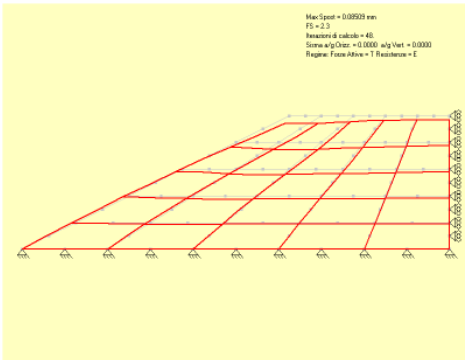
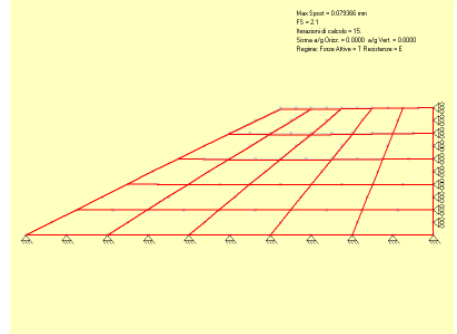
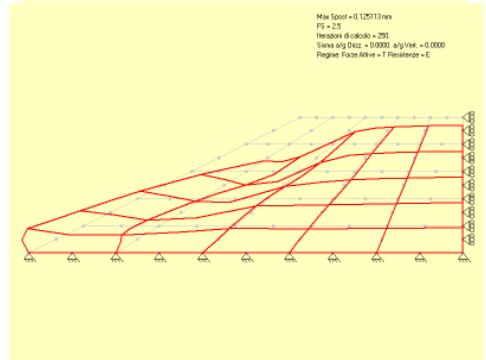


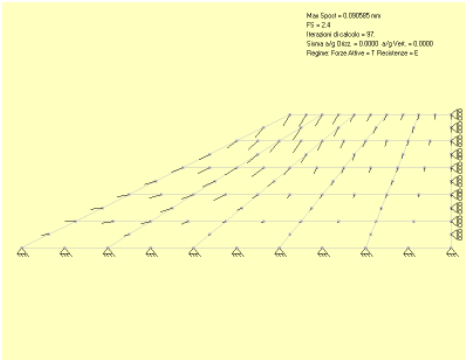
Max Spot = 0.07900 mm  
 FS = 2.1  
 Iterazioni di calcolo = 15  
 Somma a/p/Disz = 0.0000 a/p/Veri = 0.0000  
 Regione: Forza Attiva = T Resistenza = E



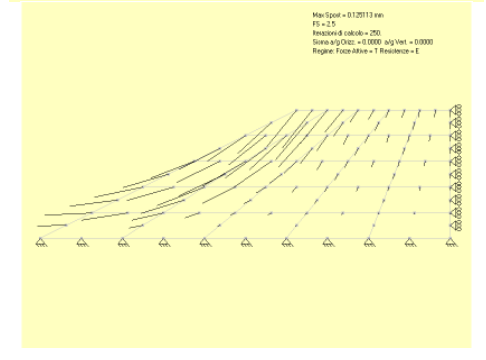
Max Spot = 0.08500 mm  
 FS = 2.3  
 Iterazioni di calcolo = 45  
 Somma a/p/Disz = 0.0000 a/p/Veri = 0.0000  
 Regione: Forza Attiva = T Resistenza = E



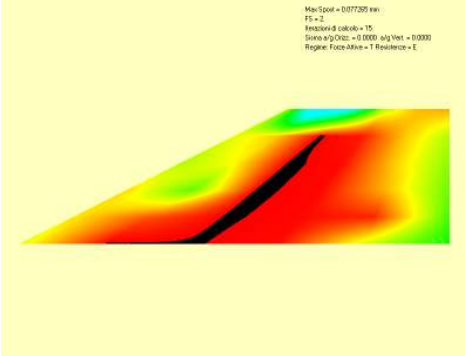
Max Spot = 0.12513 mm  
 FS = 2.5  
 Iterazioni di calcolo = 200  
 Somma a/p/Disz = 0.0000 a/p/Veri = 0.0000  
 Regione: Forza Attiva = T Resistenza = E



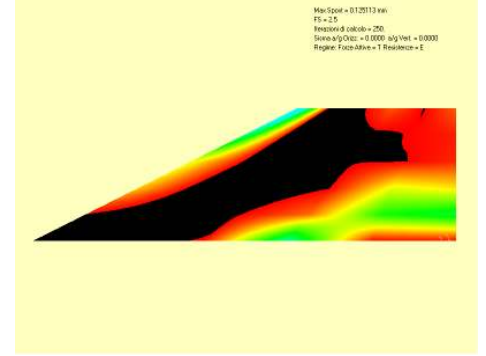
Max Spot = 0.08855 mm  
 FS = 2.4  
 Iterazioni di calcolo = 37  
 Somma a/p/Disz = 0.0000 a/p/Veri = 0.0000  
 Regione: Forza Attiva = T Resistenza = E



Max Spot = 0.12013 mm  
 FS = 2.5  
 Iterazioni di calcolo = 250  
 Somma a/p/Disz = 0.0000 a/p/Veri = 0.0000  
 Regione: Forza Attiva = T Resistenza = E



Max Spot = 0.07730 mm  
 FS = 2  
 Iterazioni di calcolo = 15  
 Somma a/p/Disz = 0.0000 a/p/Veri = 0.0000  
 Regione: Forza Attiva = T Resistenza = E



Max Spot = 0.12013 mm  
 FS = 2.0  
 Iterazioni di calcolo = 250  
 Somma a/p/Disz = 0.0000 a/p/Veri = 0.0000  
 Regione: Forza Attiva = T Resistenza = E

# MANUALE TEORICO

## SOMMARIO

GENERALITA' SULL'ALGORITMO DI VERIFICA .....	3
1 – METODO AGLI ELEMENTI FINITI .....	5
1.1 – GENERALITA' .....	5
1.2 – ALGORITMO NUMERICO. IMPOSTAZIONE DELLA RISOLUZIONE .....	6
1.2.1 – RIGIDEZZA DELL'ELEMENTO SINGOLO .....	10
1.2.2 – FUNZIONI DI FORMA .....	13
1.2.2.1 – ELEMENTI QUADRATI A 8 NODI .....	13
1.2.3 – DERIVATE RISPETTO ALLE COORDINATE GLOBALI (x, y) .....	14
1.2.4 – INTEGRAZIONE NUMERICA PER QUADRILATERI .....	14
1.2.5 – ELEMENTI TRIANGOLARI .....	15
2 – ANALISI GEOTECNICA E NON LINEARITA' DEI MATERIALI .....	16
2.1 - RAPPRESENTAZIONE DEGLI STATI DI SOLLECITAZIONE .....	16
2.2 - IL CRITERIO DI MOHR – COULOMB .....	17
2.3.1 – IL MODELLO DI HOEK-BROWN .....	18
2.3 - CONDIZIONI DRENATE E NON DRENATE .....	19
2.3.1 – OPERATIVITA' DELLE SCELTE .....	22
2.4 - LA VISCOPLASTICITA' .....	23
2.5 – CRITERIO DI FLUSSO “ASSOCIATO” E “NON ASSOCIATO”. CONCETTO DI DILATANZA .....	25
2.6 - CONDIZIONI SISMICHE .....	26
2.7 – NON LINEARITA' .....	27
3 - IL PROBLEMA DELLA STABILITA' GEOTECNICA .....	28
3.1 – MECCANISMI DI DIFFUSIONE .....	28
3.2 – FATTORE DI SICUREZZA GEOTECNICO .....	29
RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI .....	31

## **GENERALITA' SULL'ALGORITMO DI VERIFICA**

FEA – Slope è un innovativo programma per l'analisi di stabilità dei pendii basato su un robusto algoritmo di Analisi agli Elementi Finiti (F.E.A.).

Il pendio viene schematizzato in elementi piani a otto nodi, dotati ciascuno di caratteristiche geometriche e geotecniche peculiari.

Le caratteristiche geotecniche sono definite in termini di coesione, attrito interno, dilatanza, coefficienti di Poisson e modulo di Young. Tali termini sono ricavati in base al modello di collasso utilizzato:

- da prove in sito o in laboratorio per il modello di Mohr – Coulomb per i suoli
- mediante correlazioni con i parametri del modello di Hoek-Brown per le rocce

Il modello geotecnico del terreno in fase di rottura del pendio comporta una funzione di superamento del collasso di tipo non associato, interpretata secondo una teoria di comportamento visco - plastico.

L'analisi geotecnica di collasso è condotta secondo il criterio di Mohr – Coulomb generalizzato e fornisce tutta una serie di importanti dati di output:

- il coefficiente di sicurezza contro la "rottura" del pendio
- la geometria esatta del movimento franoso, con ricostruzione puntuale del fenomeno di scivolamento
- la previsione incrementale delle modalità e dei movimenti di avvicinamento al collasso del pendio, con possibilità di riscontro qualitativo / quantitativo in sito mediante strumentazione geotecnica
- una tomografia della funzione di collasso secondo il criterio di Mohr – Coulomb, con individuazione delle masse di terreno soggette a instabilizzazione già nelle prime fasi del processo franoso.

La geometria del problema è definita mediante l'input di punti, elementi quadrangolari singoli e intere sottomesh di elementi finiti.

Le condizioni della falda freatica vengono introdotte sia tenendo conto della saturazione dei terreni, sia considerando il regime di sforzi (totali / efficaci) da considerare nella soluzione del problema.

L'analisi sismica è condotta con possibilità di inserire campi di accelerazioni orizzontali in eventuale contemporaneità con accelerazioni verticali, queste ultime dirette sia verso il basso sia verso l'alto.

In questo modo vengono puntualmente ottemperate le più recenti Normative sia Nazionali che Comunitarie.

L'approccio computerizzato è implementato in ambiente MS Windows e richiama la parametrizzazione usuale sia per i problemi di stabilità sia per l'analisi agli Elementi Finiti. Per ogni tipo di suolo sono considerati i parametri di resistenza al taglio e quelli di deformabilità e dilatanza tipici dell'analisi agli Elementi Finiti, mediante finestre di dialogo.

Il Manuale dell'Utente riporta in Allegato le modalità con le quali ricavare tutti i parametri geotecnici necessari. Sono indicati per la caratterizzazione gli usuali metodi geognostici:

sondaggi geotecnici, prove penetrometriche in suoli granulari e prove di laboratorio sulle argille.

L'algoritmo risolutivo implementato da FEA - Slope è di tipo iterativo.

In una prima fase si verifica la stabilità del pendio nelle condizioni "iniziali" risultanti dai dati geotecnici e di campagna. In questa fase, in altre parole, sono verificate le condizioni del pendio considerando i valori nominali (ovvero quelli immessi dall'Utente, senza applicazione di fattori di sicurezza) dei parametri geotecnici.

Successivamente i parametri di resistenza dei terreni vengono ridotti dividendoli per una serie di coefficienti di sicurezza, via via crescenti, e si ripete il calcolo F.E.M. fino a quando, a causa della diminuzione introdotta dal coefficiente di sicurezza in uso in quel preciso step di calcolo, il pendio non risulta più stabile.

