* $U_{n,v}$ *est donnée par*

$$f(u) = \mathrm{Tr}\left(\sum_{j=0}^{f_v-1}\left(\log_p\circ\mathrm{Frob}_v^j(u)\right)\begin{pmatrix}\beta^{-j}\cdot z^+\\ \alpha^{-j}\cdot z^-\end{pmatrix}\right)$$

pour tout $u\in U_{n,v}$*, et où* f_v *est l'ordre de* G_v*.*

(2) *L'application* Φ_n *qui, au couple* $(z^+,z^-)\in L_n^2$ *associe* f *définie comme en (1) est un* L*-isomorphisme équivariant pour l'action naturelle de* $\Gamma_n \simeq \mathrm{Gal}(L_n/L)$ *sur* L_n^2 *et sur* $\mathrm{Hom}_G(U_n,V)$*.*

DÉMONSTRATION. On a $\mathrm{Gal}(H_{n,v}/\mathbb{Q}_p) = G_v\times\Gamma_n$, ainsi qu'un isomorphisme $G_v\times\Gamma_n$-équivariant

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{Q}}_p[G_v\times\Gamma_n] &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(O_{H_{n,v}}^\times,\overline{\mathbb{Q}}_p)\\ g &\mapsto \log_p\circ g^{-1}\end{aligned}\tag{13}$$

Soit $f_0 = \sum_{g\in G_v\times\Gamma_n} z_g\log_p\circ g^{-1}\in\mathrm{Hom}(O_{H_{n,v}}^\times,\overline{\mathbb{Q}}_p)$. Si f_0 est à valeurs dans L_n, alors pour tout $h\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L_n)$, $h\circ f_0 = f_0$. Comme les éléments $\log_p\circ g^{-1}$ sont à valeurs dans L_n, on en déduit que $h(z_g) = z_g$ pour h arbitraire, et donc $z_g\in L_n$ pour tout $g\in G_v\times\Gamma_n$. Supposons maintenant que $f_0\in\mathrm{Hom}(O_{H_{n,v}}^\times, L)$. Pour tout $\gamma\in\mathrm{Gal}(L_n/L)\simeq\Gamma_n$, on a $\gamma\circ f_0 = f_0$, dont on déduit que $\gamma(z_{g\gamma}) = z_g$ pour tout $g\in G_v\times\Gamma_n$. On a ainsi

$$\begin{aligned} f_0 &= \textstyle\sum_{g\in G_v}\sum_{\gamma\in\Gamma_n} z_{g\gamma}\log_p\circ\gamma^{-1}g^{-1}\\ &= \textstyle\sum_{g\in G_v}\sum_{\gamma\in\Gamma_n}\gamma^{-1}\left(\gamma(z_{g\gamma})\log_p\circ g^{-1}\right)\\ &= \textstyle\sum_{g\in G_v}\sum_{\gamma\in\Gamma_n}\gamma^{-1}\left(z_g\log_p\circ g^{-1}\right)\\ &= \mathrm{Tr}\left(\textstyle\sum_{g\in G_v} z_g\log_p\circ g^{-1}\right)\end{aligned}$$

De même, comme $U_n\simeq\mathrm{Ind}_{G_v}^G U_{n,v}$, un élément $f_0\in\mathrm{Hom}((O_{H_n}\otimes\mathbb{Z}_p)^\times, L)$ s'écrit de manière unique $f_0 = \mathrm{Tr}\left(\sum_{g\in G} z_g\log_p\circ g^{-1}\right)$, et l'on a un isomorphisme similaire à l'isomorphisme 9. On a

$$f_0(x\otimes c) = \mathrm{Tr}\left(\sum_{g\in G} z_g\log_p\left(\iota_p\circ g^{-1}(x)c\right)\right)$$

avec $(z_g)_{g\in G} \in L^G$. Considérons à présent $f \in \mathrm{Hom}_G(U_n, V)$. Comme $\mathrm{Hom}_G(U_n, V) = \left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(O_{H_n}^\times, L)\otimes_L V\right)^G$, on peut écrire f dans la base (t^+, t^-) de V sous la forme

$$f(x\otimes c) = \mathrm{Tr}\left(\sum_{g\in G} \log_p\left(\iota_p \circ g^{-1}(x)c\right)\begin{pmatrix} z_g^+ \\ z_g^- \end{pmatrix}\right)$$

f étant G-équivariante, on a pour tout $g\in G$ l'identité $\begin{pmatrix} z_g^+ \\ z_g^- \end{pmatrix} = \rho(g)\begin{pmatrix} z_1^+ \\ z_1^- \end{pmatrix}$, qui donne (en posant $z^+ = z_1^+$, $z^- = z_1^-$) la description du point (1). La définition de Φ_n donnée par la formule $\Phi_n(z^+, z^-) = f$ est G-équivariante. En effet, si $\gamma \in \Gamma_n$, alors γ commute avec g, ι_p, $\log_p$ et $\rho(g)$ pour tout $g\in G$, d'où :

$$\begin{aligned}
\gamma.f &= f\circ\gamma^{-1} \\
&= \mathrm{Tr}\left(\textstyle\sum_{g\in G}\left(\log_p(\iota_p(g^{-1}(\gamma^{-1}(x)))c)\right)\rho(g)\begin{pmatrix} z^+ \\ z^- \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(\gamma^{-1}\left(\textstyle\sum_{g\in G}\left(\log_p(\iota_p(g^{-1}(x))c)\right)\right)\rho(g)\begin{pmatrix} z^+ \\ z^- \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(\textstyle\sum_{g\in G}\left(\log_p(\iota_p(g^{-1}(x))c)\right)\rho(g)\begin{pmatrix} \gamma(z^+) \\ \gamma(z^-) \end{pmatrix}\right) \\
&= \Phi_n(\gamma(z^+), \gamma(z^-))
\end{aligned}$$

□

1.2.9. *Logarithme p-adique d'unités locales et réseaux.* Soit π_n une uniformisante de $\mathbb{Z}_{p,n}$. C'est aussi une uniformisante de $\mathcal{O}_{H_{n,v}}$, de $\mathcal{O}_n$ et on a par définition $U_{n,v} = 1+\pi_n\mathcal{O}_{H_{n,v}}$. Il est facile de voir (cf. [**Neu99**, Chap. 2, §5, Prop. 5.5]) que l'on a $\log_p(1+p\mathcal{O}_{H_{n,v}}) = p\mathcal{O}_{H_{n,v}}$, mais on n'a en revanche pas de description aussi explicite de l'image de $U_{n,v}$. Néanmoins, pour $1+\pi_n a \in 1+\pi_n\mathcal{O}_{H_{n,v}}$, on a facilement

$$v_p\left(\log_p(1+\pi_n a)\right) = v_p\left(\pi_n a + \frac{(\pi_n a)^2}{2} + \cdots + \frac{(\pi_n a)^{p^n}}{p^n} + \cdots\right) \geq v_p\left(\frac{\pi_n^{p^n}}{p^n}\right) = 1-n$$

On a ainsi l'encadrement $p\mathcal{O}_{H_{n,v}} \subseteq \log_p(U_{n,v}) \subseteq p^{1-n}\mathcal{O}_{H_{n,v}}$.

Notation 1.2.10.

- On définit $R^+_{n,\mathrm{loc}} \subseteq L_n$ (resp. $R^-_{n,\mathrm{loc}} \subseteq L_n$) comme étant l'image du sous-module de $U_{n,v}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}$ sur lequel Frob_v agit par multiplication par β (resp. multiplication par α) par l'application composée

$$U_{n,v}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O} \xrightarrow{\log_p\otimes 1} H_{n,v}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O} \xrightarrow{m} L_n$$

où m désigne la multiplication interne dans L_n. On a donc, pour $\zeta = \beta$ ou $\zeta = \alpha$ selon le choix du signe $\pm$,

$$R^{\pm}_{n,\mathrm{loc}} = \left\{ \sum_i a_i \sum_{j=0}^{f-1} \zeta^{-j} \log_p(F^j(x_i)),\ x_i \in U_{n,v}, a_i \in \mathcal{O} \right\}.$$

- On fixe un isomorphisme de G-modules $E_n^{\rho} \simeq T^{\oplus p^n}$, et on définit de même $R^{\pm}_{n,\mathrm{gl}}$ comme étant l'image du sous-$\mathcal{O}$-module $\left(E_n^{\rho}\right)^{\pm} := \left(T^{\pm}\right)^{\oplus p^n}$ par la composée

$$E_n \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O} \xrightarrow{\iota_p \otimes 1} U_{n,v} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O} \xrightarrow{\log_p \otimes 1} H_{n,v} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O} \xrightarrow{m} L_n$$

Autrement dit, on a

$$R^{\pm}_{n,\mathrm{gl}} = \left\{ \sum_i b_i \log_p(\iota_p(x_i)),\ x = \sum_i x_i \otimes b_i \in \left(E_n^{\rho}\right)^{\pm} \right\}$$

On a clairement $R^{\pm}_{n,\mathrm{gl}} \subseteq R^{\pm}_{n,\mathrm{loc}} \subseteq L_n$, car Frob_v agit par multiplication par ζ sur les éléments de $\left(E_n^{\rho}\right)^{\pm}$.

La fin de cette section est dédiée à la preuve de la Proposition suivante :

Proposition 1.2.11 (=Corollaire 1.2.17)**.** *Pour tout entier n, les modules $R^{\pm}_{n,gl}$ et $R^{\pm}_{n,loc}$ sont des réseaux de L_n, et de plus :*

$$\mathrm{Sel}_n^{\sharp} \simeq \frac{\left(R^{+}_{n,gl}\right)^{\perp}}{\left(R^{+}_{n,loc}\right)^{\perp}}$$

Lorsque $n = 0$, on obtiendra une description explicite de $\mathrm{Sel}_0^{\#}$, et on pourra en déduire le Théorème 1.1.3.

Proposition 1.2.12. *$R^{\pm}_{n,loc}$ est un réseau de L_n, et pour $n = 0$, on a $R^{\pm}_{0,loc} = p\mathcal{O}$.*

Démonstration. Posons $\zeta = \beta$ ou $\zeta = \alpha$ selon le choix du signe $\pm$. On a déjà vu que $R^{\pm}_{n,\mathrm{loc}} \subseteq p^{1-n}\mathcal{O}_{H_{n,v}} \cdot \mathcal{O}_n = p^{1-n}\mathcal{O}_n$. Montrons que $R^{\pm}_{n,\mathrm{loc}}$ contient un réseau de L_n. L'application définissant $R^{\pm}_{n,\mathrm{loc}}$ est G_v-équivariante, donc $R^{\pm}_{n,\mathrm{loc}}$ contient le $\mathcal{O}$-module $S = m\left((p\mathcal{O}_{H_{n,v}} \otimes \mathcal{O})^{\mathrm{Frob}_v = \zeta}\right)$. On a le lemme :

Lemme 1.2.13. *Il existe $x \in O_{H_{n,v}}$ tel que $\sum_{j=0}^{f-1} \zeta^{-j} \mathrm{Frob}_v^j(x)$ soit une unité de $\mathcal{O}_n$.*

PREUVE DU LEMME. On réduit la somme modulo l'uniformisante π_n de $\mathcal{O}_n$. Soit $\mathbb{F}_n = \mathcal{O}_n/(\pi_n)$ le corps résiduel de L_n. D'une part, le polynôme $P(X) = \sum_{j=0}^{f_v-1} \zeta^{-j} X^{p^j} \in \mathbb{F}_n[X]$ est de degré p^{f_v-1} et d'autre part, le corps résiduel de $H_{n,v}$ est $\mathbb{F}_{p^{f_v}} \subseteq \mathbb{F}_n$. Donc P n'est pas identiquement nul sur $\mathbb{F}_{p^f}$, et donc il existe $x \in O_{H_{n,v}}$ tel que $P(x \mod \pi_n) \neq 0$, et un tel x convient. □

Soit x_0 comme dans le lemme. Posons $y_0 = \sum_{j=0}^{f-1} \zeta^{-j} F^j(x)$. On a $\mathcal{O} \cdot p y_0 \subseteq S$ ainsi que $t p y_0 = p \sum_{j=0}^{f-1} \zeta^{-j} F^j(t \cdot x_0) \in S$ pour tout $t \in \mathbb{Z}_{p,n}$. On a donc $\mathcal{O} \cdot \mathbb{Z}_{p,n} \cdot p y_0 \subseteq S$. Comme L et $\mathbb{Q}_{p,n}$ sont arithmétiquement disjoints, on a $\mathcal{O} \cdot \mathbb{Z}_{p,n} = \mathcal{O}_n$, et comme y_0 est une unité de $\mathcal{O}_n$, on a $\mathcal{O}.\mathbb{Z}_{p,n}.p y_0 = p\mathcal{O}_n$. On a ainsi montré que $p\mathcal{O}_n \subseteq S \subseteq R^{\pm}_{n,\mathrm{loc}} \subseteq p^{1-n}\mathcal{O}_n$. Donc $R^{\pm}_{n,\mathrm{loc}}$ est un réseau de L_n, et pour $n = 0$, on a bien $R^{\pm}_{0,\mathrm{loc}} = p\mathcal{O}$. □

Corollaire 1.2.14. *Soit $f = \Phi_n(z^+, z^-) \in \mathrm{Hom}_G(U_n, V)$ (cf. Proposition 1.2.8). On a les équivalences*

(1) $f^{\pm}(U_{n,v}) = 0 \Longleftrightarrow z^{\pm} = 0$ *et* $f^{\pm}(U_{n,v}) \subseteq T^{\pm} \Longleftrightarrow z^{\pm} \in \left(R^{\pm}_{n,loc}\right)^{\perp}$

(2) Si $n = 0$, alors $f^{\pm}(U_v) \subseteq T^{\pm} \Longleftrightarrow pz^{\pm} \in \mathcal{O}$

DÉMONSTRATION. D'après la description de f dans la Proposition 1.2.8, on a $f^{\pm}(U_{n,v}) = 0$ (resp. $f^{\pm}(U_{n,v}) \subseteq T^{\pm}$) si et seulement si $\mathrm{Tr}(xz^{\pm}) = 0$ (resp. $\mathrm{Tr}(xz^{\pm}) \in \mathcal{O}$) pour tout $x \in R^{\pm}_{n,\mathrm{loc}}$. Par ailleurs, l'égalité $\mathrm{Tr}(xz^{\pm}) = 0$ est encore vraie pour tout x dans le L-espace engendré par $R^{\pm}_{n,\mathrm{loc}}$, qui est égal à L_n. Donc $f^{\pm}(U_{n,v}) = 0$ équivaut à $z^{\pm} = 0$, ce qui prouve le point (1). Le point (2) se déduit du (1), car pour $n = 0$, on a $\left(R^{\pm}_{n,\mathrm{loc}}\right)^{\perp} = (p\mathcal{O})^{\perp} = \frac{1}{p}\mathcal{O}$. □

Notation 1.2.15. À l'aide de l'isomorphisme $E^{\rho}_n \simeq T^{\oplus p^n}$, on définit (x_i^+, x_i^-) la préimage de la base (t^+, t^-) de la i-ème copie de T (cf. notation 1.2.7). On notera aussi s_i^+ et s_i^- les images de x_i^+ et de x_i^- par l'application $\Lambda_p := m \circ (\log_p \circ \iota_p \otimes 1)$ utilisée pour définir $R^{\pm}_{n,\mathrm{gl}}$. Notons que la famille $\left(s_i^{\pm}\right)_{1 \leq i \leq p^n}$ engendre $R^{\pm}_{n,\mathrm{gl}}$ en tant que $\mathcal{O}$-module.

