

# Traitement du Signal

Jean-Yves Tourneret<sup>(1)</sup> et Charly Poulliat<sup>(2)</sup>

(1) Université de Toulouse, ENSEEIHT-IRIT-TéSA

[jyt@n7.fr](mailto:jyt@n7.fr)

(2) Université de Toulouse, ENSEEIHT-IRIT

[charly.poulliat@enseeiht.fr](mailto:charly.poulliat@enseeiht.fr)

# Bibliographie

- J. Max et J.-L. Lacoume, Méthodes et techniques de traitement du signal, Dunod, 5ème édition, 2004.
- Athanasios Papoulis and S. Unnikrishna Pillai, Probability, Random Variable and Stochastic Processes, McGraw Hill Higher Education, 4th edition, 2002.

# Plan du cours

- **Chapitre 1 : Corrélations et Spectres**
  - **Transformée de Fourier**
  - Classes de signaux déterministes et aléatoires
  - Propriétés de  $R_x(\tau)$  et de  $S_x(f)$
- **Chapitre 2 : Filtrage Linéaire**
- **Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires**

# Transformée de Fourier

- Définitions

- Formule directe

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

- Formule inverse

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) \exp(j2\pi ft) df$$

- Hypothèses

TF sur  $L^1$  ou  $L^2$

# Propriétés

## • Linéarité

$$\text{TF} [ax(t) + by(t)] = aX(f) + bY(f)$$

• **Parité**  $x(t)$  réelle paire  $\Rightarrow X(f)$  réelle paire

## • Translation et Modulation

$$\text{TF} [x(t - t_0)] = \exp(-j2\pi ft_0)X(f)$$

$$\text{TF} [x(t) \exp(j2\pi f_0t)] = X(f - f_0)$$

## • Similitude

$$\text{TF} [x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

# Propriétés

## • Produits de Convolution

$$\text{TF} [x(t) * y(t)] = X(f)Y(f)$$

$$\text{TF} [x(t)y(t)] = X(f) * Y(f)$$

## • Égalite de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$$

## • Conjugaison

$$\text{TF} [x^*(t)] = X^*(-f)$$

# Distributions

## • Localisation

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

## • Produit de Convolution

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

## • Transformées de Fourier

$$\text{TF} [\delta(t)] = 1, \text{TF} [1] = \delta(f)$$

$$\text{TF} [\delta(t - t_0)] = \exp(-j2\pi f t_0), \text{TF} [\exp(j2\pi f_0 t)] = \delta(f - f_0)$$

# Résumé des propriétés

**T.F.**

$ax(t) + by(t)$	$\Leftrightarrow$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\Leftrightarrow$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\Leftrightarrow$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\Leftrightarrow$	$X^*(-f)$
$x(t) \cdot y(t)$	$\Leftrightarrow$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\Leftrightarrow$	$X(f) \cdot Y(f)$
$x(at + b)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right) e^{i2\pi \frac{b}{a} f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\Leftrightarrow$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	Série de Fourier
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$	$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$
$\int_{\mathbb{R}}  x(t) ^2 dt = \int_{\mathbb{R}}  X(f) ^2 df$	



# Tables

**T.F.**

1	$\Leftrightarrow$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\Leftrightarrow$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\Leftrightarrow$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\Leftrightarrow$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\text{III}_T(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{T} \text{III}_{1/T}(f)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a t }$	$\Leftrightarrow$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\Leftrightarrow$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\Leftrightarrow$	$T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \text{sinc}(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\Leftrightarrow$	$T \text{sinc}^2(\pi T f)$
$B \text{sinc}(\pi B t)$	$\Leftrightarrow$	$\Pi_B(f)$
$B \text{sinc}^2(\pi B t)$	$\Leftrightarrow$	$\Lambda_B(f)$

# Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
  - Transformée de Fourier
  - Classes de signaux déterministes et aléatoires
  - Propriétés de  $R_x(\tau)$  et de  $S_x(f)$
- Chapitre 2 : Échantillonnage
- Chapitre 3 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 4 : Traitements Non-linéaires

# Classes de signaux déterministes et aléatoires

- **Classe 1** : signaux déterministes à **énergie finie**
- **Classe 2** : signaux déterministes **périodiques** à puissance finie
- **Classe 3** : signaux déterministes **non périodiques** à **puissance finie**
- **Classe 4** : signaux **aléatoires stationnaires**

