Jean-Pierre Escofier

Toute l'algèbre de la Licence

5e édition

DUNOD

<u>Du même auteur :</u>

Théorie de Galois, 2e éd., 2004
Toute l'analyse de la Licence, 2020
Exercices d'analyse, 2015
Petite histoire des mathématiques, 2018

Illustration de couverture : rawf8 – shutterstock.com

11 rue Paul Bert 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-080921-9

Table des matières

Avant-propos

L'enseignement des mathématiques et, plus généralement, des matières scientifiques, pose problème à nos sociétés en mutation. Alors que la recherche se développe partout dans le monde, autant fondamentale que pour des applications extraordinairement nombreuses et diversifiées, l'enseignement des bases des mathématiques est déstructuré et appauvri.

Qu'on étudie pour devenir chercheur ou enseignant de mathématiques ou pour se diriger plus tard vers d'autres domaines, l'étude des mathématiques a un sens qui s'est obscurci et qu'il faut sans doute redéfinir.

Ce livre a différents aspects profondément liés qui, je l'espère, contribueront à lutter contre ces dérives. La plus grande partie du livre est consacrée à la présentation des notions d'algèbre linéaire et d'algèbre de base, comme beaucoup d'autres livres actuels, en cherchant à me mettre à la portée des étudiants de *tous* niveaux. Je cherche à en montrer la beauté et l'efficacité et à donner plein de plaisirs à mes lectrices et lecteurs. Je donne des éclairages, mathématiques ou anecdotiques, de divers moments de leur construction au cours du temps. Je donne enfin des applications récentes.

On devrait pouvoir penser aux mathématiques comme on pense, je donne quelques exemples parmi mille, à des tableaux de Rembrandt ou de Nicolas de Stael, des films de Lang ou Mizogushi, des textes de Rimbaud ou Perec, des musiques de Mozart ou Stockhausen, etc. (remplacez ces noms par ceux de vos artistes préférés), et je serais heureux si ce livre pouvait y contribuer.

La première édition de ce livre, en 2002, correspondait à deux années d'études après le baccalauréat. La mise en place d'une harmonisation des études au niveau européen, m'a conduit a ajouté cinq nouveaux chapitres pour couvrir la troisième année de licence, en apportant les modifications et corrections nécessaires aux 17 premiers chapitres. Le choix des thèmes de ces cinq nouveaux chapitres n'a pas été évident, chaque université ayant ses sujets favoris ; j'en ai développé quelques applications et j'ai dû renoncer à bien des idées, faute de place.

Pour avoir commencé à apprendre les mathématiques dans des livres, je peux dire que leur lecture est insuffisante. Je vous invite donc à parcourir autant qu'à lire ce livre, à vous raconter cent fois ce qu'il contient, à en discuter avec d'autres, à le confronter aux cours et exercices qui vous seront proposés (à l'Université pour beaucoup d'entre vous), afin que les mathématiques et les histoires qu'il présente deviennent vôtres, que vous ayez quelques idées générales permettant de voir les choses de plus haut, que vos efforts de mémoire ne portent pas sur des détails.

Ce livre comporte une sorte de petit roman, au chapitre 17, pour raconter la vie d'un des plus grands scientifiques de tous les temps, Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Gauss est à l'origine de bien des idées étudiées ici.

Dans les précédentes éditions, de nouveaux exercices, un chapitre sur les codes correcteurs d'erreurs et la cryptographie ont été introduits. Dans cette cinquième édition, le changement essentiel est l'ajout d'un dernier chapitre donnant quelques aperçus sur de beaux résultats récents et de beaux problèmes non résolus. C'est sans doute une démarche inhabituelle pour un livre d'enseignement, mais elle me semble nécessaire. La recherche mathématique est toujours en plein développement. J'ai choisi des problèmes qui ne me paraissaient pas trop difficiles à appréhender. Je l'ai rédigé pour le plaisir de celles et ceux qui sont intéressés par les recherches actuelles.

J'espère que tout cela vous donnera à toutes et tous envie de poursuivre l'étude des mathématiques.

Mes remerciements vont aux éditions Dunod, toujours prêtes à vous écouter, en particulier à Laetitia Hérin et Vanessa Beunèche pour cette dernière édition, à Ghislaine Gueudet-Chartier, Michel Viallard, Françoise Guimier qui ont relu et critiqué des parties de ce texte, à Michel Saez et Julien Samson, à Annette Houdebine-Paugam qui a tout relu… et tout critiqué, à ceux et celles qui m'ont indiqué par courriel des corrections à apporter au texte, et à tous les Rennais et Rennaises qui m'ont apporté des idées un jour ou l'autre.