Si $\begin{pmatrix} a_g & b_g \\ c_g & d_g \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ est la matrice de $\rho(g)$ dans la base (t^+, t^-), alors pour tout $g \in G$ et pour tout $1 \leq i \leq p^n$, on a les relations $g(x_i^+) = (x_i^+)^{a_g}(x_i^-)^{c_g}$ et $g(x_i^-) = (x_i^+)^{b_g}(x_i^-)^{d_g}$. On en déduit facilement une égalité de matrices lignes :

$$\begin{pmatrix} \Lambda_p(g(x_i^+)) & \Lambda_p(g(x_i^-)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_i^+ & s_i^- \end{pmatrix} \rho(g).$$

Proposition 1.2.16. *Soit $f=\Phi_n(z^+,z^-)$. Alors on a (avec les notations en 1.2.15) les équivalences suivantes :*

$$f(E_n)=0 \Longleftrightarrow \forall 1\le i\le p^n,\ \mathrm{Tr}(s_i^+z^++s_i^-z^-)=0$$

$$f(E_n)\subseteq T \Longleftrightarrow \forall 1\le i\le p^n,\ \mathrm{Tr}(s_i^+z^++s_i^-z^-)\in \mathcal{O}$$

De plus, $R^{\pm}_{n,gl}$ et $R^{\pm}_{n,loc}$ sont des réseaux de L_n.

DÉMONSTRATION. On a $f(E_n)\subseteq T$ si et seulement si $f(E_n^\rho)\subseteq T$ si et seulement si $f(x_i^+), f(x_i^-)\in T$ pour tout $1\le i\le p^n$, c'est-à-dire si la matrice carrée $M_i := \begin{pmatrix} f(x_i^+) & f(x_i^-)\end{pmatrix}\in M_2(L)$ est à coefficients dans $\mathcal{O}$. On peut réécrire cette matrice sous la forme :

$$\begin{aligned} M_i &= \mathrm{Tr}\left(\sum_{g\in G}\rho(g)\begin{pmatrix} z^+\\ z^-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Lambda_p(g^{-1}(x_i^+)) & \Lambda_p(g^{-1}(x_i^-))\end{pmatrix}\right)\\ &= \mathrm{Tr}\left(\sum_{g\in G}\rho(g)\begin{pmatrix} z^+\\ z^-\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_i^+ & s_i^-\end{pmatrix}\rho(g^{-1})\right)\end{aligned}$$

où Tr désigne l'opérateur trace (défini en 1.2.6) appliqué à chaque entrée de la matrice. On observe que M_i est une matrice commutant avec $\rho(G)$ qui est absolument irréductible. Donc M_i est scalaire, disons $M_i=\lambda_i \mathrm{I}_2$. En prenant la trace matricielle, on trouve $\lambda_i=\frac{\#G}{2}\mathrm{Tr}(s_i^+z^++s_i^-z^-)$. Comme $p\nmid 2\cdot\#G$, on obtient que $f(E_n)\subseteq T$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(s_i^+z^++s_i^-z^-)\in\mathcal{O}$ pour tout $1\le i\le p^n$, d'où la première équivalence. La deuxième équivalence est similaire : on a $f(E_n)=0$ si et seulement si $M_i=0$ pour tout $1\le i\le p^n$, c'est-à-dire si $\mathrm{Tr}(s_i^+z^++s_i^-z^-)=0$. □

Corollaire 1.2.17 (=Proposition 1.2.11)**.** *On a un isomorphisme de $\mathcal{O}[\Gamma_n]$-modules*

$$\mathrm{Sel}_n^\sharp \simeq \frac{\left(R^+_{n,gl}\right)^\perp}{\left(R^+_{n,loc}\right)^\perp}$$

DÉMONSTRATION. Grâce à la suite exacte 12, on voit que le $\mathcal{O}[\Gamma_n]$-module $\mathrm{Sel}_n^\#$ est isomorphe à

$$\frac{\left\{f\in \mathrm{Hom}_G(U_n,V)\ /\ f^-(U_{n,v})\subseteq T^-,\ \ f(E_n)\subseteq T\right\}}{\left\{f\in\mathrm{Hom}_G(U_n,V)\ /\ f(U_{n,v})\subseteq T\right\}}$$

En utilisant la description avec l'isomorphisme Φ_n ainsi que le corollaire 1.2.14 et la Proposition 1.2.16, ce dernier module est isomorphe à

$$\frac{\left\{(z^+,z^-)\in L_n^2\ /\ z^-\in\left(R^-_{n,\mathrm{loc}}\right)^\perp \text{ et } \forall 1\le i\le p^n, \mathrm{Tr}(s_i^+z^++s_i^-z^-)\in\mathcal{O}\right\}}{\left(R^+_{n,\mathrm{loc}}\right)^\perp\times\left(R^-_{n,\mathrm{loc}}\right)^\perp}$$

Enfin, pour $z^- \in \left(R^-_{n,\mathrm{loc}}\right)^\perp$, on a $z^- \in \left(R^+_{n,\mathrm{gl}}\right)^\perp$ donc $\mathrm{Tr}(s_i^- z^-) \in \mathcal{O}$ pour tout $1 \leq i \leq p^n$. Donc $\mathrm{Sel}_n^\#$ est isomorphe à :

$$\frac{\left\{(z^+,z^-) \in L_n^2 \ / \ z^- \in \left(R^-_{n,\mathrm{loc}}\right)^\perp \text{ et } \forall 1 \leq i \leq p^n, \mathrm{Tr}(s_i^+ z^+) \in \mathcal{O}\right\}}{\left(R^+_{n,\mathrm{loc}}\right)^\perp \times \left(R^-_{n,\mathrm{loc}}\right)^\perp} = \frac{\left(R^+_{n,\mathrm{gl}}\right)^\perp \times \left(R^-_{n,\mathrm{loc}}\right)^\perp}{\left(R^+_{n,\mathrm{loc}}\right)^\perp \times \left(R^-_{n,\mathrm{loc}}\right)^\perp} = \frac{\left(R^+_{n,\mathrm{gl}}\right)^\perp}{\left(R^+_{n,\mathrm{loc}}\right)^\perp}.$$

Le fait que $R^\pm_{n,\mathrm{loc}}$ soit un réseau est prouvé dans la Proposition 1.2.12. De même pour $R^\pm_{n,\mathrm{gl}}$ qui est d'indice fini dans $R^\pm_{n,\mathrm{loc}}$. Cela résulte de la description précédente de $\mathrm{Sel}_n^\#$ qui est par ailleurs fini, car $\mathrm{Sel}_n(f_\alpha)$ l'est d'après la Proposition 1.1.2. □

Pour $n = 0$, le corollaire précédent dit que le générateur s_0^+ du $\mathcal{O}$-module $R^+_{0,\mathrm{gl}}$ (défini à une unité multiplicative de $\mathcal{O}$ près) est non-nul. Cet élément est le logarithme p-adique d'une unité globale dont on rappelle la construction. Le $\mathcal{O}$-module $\mathrm{Hom}_G(E^\rho, T)$ est libre de rang 1. On fixe un isomorphisme entre $E^\rho = e_\rho(\mathcal{O}_H^\times \otimes_\mathbb{Z} \mathcal{O})$ et T, et on choisit $x_0^+ \in E^\rho$ la préimage d'un générateur du sous-$\mathcal{O}$-module T^+ de T. Avec les notations 1.2.10, on a alors $s_0^+ = m \circ (\log_p \circ \iota_p \otimes 1)(x_0^+) \in p\mathcal{O}$. On écrit simplement $s_0^+ = \log_p \circ \iota_p(x_0^+)$. Comme ρ est à coefficients dans un corps de nombres $E \simeq \iota_p(E) \subseteq L$, on peut trouver un $\mathcal{O}^\times$-multiple de s_0^+ qui soit le logarithme d'un élément de $(\mathcal{O}_H^\times \otimes_\mathbb{Z} E)^\rho$.

Définition 1.2.18. On définit l'unité globale ϵ_ρ^+ comme étant un élément $\sum_i \epsilon_i \otimes \alpha_i \in \left(\mathcal{O}_H^\times \otimes_\mathbb{Z} E\right)^\rho$ tel que son logarithme p-adique $\log_p \circ \iota_p(\epsilon_\rho) = \sum_i \iota_p(\alpha_i) \log_p(\iota_p(\epsilon_i))$ engendre $R^+_{0,\mathrm{gl}}$. Elle est définie à une puissance à un élément de $E^\times \cap \mathcal{O}^\times$ près.

Alternativement, on peut aussi poser

$$\epsilon_\rho^+ = |\epsilon_\rho|_\beta,$$

où ϵ_ρ est n'importe que générateur du $\mathcal{O}[G]$-module irréductible $\left(\mathcal{O}_H^\times \otimes_\mathbb{Z} \mathcal{O}\right)^\rho$, et qui est dans $\left(\mathcal{O}_H^\times \otimes_\mathbb{Z} E\right)^\rho$.

Corollaire 1.2.19. *On a un isomorphisme*

$$\mathrm{Sel}_0^\sharp \simeq \mathcal{O}/\tfrac{\log_p \circ \iota_p(\epsilon_\rho^+)}{p}\mathcal{O}.$$

De plus, si $\alpha \neq 1$ alors on a la formule

$$L_p(f_\alpha; 0) = \frac{\log_p \circ \iota_p\left(\epsilon_\rho^+\right)}{p}\sqrt{\#(\mathcal{C}^\rho)}$$

à une unité de $\mathcal{O}$ près.

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire 1.2.17, on a $\mathrm{Sel}_0^\sharp \simeq \left(R^+_{0,\mathrm{gl}}\right)^\perp / \left(R^+_{0,\mathrm{loc}}\right)^\perp$. Or on a $\left(R^+_{0,\mathrm{gl}}\right)^\perp = (\log_p(\epsilon_\rho)\mathcal{O})^\perp = \log_p(\epsilon_\rho)^{-1}\mathcal{O}$ d'une part, et $\left(R^+_{0,\mathrm{loc}}\right)^\perp = (p\mathcal{O})^\perp = \frac{1}{p}\mathcal{O}$ d'après la Proposition 1.2.12 d'autre part, d'où l'isomorphisme annoncé.

Supposons $\alpha \neq 1$. D'après la Proposition 1.1.2 (4), $X_\infty(f_\alpha)$ n'a pas de sous-module fini non-trivial, et donc d'après le Lemme 1.3.3, $L_p(f_\alpha;0)$ est égal à l'ordre de $X_\infty(f_\alpha)_\Gamma$. D'autre part, comme p ne divise pas $\#G$, la suite exacte 10 introduite dans le chapitre précédent a la forme simple suivante :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Sel}_0(f_\alpha) \longrightarrow \mathrm{Sel}_\infty(f_\alpha)^\Gamma \longrightarrow (D^-)^{e(\rho,\rho^+)} \longrightarrow 0$$

Or, $e(\rho,\rho^+) = 0$ précisément car $\alpha \neq 1$, et donc $X_\infty(f_\alpha)_\Gamma$ a le même cardinal que $\mathrm{Sel}_0(f_\alpha)$. D'après la suite exacte 11, cet ordre est égal à $\#\left(\mathrm{Sel}_0^{\mathrm{Iw}}\right)\cdot\#\left(\mathrm{Sel}_0^\#\right)$. Il suffit donc de montrer que l'ordre de $\mathrm{Sel}_0^{\mathrm{Iw}}$ est égal à $\sqrt{\#(\mathcal{C}^\rho)}$, mais ceci résulte du Lemme 1.2.2. □

1.3. Formes modulaires à multiplication complexe. On se propose de déterminer le groupe de Selmer dans le cas particulier où f est à multiplication complexe par un corps quadratique imaginaire F, comme dans la Section 5.2. Il existe un caractère d'ordre fini $\psi : G_F \longrightarrow E^\times$ tel que $\rho \simeq \mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\psi$. On note τ le caractère non-trivial de $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ (qui est aussi la restriction de Frob_∞ à F) et $\psi\tau : G_F \longrightarrow E^\times$ le caractère donné par $\psi_\tau(h) = \psi(\tau h \tau)$ pour tout $h \in G_F$. L'extension K/F découpée par ψ est une sous-extension de H/F, avec $H = K\cdot\tau(K)$.