# Signaux déterministes à énergie finie

- **Définition**  $E = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df < \infty$

- **Fonction d'autocorrélation**

$$R_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t - \tau)dt = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle$$

- **Fonction d'intercorrélation**

$$R_{xy}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t - \tau)dt = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle$$

- **Produit scalaire**

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt$$

# Densité spectrale d'énergie

## • Définition

$$s_x(f) = \text{TF} [R_x(\tau)]$$

## • Propriété

$$s_x(f) = |X(f)|^2$$

## • Preuve

$$\begin{aligned} s_x(f) &= \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t-\tau)dt \right] \exp(-j2\pi f\tau)d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} x^*(t-\tau) \exp(-j2\pi f\tau)d\tau \right] x(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} x^*(u) \exp [j2\pi f(u-t)] du \right] x(t)dt \\ &= X^*(f)X(f) \end{aligned}$$

# Exemple

- Fenêtre rectangulaire

$$x(t) = \Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = T \Lambda_T(\tau)$$

- Densité spectrale d'énergie

$$s_x(f) = T^2 \text{sinc}^2(\pi T f) = |X(f)|^2$$

# Signaux déterministes périodiques

- **Définition**  $P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt < \infty$

- **Fonction d'autocorrélation**

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)x^*(t - \tau)dt = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle$$

- **Fonction d'intercorrélation**

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)y^*(t - \tau)dt = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle$$

- **Produit scalaire**

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)y^*(t)dt$$

# Densité spectrale de puissance

## • Définition

$$s_x(f) = \text{TF} [R_x(\tau)]$$

## • Propriété

$$s_x(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

avec  $x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(j2\pi k f_0 t)$ .

## • Preuve

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \sum_{k,l} c_k c_l^* \exp(j2\pi l f_0 \tau) \left[ \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \exp[j2\pi(k-l)f_0 t] dt \right] \\ &= \sum_k |c_k|^2 \exp(j2\pi k f_0 \tau) \end{aligned}$$



# Exemple

- Sinusoïde

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

- Densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

# Signaux déterministes à puissance finie

- **Définition**  $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$

- **Fonction d'autocorrélation**

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t - \tau) dt = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle$$

- **Fonction d'intercorrélation**

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t - \tau) dt = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle$$

- **Produit scalaire**

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t) dt$$

# Densité spectrale de puissance

- Définition

$$s_x(f) = \text{TF} [R_x(\tau)]$$

- Propriété

$$s_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

avec

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

- Exemple

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

avec  $f_1$  et  $f_2$  non commensurables.

# Signaux aléatoires stationnaires

- **Définition**

- **Moyenne** :  $E[x(t)]$  indépendant de  $t$

- **Moment d'ordre 2** :  $E[x(t)x^*(t - \tau)]$  indépendant de  $t$

- **Fonction d'autocorrélation**

$$R_x(\tau) = E[x(t)x^*(t - \tau)] = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle$$

- **Fonction d'intercorrélation**

$$E[x(t)y^*(t - \tau)] = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle$$

- **Produit scalaire**

$$\langle x(t), y(t) \rangle = E[x(t)y^*(t)]$$

Remarques : stationnarité au sens **strict**, **large**, à l'ordre **deux**, **tests** de stationnarité.

# Densité spectrale de puissance

- Puissance moyenne

$$P = R_x(0) = E [|x(t)|^2] = \int_{\mathbb{R}} s_x(f) df$$

- Densité spectrale de puissance

- Définition

$$s_x(f) = \text{TF} [R_x(\tau)]$$

- Propriété

$$s_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E [|X_T(f)|^2]$$

mais en général  $X(f)$  n'existe pas !

# Exemples

- Exemple 1 : Sinusoïde

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

$\theta$  va uniforme sur  $[0, 2\pi]$ .

- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

- Densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

# Exemples

- Exemple 2 : Bruit blanc

- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

- Densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{N_0}{2}$$

# Plan du cours

- **Chapitre 1 : Corrélations et Spectres**
  - Transformée de Fourier
  - Classes de signaux déterministes et aléatoires
  - Propriétés de  $R_x(\tau)$  et de  $S_x(f)$
- **Chapitre 2 : Filtrage Linéaire**
- **Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires**



# Propriétés de $R_x(\tau)$

- **Symétrie Hermitienne** :  $R_x^*(-\tau) = R_x(\tau)$
- **Valeur maximale** :  $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$
- **Distance entre  $x(t)$  et  $x(t - \tau)$**  : si  $x(t)$  est un signal réel

$$d^2 [x(t), x(t - \tau)] = 2 [R_x(0) - R_x(\tau)]$$

Donc  $R_x(\tau)$  mesure le lien entre  $x(t)$  et  $x(t - \tau)$ .

