

Traitement du Signal

2005

Objectifs

- Transformation

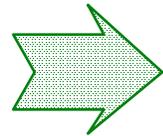
Temps



Fréquence

- Transformation

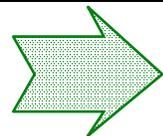
Signal
continu



Signal
échantillonné

- Application au filtrage

Analogique



Numérique

MCPC

TI

TdS1

9 modules de cours
11 modules de TD
3 modules de TP
1 examen

TdS2

+2 modules de cours-
+2 modules de TD
+1 modules de TP
1 examen

Traitement du Signal

Signaux et bruits, Systèmes linéaires

Séries de Fourier

Fonctions périodiques, Propriétés, Spectre de raies
Taux de distorsion harmonique
Réponse d'un système linéaire à une entrée périodique

Distributions

Heaviside, Porte, Triangle
Dirac, Peigne de Dirac

Transformation de Fourier

Propriétés, Exemples

Produit de convolution

Système causal dépendant du temps
Technique de calcul, Filtre en cascade

Filtrage linéaire

Filtrage fréquentiel, Filtrage temporel
Filtrage et décomposition en série de Fourier

Échantillonnage du signal

Importance du monde numérique
Principe, Échantillonneur idéal, Cas réel
Échantillonneur bloqueur
Échantillonnage en fréquence

Notion de corrélation

Réalisation de N expériences
Signaux stationnaires
Exemple

Détection synchrone

Idée n°1 : Détection d'enveloppe
Idée n°2 : Démodulation synchrone
Idée n°3 : Détection synchrone

Traitement numérique du Signal

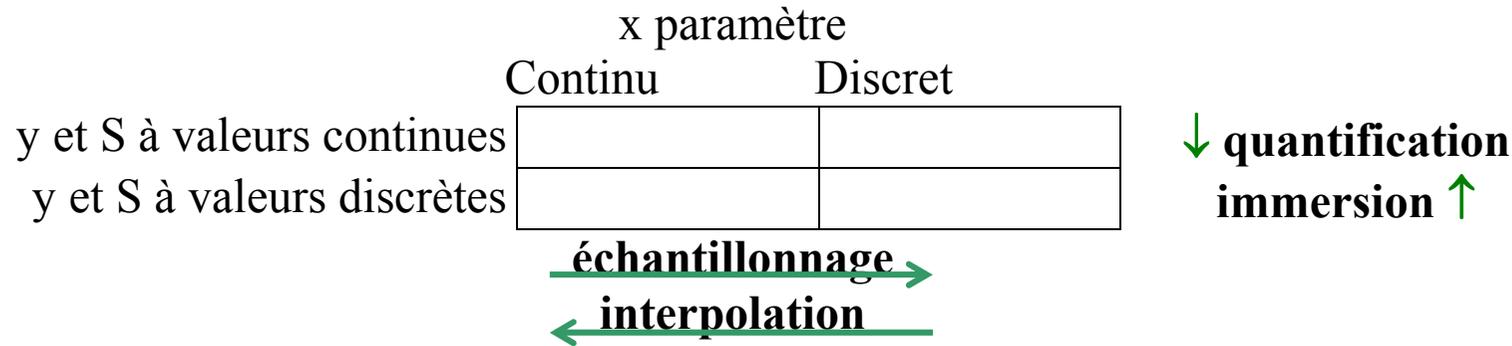
Echantillonnage
Convolution
Transformées de Laplace et transformées en Z
Echelon, Dirac
Propriétés
Tables des transformées
Transformée inverse
Transformée de Fourier Discrète

Filtrage numérique

Chaîne de traitement numérique
Filtres numériques non récursifs
Filtres numériques récursifs
Synthèse de filtres numériques
Filtres non récursifs à phase linéaire
Filtres récursifs

Signal, Bruit, Système

- **Signal** $y = s(x)$



- **Bruit** C'est un signal particulier

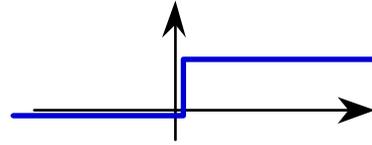
Observation = signal [digne d'intérêt] + bruit [le reste]