À D. C. A. et à N., G., M. et M.,

Jean-Pierre Escofier

Novembre 2019

Les figures de ce livre ont été tracées à l'aide du logiciel fig4Tex développé par Yvon Lafranche et Daniel Martin de l'Université de Rennes 1.

Première année

L’algèbre linéaire est présente dans beaucoup de domaines des mathématiques comme la géométrie, l’analyse, l’analyse numérique, les statistiques. Ramener un problème de mathématiques à un problème d’algèbre linéaire (on dit qu’on linéarise le problème) permet souvent de pouvoir conduire des calculs, d’obtenir des solutions approchées, etc.

L’introduction à l’algèbre linéaire est le but du cours d’algèbre de première année. Les quatre premiers chapitres introduisent à l’algèbre linéaire en étudiant des situations où elle intervient. Avec les chapitres 5 à 10, on entre dans la théorie des espaces vectoriels (de dimension finie) et des applications linéaires, ce qui nous confronte à des problèmes nouveaux, qu’on ne peut pressentir en étudiant les exemples des quatre premiers chapitres et pour lesquels un effort d’adaptation à l’abstraction est nécessaire.

Équations différentielles linéaires

1

Le but des quatre premiers chapitres est de présenter des situations où l'algèbre linéaire est utile. Dans les chapitres suivants, on verra comment les notions d'algèbre linéaire permettent de les envisager dans un même cadre.

1.1 Sommes et produits de fonctions

Définition 1 : notion de fonction, définition originelle. Wilhelm Gottfried von Leibniz (1646-1716) est sans doute le premier à utiliser le mot *fonction*. Jean Bernouilli (1667-1748), qui le suit dans ce choix, précise en 1718 ce qu'il entend par là : « On appelle fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes ».

Définition 2 : notion de fonction, définition actuelle. Notre définition actuelle de fonction est plus précise : pour définir une fonction f, on se donne :
1) un ensemble A dit ensemble de départ ou source de la fonction ;
2) un ensemble B dit ensemble d'arrivée ou but de la fonction ;
3) pour chaque élément x de A, un élément de B qu'on note $f(x)$ et qu'on appelle image de x par f.

On peut préciser comment on réalise le 3) : on se donne un sous-ensemble G de l'ensemble produit $A \times B$ qu'on appelle graphe de la fonction, tel que, pour tout x de A, il existe un unique élément y de B tel que $(x, y) \in G$.

Notation. La notation $f : A \to B$, apparue dans les années 1930, est celle que nous utiliserons pour désigner la fonction f de source A et de but B. Pour ne pas alourdir les notations, on utilisera aussi la notation $x \mapsto f(x)$, par exemple $x \mapsto -2x$, lorsque le contexte indique clairement la source et le but de la fonction.

Différences entre les deux définitions. Les différences entre les conceptions sous-jacentes à ces deux définitions sont multiples. Jean Bernoulli, comme tous les mathématiciens du XVIII^e siècle, ne pense, en fait, pour définir ses « quantités composées », qu'à des formules algébriques comme des quotients de deux polynômes, ou analytiques, comme des sommes infinies (on parle de séries). Ce sont des mathématiciens comme Leonhard Euler (1707-1783) qui écrivent qu'il faut étendre la notion de fonction à des correspondances quelconques, sans préciser ce que cela veut dire exactement : cela « dépend de notre bon plaisir » (Euler a alors en tête de donner les réponses les plus générales possibles à des problèmes de physique). Les mathématiciens du début du XIX^e siècle, comme Joseph Fourier (1768-1830) dans sa théorie de la chaleur publiée en 1822, expliciteront cette idée : une fonction est « une suite de valeurs données, assujetties ou non à une loi commune, et qui répondent à toutes les valeurs de x comprises entre » les extrémités d'un intervalle. On notait alors une fonction par $f(x)$, $\phi(x)$, où x représentait la *variable*.

Autour de 1900. Les mathématiciens de cette époque, à la suite de travaux de Vito Volterra (1860-1940), de Ivar Fredholm (1866-1927), de Maurice Fréchet (1878-1973) commencent à considérer les fonctions comme des objets mathématiques sur lesquels on peut calculer, plus précisément comme des éléments d'un ensemble muni d'une structure. Cela leur permet, par exemple, de définir une fonction, notons-la F, sur l'ensemble E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en associant à $f \in E$, sa primitive valant 0 pour $x = 0 : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$. Comment noter cette nouvelle fonction ? Si on a noté $f(x)$ comme Fourier, on devrait écrire $F(f(x))$, mais c'est ambigu, puisque $f(x)$ désigne aussi l'élément image de x par f ; si on considère la fonction comme un objet à part entière, c'est la notation f qui est adaptée et son image par la fonction F se note naturellement $F(f)$. On écrira, par exemple : $F(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. La nouvelle notation traduit donc un changement de point de vue des mathématiciens vis à vis des fonctions que nous allons développer dans ce livre.