- **Décomposition de Lebesgue** : dans la quasi-totalité des applications, on a

$$R_x(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau)$$

où  $R_1(\tau)$  est une somme de fonctions périodiques et  $R_2(\tau)$  tend vers 0 lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ .

# Propriétés de $s_x(f)$

- **DSP réelle**

$$s_x(f) \in \mathbb{R}$$

De plus, si  $x(t)$  signal réel,  $s_x(f)$  **réelle paire**

- **Positivité** :  $s_x(f) \geq 0$

- **Lien entre DSP et puissance/énergie**

$$P \text{ ou } E = R_x(0) = \int_{\mathbb{R}} s_x(f) df$$

- **Décomposition de Lebesgue** : dans la quasi-totalité des applications, on a  $s_x(f) = s_1(f) + s_2(f)$ , où  $s_1(f)$  est un spectre de **raies** et  $s_2(f)$  un spectre **continu** (cas général : partie **singulière**).

# Que faut-il savoir ?

- **Reconnaître** si un signal est à énergie finie, à puissance finie périodique ou aléatoire.
- Qu'est ce qu'un signal aléatoire **stationnaire** ?
- Les différentes définitions d'une **fonction d'autocorrélation**  $R_x(\tau)$
- La définition **unifiée** d'une **densité spectrale** :  $s_x(f) = ?$
- Les différentes définitions d'une **densité spectrale**
- Ce qu'est un **bruit blanc**
- Ce qu'est un **bruit gaussien**
- Propriétés de  $R_x(\tau)$
- Propriétés de  $s_x(f)$

# Plan du cours

- **Chapitre 1 : Corrélations et Spectres**
- **Chapitre 2 : Filtrage Linéaire**
  - **Introduction**
  - Relations de Wiener-Lee
  - Formule des interférences
  - Exemples
- **Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires**

# Introduction

On cherche une opération avec les propriétés suivantes

- **Linéarité** :  $T [a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1T [x_1(t)] + a_2T [x_2(t)]$