- **Système** dépendant du paramètre Temps t

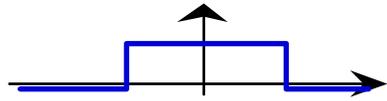


Signaux

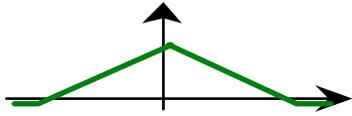
- Echelon unité



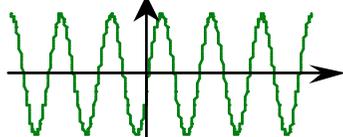
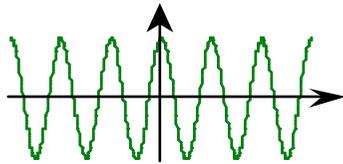
- Rectangulaire



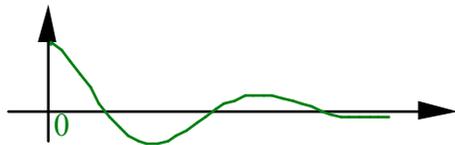
- Triangulaire



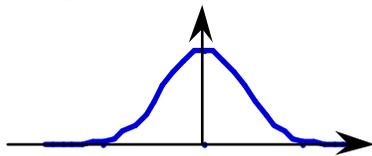
- Signaux pairs et impairs



- Exponentiels



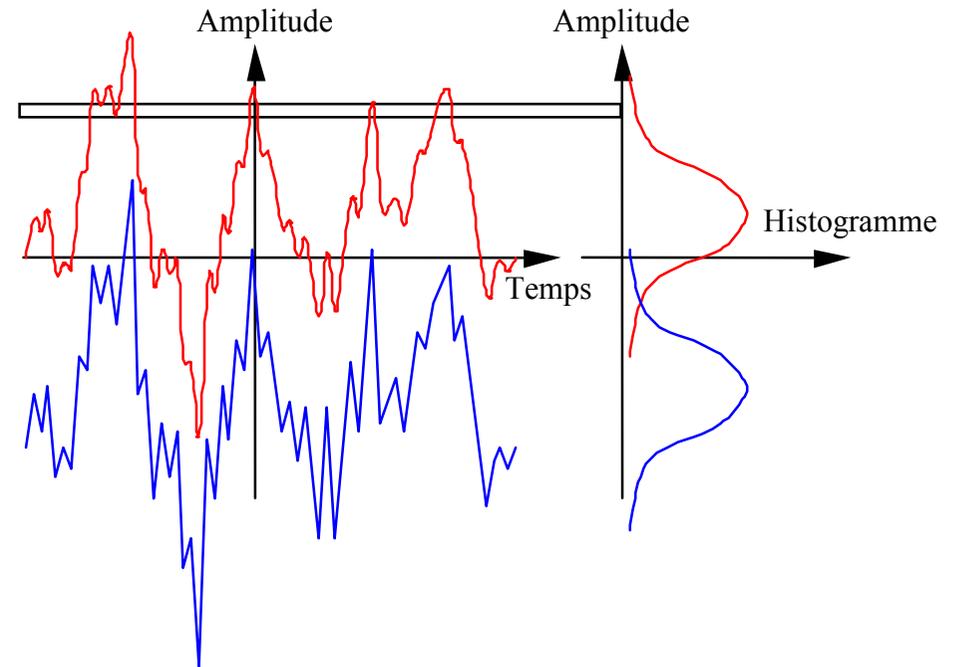
- Signal gaussien



Bruits

- Bruit aléatoire gaussien

Histogramme des amplitudes gaussien



Bruit coloré gaussien aux angles "arrondis"

Bruit blanc gaussien aux angles "vifs"