En tant que G_F-module, T est la somme directe de T_ψ et T_{ψ_τ}, qui sont deux $\mathcal{O}$-droites sur lesquelles G_F agit respectivement par ψ et par ψ_τ. Il existe une unique base, à $\mathcal{O}^\times$-homothétie près, dans laquelle on a :

$$\forall h \in G_F, \quad \rho(h) \sim \begin{pmatrix} \psi(h) & \\ & \psi_\tau(h) \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \rho(\mathrm{Frob}_\infty) \sim \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

On fixe une telle base dans la suite. L'expression des valeurs propres de $\rho(\mathrm{Frob}_v)$ diffère selon que p est décomposé ou inerte dans F. Si p est décomposé, alors $\mathrm{Frob}_v \in G_F$, et donc $\{\alpha,\beta\} = \{\psi(\mathrm{Frob}_v), \psi_\tau(\mathrm{Frob}_v)\}$. Si l'on voit ψ comme un caractère de Hecke, on a $\psi(\mathrm{Frob}_v) = \psi(\mathfrak{p})$ et $\psi_\tau(\mathrm{Frob}_v) = \psi(\bar{\mathfrak{p}})$, où $p\mathcal{O}_F = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ et où $\mathfrak{p}$ est l'idéal premier de $\mathcal{O}_F$ au-dessus de p déterminé par v (i.e. par ι_p). Lorsque p est inerte dans F, alors $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha\beta = \psi(p\mathcal{O}_F)$, donc $\{\alpha,\beta\} = \{\pm\sqrt{\psi(p\mathcal{O}_F)}\}$. On a par ailleurs $\gamma = \pm\gamma'$, où $\gamma := \psi(\mathrm{Frob}_v \mathrm{Frob}_\infty)$ et où $\gamma' := \psi(\mathrm{Frob}_\infty \mathrm{Frob}_v)$, et **on supposera** (par simplicité, cf. Remarque 1.3.3) que $\gamma = \gamma'$, de sorte que $\alpha = \pm\gamma$. **On fixe un choix pour** α, en prenant $\alpha = \psi(\bar{\mathfrak{p}})$ si p est décomposé, et $\alpha = \gamma$ si p est inerte dans F.

On a une factorisation de G_F-modules $D = D_\psi \bigoplus D_{\psi_\tau}$, et pour un cocycle galoisien σ à valeurs dans D, on note σ_1 et σ_2 ses projections sur D_ψ et sur D_{ψ_τ}. Pour tout $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, on pose $F_n = F\cdot\mathbb{Q}_n$ et on note encore $\tau\in\mathrm{Gal}(F_n/\mathbb{Q}_n)$ l'involution non-triviale. Le lemme de Shapiro fournit un isomorphisme

$$\mathrm{Sh}:\begin{cases} H^1(\mathbb{Q}_n,D) & \xrightarrow{\simeq} & H^1(F_n,D_\psi) \\ [\sigma] & \longmapsto & \left[\sigma_{1|G_{F_n}}\right]\end{cases} \tag{14}$$

L'application réciproque est donnée ainsi : pour un cocyle $\tilde\sigma_1 : G_{F_n}\longrightarrow D_\psi$, on peut définir cocycle σ en décrétant que, pour tout $h\in G_{F_n}$, on a $\sigma_1(h)=\tilde\sigma_1(h)$, $\sigma_1(h\tau)=\tilde\sigma_1(h)$, $\sigma_2(h)=\tilde\sigma_1(\tau h\tau)$, et $\sigma_2(h\tau)=\tilde\sigma_1(\tau h\tau)$.

La Proposition suivante détermine l'image de $\mathrm{Sel}_n(f_\alpha)$ par l'isomorphisme 14. Lorsque p est décomposé dans F, on retrouve le (dual du) module d'Iwasawa attaché au caractère ψ.

Proposition 1.3.1. *Soit $\mathfrak{X}_\mathfrak{p}(K_n)$ (resp. $\mathfrak{X}_p(K_n)$) le groupe de Galois de la pro-p extension abélienne maximale de K_n non ramifiée en dehors de $\mathfrak{p}$ lorsque p est décomposé dans F (resp. en dehors de $p\mathcal{O}_F$ lorsque p est inerte). On a, pour tout $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$,*

$$X_n(f_\alpha)\simeq\begin{cases} \mathfrak{X}_\mathfrak{p}(K_n)^{(\psi)} & \text{si } p \text{ est décomposé} \\ \left(\mathfrak{X}_p(K_n)/\left\{h\tau h\tau\ :\ h\in I_p\right\}\right)^{(\psi)} & \text{si } p \text{ est inerte}\end{cases}$$

où I_p désigne le sous-groupe d'inertie de $gX(K_n)$ défini par ι_p et l'exposant (ψ) renvoie à la composante ψ-isotypique de $\mathcal{O}[\mathrm{Gal}(K/F)]\simeq\mathcal{O}[\mathrm{Gal}(K_n/F_n)]$-modules.

DÉMONSTRATION. Le sous-module $\mathrm{Sel}_n(f_\alpha)\subseteq H^1(\mathbb{Q}_n,D)$ étant défini par des conditions de trivialité locale, il s'agit de déterminer les conditions analogues de trivialité définissant $\mathrm{Sh}(\mathrm{Sel}_n(f_\alpha))$ à l'intérieur de $H^1(F_n,D_\psi)$.

Vu la description de l'isomorphisme de Shapiro, une classe de cocycle $[\sigma]\in H^1(\mathbb{Q}_n,D)$ est non-ramifiée en une place λ de $\mathbb{Q}_n$ si et seulement si $\mathrm{Sh}([\sigma])$ est non-ramifiée aux places de F_n divisant λ. Pour décrire la condition en p, il faut d'abord comprendre la position de D^+ dans D en termes de D_ψ et D_{ψ_τ}. Rappelons qu'on a fixé une base adaptée à $T=T_\psi\bigoplus T_{\psi_\tau}$, et que notre choix pour α entraîne que $\rho(\mathrm{Frob}_v)\sim\begin{pmatrix}\beta & \\ & \alpha\end{pmatrix}$ si p est décomposé, et $\rho(\mathrm{Frob}_v)\sim\begin{pmatrix} & \alpha \\ \alpha & \end{pmatrix}$ si p est inerte dans F. Soit $d=(d_1,d_2)\in D$. Si p est décomposé, alors $d\in D^+\iff\mathrm{Frob}_v.d=\beta d\iff(\beta d_1,\alpha d_2)=(\beta d_1,\beta d_2)\iff d_2=0$ car $\alpha-\beta$ est une unité p-adique. On a donc $D^+=D_\psi$ dans ce cas. Lorsque p est inerte, on obtient $d\in D^+$ si et seulement si $d_1+d_2=0$. Ainsi, une classe de cocycle $[\sigma]\in H^1(\mathbb{Q}_n,D)$ satisfait $\sigma(I_p)\subseteq D^+$ si et seulement si $\sigma_1(I_p)=0$ lorsque p est décomposé, et $\sigma(I_p)\subseteq D^+$ si et seulement si $(\sigma_1+\sigma_2)(I_p)=0$ lorsque p est inerte (notons que $\sigma_{1|I_p}$ ne dépend pas du choix du représentant σ, car l'action galoisienne est non-ramifiée en p). Par suite, on obtient la description voulue de $\mathrm{Sel}_n(f_\alpha) \simeq \mathrm{Sh}(\mathrm{Sel}_n(f_\alpha))$ grâce à la suite d'inflation-restriction. $\square$

Remarque 1.3.2. Lorsque p est décomposé dans F, le groupe de Selmer $X_\infty(f_\alpha)$ s'identifie ainsi avec le module d'Iwasawa de la conjecture principale (cyclotomique) pour ψ et pour le corps quadratique F (voir par exemple [**Rub91**, Theorem 4.1 (i)]). Lorsque p est inerte, le module obtenu pourrait être similaire au groupe de Selmer des courbes elliptiques à multiplication complexe et avec bonne réduction supersingulière en p. Par ailleurs, $\mathfrak{X}_p(K_\infty)$ n'est pas de torsion sur Λ.

Remarque 1.3.3. Supposons par simplicité que $K = \tau(K) = H$. Soit $(\epsilon_\psi, \epsilon_{\psi_\tau})$ une base de E^ρ, unique à homothétie près, telle que ϵ_ψ (resp. ϵ_{ψ_τ}) engendre $E^{(\psi)}$ (resp. $E^{(\psi_\tau)}$) et telle que $\mathrm{Frob}_\infty(\epsilon_\psi) = \epsilon_{\psi_\tau}$. Si $\alpha \neq 1$, alors le Théorème 1.1.3 montre que

$$L_p(f_\alpha;0) = \begin{cases} \dfrac{\log_p \circ \iota_p \left(\epsilon_\psi\right)}{p} \cdot \#\left(\mathcal{C}^{(\psi)}\right) & \text{si p décomposé dans F} \\ \dfrac{\log_p \circ \iota_p \left(\epsilon_\psi/\epsilon_{\psi_\tau}\right)}{p} \cdot \#\left(\mathcal{C}^{(\psi)}\right) & \text{si p inerte dans F} \end{cases} \tag{15}$$

à une unité de $\mathcal{O}$ près. Indiquons pour finir comment ces formules changent pour d'autres choix de α.

Supposons d'abord p décomposé. Si $\alpha = \psi(\mathfrak{p})$, alors $X_n(f_\alpha) = \mathfrak{X}_{\bar{\mathfrak{p}}}(K_n)^{(\psi)}$ et ϵ_ψ est changé en ϵ_{ψ_τ} dans la formule 15.

Supposons maintenant p inerte, et rappelons que l'on a supposé que $\gamma = \gamma'$. Si l'on choisit $\alpha = -\gamma$, alors on peut vérifier que $\epsilon_\psi/\epsilon_{\psi_\tau}$ est changé pour $\epsilon_\psi \cdot \epsilon_{\psi_\tau}$ dans la formule 15.

Supposons toujours p inerte, mais plus que $\gamma = \gamma'$ comme depuis le début de cette section. On a donc $\gamma = -\gamma'$, et on a donc $-\alpha\beta = \alpha^2 = -\gamma^2 = -\psi(p\mathcal{O}_F)$. On **fixe** une racine carrée α de $-\psi(p\mathcal{O}_F)$. L'élément $i := \alpha/\gamma$ est une racine 4-ième de l'unité dans $\mathcal{O}$, et on vérifie qu'il existe une unique $\mathcal{O}$-base de T, à homothétie près, dans laquelle on a

$$\forall h \in G_F, \quad \rho(h) \sim \begin{pmatrix} \psi(h) & \\ & \psi_\tau(h) \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \rho(\mathrm{Frob}_\infty) \sim \begin{pmatrix} & i \\ -i & \end{pmatrix}$$

Dans cette base, on a $\rho(\mathrm{Frob}_v) \sim \begin{pmatrix} & \alpha \\ \alpha & \end{pmatrix}$ comme dans la preuve de la Proposition 1.3.1. La formule 15 s'adapte ainsi en remplaçant le terme $\epsilon_\psi/\epsilon_{\psi_\tau}$ par $\epsilon'_\psi/\epsilon'_{\psi_\tau}$, où $(\epsilon'_\psi, \epsilon'_{\psi_\tau})$ est l'unique base de E^ρ (à homothétie près) telle que ϵ'_ψ (resp. ϵ'_{ψ_τ}) engendre $E^{(\psi)}$ (resp. $E^{(\psi_\tau)}$) et telle que $\mathrm{Frob}_\infty(\epsilon'_\psi) = -i \cdot \epsilon'_{\psi_\tau}$.

2. Conjecture principale des formes modulaires de poids 1

L'existence d'une (unique) famille de Hida passant par f_α permet de définir une déformation ordinaire attachée à la p-stabilisation de ρ, et à coefficients dans une algèbre de Hecke. Elle admet beaucoup de spécialisations motiviques, correspondant à des formes modulaires p-ordinaires de poids $k \geq 2$. On utilisera la construction d'une fonction L p-adique à coefficients entiers sur $\Lambda^{\mathrm{pds}} = \mathbb{Z}_p[[X]]$ de [**EPW06**] pour définir une fonction L p-adique analytique attachée à f_α, et nous proposons une Conjecture Principale, dont nous prouvons une divisibilité à l'aide d'un célèbre théorème de Kato.

2.1. Familles de Hida et déformations ordinaires.

2.1.1. *Spécialisations.* On pose $u = 1 + p$ un générateur du groupe multiplicatif $1 + p\mathbb{Z}_p$. Soit $\mathbb{H}$ une extension finie de $\mathbb{Z}_p[[X]]$. On dit qu'un morphisme d'anneaux $\phi : \mathbb{H} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ est une spécialisation classique de $\mathbb{H}$ s'il existe un entier $k \geq 1$ et une racine de l'unité $\zeta \in \mu_{p^\infty}$ primitive d'ordre p^{r-1} (où $r > 0$) tels que $\phi(X) = \zeta u^{k-1} - 1$. On dit que ϕ est une spécialisation algébrique si, de plus, $k \geq 2$. On pose $k_\phi := k$, $r_\phi := r$, et aussi $\chi_\phi = \chi_\zeta$. La spécialisation ϕ définit par ailleurs un idéal $\mathfrak{p}_\phi := \ker \phi$ de $\mathbb{H}$, qui est premier de hauteur 1, et un anneau $\mathcal{O}_\phi := \mathrm{im}\, \phi$ qui est une extension finie de $\mathbb{Z}_p$.