Il collasso del pendio nel suo insieme risulta dal collasso di una sommatoria sufficientemente estesa di singoli elementi finiti.

Ogni volta che un singolo elemento di terreno collassa perché le sue risorse di resistenza al taglio sono insufficienti, una parte di sforzi viene ridistribuita agli elementi vicini. Questi elementi possono sopportare l'incremento di sollecitazione, riarraggiandosi, oppure collassare a loro volta. Nel secondo caso, anch'essi ridistribuiscono al contorno le sollecitazioni in eccesso, e il calcolo di stabilità viene ripetuto per l'intero pendio nelle mutate condizioni.

Nel caso in cui le ripetizioni successive (iterazioni) del calcolo portino infine ad una situazione complessivamente stabilizzata, il pendio viene considerato verificato per quel preciso coefficiente di sicurezza applicato alla coesione e all'attrito interno. Si passa quindi ad incrementare il coefficiente di sicurezza (ovvero a diminuire coesione e attrito interno di calcolo) e si ripetono i passaggi dell'analisi F.E.M.

Il nuovo coefficiente di sicurezza viene applicato alla coesione  $C$  ed alla tangente dell'angolo di attrito interno  $\phi$ .

Il pendio si considera complessivamente collassato quando dopo un congruo numero di iterazioni (suggerite almeno 500) le calcolazioni non convergono, ovvero la redistribuzione delle sollecitazioni al collasso non ha termine.

Il coefficiente di sicurezza  $F_s$  immediatamente precedente al collasso verrà quindi assunto come quello effettivo del pendio a rottura.

Ulteriori dettagli sui tipi di soluzione degli algoritmi FEM e sui meccanismi di applicazione dei fattori di sicurezza possono essere reperiti anche in Rabuffetti (2012, 2013).

## **1 – METODO AGLI ELEMENTI FINITI.**

### **1.1 – GENERALITA'**

Il Metodo agli Elementi Finiti (F.E.M.) è una tecnica di risoluzione di equazioni differenziali parziali che consiste nel discretizzare queste equazioni nelle loro dimensioni spaziali. La discretizzazione viene effettuata localmente su piccole regioni di forma arbitraria (elementi finiti) dotati di caratteristiche significative pari a quelle dell'insieme nel quale si esegue l'integrazione.

Il metodo prevede l'assemblaggio di una matrice globale in cui le caratteristiche geometriche e meccaniche e le forze esterne e le relative variazioni sono riferite a un numero codificato di nodi, per i quali viene fornito un input coerente e in corrispondenza dei quali si ricavano gli outputs significativi.

La matrice globale riflette la sovrapposizione delle azioni e degli effetti delle azioni nelle aree discrete considerate.

La soluzione del sistema associato alla matrice permette di definire il campo di variazione delle incognite dell'intero spazio considerato, sia per i punti nodali sia che per tutti quelli interni ai singoli elementi.

Le relazioni che legano le condizioni ai nodi con quanto accade all'interno delle aree discrete sono le funzioni di forma degli elementi finiti.

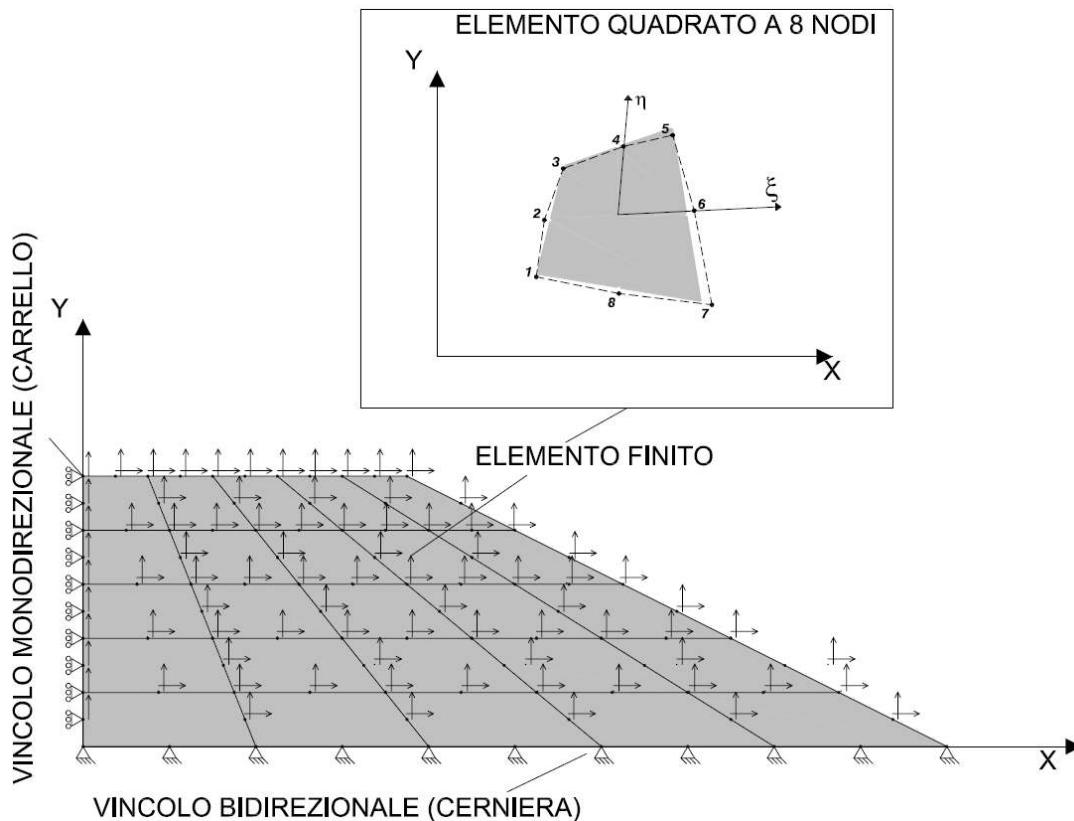
## 1.2 – ALGORITMO NUMERICO. IMPOSTAZIONE DELLA RISOLUZIONE.

Una volta implementata graficamente la griglia FEM caratterizzata dalla presenza di elementi e relativi nodi al contorno, la tecnica risolutiva consiste in sintesi nei seguenti passi:

1) - implementazione di determinate relazioni numeriche che “condensano” ai nodi le caratteristiche meccaniche di tutti i punti all’interno dei singoli elementi finiti (in meccanica, le matrici delle rigidità dei singoli elementi). Tali relazioni, costituite da processi di integrazione di tipo lineare, traducono i processi di derivazione parziali che sostengono i legami sforzi/deformazioni

Un esempio di griglia FEM, nella quale sono evidenziati gli elementi, i nodi e le relative libertà nelle due direzioni coordinate X e Y (evidenziate dalle frecce), oltre alle libertà inibite al contorno (vincoli esterni) è mostrata nella seguente Fig. 1.

Fig. 1 – Maglia bidimensionale di elementi finiti



2) - costruzione di un sistema algebrico lineare risolvibile in cui sono assemblate le matrici delle rigidità di tutti gli elementi finiti, insieme ai termini noti costituiti dalle forze esterne, compresa la forza peso. Il sistema modella per intero il problema e soddisfa le condizioni di equilibrio di tutti i nodi della griglia. In termini fisici, il sistema contiene le caratteristiche proprie di tutti gli elementi finiti (caratteristiche di deformazione e resistenze) insieme a tutte le condizioni/azioni esterne agenti sul sistema (ad es. la gravità o i carichi impressi, le pressioni neutre al contorno, altri dati noti a priori) riportate ai nodi

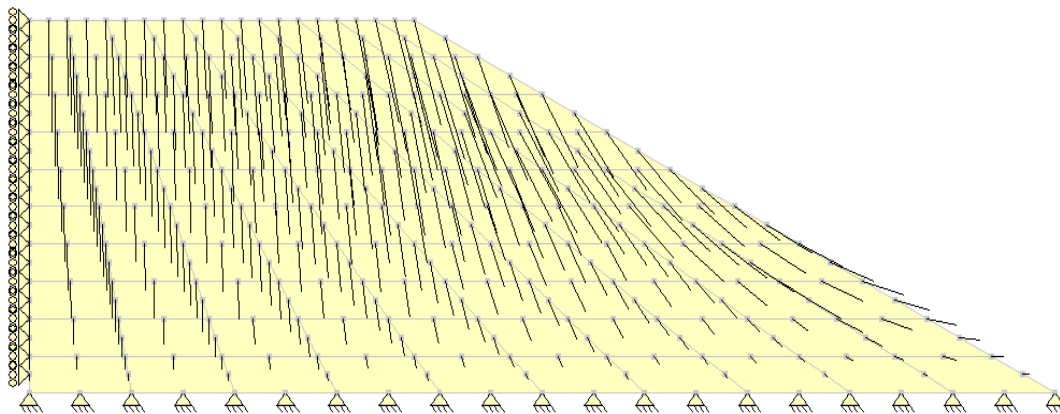
Considerando inizialmente un problema di elasticità lineare, in forma sintetica matriciale il sistema di equazioni di primo grado risolvibile è il seguente:

$$\mathbf{K} * \mathbf{r} = \mathbf{F} \quad 1)$$

La matrice  $\mathbf{K}$ , che può essere molto estesa, raccoglie le rigidezze dell'intero sistema,  $\mathbf{r}$  è il vettore degli spostamenti generalizzati nelle direzioni  $x$  e  $y$ ,  $\mathbf{F}$  il vettore delle forze esterne applicate.

3) - risoluzione del sistema, determinando dapprima il quadro degli spostamenti e delle deformazioni (e/o delle pressioni neutre) in tutti i nodi mediante il calcolo, e successivamente lo stato tensionale che accompagna queste deformazioni. Al termine del calcolo del sistema risolvibile FEM, ciascuna radice di equazione rappresenta una componente di spostamento, orizzontale o verticale, da combinare tra loro ottenendo gli spostamenti globali di ogni singolo nodo. Il quadro di insieme di tutti gli spostamenti calcolati evidenzia la potenzialità del sistema di analisi. In effetti, il plottaggio dei valori contenuti nel vettore  $\mathbf{r}$ , come mostrato in Fig. 2, riferiti ciascuno al nodo di pertinenza del pendio iniziale, costituisce una prima sintesi significativa.