Remarque : source et but. Soulignons qu'une fonction n'est pas seulement une formule ou un procédé, mais aussi la donnée de l'ensemble de départ et de l'ensemble d'arrivée de la fonction. Ainsi, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est-elle une fonction différente de la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ ou de la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $h(x) = x^2$.

Définition 3 : fonction vide. Ce qui est lié à l'ensemble vide est parfois utile pour éviter d'avoir à distinguer, comme certains livres le font, des cas particuliers. Pour tout ensemble B, l'ensemble $\varnothing \times B$ est encore l'ensemble vide ; on pose $G = \varnothing$. Comme G vérifie la condition 3 de la définition de fonction, G définit une fonction, notée $\varnothing : \varnothing \to B$ et appelée fonction vide.

La notation $\varnothing$ vient d'une lettre norvégienne et est due à André Weil (1906-1998).

Définition 4 : sommes et produits. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions, on peut définir leur somme et leur produit. Ce sont de nouvelles fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notées $f + g$ et fg, qui sont définies comme associant à tout x de $\mathbb{R}$ les éléments $f(x) + g(x)$ et $f(x)g(x)$, autrement dit, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

Ces définitions se généralisent à des sommes finies et à des produits finis de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Tout ce qui précède se généralise également à des fonctions à valeurs dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ou aux fonctions à valeurs dans un corps K quelconque (pour la définition générale de corps, voir 12.5, définition 2).

Si a est un élément de $\mathbb{R}$, notons $c_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction constante définie par : $c_a(x) = a$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Très naturellement, la somme $f + c_a$ est notée $f + a$ et le produit $c_a f$ est noté af ; ce sont les fonctions définies, pour tout x de $\mathbb{R}$, par $(f + a)(x) = f(x) + a$ et $(af)(x) = ax$. La fonction af est appelée produit de la fonction f par le scalaire a.

Pour ne pas alourdir les notations, la fonction c_a sera donc notée a ; c'est le contexte qui permettra de savoir si a représente le nombre réel a ou la fonction constante $x \mapsto a$.

Si $a = -1$, on pose $af = -f$; pour tout x de $\mathbb{R}$, on a donc $(-f)(x) = -f(x)$. On note $f + (-g) = f - g$, donc on a, pour tout x de $\mathbb{R}$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$. On a : $f + (-f) = 0$, 0 représentant ici la fonction c_0, puisque, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$(f + (-f))(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

De même, pour noter un produit de deux fonctions comme $x \mapsto -2xf(x)$, on écrira simplement $-2x\,f$, sans chercher à donner un nom à la fonction $x \mapsto -2x$ dont la source et le but sont supposés être ceux de f.

Enfin, notons que les mots fonctions et applications sont aujourd'hui synonymes ; l'emploi de l'un ou l'autre est une question d'usage ou de circonstances.

1.2 Équations différentielles linéaires sans second membre

En classe de Premières ou Terminales, on rencontre des problèmes où on recherche des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant des relations liant f, ses fonctions dérivée première f' et dérivée seconde f'' (les notations des physiciens ou des mécaniciens sont diverses). Par exemple :

$$f' - 2f = 0 \qquad (E_1)$$

ou

$$f'' - 3f' + 2f = 0 \qquad (E_2)$$

La première équation est appelée *équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre*, la seconde est appelée *équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre*. Les coefficients sont 1 et −2 dans le premier cas, 1, −3 et 2 dans le second.

On peut aussi rencontrer des équations du type :

$$f' - 2xf = 0$$

où les coefficients sont 1 pour f' et la fonction $x \mapsto -2x$ pour f ; l'équation est encore appelée équation différentielle linéaire du premier ordre, mais elle n'est plus à coefficients constants.

Ces équations sont dites sans second membre ou homogènes pour indiquer que le second membre est nul.