2.1.2. *Familles de Hida.* Une forme parabolique ordinaire $\mathbb{Z}_p[[X]]$-adique de niveau modéré N et de caractère ϵ est un q-développement formel $\mathbf{f} = \sum_{n\geq 0} a_n(\mathbf{f}) q^n$ à coefficients dans une extension finie $\mathbb{H}$ de $\mathbb{Z}_p[[X]]$ telle que, pour toute spécialisation algébrique ϕ de $\mathbb{H}$, le q-développement

$$g_\phi := \phi(\mathbf{f}) = \sum_n \phi(a_n(\mathbf{f})) q^n \in S_{k_\phi}(Np^{r_\phi}, \epsilon\chi_\phi\omega^{1-k_\phi}, \mathcal{O}_\phi)$$

définit une forme parabolique ordinaire p-stabilisée de poids k_ϕ et de niveau Np^{r_ϕ}. On dit que $\mathbf{f}$ est N-nouvelle si toutes ses spécialisations classiques le sont. Une famille de Hida primitive $\mathbf{f}$ est une forme parabolique ordinaire $\mathbb{Z}_p[[X]]$-adique N-nouvelle qui est propre pour les opérateurs de Hecke U_ℓ (resp. T_ℓ, $\langle \ell \rangle$) pour $\ell | Np$ (resp. $\ell \nmid Np$).

Soit $\mathbb{H}_N$ l'algèbre de Hecke universelle ordinaire de niveau modéré N. C'est une $\mathbb{Z}_p[[X]]$-algèbre générée par les opérateurs de Hecke agissant sur l'espace des formes paraboliques ordinaires. Elle est libre de rang fini d'après [**Hid86b**, Theorem 3.1], et ses spécialisations algébriques correspondent aux formes paraboliques propres de niveau modéré N. Le quotient $\mathbb{H}_N^{\mathrm{new}}$ de $\mathbb{H}_N$ agissant fidèlement sur l'espace des formes N-nouvelles est de même une $\mathbb{Z}_p[[X]]$-algèbre finie réduite et sans torsion. Ses spécialisations algébriques sont de plus en bijection avec les (orbites galoisiennes de) formes propres classiques de poids $k \geq 2$ et niveau modéré N qui sont nouvelles en N.

Étant donnée une forme primitive g p-stabilisée de poids $k \geq 2$, Hida a montré que g était la spécialisation d'une famille de Hida primitive. Ce résultat a été étendu aux formes de poids 1 par Wiles.

Théorème 2.1.3 (Wiles)**.** *Il existe une famille de Hida primitive* $\mathbf{f}$ *se spécialisant en* f_α*.*

DÉMONSTRATION. Voir [**Wil88**, Theorem 3]. □

Comme f est p-régulière, on sait même que $\mathbf{f}$ est unique à conjugaison près d'après le théorème principal de [**BD16**] (voir aussi [**Dim14**, Corollary 1.15]). La famille $\mathbf{f}$ définit un morphisme d'anneaux $\mathbb{H}_N^{\mathrm{new}} \longrightarrow \overline{\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_p[[X]])}$, dont le noyau $\mathfrak{a}$ est un idéal premier minimal de $\mathbb{H}_N^{\mathrm{new}}$. On peut alors voir $\mathbf{f}$ à coefficients dans $\mathbb{H}_{\mathbf{f}} := \mathbb{H}_N^{\mathrm{new}}/\mathfrak{a}$. On note $\phi_\alpha : \mathbb{H}_{\mathbf{f}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ la spécialisation classique de poids 1 associée à f_α, et on note simplement $\mathfrak{p}_\alpha = \ker \phi_\alpha$ l'idéal premier de hauteur 1 associé à f_α. Les coefficients de Fourier de f_α sont dans $\mathcal{O}$, donc ϕ_α est à valeurs dans $\mathcal{O}$.

Remarque 2.1.4. Soit ϕ une spécialisation algébrique de poids k de $\mathbb{H}_{\mathbf{f}}$ telle que $p-1|k-1$ et $\chi_\phi = 1$. Alors, par définition, $g_\phi := \phi(\mathbf{f})$ est de niveau Np et son caractère ϵ est de niveau N. Comme $p \nmid N$, g_ϕ est nécessairement p-old d'après [**Miy06**, Theorem 4.6.17/2]. Ainsi, g_ϕ est la p-stabilisation d'une forme primitive de niveau N.

2.1.5. *Déformation ordinaire.* Soit ϕ une spécialisation classique de $\mathbb{H}_{\mathbf{f}}$. Les travaux de Deligne ([**Del71**]), généralisant ceux de Eichler et de Shimura, montrent l'existence d'une représentation galoisienne (ρ_ϕ, V_ϕ) irréductible sur $\mathbb{Q}$ et à coefficients dans $\mathcal{O}_\phi \otimes \mathbb{Q}_p$, non-ramifiée en-dehors de Np, de dimension 2 et impaire attachée à g_ϕ, au sens où

$$\forall \ell \nmid Np, \quad \rho_\phi(\mathrm{Frob}_\ell) = a_\ell(g_\phi).$$

Par ailleurs, comme g_ϕ est ordinaire de poids ≥ 2, V_ϕ admet une unique p-stabilisation ordinaire $V_\phi^+ \subseteq V_\phi$, et Frob_p agit le quotient V_ϕ^- par multiplication par $a_p(g_\phi)$. D'autre part, la représentation résiduelle de ρ_ϕ est isomorphe à $\bar{\rho}$, donc ρ_ϕ est résiduellement irréductible et V_ϕ admet une seule classe d'homothétie de réseaux $G_\mathbb{Q}$-stables. En fait, on peut réaliser une construction d'une représentation "en famille", interpolant un réseau stable de chacun des V_ϕ, dont on rappelle brièvement la construction.

D'après [**Hid86a**, Theorem 2.1], il existe une représentation galoisienne sur $\mathbb{H}_{\mathbf{f}} \otimes_{\mathbb{Z}_p[[X]]} \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_p[[X]])$ qui interpole V et les V_ϕ, pour toute spécialisation algébrique ϕ de $\mathbb{H}_{\mathbf{f}}$. De plus, l'espace des I_p-coinvariants est une droite sur laquelle Frob_v agit par multiplication par $a_p(\mathbf{f})$, d'après [**Wil88**, Theorem 2.2.2]. Comme $\bar{\rho}$ est absolument irréductible, cette représentation est même définie sur $\mathbb{H}_{\mathbf{f}}$, d'après le théorème de Nyssen [**Nys96**] et de Rouquier [**Rou96**]. On obtient le résultat suivant.

Théorème 2.1.6. *Supposons que* $\overline{rho}$ *est absolument irréductible et p-distinguée (ce qui résulte de nos hypothèses **(rég)** et **(hyp)**, cf. Paragraphe 1.1). Il existe un* $\mathbb{H}_{\mathbf{f}}$*-module libre* *de rang 2, noté $\mathcal{T}_{\boldsymbol{f}}$, et une représentation continue impaire et irréductible*

$$\rho_{\boldsymbol{f}} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{H}_{\boldsymbol{f}}}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{f}}),$$

non-ramifiée en-dehors de Np telle que $\mathrm{Tr}(\rho_{\boldsymbol{f}}(\mathrm{Frob}_\ell)) = a_\ell(\boldsymbol{f})$ pour tout $\ell \nmid Np$. On a en outre les propriétés suivantes :

- *Pour toute spécialisation algébrique $g_\phi = \phi(\boldsymbol{f})$ de $\boldsymbol{f}$, le $\mathcal{O}_\phi$-module $T_\phi := \mathcal{T}_{\boldsymbol{f}} \otimes_{\mathbb{H}_{\boldsymbol{f}},\phi} \mathcal{O}_\phi$ s'identifie à un réseau de V_ϕ. De même, on a $T \simeq \mathcal{T}_{\boldsymbol{f}} \otimes_{\mathbb{H}_{\boldsymbol{f}},\phi_\alpha} \mathcal{O}$.*
- *Il existe $\mathcal{T}^+_{\boldsymbol{f}} \subseteq \mathcal{T}_{\boldsymbol{f}}$ un sous-$\mathbb{H}_{\boldsymbol{f}}$-module libre de rang 1 qui est stable par $G_{\mathbb{Q}_p}$ vérifiant les propriétés suivantes. Le quotient $\mathcal{T}^-_{\boldsymbol{f}} := \mathcal{T}_{\boldsymbol{f}}/\mathcal{T}^+_{\boldsymbol{f}}$ est libre de rang 1, et l'action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\mathcal{T}^-_{\boldsymbol{f}}$ est donnée par le caractère non-ramifié δ tel que $\delta(\mathrm{Frob}_p) = a_p(\boldsymbol{f})$. De plus, pour toute spécialisation algébrique g_ϕ de $\boldsymbol{f}$, la filtration obtenue se spécialise sur la filtration ordinaire $T^\pm_\phi$ attachée à T_ϕ. De même, on a $T^\pm \simeq \mathcal{T}^\pm \otimes_{\mathbb{H}_{\boldsymbol{f}},\phi_\alpha} \mathcal{O}$. En particulier, $\mathcal{T}_{\boldsymbol{f}}$ est une déformation ordinaire de ρ, au sens de la définition 4.2.5.*

2.2. Fonctions L p-adiques de formes modulaires ordinaires en famille. Soit g une forme modulaire cuspidale primitive de poids $k \geq 2$ et p-stabilisée, à coefficients dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Lorsque $v_p(a_p(g)) < k-1$, on sait attacher grâce à Amice-Vélu [**AV75**] et Vishik [**Vis76**] (voir aussi [**MTT86**]) une distribution d'ordre de croissance $\leq v_p(a_p(g))$ interpolant les valeurs spéciales $L(g,\chi,n)$ où χ est un caractère de conducteur une puissance de p et $0 < n < k$ est un entier critique, convenablement normalisées par deux périodes complexes $\omega_g^\pm$. Lorsque g est p-ordinaire et que le choix est convenablement normalisé, on obtient une série formelle $\mathcal{L}_p(g,T)$ à coefficients dans une extension finie de $\mathbb{Z}_p$. Dans notre situation où nous aimerions construire une série interpolant celles associées aux spécialisations g_ϕ, il convient de faire un choix de "périodes canoniques en famille". Comme $\bar{\rho}$ et irréductible et p-distinguée, nous pouvons faire appel à la construction de la fonction L p-adique en famille donnée par Emerton-Pollack-Weston [**EPW06**], et utilisant un résultat important de Wiles [**Wil95**]. On survole à présent [**EPW06**, 3§.], et définissons $\mathcal{L}_p(\mathbf{f},T) \in \mathbb{H}_{\mathbf{f}}[[T]]$ en explicitant la propriété d'interpolation.

La $\mathbb{Z}_p[[X]]$-algèbre $\mathbb{H}_N$ est finie donc semi-locale, elle est isomorphe au produit fini de ses localisés aux idéaux maximaux $\prod_{\mathfrak{m}'}(\mathbb{H}_N)_{\mathfrak{m}'}$. On note $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal correspondant à $\bar{\rho}$. On note aussi $\mathbb{H}_N^*$ l'algèbre de Hecke universelle ordinaire agissant sur toutes les formes $\mathbb{Z}_p[[X]]$-adiques ordinaires (non-nécessairement paraboliques). Pour $k \geq 2$ et $r \geq 1$, soit $\mathbb{H}^*_{n,r,k}$ (resp. $\mathbb{H}_{N,r,k}$) l'algèbre de Hecke agissant sur toutes les formes modulaires (resp. les formes paraboliques) p-ordinaires de poids k et de niveau Np^r. La suite exacte en homologie de la paire $(X_1(Np^r), \{\text{pointes}\})$ (où $X_1(Np^r)$ est la courbe modulaire compacte de niveau Np^r) induit (après localisation en l'idéal maximal induit par $\mathfrak{m}$ et projection ordinaire) un isomorphisme

$$H_1(X_1(Np^r), \tilde{L}_k(\mathbb{Z}_p))^{\mathrm{ord}}_{\mathfrak{m}} \simeq H_1(X_1(Np^r), \{\text{pointes}\}, \tilde{L}_k(\mathbb{Z}_p))^{\mathrm{ord}}_{\mathfrak{m}}$$

de $\left(\mathbb{H}_{n,r,k}\right)_{\mathfrak{m}} \simeq \left(\mathbb{H}^*_{n,r,k}\right)_{\mathfrak{m}}$-modules, où $\tilde{L}_k(\mathbb{Z}_p)$ est le système local associé au $\mathbb{Z}_p$-module des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ de degré $\leq k-2$. On note $\left(\mathfrak{M}_{N,r,k}\right)_{\mathfrak{m}}$ ces modules isomorphes. $\left(\mathfrak{M}_{N,r,k}\right)_{\mathfrak{m}}$ est la somme directe des deux sous-espaces propres $\left(\mathfrak{M}_{N,r,k}\right)^{\pm}_{\mathfrak{m}}$ pour l'action induite par la conjugaison complexe sur $X_1(Np^r)$, qui sont tous deux libres de rang 1 sur $\mathbb{H}_{N,r,k}$ d'après [**EPW06**, Proposition 3.1.1], car $\bar{\rho}$ est irréductible et p-distinguée.