Fig. 2 – Spostamenti calcolati con l'analisi FEM



4) – Una volta calcolati gli spostamenti ai nodi, si passa alla determinazione del quadro di spostamenti in tutti i punti all'interno degli elementi finiti, a partire dai valori noti in corrispondenza dei nodi. Ciò avviene mediante la definizione di alcune relazioni specifiche e peculiari che legano il comportamento degli elementi, punto per punto al proprio interno, con quello che accade ai nodi situati sul contorno (funzioni di forma). A tali funzioni è demandata la descrizione di quanto si registra all'interno di un singolo elemento finito una volta note le grandezze che interessano i nodi. In altre parole, note le deformazioni ai nodi, le funzioni di forma permettono di calcolare, punto per punto con continuità, le stesse grandezze all'interno dell'elemento. La validità delle funzioni di forma si estende a qualsiasi quantità che si possa considerare variabile con continuità nel campo di integrazione

I passi precedenti possono essere considerati comuni alle analisi FEM condotte per un grande numero di sistemi meccanici. In geotecnica, la forte non-linearità che investe il

comportamento dei terreni già a partire da bassi livelli di stress influisce sugli spostamenti ricavati con il calcolo.

Perciò, per ottenere gli spostamenti finali, di norma in geotecnica si fa uso della teoria della viscoplasticità (specificamente per modellare il comportamento non lineare dei terreni), discussa nel seguito, che comporta l'adozione di soluzioni di calcolo iterative.

In una fase ulteriore, sulla base delle relazioni sforzi/deformazioni già utilizzate per descrivere le matrici delle rigidzze, si definiscono i campi tensionali generati nel terreno. In pratica si introduce una nuova modellazione, inversa rispetto alla precedente, al fine di determinare gli stati di sollecitazione interni a ciascun elemento finito.

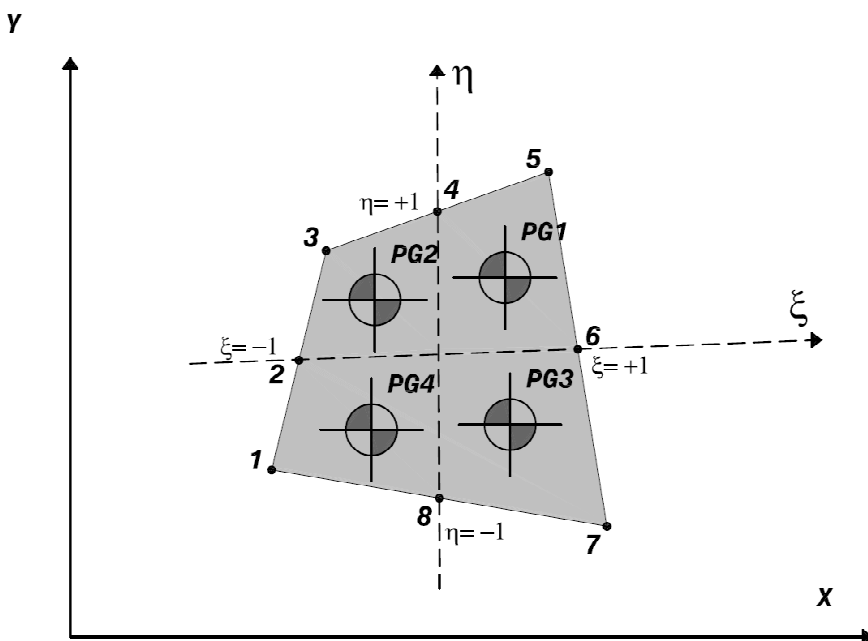
Il calcolo geotecnico viene enormemente semplificato introducendo per gli elementi finiti una coppia di coordinate *interne adimensionali*  $\xi$  e  $\eta$  atte a *normalizzare* l'elemento tra i seguenti valori estremi:

$$\begin{aligned} -1 \leq \xi \leq +1 \\ -1 \leq \eta \leq +1. \end{aligned}$$

Di regola la formulazione matematica di un elemento si effettua in modo che ogni parametro riferito alle coordinate locali  $\xi$  e  $\eta$  sia riferibile e mantenga le sue proprietà anche rispetto alle coordinate globali X e Y (proprietà isoparametrica degli elementi).

Nelle integrazioni, i nodi vengono coadiuvati da altri punti interni rappresentativi. I punti rappresentativi nei quali vengono verificate le caratteristiche di resistenza a taglio del terreno, mediante opportune funzioni delle quali si calcolano gli integrali, sono i punti di Gauss, in numero di 4 per elementi piani quadrilateri (8 per elementi poliedri a 6 facce o "brick", ecc.), evidenziati con la nomenclatura PG in Fig. 3.

Fig. 3 – Elemento quadrilatero a 8 nodi



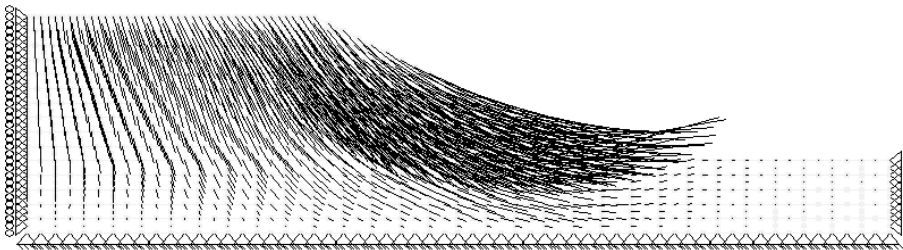
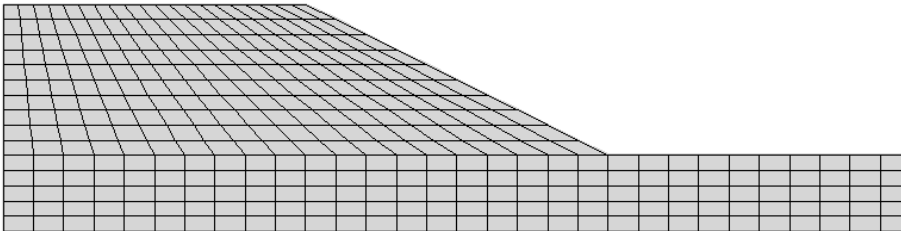
La gestione dei dati di geometria dei nodi all'interno del programma avviene mediante due database: il database delle coordinate assolute X e Y dei nodi e il database del vettore di



governo (Vettore *Steering*), che associa ad ogni singolo elemento i nodi di pertinenza e le singole *libertà* (spostamenti in orizzontale e verticale) effettivamente permesse. Il numero delle libertà corrisponde per definizione al numero di equazioni del sistema risolvibile. Il vettore *Steering* contiene valori pari a 0 (zero) in corrispondenza di ogni singola libertà bloccata nel sistema (vincoli esterni).

A titolo di esempio, nella seguente figura 4 è mostrata una griglia bidimensionale per la stabilità del pendio, composta da 350 elementi finiti piani quadrilateri, dotati di 8 nodi ciascuno, per un totale di 1141 nodi. La risoluzione algebrica del sistema permette di definire le componenti di spostamento in direzione X e Y di ogni nodo, combinate come rappresentate nella discretizzazione successiva.

Fig. 4 – Maglia bidimensionale di elementi finiti e spostamenti calcolati



Ogni nodo, quando si tratta di materiali porosi saturi o insaturi come i terreni, possiede due libertà (traslazione orizzontale e traslazione verticale), quindi il numero totale di libertà del sistema è pari a  $1141 * 2 = 2284$ . Ogni libertà è descritta da una equazione lineare. Alcune equazioni però rappresentano dei vincoli esterni e sono perciò identità nulle, che vengono eliminate, così che rimangono solo le libertà non azzerate da tali nodi a terra (in totale 42 cerniere e 59 carrelli verticali, per un numero di  $42 * 2 + 59 = 143$  libertà eliminate). Le libertà che vengono realmente associate ad un'incognita del sistema risolvibile sono perciò  $1141 * 2 - 143 = 2139$ , che è il numero di equazioni del sistema stesso.

### 1.2.1 – RIGIDEZZA DELL'ELEMENTO SINGOLO

In accordo con Smith e Griffiths (1988), si considera l'approccio energetico al problema agli Elementi Finiti.

Il primo passo necessario consiste nella definizione della matrice delle rigidezze di un singolo elemento, **KM**.

Senza perdere di generalità, si considera un elemento monodimensionale lineare.

La relazione che regge gli spostamenti generici del nodo ( $w$ ) si pone attraverso le equazioni di forma dell'elemento generico  $N$ , e si scrive in termini matriciali come

$$w = \mathbf{N}w \quad 2)$$

Si considera inizialmente l'energia elementare immagazzinata in un elemento ( $\delta u$ ) e dovuta alla deformazione prodotta da una certa azione esterna (rappresentabile come prodotto delle proprietà dei materiali **D**, dell'operatore  $\mathbf{A} = -\partial^2/\partial x^2$  (riferito alla variabile spaziale generica  $x$ ) e delle funzioni di forma dell'elemento finito ( $w$ ).

Detta  $M$  l'azione esterna, si dimostra che

$$\delta u = \frac{1}{2} * (-\partial^2 w / \partial x^2) M \delta x \quad 3)$$

ovvero

$$\delta u = \frac{1}{2} * (\mathbf{A}w)^T M \delta x \quad 4)$$

dove l'azione esterna a sua volta è riconducibile alle proprietà dell'elemento finito scrivendo

$$M = \mathbf{D} \mathbf{A} w \quad 5)$$

Si può quindi concludere che

$$\begin{aligned} \delta u &= \frac{1}{2} * (\mathbf{A}w)^T \mathbf{D} \mathbf{A} w \delta x \\ &= \frac{1}{2} * w^T (\mathbf{A} \mathbf{N})^T \mathbf{D} \mathbf{A} \mathbf{N} w \delta x \end{aligned} \quad 6)$$

e integrando la relazione sull'intero elemento finito in  $x$ ,

$$U = \frac{1}{2} * \int_0^L w^T (\mathbf{A} \mathbf{N})^T \mathbf{D} \mathbf{A} \mathbf{N} w dx \quad 7)$$

La notazione usuale negli elementi finiti di  $\mathbf{A} \mathbf{N}$  è **B**, e  $w^T$  è indipendente da  $x$ , così che si scrive

$$U = \frac{1}{2} * w^T \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx w \quad 8)$$

Tenuto conto del reale significato energetico di U (energia “cinetica” prodotta da un’azione M che produce una deformazione in termini di w), e dei pari risultati analitici raggiungibili percorrendo l’analisi statica dell’elemento invece di quella energetica, si arriva a scrivere

$$\int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx \mathbf{w} = q \int_0^L \mathbf{N}^T dx \quad 9)$$

dove q rappresenta la sollecitazione elementare esterna.

In termini statici, la discussione analitica portava a concludere con la relazione

$$\mathbf{KM} \mathbf{w} = q \int_0^L \mathbf{N}^T dx \quad 10)$$

dove la **KM** è la matrice di rigidezza dell’elemento finito.