1.3 Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants

Un peu d'histoire. Les équations différentielles sont apparues en mathématiques dans la seconde moitié du XVIIe siècle, souvent en lien avec des problèmes de physique. En 1697, pour résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre, Jean Bernoulli propose la méthode de variation de la constante (voir un cours d'analyse). C'est alors un des mathématiciens les plus célèbres de l'Europe. C'est lui qui, quelques années plus tard, va conseiller Leonhard Euler, encore très jeune, dans ses premières lectures mathématiques. Le père d'Euler est un ancien condisciple de Jean Bernoulli. Il finit par accepter que son fils ne se tourne pas comme lui vers la théologie, mais vers les mathématiques. Leonhard ne tarde pas à publier ses premiers travaux. En 1726, quand le fils de Jean Bernoulli, Nicolas (1695-1726), qui est membre de l'académie de Saint-Pétersbourg, meurt, c'est Euler qui est appelé à le remplacer. Euler devient rapidement le premier mathématicien de son temps : il s'intéresse à tous les sujets et innove dans tous les domaines ; son œuvre mathématique est la plus considérable jamais écrite : elle comporte une centaine de volumes.

Léonhard Euler (1707-1783)
Benjamin Holl, d'après A. Lorgna, BnF/Gallica

Les idées d'Euler. C'est en 1743 qu'Euler expose, dans un article écrit en latin, comment résoudre les équations différentielles linéaires à coefficients constants. Il prend tout de suite le cas général de l'équation d'ordre n sans second membre :

$$f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_0 f = 0$$

où les dérivées successives de f sont notées f', f'', …, $f^{(n)}$. Pour faciliter la compréhension, vous pouvez suivre sa méthode sur les équations E_1 et E_2 de 1.2.

Avant de montrer comment trouver des solutions, Euler relève quelques propriétés simples de ces équations qui sont des observations sur les aspects linéaires du problème. D'abord, il remarque que, si on connaît une solution f de l'équation différentielle, alors pour tout réel λ, la fonction λf est aussi solution de l'équation différentielle. En effet, la dérivée k-ième de λf est :

$$(\lambda f)^{(k)} = \lambda f^{(k)}.$$

Puis Euler remarque que, si on connaît deux solutions f et g de l'équation différentielle, alors, pour tout λ et tout μ réels, λf et μg sont solutions de l'équation ainsi que $\lambda f + \mu g$. En effet, la dérivée k-ième de $\lambda f + \mu g$ est :

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}.$$

Euler développe encore cette idée, en expliquant que, si f_1, f_2, f_3, etc. sont des solutions de l'équation, alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 +$ etc. est encore une solution de l'équation pour tous réels λ_1, λ_2, λ_3, etc.

Il reste, bien sûr, à trouver des solutions de l'équation. Euler propose de chercher *a priori* des solutions de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$, où r est un réel, dont les dérivées successives sont $x \mapsto r\mathrm{e}^{rx}$, $x \mapsto r^2\mathrm{e}^{rx}$, etc.

➤ Pour l'équation E_1 de 1.2, on doit avoir :

$$r\mathrm{e}^{rx} - 2\mathrm{e}^{rx} = 0$$

pour tout x réel, donc $r - 2 = 0$ puisque e^{rx} est non nul. La fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ est solution de (E_1) et, par conséquent, toutes les fonctions de la forme λf avec λ réel sont solutions de (E_1).

➤ Pour l'équation E_2 de 1.2, on obtient :

$$r^2\mathrm{e}^{rx} - 3r\mathrm{e}^{rx} + 2\mathrm{e}^{rx} = 0$$

pour tout x réel, donc $r^2 - 3r + 2 = 0$. Comme cette équation du second degré a pour racines $r = 1$ et $r = 2$, les fonctions f_1 et f_2 définies par $f_1(x) = \mathrm{e}^x$ et $f_2(x) = \mathrm{e}^{2x}$ sont solutions de l'équation (E_2) et, par conséquent, toutes les fonctions de la forme $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ sont solutions de (E_2). On retrouve les résultats vus en classes de Premières ou Terminales.

Équation caractéristique. Dans le cas général, Euler obtient une équation polynomiale de degré n en r que nous appellerons *équation caractéristique de l'équation différentielle* :

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

Si cette équation caractéristique a n racines distinctes $r_1, \ldots, r_n$, les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ définies par $f_1(x) = \mathrm{e}^{r_1 x}, \ldots, f_n(x) = \mathrm{e}^{r_n x}$ sont solutions de l'équation et Euler en conclut que toute fonction de la forme $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$, avec λ_1, λ_2, λ_3, etc., réels, est solution.