- **Invariance dans le temps**

Si  $y(t) = T [x(t)]$  alors  $T [x(t - t_0)] = y(t - t_0)$

- **Stabilité BIBO**

Si  $|x(t)| \leq M_x$  alors il existe  $M_y$  tel que

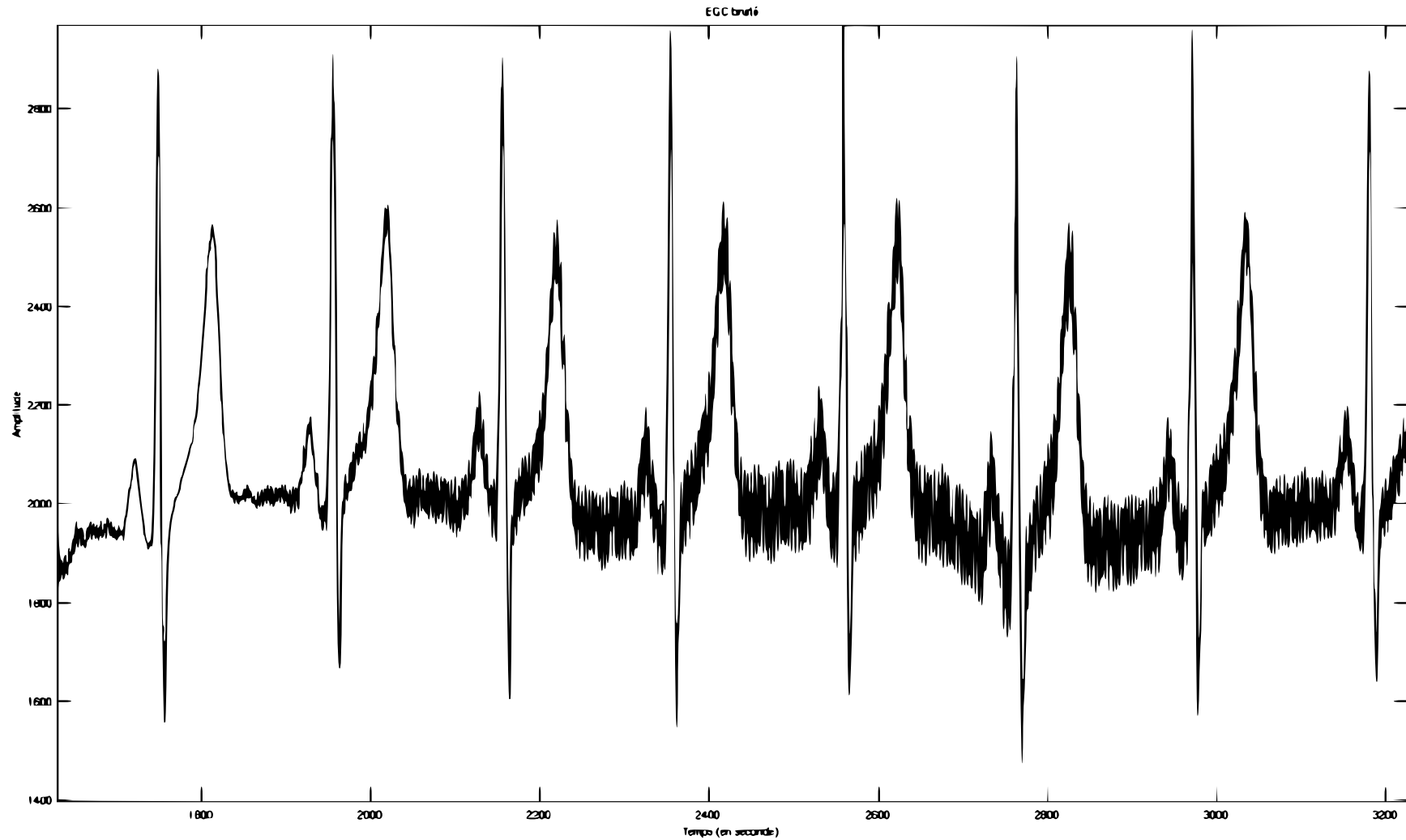
$$|y(t)| = |T [x(t)]| \leq M_y$$

- **“Limitation” du spectre d’un signal**

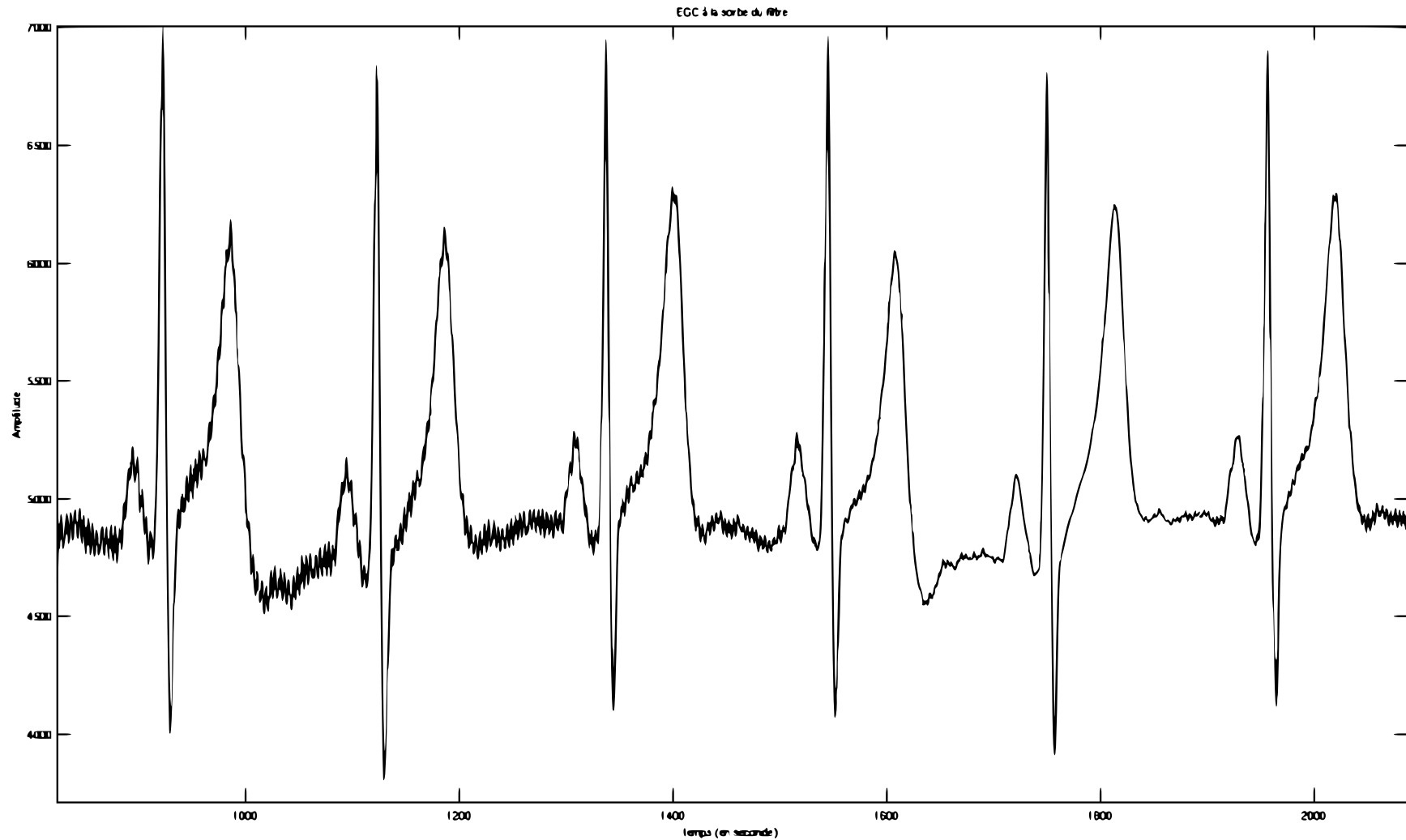
☞ **Convolution**

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\mathbb{R}} x(u)h(t - u)du = h(t) * x(t)$$

# ECG avant filtrage



# ECG après filtrage



# Commentaires

- La **linéarité** ne suffit pas. Contre-exemple

$$y(t) = m(t)x(t)$$

- CNS de **Stabilité BIBO**

$$\int_{\mathbb{R}} |h(t)| dt < \infty, \text{ i.e., } h \in L^1$$

- **Réponse impulsionnelle et Transmittance**

$$H(f) = \text{TF} [h(t)] = \int_{\mathbb{R}} h(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

Si  $x(t) = \delta(t)$  alors  $y(t) = h(t)$ . Ceci permet d'obtenir la seule réponse impulsionnelle possible.



# Réalisabilité d'un filtre

## • Domaine temporel

- (1)  $h(t)$  réelle
- (2)  $h(t) \in L^1$  (stabilité)