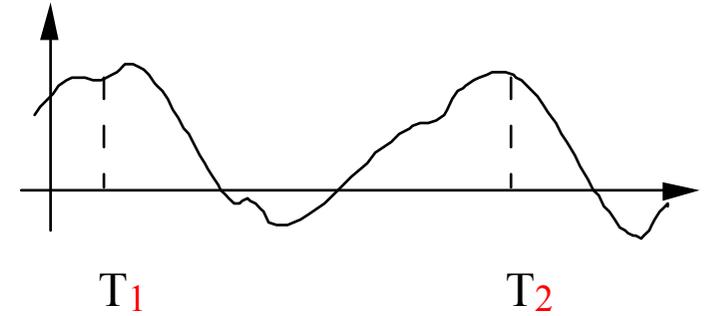
Définitions

- Signal $s(t)$
- Valeur moyenne entre T_1 et T_2

$$\int_{T_1}^{T_2} s(t) dt$$

- Puissance instantanée
- Energie entre T_1 et T_2
- Puissance moyenne entre T_1 et T_2
- Même grandeur sur support infini :
- Valeur efficace

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T_2 - T_1}$$



$$P(t) = |s(t)|^2$$

$$\Delta E = \int_{T_1}^{T_2} |s(t)|^2 dt$$

$$\bar{P} = \langle s^2 \rangle = \frac{\Delta E}{T_2 - T_1} = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} |s(t)|^2 dt$$

limite quand $T_1 = -T_2$ et $T_2 \rightarrow +\infty$ de la grandeur

Amplitude du signal constant ayant la même

puissance moyenne $V_{\text{eff}} = \sqrt{\bar{P}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle}$

Séries de Fourier

Fonctions périodiques de période T , de fréquence $\nu = \frac{1}{T}$ ou de pulsation $\omega = 2\pi\nu$

Décomposition en série de Fourier

$$f(x) = + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j\omega n x} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega x)$$

$$C_n \triangleq \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x) e^{-j\omega n x} dx$$

$$C_0 = a_0$$

$$a_n \triangleq \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \cos(n\omega x) dx$$

$$C_n = \frac{a_n - j b_n}{2}$$

$$b_n \triangleq \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \sin(n\omega x) dx$$

$$C_{-n} = \frac{a_n + j b_n}{2}$$

Propriétés des séries de Fourier

- *Linéarité* $C_n [\lambda f + \mu g] = \lambda C_n [f] + \mu C_n [g]$ idem a_n et b_n
- *Parité* $f(x)$ Pair Décomposition sur fonctions paires $b_n = 0$
 $f(x)$ Impair Décomposition sur fonctions impaires $a_n = 0$

Positionnement du Zéro

Conservation de l'amplitude, pas de la phase

• *Translation*

$$C_n [f(x-a)] = e^{-jn\omega a} C_n [f(x)]$$

• *Dérivation*

$$C_n \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x) \right] = jn\omega C_n [f(x)]$$

• *Convolution*

$$C_n [f \otimes g] = C_n [f] \cdot C_n [g]$$

Valeur efficace d'un signal périodique

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega x} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega x)$$

$$V_{\text{eff}}^2 = \langle f/f \rangle = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n [f]^2 = a_0 [f]^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n [f]^2 \cdot \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n [f]^2 \cdot \frac{1}{2}$$

Taux de distorsion harmonique

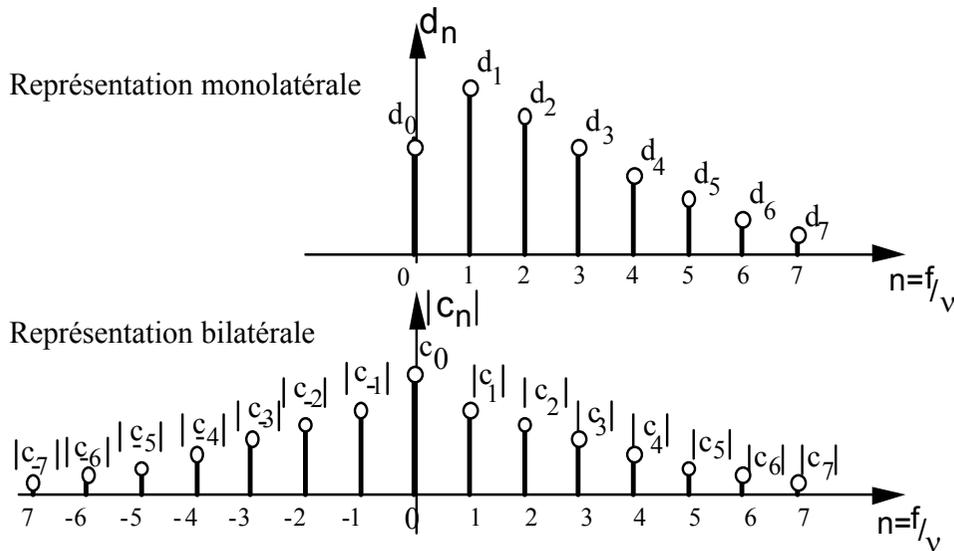
$$Td = \sqrt{\frac{\text{Puissance_des_harmoniques}}{\text{Puissance_du_fondamental}}} = \frac{\text{Valeur_efficace_des_harmoniques}}{\text{Valeur_efficace_du_fondamental}} = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2}}{\frac{a_1^2}{2} + \frac{b_1^2}{2}}}$$