Étant donnée une forme propre parabolique p-ordinaire g de poids $k \geq 2$, niveau Np^r, et de représentation résiduelle $\bar{\rho}$, on peut construire sa fonction L p-adique comme suit. Par hypothèse, g définit un morphisme de $\mathbb{Z}_p$-algèbres

$$\left(\mathbb{H}_{n,k,r}\right)_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathcal{O}_g$$

où $\mathcal{O}_g$ est l'extension finie de $\mathbb{Z}_p$ engendrée par les coefficients de Fourier g. En fixant un isomorphisme $\alpha^{\pm}_{N,r,k} : \left(\mathfrak{M}_{N,r,k}\right)^{\pm}_{\mathfrak{m}} \simeq \left(\mathbb{H}_{n,r,k}\right)_{\mathfrak{m}}$, cela donne une application

$$H_1(X_1(Np^r), \tilde{L}_k(\mathcal{O}_g))^{\pm}_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\delta^{\pm}_g} \mathcal{O}_g$$

Fixons un isomorphisme $j : \overline{\mathbb{Q}}_p \simeq \mathbb{C}$; l'intégration sur les cycles donne aussi une fonctionnelle

$$H_1(X_1(Np^r), \tilde{L}_k(\mathbb{C}))^{\pm} \xrightarrow{\omega^{\pm}_g} \mathbb{C}$$

se factorisant par $H_1(X_1(Np^r), \tilde{L}_k(\mathbb{C}))^{\pm}_{\mathfrak{m}'}$ où $\mathfrak{m}'$ est l'idéal maximal de $\mathbb{H}_{N,r,k} \otimes_{\mathbb{Z}_p, j} \mathbb{C}$ correspondant à $\mathfrak{m}$. En étendant $\delta^{\pm}_g$ à $\mathbb{C}$, il existe deux périodes "canoniques" $\Omega^{\pm}_g \in \mathbb{C}^{\times}$ satisfaisant

$$\omega^{\pm}_g = \Omega^{\pm}_g \cdot \delta^{\pm}_g$$

L'ambiguïté de la période est déterminée par l'isomorphisme $\alpha^{\pm}_{N,r,k}$ (étendu scalairement à $\mathcal{O}_g$) et donc $\Omega^{\pm}_g$ est bien défini à multiplication par un élément de $\mathcal{O}^{\times}_g \subseteq \overline{\mathbb{Q}}^{\times}_p \simeq \mathbb{C}^{\times}$ près.

La description de $\left(\mathfrak{M}_{N,r,k}\right)^{\pm}_{\mathfrak{m}}$ en termes de groupe d'homologie relative permet de définir une application $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \longrightarrow \left(\mathfrak{M}_{N,r,k}\right)^{\pm}_{\mathfrak{m}}$ envoyant un élément $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ sur l'image du chemin $[\infty, a]$ sur la courbe modulaire $X_1(Np^r)$. Cela permet de définir une mesure $\mu^{\pm}_k$ sur $\mathbb{Z}^{\times}_p$ (cf. [**EPW06**, Proposition 3.2.2]) à valeurs dans l'algèbre de Hecke, interpolant les valeurs spéciales de $L(g, \chi, s)/\Omega^{\pm}_g$. En restreignant $\mu^{\pm}_k$ à $1 + p\mathbb{Z}_p$, on a :

Proposition 2.2.1. *Avec les notations précédentes et l'isomorphisme $\alpha^{\pm}_{N,r,k}$ fixé, il existe une unique série formelle $\mathcal{L}_p(g : T) \in \mathcal{O}_g[[T]]$ satisfaisant la formule d'interpolation* *suivante : pour tout $0 \leq m \leq k-2$ et ξ racine primitive p^{t-1}-ème de l'unité, on a*

$$\mathcal{L}_p(g, \xi(1+p)^m - 1) = e_g(\xi, m) \frac{p^{t'(m+1)} m!}{a_p(g)^{t'}(-2i\pi)^{m+1} \mathfrak{G}(\omega^m \chi_\xi^{-1}) \Omega_g^{(-1)^m}} L(g, \omega^m \chi_\xi^{-1}, m+1)$$

où ω est le caractère de Teichmüller et $\chi_\xi : G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow \Gamma \twoheadrightarrow \mu_{p^{t-1}}$ est le caractère envoyant γ sur ξ, avec $e_g(\xi, m) := 1 - a_p(g)^{-1} p^m$ et $t' := 0$ lorsque $\xi = 1$ et $p-1|m$, et $e_g(\xi, m) := 1$ et $t' := t$ sinon, où $\mathfrak{G}(-)$ désigne la somme de Gauss de caractères de Dirichlet, et où $\Omega_g^\pm$ est la période canonique de g définie par $\alpha_{N,r,k}^\pm$.

Soit $\mathfrak{p}_{N,r,k}$ le produit de tous les idéaux premiers de hauteur 1 de $\mathbb{H}_N$, de poids k et de niveau divisant Np^r et de représentation résiduelle $\bar{\rho}$. On a deux isomorphismes naturels $(\mathbb{H}_N)_\mathfrak{m}/\mathfrak{p}_{N,r,k} \simeq \left(\mathbb{H}_{N,r,k}\right)_\mathfrak{m}$ et $\left(\mathbb{H}_N^*\right)_\mathfrak{m}/\mathfrak{p}_{N,r,k} \simeq \left(\mathbb{H}_{N,r,k}^*\right)_\mathfrak{m}$, de même qu'un isomorphisme $(\mathfrak{M}_N)_\mathfrak{m}^\pm \otimes (\mathbb{H}_N)_\mathfrak{m}/\mathfrak{p}_{N,r,k} \simeq \left(\mathfrak{M}_{N,r,k}\right)_\mathfrak{m}^\pm$, où $(\mathfrak{M}_N)_\mathfrak{m}$ est le $(\mathbb{H}_N)_\mathfrak{m} \simeq \left(\mathbb{H}_N^*\right)_\mathfrak{m}$-module libre de rang 2 défini comme étant la limite projective

$$\varprojlim_r H_1(X_1(Np^r), \mathbb{Z}_p)_\mathfrak{m}^{\mathrm{ord}} \simeq \varprojlim_r H_1(X_1(Np^r), \{\text{pointes}\}, \mathbb{Z}_p)_\mathfrak{m}^{\mathrm{ord}}$$

(cf. [**EPW06**, Proposition 3.3.1] et sa preuve). En particulier, le choix d'un isomorphisme

$$\alpha_N^\pm : (\mathbb{H}_N)_\mathfrak{m} \simeq (\mathfrak{M}_N)_\mathfrak{m}^\pm$$

fixe, pour tout k et r, un choix d'isomorphisme

$$\alpha_{N,r,k}^\pm : \left(\mathfrak{M}_{N,r,k}\right)_\mathfrak{m}^\pm \simeq \left(\mathbb{H}_{n,r,k}\right)_\mathfrak{m}$$

en posant $\alpha_{N,r,k}^\pm = \alpha_N^\pm \mod \mathfrak{p}_{N,r,k}$. En ce sens, on peut dire que le choix des périodes $\Omega_g^\pm$ est effectué *en famille* (voir *loc. cit.*). On peut de même construire une mesure sur $\mathbb{Z}_p^\times$ à coefficients dans $(\mathbb{H}_N)_\mathfrak{m}$ interpolant les mesures $\mu_k^\pm$. En vue de nos applications, nous considérons plutôt la composée avec la projection

$$(\mathbb{H}_N)_\mathfrak{m} \twoheadrightarrow \left(\mathbb{H}_N^{\mathrm{new}}\right)_\mathfrak{m} \twoheadrightarrow \mathbb{H}_\mathbf{f}$$

Proposition 2.2.2. *Fixons l'isomorphisme précédent $\alpha_N^\pm$. Il existe un élément $\mathcal{L}_p(\boldsymbol{f}; T) \in \mathbb{H}_{\boldsymbol{f}}[[T]]$ tel que, pour toute spécialisation algébrique $g_\phi = \phi(\boldsymbol{f})$ de $\boldsymbol{f}$, on ait*

$$\tilde{\phi}\left(\mathcal{L}_p(\boldsymbol{f}, T)\right) = \mathcal{L}_p(g_\phi; T)$$

où $\tilde{\phi} : \mathbb{H}_{\boldsymbol{f}}[[T]] \twoheadrightarrow \mathcal{O}_\phi[[T]]$ est applique ϕ aux coefficients des séries formelles, et où $\mathcal{L}_p(g_\phi; T)$ est la fonction L p-adique analytique de g_ϕ calculée dans la Proposition 2.2.1 avec l'isomorphisme $\alpha_{N,r,k}^\pm = \alpha_N^\pm \mod \mathfrak{p}_{N,r,k}$.

L'élément $\mathcal{L}_p(\mathbf{f}; T)$ est défini à multiplication par une unité de $\mathbb{H}_\mathbf{f}$ près.

Définition 2.2.3. On définit $\mathcal{L}_p(f_\alpha;T) \in \mathcal{O}[[T]]$ la fonction L p-adique analytique de f_α comme étant l'image de $\mathcal{L}_p(\mathbf{f},T)$ par l'application $\tilde{\phi_\alpha} : \mathbb{H}_{\mathbf{f}}[[T]] \longrightarrow \mathcal{O}[[T]]$. Elle est bien définie à une unité multiplicative de $\mathcal{O}$ près.

Remarque 2.2.4. Il semble a priori difficile de montrer que la série formelle que l'on a défini n'est pas identiquement nulle. On verra néanmoins que cela est vrai, en admettant la véracité de la conjecture principale pour les formes modulaires de poids supérieur (Conjecture 2.3.2).

2.3. Conjectures principales.

2.3.1. Soit g_ϕ une spécialisation classique de $\mathbf{f}$. Le groupe de Selmer (resp. groupe de Selmer dual) attaché à g_ϕ est par définition le $\mathcal{O}_\phi[[T]]$-module

$$\mathrm{Sel}_\infty(\phi) := \mathrm{Sel}_\infty(T_\phi, T_\phi^+), \qquad \text{resp.} \qquad X_\infty(\phi) := \mathrm{Sel}_\infty(\phi)^\vee$$

On pose $L_p(g_\phi,T) := L_p(X_\infty(\phi),T)$ lorsque $X_\infty(\phi)$ est de torsion sur $\mathcal{O}_\phi[[T]]$. La conjecture principale pour les formes primitives p-ordinaires p-stabilisées de poids $k \geq 2$ prédit l'égalité suivante ([**SU14**, Conjecture 3.24]).

Conjecture 2.3.2. *Le $\mathcal{O}_\phi[[T]]$-module $X_\infty(\phi)$ est de torsion, et il existe une unité u_ϕ de $\mathcal{O}_\phi[[T]]$ telle que*

$$u_\phi \cdot L_p(g_\phi,T) = \mathcal{L}_p(g_\phi,T).$$

Kato a prouvé une divisibilité partielle dans le cas où g_ϕ est la p-stabilisation d'une forme primitive ordinaire de niveau premier à p ([**Kat04**, Theorem 17.4]). D'après la discussion du paragraphe 2.1.4, ceci est valable précisément lorsque $p-1|k_\phi-1$ et $\chi_\phi = 1$. On a donc le Théorème suivant.

Théorème 2.3.3 (Kato)**.** *Supposons que $p-1|k_\phi-1$ et $\chi_\phi = 1$. Le $\mathcal{O}_\phi[[T]]$-module $X_\infty(\phi)$ est de torsion, et*

$$L_p(g_\phi,T) \quad \textit{divise} \quad \mathcal{L}_p(g_\phi,T))$$

dans $\mathcal{O}_\phi[[T]][\frac{1}{p}]$.

Malheureusement, nous ne pouvons faire appel aux résultats de Skinner-Urban [**SU14**] établissant l'autre divisibilité, sous l'hypothèse additionnelle (trop restrictive pour nos applications) de trivialité du caractère central.

Théorème 2.3.4 (Kato,Skinner-Urban)**.** *Soit g la p-stabilisation p-ordinaire d'une forme parabolique primitive de niveau N premier à p, de poids $k \geq 2$ et de caractère ϵ. Soit ρ_g la représentation de Deligne-Eichler-Shimura associée à g. Supposons que :*

- $\chi = 1$ *et* $k = 2 \mod p-1$,
- *la représentation résiduelle $\bar{\rho}_g$ de g est irréductible et p-distinguée,*

- *il existe un nombre premier $\ell || N$ tel que $\bar{\rho}_g$ est ramifiée en ℓ.*

Alors il existe une unité u_g de $\mathcal{O}_g[[T]][\frac{1}{p}]$ telle que

$$u_g \cdot L_p(g,T) = \mathcal{L}_p(g,T).$$

Si, de plus, il existe une base de T_g dans laquelle l'image de ρ_g contient $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$, alors l'élément u_g est une unité de $\mathcal{O}_g[[T]]$.

DÉMONSTRATION. Voir [**SU14**, Theorem 3.29]. □

Nous formulons la conjecture suivante :

Conjecture 2.3.5. *Il existe une unité u de $\mathcal{O}[[T]]$ telle que*

$$u \cdot L_p(f_\alpha, T) = \mathcal{L}_p(f_\alpha, T)$$

Les arguments de passage à la limite utilisé dans la preuve du Théorème 2.3.6 montreront (sous les hypothèses du Théorème 2.3.6) que la conjecture 2.3.2 implique la conjecture 2.3.5. Notre résultat est le suivant :

Théorème 2.3.6. *On a*

$$L_p(f_\alpha, T) \quad \textit{divise} \quad \mathcal{L}_p(f_\alpha, T)$$

dans $\mathcal{O}[[T]][\frac{1}{p}]$. De plus, si la conjecture 2.3.2 est vraie pour toute spécialisation g_ϕ de poids k_ϕ suffisamment proche p-adiquement de 1 et de niveau Np, alors la conjecture 2.3.5 est vraie.

On peut facilement déduire dans la foulée un résultat de la même veine sur les μ-invariants des groupes de Selmer, dans l'esprit des résultats de [**EPW06**] (la proposition analogue pour les μ-invariants analytiques résulte immédiatement de l'existence de $\mathcal{L}_p(\mathbf{f}, T)$).