- (3)  $h(t)$  causale (filtre sans mémoire)

## • Domaine spectral

- (1) Symétrie hermitienne :  $H^*(-f) = H(f)$
- (2) ne peut se traduire
- (3)  $H(f) = -j\tilde{H}(f)$ , où  $\tilde{H}(f) = H(f) * \frac{1}{\pi f}$  est la transformée de Hilbert de  $H$  (preuve dans le cours manuscrit).

# Écriture équivalente

En écrivant  $H(f) = H_r(f) + jH_i(f)$ , on obtient

$$H_r(f) = H_i(f) * \frac{1}{\pi f}$$

$$H_i(f) = - H_r(f) * \frac{1}{\pi f}$$

# Identifier une relation de filtrage linéaire

## • Signaux déterministes

$$y(t) = x(t) * h(t) \Leftrightarrow Y(f) = X(f)H(f)$$

## • Signaux aléatoires : Isométrie fondamentale

$$\text{Si } x(t) \stackrel{I}{\Leftrightarrow} e^{j2\pi ft}, \text{ alors } y(t) \stackrel{I}{\Leftrightarrow} e^{j2\pi ft} H(f)$$

## • Exemples

$$\bullet y(t) = \sum_{k=1}^n a_k x(t - t_k)$$

$$\bullet y(t) = x'(t)$$

$$\bullet y(t) = x(t)m(t)$$

# Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
  - Introduction
  - Relations de Wiener-Lee
  - Formule des interférences
  - Exemples
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