Dalle relazioni riportate, si ricava una coincidenza molto utile per ricavare la matrice delle rigidezze del singolo elemento:

$$\mathbf{KM} = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx \quad 11)$$

La trattazione di elementi bidimensionali è analoga. L’energia di deformazione dell’elemento per unità di spessore è la seguente:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} * \iint_0^L \sigma^T \epsilon dx dy \\ &= \frac{1}{2} * \mathbf{r}^T \iint_0^L (\mathbf{AN})^T \mathbf{D} (\mathbf{AN}) dx dy \mathbf{r} \\ &= \frac{1}{2} * \mathbf{r}^T \iint_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy \mathbf{r} \end{aligned} \quad 7.1)$$

dove **r** assume il significato di **w** nel caso lineare, mentre l’operatore **A** e **D** sono ridefiniti per l’elemento piano:

$$\mathbf{A} = \left\{ \begin{array}{cc} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{D} = E / (1-\nu^2) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

e inoltre:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}$$

In analogia ai passaggi 8), 9) e 10), per l'elemento piano si ricava corrispondentemente:

$$\mathbf{KM} = \iint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dx \, dy \quad 12)$$

L'assemblaggio del sistema risolvete 1) avviene posizionando opportunamente la relazione matriciale delle rigidezze dei singoli elementi 12) all'interno di  $\mathbf{K}$ .

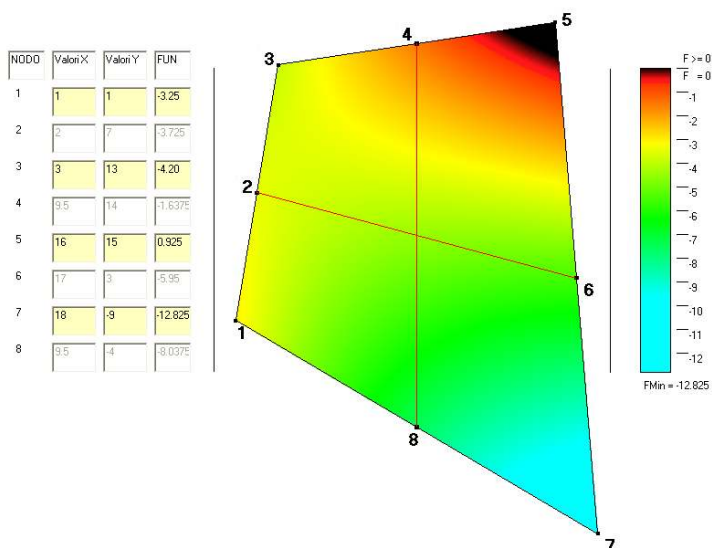
### 1.2.2 – FUNZIONI DI FORMA

Una volta risolto il sistema FEM e calcolate perciò le variabili significative in corrispondenza dei nodi della maglia, si procede a determinare le stesse grandezze all'interno del *continuum* costituito dall'elemento finito.

Lo strumento utilizzato nell'analisi numerica è costituito dalla funzioni di forma. Gli elementi finiti del tipo quadrilatero a 8 nodi utilizzando efficienti funzioni particolarmente adatte ai problemi di tipo geotecnico.

A titolo di esemplificazione delle potenzialità delle funzioni di forma all'interno di un elemento finito, nella seguente Fig. 5 è mostrata la copertura di un campo bidimensionale continuo (l'elemento) mediante una funzione cromatica. Assegnati 8 valori di colore in corrispondenza degli 8 nodi, e una legge di variazione, le funzioni di forma provvedono a definire i colori intermedi calcolati per ciascun punto all'interno del campo continuo.

Fig. 5 – Funzione cromatica integrata in un *continuum* quadrato a partire dai valori noti in 8 punti



Le funzioni di forma di FEA Slope sono descritte in accordo con Smith e Griffiths (1988) e Zienkiewicz e Taylor (1989). Le derivate necessarie alle definizioni, introdotte in base all'operatore **A** e alla successiva integrazione, sono ricavate coerentemente.

#### 1.2.2.1 – ELEMENTI QUADRATI A 8 NODI

Le funzioni di forma, in termini delle coordinate locali  $\xi$  e  $\eta$ , scelte con il criterio di variabilità di campo  $\xi = \pm 1$ ,  $\eta = \pm 1$  (Figg. 1 e 3), sono le seguenti.

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4} (1-\xi) (1-\eta) (-\xi-\eta-1) \\
 N_2 &= \frac{1}{2} (1-\xi) (1-\eta^2) \\
 N_3 &= \frac{1}{4} (1-\xi) (1+\eta) (-\xi+\eta-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_4 &= \frac{1}{2} (1-\xi^2) (1+\eta) \\
 N_5 &= \frac{1}{4} (1+\xi) (1+\eta) (\xi+\eta-1) \\
 N_6 &= \frac{1}{2} (1+\xi) (1-\eta^2) \\
 N_7 &= \frac{1}{4} (1+\xi) (1-\eta) (\xi-\eta-1) \\
 N_8 &= \frac{1}{2} (1-\xi^2) (1-\eta)
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

### 1.2.3 – DERIVATE RISPETTO ALLE COORDINATE GLOBALI (x, y)

Le derivate rispetto ai sistemi locali ( $\xi, \eta$  oppure L1 e L2) sono di immediata formulazione. Le derivate rispetto al sistema globale (x, y) richiedono l'introduzione della matrice Jacobiana J:

$$\begin{Bmatrix} \partial / \partial \xi \\ \partial / \partial \eta \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \end{Bmatrix}
 \tag{14}$$

ovvero:

$$\begin{Bmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \partial / \partial \xi \\ \partial / \partial \eta \end{Bmatrix}
 \tag{15}$$

Il determinante della matrice Jacobiana,  $\det |\mathbf{J}|$ , viene calcolato in quanto necessario per gli integrali trasformati del tipo:

$$\iint dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det |\mathbf{J}| d\xi d\eta
 \tag{16}$$

E' da notare che il Jacobiano diviene indeterminato per poligoni concavi che devono perciò essere evitati.

### 1.2.4 – INTEGRAZIONE NUMERICA PER QUADRILATERI

In pratica, le (16) vengono valutate numericamente attraverso la quadratura Gaussiana su superfici quadrangolari, nella forma

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j f(\xi_i, \eta_j)
 \tag{17}$$

dove  $w_i$  e  $w_j$  sono coefficienti ponderali (pari entrambi, nel caso in esame, a 1) e  $\xi_i, \eta_j$  sono coordinate di posizione all'interno dell'elemento dei punti di quadratura o punti di Gauss.

Nel caso in esame, per 2 punti di quadratura di Gauss in orizzontale per 2 in verticale (Fig. 3), si pone  $\xi_j \eta_j = \pm 1/\sqrt{3}$ .

Il range di integrazione è pari a  $\pm 1$ , ed è il motivo dell'introduzione del sistema di coordinate locali.

L'approssimazione dell'uguaglianza 17) è esatta per funzioni cubiche quando  $n = 2$ .

#### **1.2.5 – ELEMENTI TRIANGOLARI**

FEA Slope utilizza elementi triangolari derivati come situazione limite da elementi quadrilateri per i quali due lati siano perfettamente allineati. In questo modo la velocità dell'algoritmo non viene influenzata dalla presenza di elementi formalmente diversi.

## 2 – ANALISI GEOTECNICA E NON LINEARITA' DEI MATERIALI

L'analisi del pendio agli Elementi Finiti (FEA) viene condotta come segue:

- assemblaggio del sistema risolvibile del pendio
- calcolo delle deformazioni e definizione dello stato di sollecitazione in ogni parte del pendio
- valutazione della funzione di collasso F secondo il criterio di Mohr-Coulomb per ciascun Punto di Gauss di ogni elemento finito
- generazione di sovrasollecitazioni o "body loads" incrementali nel caso che i singoli elementi finiti (ma non l'intero pendio) siano da considerare collassati, per intero o in parte, in base ai valori assunti dalla funzione F. Tali "body loads" vengono redistribuiti al contorno dell'elemento su altri che non siano anch'essi collassati
- riassetto del sistema risolutivo e ricalcolo, secondo uno schema iterativo
- valutazione della convergenza dei risultati tra due iterazioni successive:
  - se la convergenza è verificata, l'analisi viene interrotta e il pendio è considerato integro
  - se la convergenza non è verificata, si passa ad una successiva iterazione di calcolo
- in presenza di iterazioni che si prolungano oltre un certo limite grande prefissato (p. es. 500 iterazioni), senza verificare la convergenza, si considera il pendio collassato
- in presenza di altre anomalie, p. es. deformazioni eccessive a basso livello di interazione, si provvede a verificare e/o adattare i parametri numerici della funzione di collasso F.

Il metodo numerico permette di ripetere l'analisi FEA a cascata per valori dei parametri di resistenza a taglio dei materiali decrescenti.

In sostanza, considerati i parametri di resistenza al taglio  $\phi$  e c, si applica un coefficiente riduttivo  $F_s$  alla tangente  $\tan\phi$  ed alla coesione stessa c, ripetendo il calcolo della stabilità del pendio e verificando i risultati.

Qualora il calcolo converga anche con i nuovi parametri  $\tan\phi$  e c ridotti, si incrementa  $F_s$  e si procede ad un nuovo calcolo.

Qualora il calcolo non converga, oppure si verifichi una completa plasticizzazione dei punti di Gauss, il valore di  $F_s$  ultimo calcolato prima dell'evento è il coefficiente di sicurezza verificato numericamente.

### 2.1 - RAPPRESENTAZIONE DEGLI STATI DI SOLLECITAZIONE

In generale, date le condizioni di stress di un punto all'interno di un corpo sottoposto a carichi, il tensore cartesiano di stress è dato da:

$$\{ \sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx} \} \quad 18)$$

che si dimostra equivalente al tensore degli sforzi principali ortogonali:



$$\{ \sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \} \quad 19)$$

di orientamento a priori non noto.

In termini computazionali si preferiscono i seguenti invarianti:

$$s = 1/\sqrt{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad 20.1)$$

$$t = 1/\sqrt{3} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \tau_{xy}^2 + 6 \tau_{yz}^2 + 6 \tau_{zx}^2]^{1/2} \quad 20.2)$$

$$\theta = 1/3 \text{ arc sin } (-3 \sqrt{6} J_3 / t^3) \quad 20.3)$$

dove:

$$J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}$$

$$\sigma_x = (2 \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) / 3, \text{ etc.}$$

In termini fisici, nello spazio si rappresenta un punto P ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ) tramite la distanza (s) del piano  $\pi$  su cui giace dall'origine, la distanza (t) dalla diagonale spaziale, l'angolo di Lodo ( $\theta$ ) che misura la posizione angolare del punto stesso su  $\pi$ .

Una più efficiente rappresentazione è ottenuta infine dall'introduzione dei seguenti termini:

$$\sigma_m = s/\sqrt{3}$$

$$\underline{\sigma} = t/\sqrt{3/2}$$

che portano alle seguenti relazioni tra stress principali e invarianti:

$$\sigma_1 = \sigma_m + \sqrt{2/3} \underline{\sigma} \sin (\theta - 2 \pi / 3) \quad 21.1)$$

$$\sigma_2 = \sigma_m + \sqrt{2/3} \underline{\sigma} \sin (\theta) \quad 21.2)$$

$$\sigma_3 = \sigma_m + \sqrt{2/3} \underline{\sigma} \sin (\theta + 2 \pi / 3) \quad 21.3)$$

## 2.2 - IL CRITERIO DI MOHR – COULOMB

Si definisce la funzione di comportamento elasto-plastico F che assume valori negativi per configurazioni perfettamente elastiche e stabili, e valori positivi per condizioni di collasso. La superficie  $F = 0$  viene definita in funzione del criterio di Collasso (Mohr, Tresca, Coulomb).