Proposition 2.3.7. *Si $\mu = 0$ pour $X_\infty(f_\alpha)$, alors il en est de même pour $X_\infty(g_\phi)$ pour toute spécialisation ϕ de $\mathbf{f}$, et réciproquement.*

3. Preuve du Théorème 2.3.6 et fonctions L p-adiques au voisinage de f_α

3.1. Articulation de la preuve. D'après le résultat principal de [**BD16**] (voir aussi [**Dim14**, 7.3§, Proposition 1.12]), on sait que $(\mathbb{H}_\mathbf{f})_{\mathfrak{p}_\alpha}$ est un anneau de valuation discrète. Dans le paragraphe 3.2, on construit un paramétrage de $\mathbf{f}$ au voisinage de f_α, donnant une suite de formes modulaires primitives p-stabilisées g_n (cf. notation 3.2.4) dont les coefficients de Fourier vivent dans une extension finie $\mathcal{O}'$ fixée de $\mathcal{O}$ et convergent vers ceux de f_α. Les étapes de la preuve du Théorème 2.3.6 sont rassemblées dans le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} L_p(g_n,T) \arrow[d, "(c)"', "n\to+\infty"] & \overset{(a)}{\text{divise}} & \mathcal{L}_p(g_n,T) \arrow[d, "n\to+\infty"', "(b)"] \\ L_p(f_\alpha,T) & & \mathcal{L}_p(f_\alpha,T) \end{tikzcd}$$

Toutes les fonctions L p-adiques sont des éléments de l'anneau topologique $\mathcal{O}'[[T]]$, et les divisibilités sont dans $\mathcal{O}'[[T]][\frac{1}{p}]$. Le point (a) est une application du théorème de Kato (Théorème 2.3.3). Les points (b) et (c) sont respectivement démontrés dans le lemme 3.3.1 et la Proposition 3.4.1, après avoir construit une fonction L p-adique analytique et algébrique au voisinage de f_α dans les paragraphes 3.3 et 3.4. Une fois les points (a), (b) et (c) prouvés, la preuve du Théorème 2.3.6 découle immédiatement du lemme suivant, pour $A = \mathcal{O}'[[T]]$, π une uniformisante de $\mathcal{O}'$, $a_n = L_p(g_n,T)$, $a = L_p(f_\alpha,T)$, $b_n = \mathcal{L}_p(g_n,T)$, et $b = \mathcal{L}_p(f_\alpha,T)$.

Lemme 3.1.1. *Soit A un anneau topologique compact. Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites d'éléments de A convergeant respectivement vers a et b.*

(1) Si a_n divise b_n dans A pour tout n, alors a divise b.

(2) Soit $\pi \in A$ un élément premier, régulier et topologiquement nilpotent. Si a_n divise b_n dans $A[\frac{1}{\pi}]$ pour tout n, et si $a \neq 0$, alors a divise b dans $A[\frac{1}{\pi}]$.

DÉMONSTRATION. Commençons par le (1). Écrivons $b_n = a_n c_n$ avec $c_n \in A$. Comme A est compact, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que $(c_n)_n$ converge. On a ainsi $b = ac$ par passage à la limite, et donc $(a) \supseteq (b)$.

Traitons (2). Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe $k(n) \in \mathbb{N}$ et $c_n \in A$ tels que $\pi^{k(n)} b_n = a_n c_n$. L'élément π étant régulier, quitte à simplifier suffisamment de fois par π, on peut supposer que l'on a, ou bien $k(n) = 0$, ou bien $\pi \nmid c_n$. Dans tous les cas, π étant premier, on a $\pi^{k(n)} | a_n$. Par hypothèse, a_n converge vers $a \neq 0$ et π est topologiquement nilpotent, donc $k(n)$ est borné avec n d'après (1). Ainsi, il existe un entier K suffisamment grand tel que $(a_n) \supseteq (\pi^K b_n)$ pour tout n, et donc $(a) \supseteq (\pi^K b)$ par (1), ce qu'on voulait démontrer. □

3.2. Lissité et paramétrage local de la famille de Hida.

Soit $F(W) = \sum_n c_n W^n \in \overline{\mathbb{Q}}_p[[W]]$ une série formelle de rayon de convergence positif. Alors il existe un entier r tel que $F(W)$ converge sur le disque de rayon p^{-r}, c'est-à-dire que la suite $(c_n p^{nr})_n$ est bornée. On peut donc voir $F(Y)$ comme un élément du sous-anneau $\overline{\mathbb{Z}}_p[[W/p^r]][\frac{1}{p}]$ de $\overline{\mathbb{Q}}_p[[W]]$.

Lemme 3.2.1. *Soit $F(W) \in \overline{\mathbb{Q}}_p[[W]]$. Supposons que $F(W)$ est entier sur $\mathbb{Z}_p[[W]]$. Alors il existe une extension finie M de $\mathbb{Q}_p$ et un entier r tel que $F(W) \in \mathcal{O}_M[[W/p^r]]$.*

DÉMONSTRATION. Soit $Q(W,Z) \in \mathbb{Z}_p[[W]][Z]$ un polynôme (en la variable Z) unitaire de degré d_Q qui s'annule en $F(W)$. Comme $\overline{\mathbb{Q}}_p[[W]]$ est intègre, $Q(W,Z)$ a un nombre fini de racines dans $\overline{\mathbb{Q}}_p[[W]]$. Le théorème d'approximation d'Artin [**Art68**, Theorem 1.2] implique que, pour tout entier $c \geq 0$ et pour toute racine $G(W)$ de $Q(W,Z)$, il existe une série formelle $\hat{G}(W) \in \overline{\mathbb{Q}}_p[[W]]$ de rayon de convergence positif qui est une racine de $Q(W,Z)$ et qui satisfait la congruence $G(W) \equiv \hat{G}(W) \mod W^c$. En choisissant c suffisamment grand, on voit que l'on a $G(W) = \hat{G}(W)$, et donc toute racine du polynôme $Q(W,Z)$ converge au voisinage de 0. En particulier, il existe un entier r tel que $F(W) \in \overline{\mathbb{Z}}_p[[W/p^r]][\frac{1}{p}]$.

Soit M le compositum de toutes les extensions de $\mathbb{Q}_p$ de degré inférieur ou égal à d_Q. Pour tout $w \in p^{r+1}\mathbb{Z}_p$, l'équation $Q(w,F(w)) = 0$ implique que $F(w)$ satisfait une équation de degré d_Q, et donc $F(w) \in M$. On en déduit que $F(W)$ est à coefficients dans M, et donc $F(W) \in \mathcal{O}_M[[W/p^r]][\frac{1}{p}]$. Enfin, comme $F(W)$ est entier, il est p-entier et donc $F(W) \in \mathcal{O}_M[[W/p^r]]$ comme annoncé. $\square$

Soient $r \geq 0$ et $e \geq 1$ des entiers et M une extension finie de L. On notera $\mathcal{O}_M[[X^{1/e}/p^r]]$ la $\mathcal{O}_M[[X]]$-algèbre $\mathcal{O}_M[[X,Y]]/(p^{re}Y^e - X)$. Un morphisme de spécialisation $X = a$ pour $a \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}$ s'étend à $\mathcal{O}_M[[X^{1/e}/p^r]]$ dès que $p^{-re}a \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}$, et dépend du choix d'une racine e-ième de $p^{-re}a$ dans $\mathbb{C}_p$.

Proposition 3.2.2. *Il existe des entiers r et $e \geq 1$, une extension finie M/L et un morphisme (injectif) de $\mathbb{Z}_p[[X]]$-algèbres Φ tel que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H}_{\boldsymbol{f}} \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[dr, dotted, "\Phi"] & \mathcal{O}_M \\ \mathbb{Z}_p[[X]] \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{O}_M[[X^{1/e}/p^r]] \arrow[u, "X=0"'] \end{tikzcd} \tag{16}$$

DÉMONSTRATION. Comme $(\mathbb{H}_{\mathbf{f}})_{\mathfrak{p}_\alpha}$ est un anneau de valuation discrète d'égale caractéristique, son complété est un anneau de séries formelles en une variables sur sur son corps résiduel. Donc il existe un morphisme injectif d'anneaux topologiques

$$\Phi : (\mathbb{H}_{\mathbf{f}})_{\mathfrak{p}_\alpha} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p[[Y_0]]$$

où Y_0 est une variable formelle. L'élément $X \in (\mathbb{H}_{\mathbf{f}})_{\mathfrak{p}_\alpha}$ satisfait $\lim_{n\to+\infty} X^n = 0$, donc comme élément de $\overline{\mathbb{Q}}_p[[Y_0]]$, X est une série formelle sans terme constant $X = aY_0^e + bY_0^{e+1} + \ldots$ où $e \geq 1$ et $a \neq 0$. Soit $H(Y_0) \in \overline{\mathbb{Q}}_p[[Y_0]]$ une racine e-ième de la série $a + bY_0 + \ldots$, de sorte que $X = (Y_0 H(Y_0))^e$. Comme $H(0) \neq 0$, on voit que $Y = Y_0 H(Y_0)$ définit une nouvelle variable formelle, i.e. on a un isomorphisme d'anneaux topologiques $\overline{\mathbb{Q}}_p[[Y_0]] \simeq$

$\overline{\mathbb{Q}}_p[[Y]] \simeq \overline{\mathbb{Q}}_p[[X^{1/e}]]$. La restriction de Φ à $\mathbb{H}_{\mathbf{f}}$ donne un morphisme de $\mathbb{Z}_p[[X]]$-algèbres $\mathbb{H}_{\mathbf{f}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p[[X^{1/e}]]$. D'après le lemme 3.2.1, l'image de ce morphisme est incluse dans un anneau de la forme $\mathcal{O}_M[[X^{1/e}/p^r]]$ pour une certaine extension finie M de L, car $\mathbb{H}_{\mathbf{f}}$ est fini sur $\mathbb{Z}_p[[X]]$. On note encore Φ le morphisme de $\mathbb{Z}_p[[X]]$-algèbres obtenu :

$$\Phi : \mathbb{H}_{\mathbf{f}} \hookrightarrow \mathcal{O}_M[[X^{1/e}/p^r]]$$

Il vérifie par construction $\Phi^{-1}\left((X^{1/e}/p^r)\right) = \mathfrak{p}_\alpha$, ce qui rend le diagramme 16 commutatif. □

Corollaire 3.2.3. *Soit Y la variable formelle $X^{1/e}/p^r$ et soit $\mathcal{A} := \mathcal{O}_M[[X^{1/e}/p^r]] \simeq \mathcal{O}_M[[Y]]$. On définit*

$$\boldsymbol{f}^\dagger(Y) = \sum_{m\geq 1} a_m(\boldsymbol{f}^\dagger; Y)q^m \in \mathcal{A}[[q]] \quad \textit{où} \quad a_m(\boldsymbol{f}^\dagger; Y) := \Phi(a_m(\boldsymbol{f}))$$

Alors $\boldsymbol{f}^\dagger(Y)$ paramètre $\boldsymbol{f}$ au voisinage de f_α au sens suivant : on a $\boldsymbol{f}^\dagger(0) = f_\alpha$, et pour tout entier $k \geq 2$ tel que $p^{re}|k-1$, et pour tout choix $y \in M$ d'une racine e-ième de $\frac{u^{k-1}-1}{p^{re}}$, $\boldsymbol{f}^\dagger(y)$ est une spécialisation algébrique de $\boldsymbol{f}$ de poids k, de niveau Np et caractère $\epsilon\omega^{1-k}$.

Démonstration. On a en effet $p^{re+1}|u^{k-1}-1$, donc $|y|_p < 1$ et il existe un unique morphisme $\Psi_y : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}_M$ satisfaisant $\Psi_y(Y) = y$. On a de plus $\Psi_y(X) = u^{k-1}-1$, donc la composée $\phi_y = \Psi_y \circ \Phi : \mathbb{H}_{\mathbf{f}} \longrightarrow \mathcal{O}_M$ est une spécialisation algébrique de $\mathbb{H}_{\mathbf{f}}$ de poids k et de caractère $\chi_{\phi_y} = 1$. La forme $\mathbf{f}^\dagger(y) = \phi_y(\mathbf{f})$ définit bien une spécialisation algébrique de $\mathbf{f}$ avec les propriétés annoncées. □

Notation 3.2.4. Quitte à agrandir M, on peut supposer que M contient toutes les extensions de $\mathbb{Q}_p$ de degré $\leq e$, et donc M contient toutes les racines e-ièmes d'éléments de $\mathbb{Q}_p^\times$. On fixe dans toute la suite une telle extension M.

Pour tout entier naturel n, on note $k(n) = (p-1)p^{n+re}+1$. On fixe $y_n \in M$ une racine e-ième de $\frac{u^{k(n)-1}-1}{p^{re}}$ et on pose $g_n = \mathbf{f}^\dagger(y_n)$. Comme $p-1|k(n)-1$, g_n est la p-stabilisation d'une forme primitive classique de poids $k(n)$, de niveau N, de caractère ϵ et à coefficients dans $\mathcal{O}_M$ d'après le corollaire 3.2.3 et la remarque 2.1.4. On note $\phi_n : \mathbb{H}_{\mathbf{f}} \longrightarrow \mathcal{O}_M$ le morphisme de spécialisation correspondant à g_n et $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_{\phi_n} \subseteq \mathbb{H}_{\mathbf{f}}$. Notons que dans $\mathcal{O}_M$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = 0,$$

donc les coefficients du q-développement de g_n convergent vers ceux de f_α lorsque $n \to \infty$.

3.3. Fonction L p-adique analytique au voisinage de f_α. On définit une fonction L p-adique analytique au voisinage de f_α comme étant l'élément $\mathcal{L}_p^\dagger(Y,T) \in \mathcal{A}[[T]]$

obtenu en prenant l'image de $\mathcal{L}_p(\mathbf{f},T)$ par le morphisme $\tilde{\Phi}:\mathbb{H}_{\mathbf{f}}[[T]]\to\mathcal{A}[[T]]$ appliquant Φ aux coefficients. Ainsi, d'après le corollaire 3.2.3 et avec les notations 3.2.4, on a :

$$\mathcal{L}_p^\dagger(0,T)=\mathcal{L}_p(f_\alpha,T)\qquad\text{et}\qquad\mathcal{L}_p^\dagger(y_n,T)=\mathcal{L}_p(g_n,T)$$

pour tout entier naturel n.