# Relations de Wiener Lee

- Densité spectrale de puissance

$$s_y(f) = s_x(f) |H(f)|^2$$

- Intercorrélation

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$$

- Autocorrélation

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

# Preuves (signaux à énergie finie)

## • Densité spectrale d'énergie

$$s_y(f) = |Y(f)|^2 = |X(f)H(f)|^2 = s_x(f)|H(f)|^2$$

## • Intercorrélation

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} y(u)x^*(u - \tau)du \\ &= \int_{\mathbb{R}} Y(f) [e^{-j2\pi f\tau} X(f)]^* df \\ &= \int_{\mathbb{R}} X(f)H(f) [e^{j2\pi f\tau} X^*(f)] df \\ &= \int_{\mathbb{R}} s_x(f)H(f)e^{j2\pi f\tau} df = \text{TF}^{-1}[s_x(f)H(f)] \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

# Preuve (signaux à puissance finie)

## • Intercorrélation

$$\begin{aligned}R_{yx}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t)x^*(t - \tau)dt \\&= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left[ \int_{\mathbb{R}} h(v)x(t - v)dv \right] x^*(t - \tau)dt \\&= \int_{\mathbb{R}} h(v) \left[ \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t - v)x^*(t - \tau)dt \right] dv \\&= \int_{\mathbb{R}} h(v)R_x(\tau - v)dv \quad \text{CQFD}\end{aligned}$$

• etc ...

# Preuves (signaux aléatoires)

## ● Intercorrélation

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= E[y(t)x^*(t - \tau)] \\ &= \langle y(t), x(t - \tau) \rangle \\ &= \langle e^{j2\pi ft} H(f), e^{j2\pi f(t-\tau)} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{j2\pi ft} H(f) e^{-j2\pi f(t-\tau)} s_X(f) df \\ &= \int_{\mathbb{R}} H(f) e^{j2\pi f\tau} s_X(f) df \\ &= h(\tau) * R_x(\tau) \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$



# Preuves (signaux aléatoires)

## • Autocorrélation

$$\begin{aligned}R_y(\tau) &= E[y(t)y^*(t - \tau)] \\&= \langle y(t), y(t - \tau) \rangle \\&= \langle e^{j2\pi ft} H(f), e^{j2\pi f(t-\tau)} H(f) \rangle \\&= \int_{\mathbb{R}} e^{j2\pi ft} H(f) e^{-j2\pi f(t-\tau)} H^*(f) s_x(f) df \\&= \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \\&= \text{TF}^{-1} \{s_x(f) |H(f)|^2\} \\&= h(\tau) * h^*(-\tau) * R_x(\tau) \quad \text{CQFD}\end{aligned}$$

# Preuves (signaux aléatoires)

## • Autocorrélation

$$R_y(\tau) = \text{TF}^{-1}\{s_x(f)|H(f)|^2\}$$

## • Densité Spectrale de Puissance

$$s_y(f) = s_x(f)|H(f)|^2 \quad \text{CQFD}$$

# Valeur moyenne

- Propriété

$$E[Y(t)] = E[X(t)]H(0)$$

- Preuve

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= E \left[ \int_{\mathbb{R}} X(t-u)h(u)du \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} E[X(t-u)]h(u)du \\ &= E[X(t)] \int_{\mathbb{R}} h(u)du \quad (\text{signal stationnaire}) \\ &= E[X(t)]H(0) \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

# Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
  - Introduction
  - Relations de Wiener-Lee
  - Formule des interférences
  - Exemples
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

# Formule des interférences

## • Hypothèses

$$y_1(t) = x(t) * h_1(t) \text{ et } y_2(t) = x(t) * h_2(t)$$

## • Conclusion

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} s_x(f) H_1(f) H_2^*(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

## • Preuve (signaux à énergie finie)

$$\begin{aligned} R_{y_1 y_2}(\tau) &= \int y_1(t) y_2^*(t - \tau) dt = \int_{\mathbb{R}} Y_1(f) [Y_2(f) e^{-j2\pi f\tau}]^* df \\ &= \int_{\mathbb{R}} H_1(f) H_2^*(f) e^{j2\pi f\tau} s_x(f) df \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

# Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
  - Introduction
  - Relations de Wiener-Lee
  - Formule des interférences
  - Exemples
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

# Exemples

- **Filtre Passe-bas**
  - Transmittance

$$H(f) = \Pi_F(f)$$

- Réponse impulsionnelle

$$h(t) = F \operatorname{sinc}(\pi F t)$$

non causale et  $\notin L^1 \Rightarrow$  troncature + décalage

- **Filtres liaisons montante et descendante** d'une chaîne de transmission

# Filtre adapté : maximisation du SNR

## ● Signal observé

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad t \in [0, T]$$

$s(t)$  signal déterministe à énergie finie et  $n(t)$  signal aléatoire stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance  $s_n(f)$ .