Nello spazio degli stress principali questo criterio prende forma di un cono esagonale irregolare (Fig. 6), con l'irregolarità dovuta al fatto che  $\sigma_2$  non viene preso in considerazione.

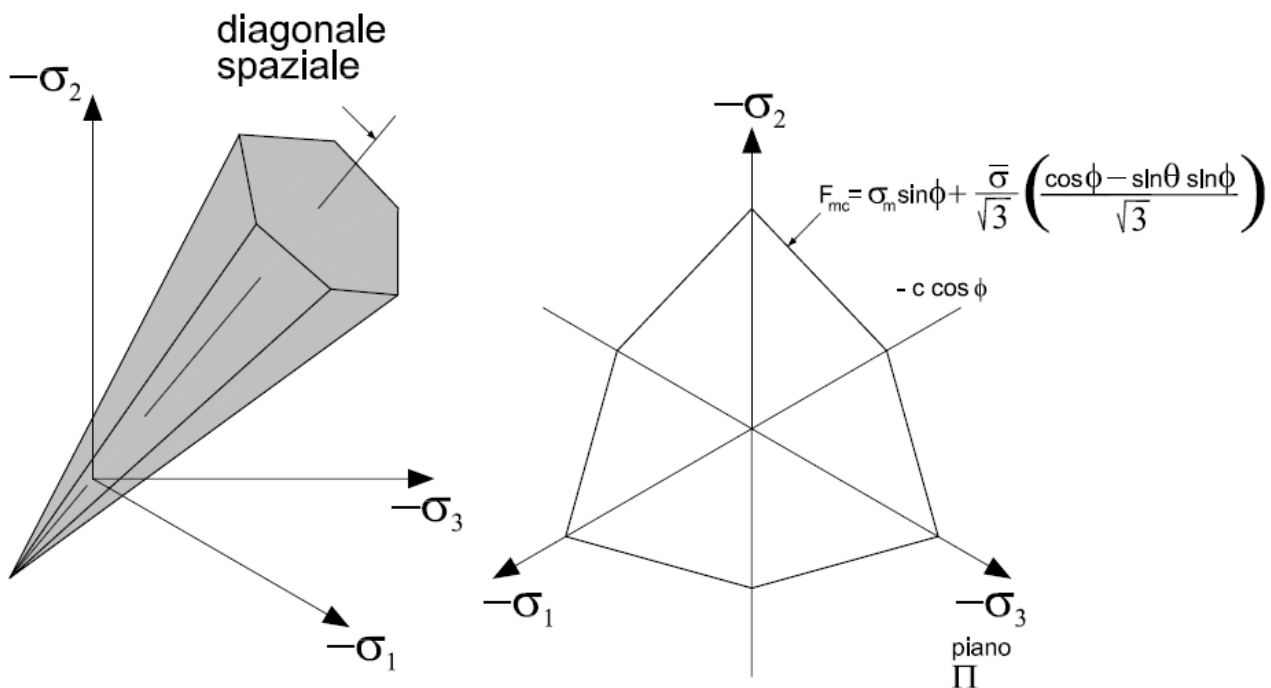
Le caratteristiche geomeccaniche dei terreni sono rappresentate dall'angolo di attrito interno  $\phi$  e dalla coesione  $c$ .  
In definitiva, la funzione  $F$  si traduce nella seguente:

$$F = \sigma_m \sin \phi + \bar{\sigma} (\cos \theta / \sqrt{3} - \sin \theta \sin \phi / 3) - c \cos \phi \quad (22)$$

Le caratteristiche della funzione  $F$  sono tali da definire il limite di collasso come segue:

- per  $F < 0$  non viene eccedute la resistenza del materiale, e lo stato di sollecitazione considerato giace all'interno del cono rovesciato
- Per  $F \geq 0$  gli stati di sollecitazione eccedono la resistenza del materiale, e la rappresentazione del punto è nello spazio al di fuori del cono rovesciato.

Fig. 6 – Il criterio di collasso di Mohr – Coulomb



Nel caso di condizioni non drenate, con  $\phi = 0$  e  $c = c_u$ , il criterio degenera in quello di Tresca ed il cono diviene un cilindro:

$$F = \bar{\sigma} \cos \theta / \sqrt{3} - c_u \quad (23)$$

### 2.3.1 – IL MODELLO DI HOEK-BROWN

FEA Slope permette di utilizzare il criterio di collasso di Hoek-Brown (2002) per i materiali rocciosi. Vengono utilizzati in input i 4 parametri fondamentali del modello, espressi come segue:

$\sigma'_{cm}$  = resistenza alla compressione monoassiale della roccia intatta

- $m_i$  = costante di modello, in funzione delle caratteristiche attritive di ciascuna roccia, secondo la tabellazione di Hoek e Brown
- GSI = Geological Strength Index, parametro di correlazione tra caratteristiche del materiale intatto e quelle del reale ammasso roccioso
- D = fattore di disturbo da scavo meccanico o da sparo di cariche (= 0 per roccia illesa, =1 per roccia disturbata)

Tali valori permettono di ricalcolare l'angolo di attrito  $\phi'$ , la coesione  $c'$  ed il modulo del materiale  $E_s$  secondo le indicazioni di Hoek, Carranza-Torres e Corkum (2002), tenendo conto dell'altezza  $H$  del pendio e del peso di volume dell'ammasso roccioso  $\gamma$ , sotto forma di prodotto  $\gamma H$ .

Una volta determinati i parametri  $\phi'$ ,  $c'$  ed  $E_s$ , l'analisi FEM viene condotta in maniera unificata utilizzando il criterio di collasso di Mohr – Coulomb.

Nella seguente Tab HB sono riferite le formule che sorreggono il passaggio dalla teoria di Hoek Brown alla definizione dei parametri di resistenza a taglio e al modulo del terreno.

Per default il valore del coefficiente di Poisson viene settato da FEA Slope  $\nu = 0.25$ .

### **2.3 - CONDIZIONI DRENATE E NON DRENATE**

Il criterio di Mohr Coulomb dipende dagli invarianti  $\sigma_m$ ,  $\sigma$  e  $\theta$ , dalla caratteristica frizionale  $\phi$  e dalla coesione  $c$ . In assenza di falda, è possibile una visualizzazione nello spazio tridimensionale  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  (Fig. 6) in quanto tutti gli invarianti sono correlati a tali grandezze, ed essendo anche  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$  ricompresi in tale rappresentazione.

Gli invarianti di sollecitazioni sono un'elaborazione degli stati di stress nei punti in esame, a loro volta discendenti dalle caratteristiche geomeccaniche (peso di volume e presenza di falda) insieme alla geometria del problema.

L'acqua di falda viene trattata sostanzialmente come un "medium" in grado di mutare le condizioni di sollecitazione e quindi di resistenza del terreno attritivo.

L'ipotesi di drenaggio, con le relative modalità, è di fondamentale importanza.

La massa di terreno instabilizzata viene considerata nel suo complesso bifase, scheletro rigido e fluido interstiziale, in quanto entrambi coinvolti nel cinematismo dello scivolamento. Il campo di sollecitazioni messo in essere dal movimento franoso viene perciò considerato in termini di sforzi totali (peso di volume "naturale"), in quanto anche il "medium" appartenente all'ammasso staccato viene virtualmente coinvolto nello spostamento.

La resistenza in termini frizionali del terreno è invece funzione delle sollecitazioni stabilizzatesi nei tempi immediatamente precedenti allo scivolamento, ed è perciò considerata in termini di sforzi efficaci (peso di volume "immerso"). In questo caso il "medium" non viene virtualmente coinvolto nell'evento franoso.

Gli invarianti di stress sono opportunamente ridefiniti per tenere conto delle circostanze in cui si sviluppa l'azione instabilizzante (sforzi totali) e quella resistente (sforzi efficaci) pervenendo ad una funzione  $F$  adeguata.

CRITERIO DI COLLASSO HOEK - BROWN (2002)	LAVORO: FEA SLOPE
File: Hoek-Brown Data:	

INPUT RELATIVO ALL'AMMASSO ROCCIOSO	
$\sigma_{cl}$ = 50 (MPa)	- Resistenza a compressione monoassiale della roccia integra
$m_i$ = 15	- Parametro di modello legato alla litologia
GSI = 45	- Geological Strength Index
D = 1	- Parametro correttivo per disturbo per operazioni di scavo o blasting
$\gamma$ = 27 (KN/m <sup>3</sup> )	- Peso di volume di riferimento dell'ammasso roccioso
H = 100 (m)	- Altezza di riferimento per il problema

MODULO DI DEFORMAZIONE	
$E_m$ = 1000 * (1 - D/2) * ( $\sigma_{cl}/100$ ) <sup>0.5</sup> * 10 <sup>((GSI-10)/40)</sup>	- per $\sigma_{cl} \leq 100$ Mpa
= 1000 * (1 - D/2) * 10 <sup>((GSI-10)/40)</sup>	- per $\sigma_{cl} > 100$ Mpa
= 2651.3 (MPa)	

PARAMETRI E COSTANTI DELL'AMMASSO ROCCIOSO	
$s$ = exp [ (GSI-100) / (9-3D) ]	
= 0.000104	
$a$ = 1/2 + 1/8 * (e <sup>-GSI/15</sup> - e <sup>-20/3</sup> )	
= 0.508086	
$m_b$ = $m_i$ * exp [ (GSI-100) / (28-14D) ]	- valore ridotto di $m_i$
= 0.295076	

RESISTENZE MONOASSIALI A COMPRESSIONE E TRAZIONE ATTESE IN SITO	
$\sigma_c$ = $\sigma_{cl}$ * $s^a$	- resistenza a compressione uniassiale
= 0.475 (MPa)	
$\sigma_t$ = - $s^a$ * $\sigma_{cl}$ / $m_b$	- resistenza a trazione uniassiale
= -0.018 (MPa)	
$\sigma'_{cm}$ = $\sigma_{cl}$ * [ $m_b$ + 4s - a * ( $m_b$ - 8s)] * ( $m_b/4$ + s) <sup>(a-1)</sup> / [2 * (1+a) * (2+a)]	
= 3.476 (MPa)	- resistenza dell'ammasso roccioso "rock mass strength"

Determinazione del valore $\sigma'_{3max}$ , limite superiore della pressione di confinamento per paragone di modello M-C	
$\sigma'_{3max}$ = 0.47 * $\sigma'_{cm}$ * ( $\sigma'_{cm} / \gamma H$ ) <sup>-0.94</sup>	- espressione valida per gallerie
= 1.288 (MPa)	
$\sigma'_{3max}$ = 0.72 * $\sigma'_{cm}$ * ( $\sigma'_{cm} / \gamma H$ ) <sup>-0.91</sup>	- espressione valida per pendii
= 1.989 (MPa)	X
$\sigma'_{3max}$ = 1.989 (MPa)	
$\sigma_{3n}$ = $\sigma'_{3max} / \sigma_{cl}$	
= 0.039774	

PARAMETRI DEL MODELLO DI MOHR - COULOMB	
$\phi'$ = $\sin^{-1} \{ [ 6 * a * m_b * (s + m_b * \sigma'_{3n})^{(a-1)} ] / [ 2 * (1 + a) * (2 + a) + 6 * a * m_b * (s + m_b * \sigma'_{3n})^{(a-1)} ] \}$	
= 30.88 (°)	
$c'$ = [ $\sigma_{cl}$ * (1 + 2a) * s + (1 - a) * $m_b$ * $\sigma'_{3n}$ ] * (s + $m_b$ * $\sigma'_{3n}$ ) <sup>(a-1)</sup> / { (1 + a) * (2 + a) * [1 + 6 * a * $m_b$ * (s + $m_b$ * $\sigma'_{3n}$ ) <sup>(a-1)</sup> ] / ((1 + a) * (2 + a)) <sup>0.5</sup> }	
= 0.398 (MPa)	

TAB HB

Un ulteriore aspetto specifico legato agli invarianti di stress in condizioni drenate e non drenate è costituito dalla non perfetta sovrapposibilità spaziale delle relative componenti e quindi dei vettori risultanti.