Lemme 3.3.1. *La suite $(\mathcal{L}_p(g_n,T))_n$ converge vers $\mathcal{L}_p(f_\alpha,T)$ dans $\mathcal{O}_M[[T]]$.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que toute série formelle $F(Y,T)\in\mathcal{O}_M[[Y,T]]$ définit une application continue $y\longmapsto F(y,T)$ sur $\mathcal{O}_M-\mathcal{O}_M^\times$ à valeurs dans $\mathcal{O}_M[[T]]$. En considérant $F(Y,T)=\mathcal{L}_p^\dagger(Y,T)$, on a donc $\lim_{n\to+\infty}\mathcal{L}_p(g_n,T)=\lim_{n\to+\infty}\mathcal{L}_p^\dagger(y_n,T)=\mathcal{L}_p^\dagger(0,T)=\mathcal{L}_p(f_\alpha,T)$ dans $\mathcal{O}_M[[T]]$. □

3.4. Fonction L p-adique algébrique au voisinage de f_α. Il n'existe pas a priori de fonction L p-adique algébrique associée au groupe de Selmer $X_\infty(\mathcal{T}_{\mathbf{f}},\mathcal{T}_{\mathbf{f}}^+)$, ni même d'idéal caractéristique, car l'anneau $\mathbb{H}_{\mathbf{f}}[[T]]$ n'est pas nécessairement factoriel, ni même intégralement clos (cf. définitions 1.1.3, 1.3.1 et 2.2.3). Notre paramétrage local de la famille de Hida nous permet de surmonter ce problème et de travailler sur un anneau de séries formelles $\mathcal{A}[[T]]\simeq\mathcal{O}_M[[Y,T]]$, qui est factoriel et sur lequel on peut en outre appliquer les résultats des sections 1 et 2.

On notera simplement les $\mathcal{A}$-modules $\mathbb{T}=\mathcal{T}_{\mathbf{f}}\otimes_{\mathbb{H}_{\mathbf{f}},\Phi}\mathcal{A}$ et $\mathbb{D}=\mathbb{T}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{A}^\vee$. On définit similairement $\mathbb{T}^\pm$ et $\mathbb{D}^\pm$. On définit aussi les $\mathcal{A}[[T]]$-modules

$$\mathrm{Sel}_\infty(\mathbf{f}^\dagger)=\mathrm{Sel}_\infty(\mathbb{T},\mathbb{T}^+),\qquad\text{resp.}\qquad X_\infty(\mathbf{f}^\dagger)=\mathrm{Sel}_\infty(\mathbf{f}^\dagger)^\vee$$

Rappelons que pour tout entier naturel n, le groupe de Selmer $\mathrm{Sel}_\infty(\phi_n)$ attaché à g_n est de torsion d'après le Théorème 2.3.3. Nous démontrons dans la suite la proposition suivante.

Proposition 3.4.1. *La suite $(L_p(g_n,T))_n$ converge vers $L_p(f_\alpha,T)$ dans $\mathcal{O}_M[[T]]$.*

Lemme 3.4.2. *On a des isomorphismes de $\mathcal{O}_M[[T]]$-modules :*

$$X_\infty(\boldsymbol{f}^\dagger)/(Y-y_n)\cdot X_\infty(\boldsymbol{f}^\dagger)\simeq X_\infty(\phi_n)\otimes_{\mathcal{O}_{\phi_n}}\mathcal{O}_M,$$

$$X_\infty(\boldsymbol{f}^\dagger)/Y\cdot X_\infty(\boldsymbol{f}^\dagger)\simeq X_\infty(f_\alpha)\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}_M$$

pour tout entier n. En particulier, $X_\infty(\boldsymbol{f}^\dagger)$ est de torsion sur $\mathcal{A}[[T]]$.

DÉMONSTRATION. Cela résulte d'une application directe de la Proposition 2.4.1. Avec les notations de la Proposition, $\mathfrak{a}$ est l'idéal principal de $\mathcal{A}$ engendré par $Y-y_n$ ou bien par Y. Montrons que ses hypothèses sont vérifiées. L'idéal $\mathfrak{a}$ est principal par définition. Le groupe d'inertie en p agit trivialement sur $\mathbb{D}^-$ parce que ceci est déjà le cas pour $\mathbb{T}_{\mathbf{f}}^-$. Il reste à montrer que $\mathbb{D}^{G_{\mathbb{Q}_\infty}}$ et $\mathbb{D}^{I_\ell}$ (pour $\ell|N$) sont $\mathcal{A}$-divisibles. Il suffit de démontrer qu'ils sont $\mathcal{A}$-colibres. On note $D_{g_n} = V_{g_n}/T_{g_n}$ le $\mathcal{O}_M$-module discret usuel construit à partir de la représentation de Deligne de g_n, et on note encore D le $\mathcal{O}_M$-module $D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_M$. Les propriétés de spécialisation énoncées dans le Théorème 2.1.6 donnent les identifications $D_{g_n} \simeq \mathbb{D}[Y - y_n]$ et $D \simeq \mathbb{D}[Y]$. Soit ϖ une uniformisante de $\mathcal{O}_M$, soit $\mathbb{F}_M = \mathcal{O}_M/\varpi$ et soit $\mathfrak{M} = (\varpi, Y)$ l'idéal maximal de $\mathcal{A}$. La représentation résiduelle $\overline{D}$ de $\rho_{\mathbf{f}}$ vérifie $\overline{D} \simeq D_{g_n}[\varpi] \simeq D[\varpi]$ en tant que $\mathbb{F}_M[G_{\mathbb{Q}}]$-modules.

On a déjà $\mathbb{D}^{G_{\mathbb{Q}_\infty}} = 0$. En effet, comme l'action galoisienne est $\mathcal{A}$-linéaire, on a $\mathbb{D}^{G_{\mathbb{Q}_\infty}}[Y] = D^{G_{\mathbb{Q}_\infty}}$. Comme $H \cap \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q}$ et ρ est irréductible, on a $D^{G_{\mathbb{Q}_\infty}} = D^{G_{\mathbb{Q}}} = 0$. D'après le lemme de Nakayama, on a bien $\mathbb{D}^{G_{\mathbb{Q}_\infty}} = 0$.

Soit $\ell | N$, et montrons que $\mathbb{D}^{I_\ell}$ est colibre sur $\mathcal{A}$. Soit $\mathbb{P} = \left(\mathbb{D}^{I_\ell}\right)^\vee$ le dual de Pontriyagin de $\mathbb{D}^{I_\ell}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la dualité de Pontryagin, on a les trois identifications suivantes :

$$\mathbb{P}/Y\mathbb{P} \simeq \left(D^{I_\ell}\right)^\vee, \qquad \mathbb{P}/(Y - y_n)\mathbb{P} \simeq \left(D_{g_n}^{I_\ell}\right)^\vee, \qquad \mathbb{P}/\mathfrak{M}\mathbb{P} \simeq \overline{D}^{I_\ell}.$$

Comme $\rho \simeq \bar{\rho}$, le conducteur modéré de $\bar{\rho}$ est égal à N, et en particulier on a $\mathrm{ord}_\ell\left(\mathrm{Cond}(\bar{\rho})\right) = \mathrm{ord}_\ell(N) = \mathrm{ord}_\ell\left(\mathrm{Cond}(\rho_{g_n})\right)$. Par invariance du conducteur de Swan [**Liv89**, Proposition 1.1], on a donc

$$\dim_{\mathbb{F}_M} \overline{D}^{I_\ell} = \dim_M V_{g_n}^{I_\ell}$$

En outre, un théorème classique de Tate en cohomologie des groupes profinis [**Tat76**, Proposition 2.3] montre que $\dim_M V_{g_n}^{I_\ell}$ est égal au $\mathcal{O}_M$-rang de $\left(D_{g_n}^{I_\ell}\right)^\vee$ (voir [**Gre06**, Proposition 3.10] pour une généralisation de ce résultat).

On peut maintenant montrer que $\mathbb{P}$ est libre sur $\mathcal{A}$. Si $\overline{D}^{I_\ell} = 0$ alors on a automatiquement $\mathbb{P} = 0$ par le lemme de Nakayama. Si $\overline{D}^{I_\ell}$ est de dimension 1, alors $\mathbb{P}$ est monogène, et donc $\mathbb{P} \simeq \mathcal{A}/(f(Y))$ pour un certain $f(Y) \in \mathcal{A}$. De plus, le module $\mathbb{P}/(Y - y_n)\mathbb{P} \simeq \mathcal{O}_M/(f(y_n))$ est de rang 1, donc il est infini. Cela implique que l'élément $f(Y)$ s'annule en toutes les valeurs $Y = y_n$, $n \geq 0$, et donc $f(Y) = 0$ d'après le théorème de préparation de Weierstrass. Ainsi, $\mathbb{P}$ est libre comme voulu, et l'on a terminé la vérification.

D'après la Proposition 1.1.2, $X_\infty(f_\alpha)$ est de $\mathcal{O}[[T]]$-torsion, donc $X_\infty(\mathbf{f}^\dagger)/Y \cdot X_\infty(\mathbf{f}^\dagger)$ est de torsion sur $\mathcal{O}_M[[T]]$. L'assertion élémentaire suivante montre pour finir que $X_\infty(\mathbf{f}^\dagger)$ est de torsion sur $\mathcal{A}[[T]]$.

Fait : Soit M un module de type fini sur un anneau B. Supposons qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{Q} \subseteq B$ tel que $M/\mathfrak{Q}M$ est de torsion sur $B/\mathfrak{Q}$. Alors il existe $s \in B - \mathfrak{Q}$ qui tue M, et en particulier M est de torsion. □

Lemme 3.4.3. *Le $\mathcal{A}[[T]]$-module $X_\infty(\boldsymbol{f}^\dagger)$ n'a pas de sous-modules pseudo-nuls non-triviaux.*

DÉMONSTRATION. On va montrer que l'on peut appliquer la Proposition 2.5.1. L'hypothèse (a) est vérifiée d'après le lemme 3.4.2. Montrons que (b) est satisfaite, à savoir que le module $\mathcal{H} := H^2(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_\infty, \mathbb{D})^\vee$ est de torsion sur $\mathcal{A}[[T]]$. On a montré dans la preuve de la Proposition 3.5.6 que $H^2(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_\infty, D)^\vee$ est de type fini et de torsion sur $\mathcal{O}_M[[T]]$. La multiplication par Y définit une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow D \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow 0$$

induisant une application surjective $H^2(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_\infty, D) \twoheadrightarrow H^2(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}_\infty, \mathbb{D})[Y]$. Donc le $\mathcal{O}_M[[T]]$-module $\mathcal{H}/Y\cdot\mathcal{H}$ est un sous-module d'un module de type fini et de torsion. Il est donc de type fini et de torsion, et de même pour le $\mathcal{A}[[T]]$-module $\mathcal{H}$. L'hypothèse (c) est clairement vérifiée, car la représentation $\rho_{\mathbf{f}}$ est impaire. L'hypothèse (d) aussi, car I_p agit trivialement sur $\mathbb{D}^-$. Enfin, l'hypothèse (e) est vérifiée car $\rho_{\mathbf{f}}$ est résiduellement irréductible de dimension 2. Cela termine la vérification des hypothèses, et donc la preuve du lemme. □

Remarque 3.4.4. Une variante du lemme précédent pour $X_\infty(\mathbf{f}) = X_\infty(\mathbb{T}_{\mathbf{f}}, \mathbb{T}_{\mathbf{f}}^+)$ est montrée dans [**Och06**, Proposition 8.1] sous l'hypothèse que $\mathbb{H}_{\mathbf{f}}$ est régulier.

PREUVE DE LA PROPOSITION 3.4.1. Le groupe de Selmer $X_\infty(\mathbf{f}^\dagger)$ est de type fini et de torsion sur l'anneau $\mathcal{A}[[T]]$ qui est factoriel, donc possède une fonction L p-adique algébrique $L_p^\dagger(Y,T) \in \mathcal{A}[[T]]$. D'après les lemmes 3.4.2, 3.4.3 et en appliquant la Proposition 2.4.1 (2), les idéaux caractéristiques de $\mathrm{Sel}_\infty(\phi_n)$ et de $\mathrm{Sel}_\infty(f_\alpha)$ sont engendrés respectivement par $L_p^\dagger(y_n,T)$ et $L_p^\dagger(0,T)$. Autrement dit, on a :

$$L_p(g_n,T) = L_p^\dagger(y_n,T) \qquad \text{resp.} \qquad L_p(f_\alpha,T) = L_p^\dagger(0,T)$$

L'argument de la preuve du lemme 3.3.1 montre alors que $\lim_{n\to+\infty} L_p(g_n,T) = L_p(f_\alpha,T)$ dans $\mathcal{O}_M[[T]]$, ce qui termine la preuve de la Proposition 3.4.1. □

Bibliographie

[Art68] Michael ARTIN : On the solutions of analytic equations. *Inventiones mathematicae*, 5(4):277–291, 1968.

[AV75] Yvette AMICE et Jacques VÉLU : Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke. *Astérisque*, 24(25):119–131, 1975.

[BD16] Joël BELLAÏCHE et Mladen DIMITROV : On the eigencurve at classical weight 1 points. *Duke Mathematical Journal*, 165(2):245–266, 2016.

[BDSBT01] Kevin BUZZARD, Mark DICKINSON, Nick SHEPHERD-BARRON et Richard TAYLOR : On icosahedral Artin representations. *Duke Math. J.*, 109(2):283–318, 2001.

[Bel] Joël BELLAÏCHE : *Eigenvarieties, families of Galois representations, p-adic L functions*. Incomplete notes from a Course at Brandeis university given in Fall 2010.

[Ben11] Denis BENOIS : A generalization of Greenberg's $\mathscr{L}$-invariant. *Amer. J. Math.*, 133(6):1573–1632, 2011.