Ensuite, Euler examine les cas où l'équation caractéristique a des racines doubles, triples, …, ou des racines non réelles, ce que nous ne développerons pas. Cependant, Euler ne pose pas la question de savoir s'il a ainsi obtenu toutes les solutions de ses équations différentielles. C'est le cas, mais cette question ne sera résolue que plus tard.

1.4 Combinaisons linéaires et espace engendré

Définition : combinaison linéaire. Étant données deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous appellerons toute fonction de la forme $\lambda f + \mu g$, avec λ et μ réels, combinaison linéaire à coefficients réels de f et g.

De même, étant données n fonctions $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous appelerons toute fonction de la forme $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ réels, combinaison linéaire à coefficients réels de $f_1, \ldots, f_n$.

Notation. L'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels de $f_1, \ldots, f_n$ sera noté :

$$\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n).$$

et appelé espace engendré par les fonctions $f_1, \ldots, f_n$.

Dans le cas où $n = 1$, $\mathrm{Vect}(f)$ est simplement l'ensemble des fonctions de la forme λf où λ est un réel.

Dans son étude des équations différentielles linéaires à coefficients constants, Euler a su voir que, si $f_1, \ldots, f_n$ sont des solutions de l'équation, alors tout élément de Vect $(f_1, \ldots, f_n)$ est également solution de l'équation.

1.5 Solutions des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre

La forme générale d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre est

$$f'' + af' + bf = 0 \qquad (E)$$

où a et b sont des réels. L'équation caractéristique de cette équation différentielle est :

$$r^2 + ar + b = 0$$

Notons $S(E)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solutions de E. On démontre les résultats suivants.

Proposition.

1) Si $a^2 - 4b > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et, si on définit f_1 et f_2 par $f_1(x) = \mathrm{e}^{r_1 x}$, $f_2(x) = \mathrm{e}^{r_2 x}$, on a : $S(E) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

2) Si $a^2 - 4b = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double r et, si on définit f_1 et f_2 par $f_1(x) = \mathrm{e}^{rx}$, $f_2(x) = x\mathrm{e}^{rx}$, on a : $S(E) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

3) Si $a^2 - 4b < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines imaginaires conjuguées $r_1 = s + \imath t$ et $r_2 = s - \imath t$, où s et t sont réels et, si on définit f_1 et f_2 par $f_1(x) = \mathrm{e}^{sx} \cos tx$, $f_2(x) = \mathrm{e}^{sx} \sin tx$, on a : $S(E) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

Démonstration. Une démonstration de cette proposition sera donnée au paragraphe 15.11.3. Dans chacun des trois cas, on montre par un calcul facile que tout élément de Vect (f_1, f_2) vérifie bien l'équation différentielle E. La difficulté est de montrer qu'il n'y a pas d'autres fonctions solutions que les éléments de Vect (f_1, f_2). ❑

Commentaire. La réponse est finalement de la même forme dans les trois cas, ce sont les fonctions f_1 et f_2 qui changent.

On dit souvent que la solution générale de l'équation E est $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. Il faut comprendre, par cette expression, que toute fonction de cette forme est solution de E et que toute solution de E est de cette forme ; cela revient exactement à dire que l'ensemble des solutions de E est Vect (f_1, f_2). Si on cherche une solution de E satisfaisant à des conditions particulières, comme cela arrive dans les problèmes de physique, par exemple, on écrit que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ satisfait ces conditions, ce qui permet de trouver λ_1 et λ_2.

Peut-on faire mieux ? La présentation de l'ensemble des solutions peut encore susciter une question. Ne pourrait-on pas avoir une présentation encore plus simple, de la forme Vect (h) ? Autrement dit, toute solution de l'équation différentielle serait de la forme λh. Ce serait alors le cas de f_1 et de f_2 ; mais $f_1 = \lambda_1 h$ et $f_2 = \lambda_2 h$ impliqueraient, puisque λ_1 et λ_2 ne sont pas nuls, qu'il existe α non nul tel que $f_1 = \alpha f_2$. Dans chacun des trois cas, c'est impossible (voir exercice 1.2). Par conséquent, on ne peut avoir une description de $S(E)$ de la forme Vect (h).

1.6 Résultats pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre

Considérons l'équation différentielle :

$$f'' + af' + bf = g \qquad (E')$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée (par exemple : $g(x) = \sin x$, $g(x) = \mathrm{e}^x$, etc.).

Cette équation est appelée équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre.