In linea di principio, infatti, la presenza di pressioni neutre modifica non soltanto i moduli degli invarianti, ma anche il loro orientamento, preso in considerazione mediante uno sfasamento in termini di angolo spaziale  $\alpha$  tra componenti drenate e non drenate.

La funzione di collasso descritta rispetto ad un piano riferibile indifferentemente a  $\sigma$  oppure  $\sigma'$  diviene perciò la seguente:

$$F = \sigma_m' \cos \alpha \sin \phi + \underline{\sigma} \cos \theta / \sqrt{3} - \underline{\sigma}' \cos \alpha \sin \theta \sin \phi / 3 - c \cos \phi \quad (22.1)$$

dove le grandezze dotate di apice  $\sigma_m'$  e  $\underline{\sigma}'$  denotano gli invarianti calcolati in condizioni drenate. Il termine contenente la coesione  $c$  non è per definizione interessato dallo sfasamento angolare  $\alpha$ .

Fisicamente, gli invarianti di stress sono dei vettori associati a particelle elementari. La rappresentazione degli invarianti in condizioni drenate e non drenate, relativi ad un elementino di terreno appartenente al pendio e situato sotto falda, è mostrato nella seguente Fig. 7. Gli invarianti non drenato ( $I$  in figura) e drenato ( $I'$  in figura) incidono reciprocamente sotto un angolo spaziale  $\alpha$ , che sottende il vettore  $w$  che rappresenta a sua volta l'effetto della pressione neutra.

In termini vettoriali,  $I = I' + w$ .

Coerentemente con la definizione della pressione neutra, la direzione del vettore  $w$  non è significativa per la soluzione della stabilità: il problema analitico viene perciò risolto facendo riferimento unicamente al valore dell'angolo  $\alpha$ .

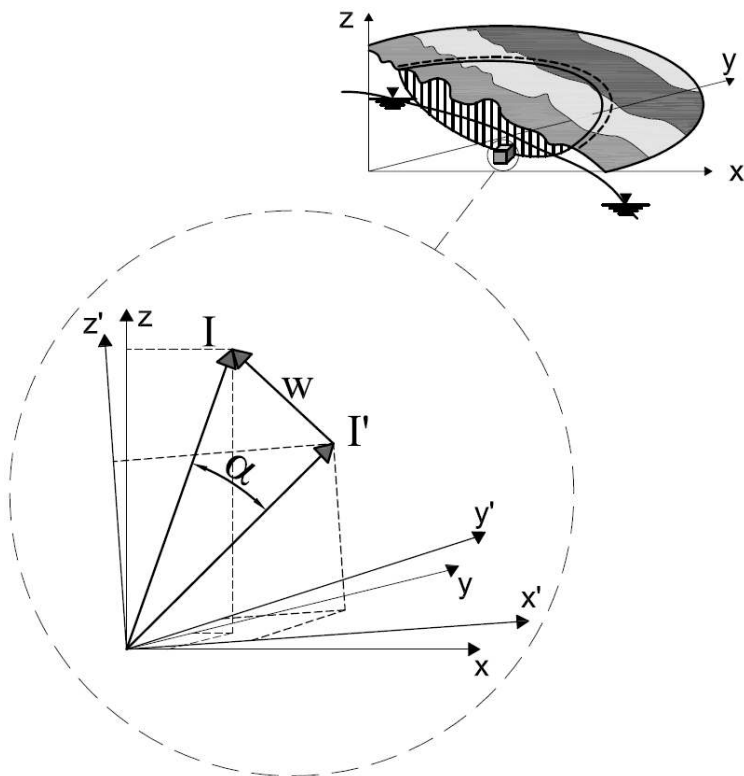


Fig. 7:

Invarianti di stress  
in condizioni non drenate  
e condizioni drenate

L'assunzione è corrispondente alle modalità usuali di verifica tramite metodi semplificati, come quelli all'equilibrio limite tradizionalmente utilizzati, e porta a risultati in termini di fattore di sicurezza del tutto paragonabili.

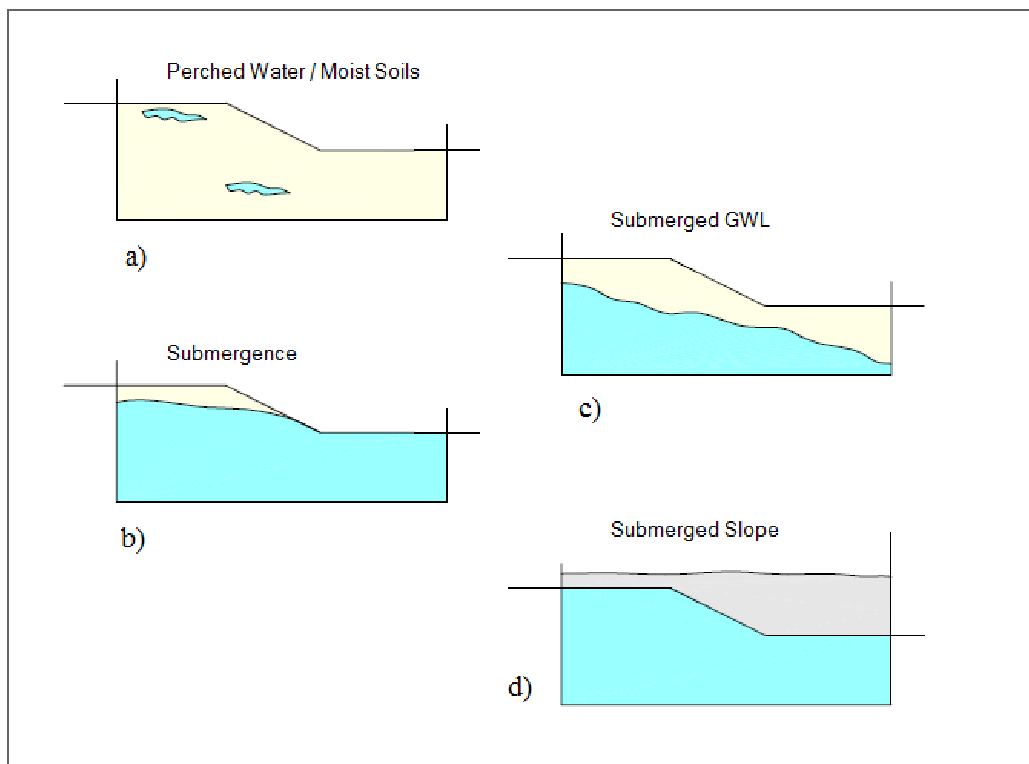
Si noti che la rappresentazione degli stati di sforzo non è più compatibile con uno spazio a tre dimensioni con le convenzioni di Fig. 6 ma con uno spazio nelle 6 dimensioni  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ , non immediatamente graficabile.

### 2.3.1 – OPERATIVITA' DELLE SCELTE

Al fine di non perdere generalità e rigorosità nelle varie soluzioni proposte, si possono considerare per il corpo del pendio nel suo insieme le soluzioni mostrate nella seguente Fig. 8:

- a) terreni asciutti, umidi e solo localmente saturi, falde sospese non determinanti nei meccanismi dei collasso
- b) falda freatica emergente
- c) falda freatica interagente con i meccanismi a collasso, comunque interamente contenuta nel profilo del pendio
- d) pendio interamente sommerso.

Fig. 8 – Condizioni di falda



Con riferimento alle quattro situazioni mostrate, l'interpretazione dei regimi di risposta dei terreni può essere la seguente:

- a) Azioni: sforzi efficaci considerati coincidenti nei fatti con gli sforzi totali // Resistenza: sforzi efficaci
- b) Azioni: sforzi totali // Resistenza: sforzi efficaci
- c) Azioni: sforzi totali // Resistenza: sforzi efficaci
- d) Azioni: sforzi efficaci // Resistenza: sforzi efficaci.

Si noti che i regimi di spinta coincidono essenzialmente con le assunzioni implicite nelle risoluzioni approssimate dei metodi "tradizionali" a conci.

Ovviamente, le condizioni di risposta dei terreni devono essere impostate di volta in volta secondo il criterio ritenuto più idoneo per la risoluzione del caso specifico.

Si noti infine che le azioni prese in considerazione riguardano materiali acquiferi in condizioni "statiche" di flusso, intendendo con tale concetto che le forze di filtrazione idraulica siano trascurabili agli effetti pratici.

## 2.4 - LA VISCOPLASTICITA'

I terreni esibiscono notoriamente un netto comportamento plastico già a bassissimi livelli tensionali.

Si ammette che i materiali sollecitati oltre lo stato di virtuale collasso possano mantenere un certo stato di sollecitazione per certi periodi "finiti"  $\Delta t$ .

In altri termini, anche in presenza di una funzione di collasso  $F$  positiva, per un certo limitato tempo, si ammette una riserva di resistenza da parte della parte elementare sollecitata.

In tal modo si considera una serie di "time steps" durante i quali i materiali resistono in maniera controllata oltre la violazione del criterio di collasso  $F$ .

Il metodo di analisi di non linearità condotto per rigidità costanti consiste nel ripetere questa serie di verifiche variando di volta in volta lo stato di carico sugli elementi interessati.

In altri termini, per ogni incrementi di carico, si risolve il sistema di equazioni che regge l'analisi con carichi via via incrementati:

$$\mathbf{K} \delta^i = \mathbf{P}^i \quad (24)$$

dove  $i$  rappresenta l'iterazione  $i$ -esima.