Spectre de raies

□ Spectre en amplitude

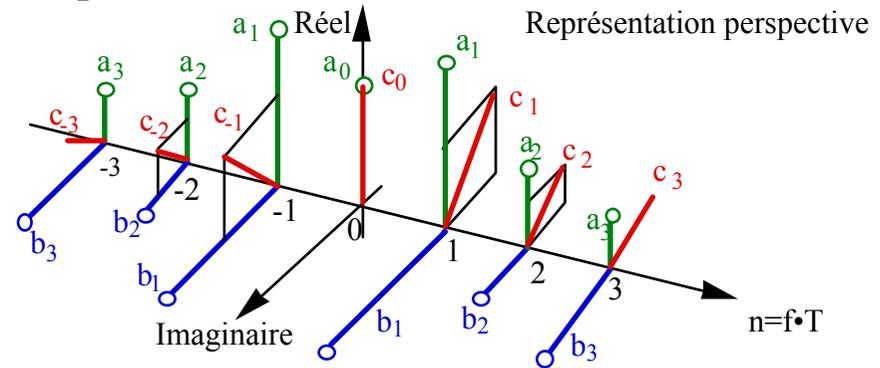
$$d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2 \cdot |C_n| = 2 \cdot |C_{-n}|$$

=> Puissance transportée par chaque composante $f = nv$



• Forme perspective

$C_n[f]$ valeur complexe fonction de la fréquence.