[Ben14] Denis BENOIS : On extra zeros of p-adic L-functions : the crystalline case. *In Iwasawa theory 2012*, volume 7 de *Contrib. Math. Comput. Sci.*, pages 65–133. Springer, Heidelberg, 2014.

[Bou07] Nicolas BOURBAKI : *Algèbre commutative : Chapitres 5 à 7*. Springer Science & Business Media, 2007.

[Bra47] Richard BRAUER : On artin's l-series with general group characters. *Annals of Mathematics*, pages 502–514, 1947.

[Bru67] Armand BRUMER : On the units of algebraic number fields. *Mathematika*, 14:121–124, 1967.

[Buz07] Kevin BUZZARD : Eigenvarieties. *In L-functions and Galois representations*, volume 320 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 59–120. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[CD14] Pierre CHAROLLOIS et Samit DASGUPTA : Integral Eisenstein cocycles on $\mathbf{GL}_n$, I : Sczech's cocycle and p-adic L-functions of totally real fields. *Camb. J. Math.*, 2(1):49–90, 2014.

[CG96] J. COATES et R. GREENBERG : Kummer theory for abelian varieties over local fields. *Invent. Math.*, 124(1-3):129–174, 1996.

[Chi80] Theodore C. K. CHINBURG : *STARK'S CONJECTURE*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1980. Thesis (Ph.D.)–Harvard University.

[CM98] R. COLEMAN et B. MAZUR : The eigencurve. *In Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)*, volume 254 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–113. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[CM09] Frank CALEGARI et Barry MAZUR : Nearly ordinary Galois deformations over arbitrary number fields. *J. Inst. Math. Jussieu*, 8(1):99–177, 2009.

[Coa89] John COATES : On p-adic L-functions. *Astérisque*, (177-178):Exp. No. 701, 33–59, 1989. Séminaire Bourbaki, Vol. 1988/89.

[Coa91] John COATES : Motivic p-adic L-functions. *In L-functions and arithmetic (Durham, 1989)*, volume 153 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 141–172. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[CPR89] John COATES et Bernadette PERRIN-RIOU : On p-adic L-functions attached to motives over $\mathbf{Q}$. *In Algebraic number theory*, volume 17 de *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 23–54. Academic Press, Boston, MA, 1989.

[Das] S DASGUPTA : Stark's conjectures, senior honors thesis, harvard university, april 1999.

[DDT97] Henri DARMON, Fred DIAMOND et Richard TAYLOR : Fermat's last theorem. *In Elliptic curves, modular forms & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993)*, pages 2–140. Int. Press, Cambridge, MA, 1997.

[Del71] Pierre DELIGNE : Formes modulaires et representations ℓ-adiques. *In Séminaire Bourbaki vol. 1968/69 Exposés 347-363*, pages 139–172. Springer, 1971.

[Del79] P. DELIGNE : Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales. *In Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 313–346. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979. With an appendix by N. Koblitz and A. Ogus.

[Dim14] Mladen DIMITROV : On the local structure of ordinary Hecke algebras at classical weight one points. *Automorphic Forms and Galois Representations vol.2 (Durham, 2011), 1-16, London Math. Soc. Lecture Note Series 415*, 2:1–16, 2014.

[DKV18] Samit DASGUPTA, Mahesh KAKDE et Kevin VENTULLO : On the Gross-Stark conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 188(3):833–870, 2018.

[DS74] Pierre DELIGNE et Jean-Pierre SERRE : Formes modulaires de poids 1. *In Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 7, pages 507–530. Elsevier, 1974.

[EKW84] M. EMSALEM, H. H. KISILEVSKY et D. B. WALES : Indépendance linéaire sur $\overline{\mathbf{Q}}$ de logarithmes p-adiques de nombres algébriques et rang p-adique du groupe des unités d'un corps de nombres. *J. Number Theory*, 19(3):384–391, 1984.

[EPW06] Matthew EMERTON, Robert POLLACK et Tom WESTON : Variation of Iwasawa invariants in Hida families. *Inventiones mathematicae*, 163(3):523–580, 2006.

[Fer18] Joseph William FERRARA : *Stark's Conjectures for p-adic L-functions*. Thèse de doctorat, UC Santa Cruz, 2018.

[FG79] Bruce FERRERO et Ralph GREENBERG : On the behavior of p-adic L-functions at $s = 0$. *Invent. Math.*, 50(1):91–102, 1978/79.

[FO12] Olivier FOUQUET et Tadashi OCHIAI : Control theorems for Selmer groups of nearly ordinary deformations. *J. Reine Angew. Math.*, 666:163–187, 2012.

[Gre89] Ralph GREENBERG : Iwasawa theory for p-adic representations. *In Algebraic number theory*, volume 17 de *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 97–137. Academic Press, Boston, MA, 1989.

[Gre91] Ralph GREENBERG : Iwasawa theory for motives. *In L-functions and arithmetic (Durham, 1989)*, volume 153 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 211–233. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[Gre94] Ralph GREENBERG : Iwasawa theory and p-adic deformations of motives. *In Motives (Seattle, WA, 1991)*, volume 55 de *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 193–223. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Gre06] Ralph GREENBERG : On the structure of certain Galois cohomology groups. *Doc. Math.*, (Extra Vol.):335–391, 2006.

[Gre14] Ralph GREENBERG : On p-adic Artin L-functions II. *In Iwasawa theory 2012*, volume 7 de *Contrib. Math. Comput. Sci.*, pages 227–245. Springer, Heidelberg, 2014.

[Gre16] Ralph GREENBERG : On the structure of Selmer groups. *In Elliptic curves, modular forms and Iwasawa theory*, volume 188 de *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 225–252. Springer, Cham, 2016.

[Gro81] Benedict H. GROSS : p-adic L-series at $s = 0$. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 28(3):979–994 (1982), 1981.

[GV00] Ralph GREENBERG et Vinayak VATSAL : On the Iwasawa invariants of elliptic curves. *Invent. Math.*, 142(1):17–63, 2000.

[GV18] Ralph GREENBERG et Vinayak VATSAL : Iwasawa theory for Artin representations I. *Prépublication*, 2018.

[Hid86a] Haruzo HIDA : Galois representations into $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms. *Inventiones mathematicae*, 85(3):545–613, 1986.

[Hid86b] Haruzo HIDA : Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms. *In Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 19, pages 231–273. Elsevier, 1986.

[Iwa59] Kenkichi IWASAWA : On Γ-extensions of algebraic number fields. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 65:183–226, 1959.

[Iwa73] Kenkichi IWASAWA : On $\mathbb{Z}_l$-extensions of algebraic number fields. *Annals of Mathematics*, pages 246–326, 1973.

[Kas13] Payman L. KASSAEI : Modularity lifting in parallel weight one. *J. Amer. Math. Soc.*, 26(1):199–225, 2013.

[Kat04] Kazuya KATO : p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms. *Astérisque*, (295):117–290, 2004.

[Kob03] Shin-ichi KOBAYASHI : Iwasawa theory for elliptic curves at supersingular primes. *Invent. Math.*, 152(1):1–36, 2003.

[KST14] Payman L. KASSAEI, Shu SASAKI et Yichao TIAN : Modularity lifting results in parallel weight one and applications to the Artin conjecture : the tamely ramified case. *Forum Math. Sigma*, 2:e18, 58, 2014.

[Kum51] Ernst Eduard KUMMER : Über eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwickelungscoefficienten einer bestimmten Gattung analytischer Functionen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 41:368–372, 1851.

[KW09] Chandrashekhar KHARE et Jean-Pierre WINTENBERGER : Serre's modularity conjecture. I. *Invent. Math.*, 178(3):485–504, 2009.

[Lan90] Serge LANG : *Cyclotomic fields I and II*, volume 121 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second édition, 1990. With an appendix by Karl Rubin.

[Lan94] Serge LANG : *Algebraic number theory*, volume 110 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second édition, 1994.

[Leo62] Heinrich-Wolfgang LEOPOLDT : Zur Arithmetik in abelschen Zahlkörpern. *J. Reine Angew. Math.*, 209:54–71, 1962.

[Liv89] Ron LIVNÉ : On the conductors of mod l Galois representations coming from modular forms. *J. Number Theory*, 31(2):133–141, 1989.

[Maz72] Barry MAZUR : Rational points of abelian varieties with values in towers of number fields. *Invent. Math.*, 18:183–266, 1972.

[Maz89] B. MAZUR : Deforming Galois representations. *In Galois groups over* $\mathbf{Q}$ *(Berkeley, CA, 1987)*, volume 16 de *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 385–437. Springer, New York, 1989.

[Mil86] J. S. MILNE : *Arithmetic duality theorems*, volume 1 de *Perspectives in Mathematics*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1986.

[Min00] Hermann MINKOWSKI : Zur Theorie der Einheiten in den algebraischen Zahlkörpern. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1900(1):90–93, 1900.

[Miy06] Toshitsune MIYAKE : *Modular forms*. Springer Science & Business Media, 2006.

[MTT86] Barry MAZUR, John TATE et Jeremy TEITELBAUM : On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer. *Inventiones mathematicae*, 84(1):1–48, 1986.

[Nek06] Jan NEKOVÁŘ : Selmer complexes. *Astérisque*, (310):viii+559, 2006.

[Neu99] Jürgen NEUKIRCH : *Algebraic number theory*, volume 322 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder.

[NSW08] Jürgen NEUKIRCH, Alexander SCHMIDT et Kay WINGBERG : *Cohomology of number fields*, volume 323 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second édition, 2008.

[Nys96] Louise NYSSEN : Pseudo-représentations. *Mathematische Annalen*, 306(1):257–283, 1996.

[Och05] Tadashi OCHIAI : Euler system for galois deformations (système d'euler pour les déformations galoisiennes). *In Annales de l'institut Fourier*, volume 55, pages 113–146, 2005.

[Och06] Tadashi OCHIAI : On the two-variable Iwasawa main conjecture. *Compositio Mathematica*, 142(5):1157–1200, 2006.

[Pil17] Vincent PILLONI : Formes modulaires p-adiques de Hilbert de poids 1. *Inventiones mathematicae*, 208(2):633–676, May 2017.

[PR95a] Bernadette PERRIN-RIOU : Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques. *Astérisque*, (229):198, 1995.

[PR95b] Bernadette PERRIN-RIOU : Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques. *Astérisque*, 1995.

[PR04] Robert POLLACK et Karl RUBIN : The main conjecture for CM elliptic curves at supersingular primes. *Ann. of Math. (2)*, 159(1):447–464, 2004.

[PS16] Vincent PILLONI et Benoît STROH : Surconvergence, ramification et modularité. *Astérisque*, (382):195–266, 2016.

[Rou96] Raphaël ROUQUIER : Caractérisation des caractères et pseudo-caractères. *Journal of algebra*, 180(2):571–586, 1996.

[Rub91] Karl RUBIN : The "main conjectures" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields. *Inventiones mathematicae*, 103(1):25–68, 1991.

[Rub96] Karl RUBIN : A Stark conjecture "over $\mathbf{Z}$" for abelian L-functions with multiple zeros. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 46(1):33–62, 1996.

[Sas13] Shu SASAKI : On Artin representations and nearly ordinary Hecke algebras over totally real fields. *Doc. Math.*, 18:997–1038, 2013.

[Ser67] Jean-Pierre SERRE : Local class field theory in algebraic number theory, ed. jws cassels and a. fröhlich, 1967.

[Ser70] Jean-Pierre SERRE : Facteurs locaux des fonctions zêta des varietés algébriques (définitions et conjectures). *In Séminaire Delange-Pisot-Poitou. 11e année : 1969/70. Théorie des nombres. Fasc. 1 : Exposés 1 à 15 ; Fasc. 2 : Exposés 16 à 24*, page 15. Secrétariat Math., Paris, 1970.

[Sie70] Carl Ludwig SIEGEL : *Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen*. Vandenhoeck & Ruprecht, 1970.

[Sta71] H. M. STARK : Values of L-functions at $s = 1$. I. L-functions for quadratic forms. *Advances in Math.*, 7:301–343 (1971), 1971.

[Sta75] H. M. STARK : L-functions at $s = 1$. II. Artin L-functions with rational characters. *Advances in Math.*, 17(1):60–92, 1975.

[Sta76] H. M. STARK : L-functions at $s = 1$. III. Totally real fields and Hilbert's twelfth problem. *Advances in Math.*, 22(1):64–84, 1976.

[Sta77] H. M. STARK : Class fields and modular forms of weight one. pages 277–287. Lecture Notes in Math., Vol. 601, 1977.

[Sta80] Harold M. STARK : L-functions at $s = 1$. IV. First derivatives at $s = 0$. *Adv. in Math.*, 35(3):197–235, 1980.

[SU14] Christopher SKINNER et Eric URBAN : The Iwasawa main conjectures for GL_2. *Inventiones mathematicae*, 195(1):1–277, 2014.

[Tat76] John TATE : Relations between K_2 and Galois cohomology. *Invent. Math.*, 36:257–274, 1976.

[Tat84] John TATE : *Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en $s = 0$*, volume 47 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1984. Lecture notes edited by Dominique Bernardi and Norbert Schappacher.

[Tay03] Richard TAYLOR : On icosahedral Artin representations. II. *Amer. J. Math.*, 125(3):549–566, 2003.

[Vis76] Mikhail Markovich VISHIK : Non-archimedean measures connected with dirichlet series. *Matematicheskii Sbornik*, 141(2):248–260, 1976.

[Was97] Lawrence C WASHINGTON : *Introduction to cyclotomic fields*, volume 83. Springer Science & Business Media, 1997.

[Wil88] Andrew WILES : On ordinary λ-adic representations associated to modular forms. *Inventiones mathematicae*, 94(3):529–573, 1988.

[Wil90] A. WILES : The Iwasawa conjecture for totally real fields. *Ann. of Math. (2)*, 131(3):493–540, 1990.

[Wil95] Andrew WILES : Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. *Ann. of Math. (2)*, 141(3):443–551, 1995.