- Si $g = 0$ (rappelons que 0 fait référence ici à une fonction), nous pouvons appliquer les résultats du paragraphe 1.5.
- Si $g \neq 0$ (c'est-à-dire s'il existe x tel que $g(x) \neq 0$), la résolution de (E') comporte deux étapes tout à fait distinctes :

  1) on résout l'équation différentielle sans second membre :

$$f'' + af' + bf = 0 \qquad (E)$$

  associée à l'équation E' et on obtient $S(E) = \text{Vect}\,(f_1, f_2)$ d'après la proposition du paragraphe 1.5 ;

  2) on recherche une solution h (une seule suffit) de l'équation E'.

Proposition. *L'ensemble des solutions de E' est :*

$$S(E') = h + \text{Vect}\,(f_1, f_2) = h + S(E) = \{h + f \mid f \in S(E)\}$$

Commentaire. On peut aussi dire que la solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation sans second membre.

Démonstration. 1) On a $h + S(E) \subset S(E')$ car si $f \in S(E)$, on a :
$(h + f)'' + a(h + f)' + b(h + f) = h'' + f'' + ah' + af' + bh + bf$
$= (h'' + ah' + bh) + (f'' + af' + bf) = g,$
donc $h + f \in S(E')$.

2) Montrons maintenant que $S(E') \subset h + S(E)$. En effet, si $h_1 \in S(E')$, alors $h_1 - h$ est solution de E puisque :
$(h_1 - h)'' + a(h_1 - h)' + b(h_1 - h) = h_1'' - h'' + ah_1' - ah' + bh_1 - bh.$
$= (h_1'' + ah_1' + bh_1) - (h'' + ah' + bh) = g - g = 0.$
Par conséquent, $h_1 - h$ est un élément de $S(E)$, ce qui prouve que $h_1 \in h + S(E)$. ❑

Pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre, il faut un peu d'expérience. Donnons un exemple.
Si le second membre est de la forme $x \mapsto e^{\alpha x}$, on examine si α est racine de l'équation caractéristique.

- s'il ne l'est pas, on cherche une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda e^{\alpha x}$.
- si α est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda x e^{\alpha x}$,
- si α est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda x^2 e^{\alpha x}$.

Principe de superposition

Quand la fonction g du second membre de (E') est une somme de deux fonctions : $g = g_1 + g_2$, on peut appliquer ce qu'on appelle le principe de superposition en cherchant des solutions particulières h_1, h_2 de (E') avec les seconds membres g_1, g_2 respectivement. Alors $h = h_1 + h_2$ est une solution particulière de (E') avec le second membre g. Le principe de superposition n'est qu'un vieux nom pour une simple technique de résolution des équations linéaires, nous en reparlerons en 7.8.

1.7. Le logiciel *Sage*

C'est en 2005 que le mathématicien William Stein (né en 1974) a la première idée du logiciel *Sage* (acronyme de *System for Arithmetic Geometry Experimentation*), le nom de la sauge en anglais. Il s'agit de créer un logiciel pour pouvoir effectuer toutes sortes de calculs et d'algorithmes des mathématiques. *Sage* est un logiciel libre, un logiciel que vous pouvez utiliser gratuitement, copier, modifier, améliorer, transmettre aux copines et copains, en signaler les bogues…. *Sage* s'appuie sur de nombreux logiciels existant. La communauté des utilisateurs de *Sage* l'enrichit sans cesse.

Sage utilise un langage de programmation sous licence libre : *Python*. Guido van Rossum (né en 1956) en a écrit les premières versions au début des années 1990 et il est toujours resté le principal responsable de ses développements. La NASA, Google et d'autres grands organismes disent utiliser ce langage.

Sage peut traiter aussi bien des problèmes d'analyse que d'algèbre ou de combinatoire. Il peut traiter des problèmes de calcul numérique ou des problèmes de calcul formel. Par exemple, si vous étudiez une équation du troisième degré, Sage peut vous donner l'expression des racines avec la formule de Cardan, la ou les racines réelles ou complexes avec l'approximation que vous souhaitez. Si vous faites de l'algèbre linéaire, *Sage* peut résoudre à peu près tous les problèmes que vous rencontrerez dans ce livre, par exemple résoudre les systèmes linéaires du chapitre 4, les problèmes de réduction des matrices du chapitre 15, les problèmes sur les corps finis du chapitre 21.

L'accès à Sage est très simple ; vous pouvez vous connecter sur le réseau à un serveur ou le télécharger sur votre ordinateur.

➤ Vers le chapitre 2

Le but de ce chapitre était de se familiariser avec la linéarité dans les résolutions d'équations différentielles linéaires. Le but du chapitre 2 est de développer la même idée pour les suites récurrentes linéaires.