Gli incrementi di spostamento  $\mathbf{u}^i$  sono ricavati da  $\delta^i$ , fino a ricavare le deformazioni secondo la relazione deformazioni / spostamenti:

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}^i = \mathbf{B} \mathbf{u}^i \quad (25)$$

Come detto, il materiale deforma plasticamente dopo aver esaurito le risorse elastiche, esaurendo le componenti elastiche e plastiche:

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}^i = (\Delta \boldsymbol{\epsilon}^e + \Delta \boldsymbol{\epsilon}^p)^i \quad (26)$$

In questo processo, le sole deformazioni elastiche  $\Delta \epsilon^e$  producono un incremento di sollecitazione attraverso la matrice elastica di sforzi / deformazioni:

$$\Delta \sigma^i = \mathbf{D}^e (\Delta \epsilon^e)^i \quad (27)$$

Tali nuove sollecitazioni vengono aggiunte ad ogni "time step" alle sollecitazioni iniziali, procedendo ad aggiornare il calcolo delle nuove condizioni di equilibrio / collasso.

Ad ogni step si opera una redistribuzione delle sollecitazioni in eccesso che non possono essere sostenute dall'elemento al collasso.

Si generano in questo modo nuovi "body loads" incrementali che vanno ad aggiungersi ai carichi iniziali nella nuova iterazione di calcolo. Questi "body loads" vengono redistribuiti al contorno dell'elemento "collassato" (funzione F positiva), coinvolgendo altri elementi nel calcolo incrementale.

La soluzione del sistema con i carichi incrementati per la redistribuzione dei nuovi "body loads" viene iterata automaticamente.

La fine degli incrementi con verifica positiva del pendio viene stabilita arbitrariamente al raggiungimento della convergenza tra due iterazioni successive (nuovi spostamenti/deformazioni contenute entro un limite ristretto).

Al raggiungimento della convergenza, si può impostare un nuovo calcolo, a partire dalle condizioni iniziali e senza "body loads" incrementali, utilizzando una parametrizzazione geotecnica opportunamente ridotta.

Se la convergenza non si verifica entro un numero abbastanza elevato di iterazioni (p. es. 500), il calcolo viene interrotto e si considera il pendio collassato.

Dal punto di vista numerico, la definizione dell'intervallo di tempo coinvolge le caratteristiche dei materiali, e nel caso del criterio di Mohr – Coulomb si scrive:

$$\Delta t = \frac{4 (1 + \nu) (1 - 2 \nu)}{E (1 - 2\nu + \sin^2 \phi)} \quad (28)$$

In questo modo, la deformazione plastica  $e^P$  si trasforma in deformazione viscoplastica, incrementata secondo la:

$$\dot{e}^{VP} = F \partial Q / \partial \sigma \quad (29)$$

La valutazione di tali quantità avviene numericamente come segue.

Moltiplicando la pseudo velocità di deformazione per l'intervallo  $\Delta t$  si ottiene l'incremento unitario della deformazione plastica, stimata per un tempo considerato come "step" di carico:

$$(\delta e^{VP})^i = \Delta t (\dot{\delta e}^{VP})^i \quad (30)$$



La derivata della funzione di potenziale plastico Q rispetto alle sollecitazioni  $\sigma$  è scritta utilizzando la seguente formula:

$$\partial Q / \partial \sigma = \partial Q / \partial \sigma_m \partial \sigma_m / \partial \sigma + \partial Q / \partial J_2 \partial J_2 / \partial \sigma + \partial Q / \partial J_3 \partial J_3 / \partial \sigma$$

Oltre a  $J_3$  definito nella trattazione degli invarianti, si è introdotto  $J_2 = \frac{1}{2} t^2$ .

La generazione dei body-loads indotti dalla plasticizzazione avviene per “intervalli di tempo” successivi, sommando i seguenti integrali per ciascun elemento contenente almeno un punto di Gauss collassato:

$$\mathbf{P}_b^i = \mathbf{P}_b^{i-1} \int \int_{\text{Elementi}}^{\text{Tutti gli}} \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e (\delta e^{VP})^i dx dy \quad 31)$$

Questo processo viene ripetuto ad ogni intervallo di tempo finché nessun punto di Gauss viola il criterio di collasso entro un certo limite di tolleranza stabilito. Il criterio di convergenza è basato su una misura adimensionale della quantità incrementale dello spostamento  $\delta i$  tra un'iterazione e la successiva. Il processo di convergenza viene impostato sull'accettazione critica del parametro di tolleranza adimensionale (p. es 1/10000).

Variare il parametro di tolleranza potrebbe incidere sull'accuratezza della soluzione.

## 2.5 – CRITERIO DI FLUSSO “ASSOCIATO” E “NON ASSOCIATO”. CONCETTO DI DILATANZA

E' da notare che durante la deformazione plastica il materiale si considera “fluire” in maniera “non associata”, ovvero il vettore di incremento plastico può non essere perpendicolare alla superficie di snervamento determinata da F. In questi casi si introduce la funzione di potenziale plastico Q, equivalente a F ma con l'uso dell'angolo di dilatanza  $\psi$  in luogo dell'angolo di attrito  $\phi$ .

La dilatanza è espressa in termini fisici come la componente legata all'espansione di volume per terreni più o meno addensati portati a collasso per taglio.

Alcuni autori ricavano l'angolo di attrito  $\phi$  (valore di picco ricavato da prove di taglio diretto) in funzione di  $\phi_{cv}$ , angolo di attrito a volume costante, e  $\beta$ , funzione del grado di interassestamento (interlocking) dei singolo grani di una sabbia:

$$\phi = \phi_{cv} + \beta \quad 32)$$

Il valore di  $\beta$  (o dilatanza  $\psi$ ) è determinante nel comportamento dei terreni sottoposti a prova, considerando comunque che anche la forma dei grani (angolarità) e la velocità di applicazione dei carichi possono avere un peso relativo.

In altri termini, la dilatanza costituisce la frazione di attrito complessivo che si può ritenere indipendente dalle caratteristiche del materiale.

Considerato che  $\phi_{cv}$  rimane costante per ogni specifico materiale (calcare, quarzo, feldspati) la dilatanza rappresenta perciò il contributo dovuto all'addensamento del terreno. A puro titolo di esempio, si riportano i seguenti valori di  $\phi$  e  $\phi_{cv}$  e dilatanza  $\beta$  per terreni granulari tabulati da Das (1985) e ripresi da Rabuffetti (2011):

Suolo tipo	$\phi$	$\phi_{cv}$	$\beta$ (valori indicativi)
Sabbie a grani arrotondati			
- sciolte	28 – 30		2
- mediamente addens.	30 – 35	26 – 30	4 – 5
- addensate	35 – 38		8 – 9
Sabbie a grani angolari			
- sciolte	30 – 35		0
- mediamente addens.	35 – 40	30 – 35	5
- addensate	40 – 45		10
Sabbie ghiaiose	34 – 48	33 – 36	1 – 12

Il comportamento dilatante è particolarmente apprezzabile nei problemi geotecnici a volume costante (prove confinate).

Dal punto di vista pratico, la reale influenza rispetto all'assunzione  $\psi = 0$ , in problemi di stress sostanzialmente non confinato (o scarsamente confinato) come l'analisi di stabilità dei pendii, è piuttosto limitata.

## 2.6 - CONDIZIONI SISMICHE.

L'azione sismica agisce come componente pseudostatica di accelerazione applicata alla massa di terreno in termini di sforzi totali.

In termini normativi (NTC 2008) le forze orizzontali e verticali, applicate alla massa di terreno nella stessa proporzione e con le stesse modalità con cui sono applicati i pesi agli elementi finiti, si scrivono:

$$F_H = \pm \beta_s a_{max}/g * W \quad 33.1)$$

$$F_v = \pm 0.5 F_H \quad 33.2)$$

dove il termine  $\beta_s$  è fornito dalla norma in funzione della categoria di sottosuolo e il valore  $a_{max}$  viene ricavato a partire dall'accelerazione  $a_g$  tabellata dalla norma, in funzione dei coefficienti di topografia  $S_T$  e di stratigrafia  $S_S$  ponendo  $a_{max} = a_g * S_S * S_T$ .

Ricavato il valore idoneo di  $a_g$  per lo specifico problema, funzione della mappatura del territorio e dello stato limite considerato, il programma richiede l'introduzione delle seguenti due accelerazioni:

$$a_H = \pm \beta_s a_{max} \quad 34.1)$$

$$a_V = \pm 0.5 a_H \quad 34.2)$$

Le convenzioni di FEA Slope sono tali per cui  $a_V$  è positiva quando diretta verso l'alto e negativa quando diretta verso il basso,  $a_H$  è positiva se diretta verso destra e negativa se diretta verso sinistra.

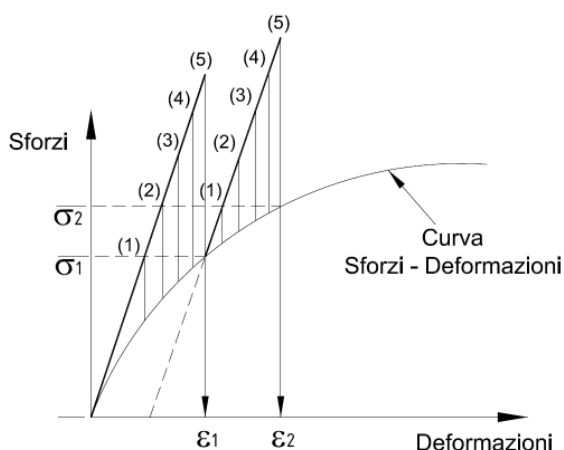
## 2.7 – NON LINEARITA'

I metodi numerici FEM, nella loro formulazione generale, utilizzano algoritmi risolutivi composti da sistemi di equazioni algebriche lineari. In realtà, i problemi geotecnici coinvolgono sempre relazioni non lineari, dal momento che i terreni mostrano comportamento plastico già a bassissimi livelli tensionali.

Qualunque sia la strategia di calcolo adottata, le soluzioni hanno in comune una serie di iterazioni successive introdotte nei modelli fisico-numerici. Date delle leggi non lineari come la curva sforzi - deformazioni mostrata in Fig. 9, si procede a "linearizzarla" introducendo spezzoni di rette che ne approssimano il comportamento.

I numeri tra parentesi indicano il numero di iterazioni richieste per ottenere convergenza di risultati: quanto maggiore è l'intervallo deformativo  $\Delta\varepsilon$ , tanto maggiore sarà lo scarto relativo alle sollecitazioni  $\Delta\sigma$ , necessitando più iterazioni di calcolo per raggiungere la convergenza.

Fig. 9 – Metodo a rigidzze costanti



FEA Slope mantiene inalterata la matrice delle rigidzze e lavora sulla manipolazione delle sole forze esterne utilizzando un approccio come quello mostrato in figura (Metodo a rigidzze costanti).

### 3 - IL PROBLEMA DELLA STABILITA' GEOTECNICA

#### 3.1 - MECCANISMI DI DIFFUSIONE

La traduzione in termini numerici del meccanismo di viscoplasticità, di tipo iterativo, avviene mediante un meccanismo di diffusione.