## ● Filtrage

$$y(t) = y_s(t) + y_n(t) = s(t) * h(t) + n(t) * h(t)$$

## ● Rapport signal sur bruit

$$\text{SNR}(t_0) = \frac{y_s^2(t_0)}{E[y_n^2(t_0)]}$$



# Expression équivalente du SNR

$$SNR(t_0) = \frac{y_s^2(t_0)}{E[y_n^2(t_0)]} = \frac{\left| \int_{\mathbb{R}} H(f) S(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2}{\int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_n(f) df}$$

## • Numérateur

$$y_s(t) = TF^{-1} [S(f)H(f)] = \int_{\mathbb{R}} H(f) S(f) e^{j2\pi f t} df$$

## • Dénominateur

### • Wiener Lee

$$s_{y_n}(f) = s_n(f) |H(f)|^2$$

### • Puissance

$$P_{y_n} = E[y_n^2(t_0)] = R_{y_n}(0) = \int_{\mathbb{R}} s_n(f) |H(f)|^2 df$$

# Inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\left| \int_{\mathbb{R}} a(f)b^*(f)df \right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} a(f)a^*(f)df \int_{\mathbb{R}} b(f)b^*(f)df$$

## • Numérateur

$$\left| \int_{\mathbb{R}} H(f)S(f)e^{j2\pi ft} df \right|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} a(f)b^*(f)df \right|^2$$

avec  $a(f) = \sqrt{s_n(f)}H(f)$  et  $b(f) = \frac{S^*(f)}{\sqrt{s_n(f)}}e^{-j2\pi ft_0}$ .

## • Dénominateur

$$\int_{\mathbb{R}} s_n(f) |H(f)|^2 df = \int_{\mathbb{R}} a(f)a^*(f)df$$

# Expression du filtre adapté

- Cauchy-Schwartz

$$SNR(t_0) = \frac{\left| \int_{\mathbb{R}} H(f) S(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2}{\int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_n(f) df} \leq \int_{\mathbb{R}} b(f) b^*(f) df$$

avec égalité pour  $a(f) = kb(f)$ , i.e.,

$$H(f) = k \frac{S^*(f)}{s_n(f)} e^{-j2\pi f t_0}$$

- Cas d'un bruit blanc

$$H(f) = K S^*(f) e^{-j2\pi f t_0} \Leftrightarrow h(t) = K s^*(t_0 - t)$$

Symétrie oy + Translation

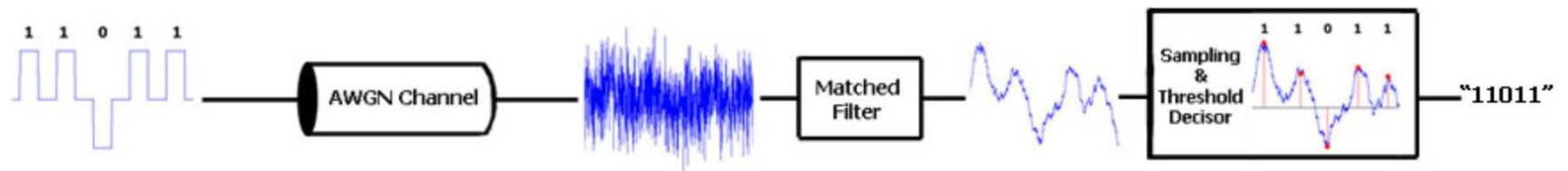
# SNR maximum

## ● Définition

$$SNR(t_0)^{\max} = \int_{\mathbb{R}} b(f)b^*(f)df = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{N_0} |S(f)|^2 df = \frac{2E}{N_0}$$

où  $E$  est l'énergie du signal. On voit donc que le rapport signal à bruit maximal ne dépend pas de la forme du signal mais uniquement de son **énergie**.

## ● Page wikipedia Matched Filter



# Que faut-il savoir ?

- **Reconnaître** une relation de filtrage linéaire
- **Densité spectrale** de puissance de la sortie d'un filtre
- **Intercorrélation** entre l'entrée et la sortie d'un filtre
- **Moyenne** de la sortie d'un filtre
- Formule des **interférences**
- Réponse impulsionnelle **causale** et  $\in L^1$ , sinon ...

# Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires
  - Introduction
  - Quadrateur
  - Quantification

# Introduction

- Transformation sans mémoire

$$y(t) = g[x(t)]$$

- Exemples

- Quadratureur

$$y(t) = x^2(t)$$

- Quantification

$$y(t) = x_Q(t)$$

# Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires
  - Introduction
  - **Quadratureur**
  - Quantification



# Quadratureur

- Signaux déterministes

$$Y(f) = X(f) * X(f)$$

- Exemples

- Sinusoïde :  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$

$$Y(f) = \frac{A^2}{2} \delta(f) + \frac{A^2}{4} [\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0)]$$

Disparition de la fréquence  $f_0$  et apparition de la fréquence  $2f_0$

- Somme de sinusoïdes : Termes d'intermodulation

- Sinus cardinal : doublement de la largeur de bande

# Quadratureur pour signaux aléatoires

- **Théorème de Price**

- **Hypothèses**

- $(X_1, X_2)$  vecteur Gaussien de moyenne nulle

- $Y_1 = g(X_1)$  et  $Y_2 = g(X_2)$

- **Conclusion**

$$\frac{\partial E(Y_1 Y_2)}{\partial E(X_1 X_2)} = E \left( \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} \right)$$

- **Application au quadratureur**

$$R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau) + K$$

# Remarques

- Loi Gaussienne bivariée

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right)$$

- Stationnarité

$$E[Y(t)Y(t-\tau)] = \int \int g(x_1) g(x_2) p(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

avec  $x_1 = X(t)$ ,  $x_2 = X(t-\tau)$  et

$$\Sigma = \begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(\tau) \\ R_X(\tau) & R_X(0) \end{pmatrix}$$

# Détermination de $K$

- Moments d'une loi Gaussienne centrée

$$E(X^{2n+1}) = 0, \quad E(X^{2n}) = [(2n-1) \times (2n-3) \dots \times 3 \times 1] \sigma^{2n}$$

- $\tau = 0$

$$K = R_Y(0) - 2R_X^2(0) = 3R_X^2(0) - 2R_X^2(0) = R_X^2(0)$$

- $\tau \rightarrow +\infty$

$$K = R_Y(+\infty) - 2R_X(+\infty) = R_X^2(0)$$

- Autocorrélation

$$R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)$$

# Summary

- Autocorrélation

$$R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)$$

- Densité spectrale de puissance

$$s_Y(f) = 2s_X(f) * s_X(f) + R_X^2(0)\delta(f)$$

# Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires
  - Introduction
  - Quadrateur
  - Quantification

# Quantification

## ● Principe

$$x_Q(t) = i\Delta q_i = x_i \text{ et } x_i - \frac{\Delta q_i}{2} \leq x(t) \leq x_i + \frac{\Delta q_i}{2}$$

## ● Définitions

- Pas de quantification  $\Delta q_i$
- Quantification uniforme  $\Delta q_i = \Delta q = \frac{2A_{\max}}{N}$
- Niveaux de quantification:  $x_i$
- Nombre de bits de quantification  $N = 2^n$

# Erreur de quantification

- **Hypothèse**

$\epsilon(t)$  suit la loi uniforme sur  $\left[-\frac{\Delta q}{2}, \frac{\Delta q}{2}\right]$ , i.e.,  $N \geq 2^8$

- **Rapport signal sur bruit de quantification**

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left( \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\epsilon^2} \right)$$

- Variance du bruit :  $\sigma_\epsilon^2 = \frac{(\Delta q)^2}{12}$

- Sinusoïde :  $\sigma_x^2 = \frac{A^2}{2}$

- **Conclusion**

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 6n + 1.76$$



# Remarques

- Généralisation à un signal Gaussien

$$2S\sigma = N\Delta q \Rightarrow \text{SNR}_{\text{dB}} = 6n + \dots$$

- Quantification non uniforme

# Que faut-il savoir ?

- **Traitement non-linéaire** = possibilité de créer de nouvelles fréquences
- Savoir appliquer le théorème de **Parseval**. Intérêt ?
- Définition et propriétés de la **quantification**
- Savoir calculer le **rapport signal sur bruit** de quantification