Exercices

1.1 Fonctions paires et impaires

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions paires et a un réel. Préciser si les fonctions $-f$, fg, $f+1$, $f+g$, af sont paires. Une fonction quelconque de Vect (f, g) est-elle paire ?

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions impaires et a un réel. Préciser si les fonctions $-f$, fg, $f+1$, $f+g$, af sont impaires. Une fonction quelconque de Vect (f, g) est-elle impaire ?

1.2 Peut-on faire mieux ?

Montrer que les fonctions f_1 et f_2 ne sont pas proportionnelles dans les trois cas de la proposition du paragraphe 1.5.

1.3 Changement de fonction

On considère l'équation différentielle (E) : $f'' - 2f' + f = 0$ (E). On n'utilisera pas le résultat de la proposition de 1.5.

a) Déterminer l'ensemble des fonctions u telles que $x \mapsto u(x)e^x$ soit solution de (E).

b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

1.4 Résolutions d'équations

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes.

a) $f'' - f' - 2f = e^x$ $\qquad (E_1)$

b) $f'' + f' - 2f = e^x$ $\qquad (E_2)$

c) $f'' - 4f' + 4f = e^{2x}$ $\qquad (E_3)$

d) $f''' - 2f'' - f' + 2f = e^x$ $\qquad (E_4)$

e) $f'' - f' - 2f = e^x + e^{3x}$ $\qquad (E_5)$

f) $f' - af = b$ $\qquad (E_6)$ où a et b sont des réels.

Solutions

1.1 **a)** La réponse est oui pour toutes les fonctions.

b) On voit que $-f$ est impaire, fg est paire, $f+g$, af et toutes les fonctions de Vect(f, g) sont impaires.

Exemple de rédaction détaillée : si f et g sont des fonctions impaires, pour tout x réel, on a :

- $(fg)(-x) = f(-x)g(-x)$ par définition du produit fg ;
- donc $(fg)(-x) = (-f(x))(-g(x))$ car f et g sont impaires ;
- donc $(fg)(-x) = f(x)g(x)$;
- donc $(fg)(-x) = (fg)(x)$ par définition du produit fg ;
- donc fg est une fonction paire.

Étude de $f + 1$ si f est impaire : pour tout x réel, on a : $(f + 1)(-x) = f(-x) + 1 = -f(x) + 1$.

Par conséquent, $f + 1$ sera paire si, pour tout x réel, $f(x) + 1 = -f(x) + 1$, c'est-à-dire si $f = 0$, et $f + 1$ sera impaire si, pour tout x réel, $f(x) + 1 = -(-f(x) + 1) = f(x) - 1$, ce qui est impossible. Donc $f + 1$ n'est ni paire ni impaire pour $f \neq 0$.

1.2 Reprenons les 3 cas de la proposition du paragraphe 1.5.

a) On a $f_1(x) = e^{r_1 x}$ et $f_2(x) = e^{r_2 x}$. S'il existe α réel tel que $f_1 = \alpha f_2$, on a, pour tout x réel : $e^{(r_1 - r_2)x} = \alpha$, ce qui est impossible puisque $r_1 \neq r_2$.

b) On a $f_1(x) = e^{rx}$ et $f_2(x) = x\, e^{rx}$. S'il existe α réel tel que $f_1 = \alpha f_2$, on a, pour tout x réel : $1 = \alpha x$, ce qui est impossible, pour $x = 0$ par exemple.

c) On a $f_1(x) = e^{sx} \cos tx$ et $f_2(x) = e^{sx} \sin tx$. S'il existe α réel tel que $f_1 = \alpha f_2$, on a, pour tout x réel : $\cos tx = \alpha \sin tx$, ce qui est impossible (pour $x = 0$, par exemple).

1.3 **a)** En calculant les dérivées première et seconde de $x \mapsto u(x)e^x$, on voit que cette fonction est solution de (E) si et seulement si $u'' = 0$, donc si et seulement si u est de la forme $x \mapsto ax + b$.

b) Soit f une solution quelconque de (E) et définissons la fonction u par $x \mapsto e^{-x} f(x)$ (c'est possible car e^{-x} ne s'annule pas).

On a $f(x) = u(x)e^x$, donc f est de la forme $x \mapsto (ax + b)e^x$.

Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E) est celui donné au cas 2 de la proposition du paragraphe 1.5.