Senza entrare nei dettagli del processo, è importante capire cosa accade negli algoritmi FEM quando uno o più punti di Gauss all'interno di elementi finiti si trovano in stato di plasticizzazione/collasso. Ovviamente nell'elemento si generano degli eccessi di forze non equilibrati, in quanto ogni porzione di terreno può caricarsi di sollecitazioni solamente fino al proprio limite di resistenza a taglio. Superato tale limite, il terreno si deforma più o meno indefinitamente (collassa) non offrendo ulteriore contributo di resistenza.

In molti casi, con sabbie dense e argille sovraconsolidate, il contributo a taglio addirittura decresce dopo un valore di picco. Gli sforzi eccedenti vengono perciò ripartiti sugli elementi intorno a quello plasticizzato, e, dopo aver aggiornato il sistema di forze a cui sono sottoposti tutti gli elementi ("body loads") con tali azioni aggiuntive, l'algoritmo FEM procede ad una nuova iterazione di calcoli di stabilità.

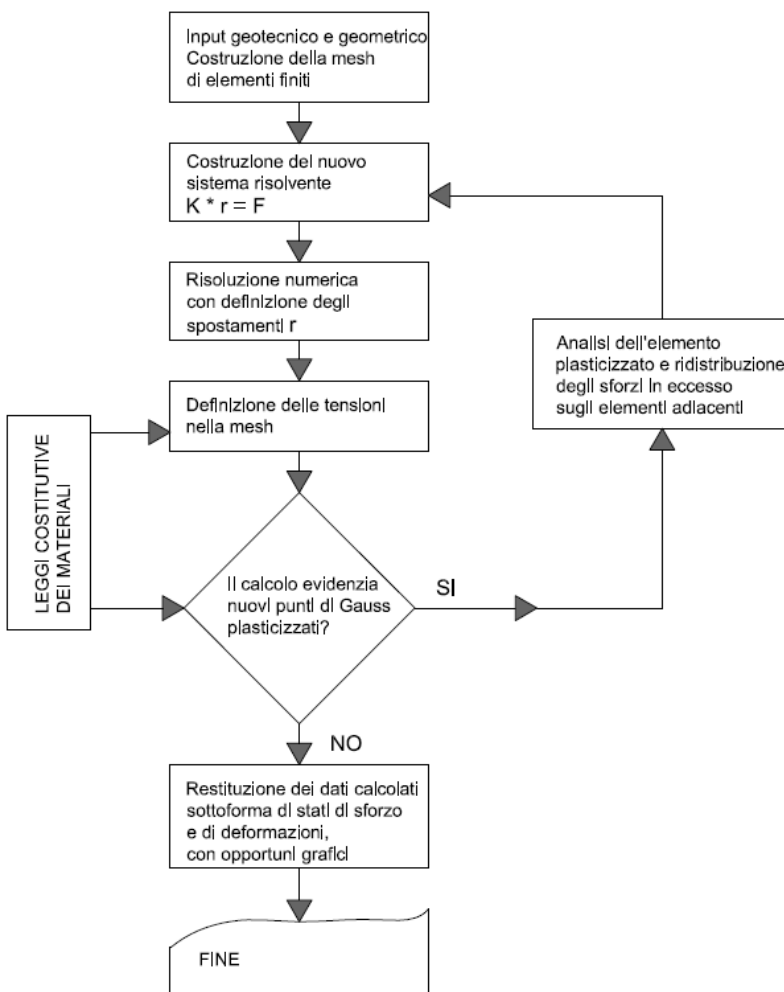


Fig. 10  
Iterazioni di calcolo per la  
ridistribuzione  
delle  
sollecitazioni  
in una  
verifica FEM

A propria volta, la nuova iterazione di calcolo può produrre nuovi stati di plasticizzazione oppure no, nel quale caso si rende necessaria una ulteriore redistribuzione dei carichi ed un ulteriore calcolo. La ricerca dell'equilibrio si trasforma perciò in un meccanismo iterativo come mostrato nel diagramma a blocchi di Fig. 10.

L'iterazione della soluzione del sistema algebrico FEM può essere condotta anche diverse centinaia di volte prima di verificare se il calcolo sia destinato a convergere ad un risultato univoco oppure no. Dal punto di vista numerico, l'intero processo si interrompe solo quando due successive interazioni di calcolo forniscono un insieme di risultati (spostamenti) identici tra loro o comunque differenti per quantità sufficientemente piccole, fissate a priori.

In tale situazione, anche in presenza di situazioni diffuse di plasticizzazione, l'insieme viene definito globalmente stabile per le condizioni di geometria, di carico e per le caratteristiche di resistenza considerate.

### 3.2 – FATTORE DI SICUREZZA GEOTECNICO

Il collasso di un sistema geotecnico viene raggiunto quando i fenomeni di plasticizzazione sono talmente estesi da non poter essere compensati dalla redistribuzione degli sforzi sugli elementi al contorno, pur invocando un altrettanto esteso meccanismo di diffusione. In altre parole, l'impossibilità di un'ulteriore redistribuzione determina automaticamente l'instabilità di un pendio e la generazione di una frana.

Il criterio di convergenza più idoneo per l'analisi dei fenomeni franosi, viene implementato mantenendo costanti i carichi esterni applicati al sistema, riducendo i parametri di resistenza a taglio e ripetendo con continuità i calcoli FEM finché non si verificano fenomeni di instabilità. Lo schema a blocchi dell'algorithm è mostrato in Fig. 11.

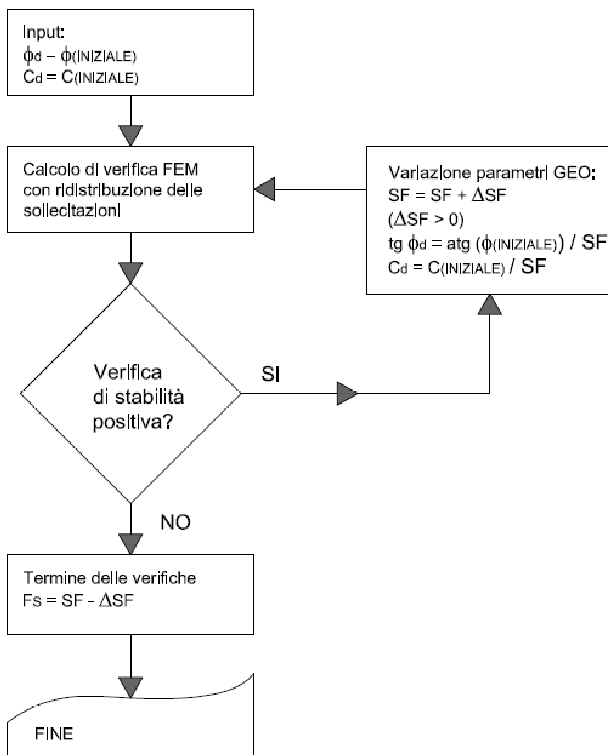


Fig. 11 – Analisi di stabilità con il metodo SFR

Tale metodo, denominato SFR (Strength Factor Reduction) consiste nell'applicare ai valori di coesione  $c$  e angolo di attrito interno  $\phi$  (valori *iniziali*, o *caratteristici*) un fattore riduttivo SF, ricavando i valori di progetto  $c_d$  e  $\phi_d$  come segue:

$$c_d = c / \text{SFR}$$

$$\tan \phi_d = \text{atn}(\tan \phi) / \text{SFR}$$

Eseguito un calcolo preliminare con  $\text{SFR} = 1$ , e verificata la convergenza numerica, si aumenta SFR (*si riduce la resistenza a taglio inizialmente disponibile*) ripetendo il calcolo FEM.

Il metodo viene reiterato, nel caso in cui il calcolo converga, aumentando di volta in volta il valore di SFR. L'algoritmo si arresta quando le resistenze risultano diminuite al punto tale da non verificare più la stabilità (mancata convergenza del calcolo diffusivo). Ovviamente, il fattore di sicurezza ricavato è l'ultimo valore di SFR prima che si verifichi l'instabilità.

## **RIFERIMENTI NORMATIVI.**

- D.M. Infrastrutture 14.01.2008 – “Norme tecniche per le costruzioni”
- Circolare C.S.L.P. 02.02.2009, n. 617 - “Istruzioni per l’applicazione delle Nuove norme tecniche per le costruzioni”
- O.P.C.M. 20.03.2003 “Primi elementi in materia di criteri generali per la classificazione sismica del territorio nazionale e di normative tecniche per le costruzioni in zona sismica
- UNI ENV 1997 – 1:2004 / 2:2002 / 3:2002 “Eurocodice 7 – Progettazione geotecnica: Regole generali – Progettazione assistita da prove di laboratorio – Progettazione assistita con prove in sito ”
- UNI ENV 1998-1:2003 / 5:2003 “Eurocode 8 – Design of structures for earthquake resistance – General rules, seismic actions and rules for buildings – Foundations, retaining structures and geotechnical”

## **RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI**

- AA. VV. (1992) – “Applicazione del calcolo automatico in Ingegneria Geotecnica” – Politecnico di Milano
- J.E. Bowles (1984) – Physical and Geotechnical Properties of Soils – Mc Graw Hill Int. Ed.
- B. M. Das (1985) – Advanced Soil Mechanics - Mc Graw Hill Int. Ed.
- E. Hoek – C. Carranza-Torres – B. Corkum (2002) “Hoek-Brown failure criterion – 2002 Edition” - NARMS-TAC Symposium – University of Toronto
- R. Lancellotta (1987) – Geotecnica – Zanichelli
- T.W. Lambe – R.W. Whitman (1979) – Soil Mechanics SI Version – Wiley
- NAVFAC D.M. 7.01 (1986) – “Soil Mechanics”
- E. Pasqualini “Standard Penetration Test” – C.G.G. Torino – XI Ciclo, 1983
- I. M. Smith – D.V. Griffiths (1988) “Programming the Finite Element Method”– Wiley
- A. S. Rabuffetti (2011) “Manuale di Progettazione Geotecnica” – DEI, Roma
- A. S. Rabuffetti (2012) “Manuale di Geotecnica Avanzata” – DEI, Roma
- A. S. Rabuffetti (2013) “L’analisi agli elementi finiti nei problemi geotecnici” – Maggioli Editori, S. Arcangelo di Romagna
- G. Toniolo – P. G. Malerba (1981) “Metodi di discretizzazione dell’analisi strutturale” - Masson Italia
- O. C. Zienkiewicz – R. L. Taylor (1989) “The Finite Element Method” – Mc Graw Hill Int. Ed.

- REV. 01 del 27 09 2007 – Capitolo Generalità
- REV. 02 del 21 11 2007 – Spiegazione applicazione Fs a C e  $\text{tg } \phi$
- REV. 03 del 20 12 2008 – Bibliografia
- REV. 04 del 18 03 2009 – Concetto di dilatanza
- REV. 05 del 07 09 2012 – Generale
- REV. 06 del 21 01 2013 – Definizione di spazio a 6 dimensioni
- REV. 07 del 08 09 2013 – Modello di collasso di Hoek - Brown