1.4 La démarche est toujours la même : chercher la solution générale de l'équation sans second membre (E_i) et chercher une solution particulière de l'équation avec second membre, notée (E_i').

a) L'équation caractéristique de (E_1) admet deux racines distinctes : -1 et 2, donc $S(E_1) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ avec $f_1 : x \mapsto e^{-x}$ et $f_2 : x \mapsto e^{2x}$.

Le coefficient de l'exposant du second membre est 1, il n'est pas racine de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda e^x$.

On trouve $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.

En posant $h_1 : x \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$, on trouve $S(E_1') = h_1 + S(E_1)$.
Autrement dit, $S(E_1')$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \lambda_1\mathrm{e}^{-x} + \lambda_2\mathrm{e}^{2x}$ où λ_1 et λ_2 sont réels.

b) L'équation caractéristique de (E_2) admet deux racines distinctes : 1 et -2, donc $S(E_2) = \mathrm{Vect}(f_3, f_4)$ avec $f_3 : x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $f_4 : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$.

Le coefficient de l'exposant du second membre est ici racine simple de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda x\,\mathrm{e}^x$. On trouve $\lambda = -\frac{1}{3}$.

En posant $h_2 : x \mapsto \frac{1}{3}x\,\mathrm{e}^x$, on trouve $S(E_2') = h_2 + S(E_2)$. Autrement dit, $S(E_2')$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{3}x\,\mathrm{e}^x + \lambda_1\,\mathrm{e}^x + \lambda_2\,\mathrm{e}^{-2x}$ où λ_1 et λ_2 sont réels.

c) L'équation caractéristique de (E_3) admet 2 comme racine double, donc $S(E_3) = \mathrm{Vect}(f_2, f_5)$ avec $f_5 : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{2x}$.

Le coefficient de l'exposant du second membre est racine double de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda x^2\mathrm{e}^{2x}$. On trouve $\lambda = -\frac{1}{2}$.

En posant $h_3 : x \mapsto \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x}$, on trouve $S(E_3') = h_3 + S(E_3)$. Autrement dit, $S(E_3')$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x} + \lambda_1\mathrm{e}^{2x} + \lambda_2 x\,\mathrm{e}^{2x}$ où λ_1 et *2,* λ_2 sont réels.

d) L'équation caractéristique de (E_4) admet trois racines distinctes : -1, 1 et 2, donc $S(E_4) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

Le coefficient de l'exposant du second membre est 1, il est racine simple de l'équation caractéristique. En généralisant la méthode pour les équations du second ordre, on cherche une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda x\,\mathrm{e}^x$. On trouve $\lambda = -\frac{1}{2}$.

En posant $h_4 : x \mapsto -\frac{1}{2}x\,\mathrm{e}^x$, on trouve $S(E_4') = h_4 + S(E_4)$. Autrement dit, $S(E_4')$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto -\frac{1}{2}x\,\mathrm{e}^x + \lambda_1\mathrm{e}^{-x} + \lambda_2\mathrm{e}^x + \lambda_3\mathrm{e}^{2x}$ où λ_1, λ_2 et λ_3 sont réels.

e) On applique le principe de superposition. Le second membre de E_5' est une somme de deux fonctions et nous allons chercher une solution particulière de E_5' comme somme de solutions particulières des équations $f'' - f' - 2f = \mathrm{e}^x$ et $f'' - f' - 2f = \mathrm{e}^{3x}$. Nous connaissons déjà une solution particulière de la première équation : h_1. On peut chercher une solution particulière de la seconde de la forme $h_5 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{3x}$. On trouve $\lambda = \frac{1}{4}$.

Donc $S(E_5') = h_1 + h_5 + S(E_1)$. Autrement dit, $S(E_5')$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{4}e^{3x} + \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{2x}$ où λ_1 et λ_2 sont réels.

f) L'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est $S(E_6) = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{ax})$. Si h est une solution de l'équation avec second membre, on a $S(E_6') = h + S(E_6)$.

Si $a = 0$, l'équation avec second membre s'écrit $f' = b$ qui a pour solution particulière $x \mapsto bx$ et les solutions de E_6' sont de la forme $x \mapsto bx + C$ où C est reel (on peut, bien sûr, raisonner directement dans ce cas).

Si $a \neq 0$, l'équation avec second membre s'écrit $f' - af = b$ qui a pour solution particulière la fonction constante $x \mapsto -\frac{b}{a}$ et les solutions de E_6' sont de la forme $x \mapsto C\,e^{ax} - \frac{b}{a}$ où C est réel.

On peut appliquer dans ce dernier exercice la méthode des exercices précédents : l'équation caractéristique a pour racine a et le second membre est de la forme be^{0x}.