Sens physique sur un exemple

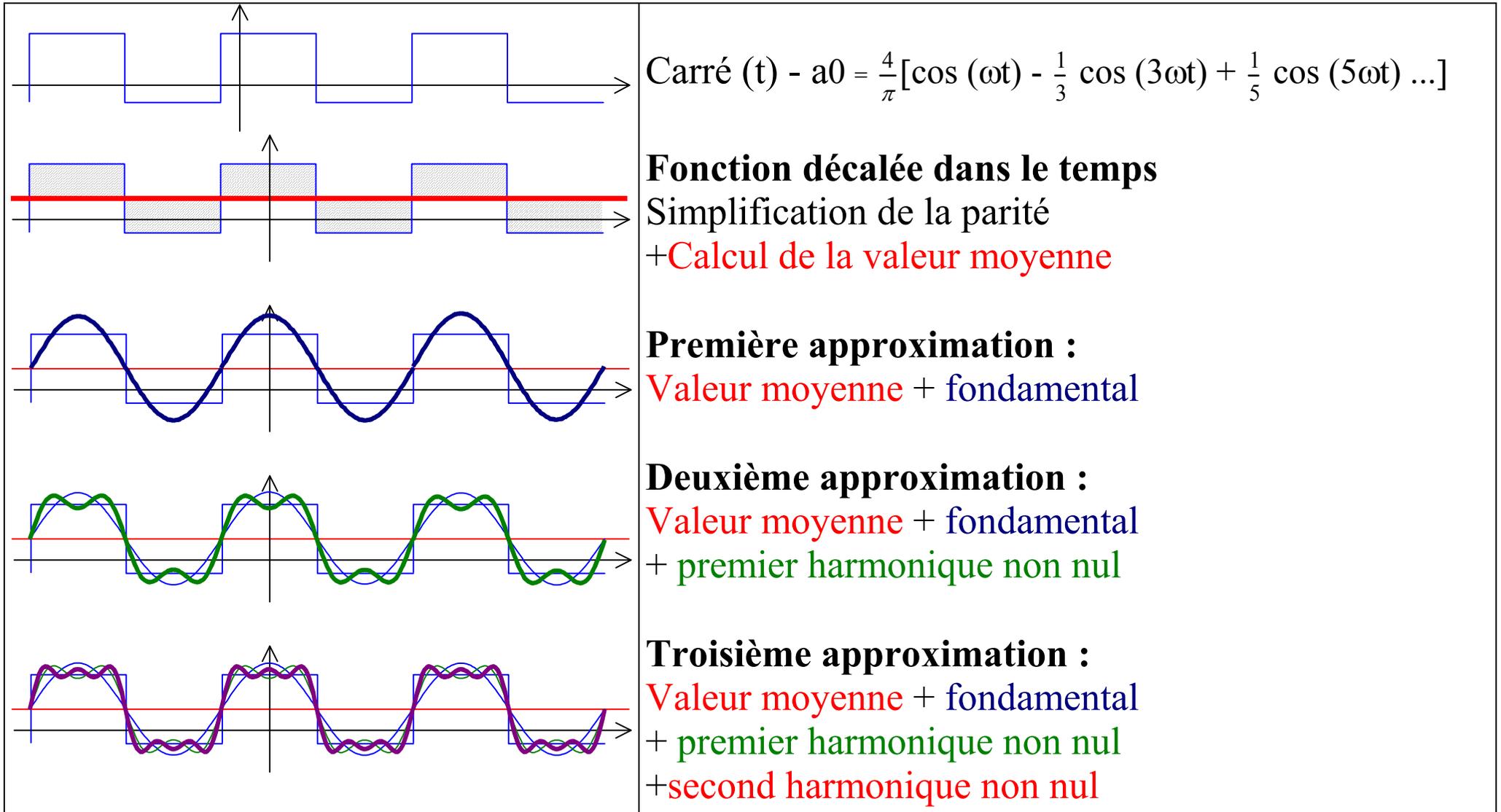
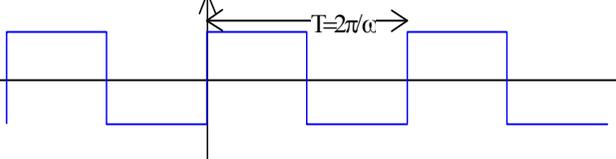
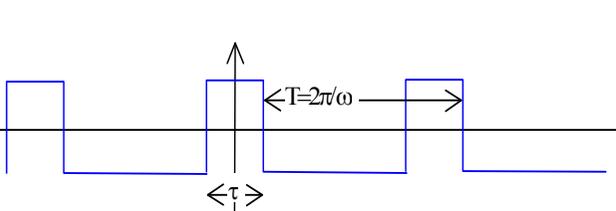
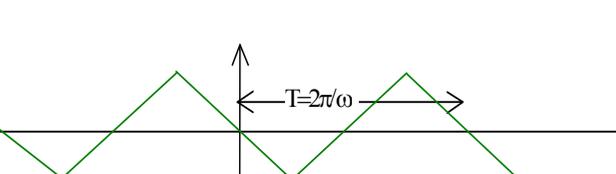
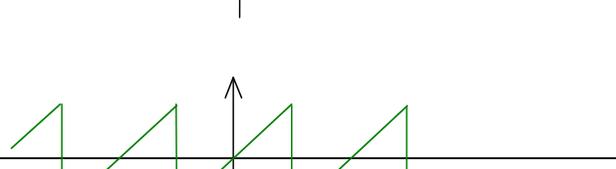
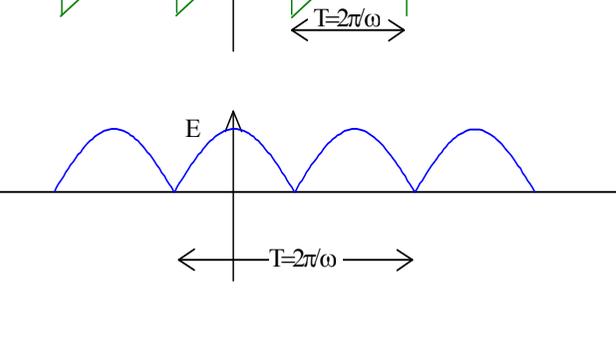


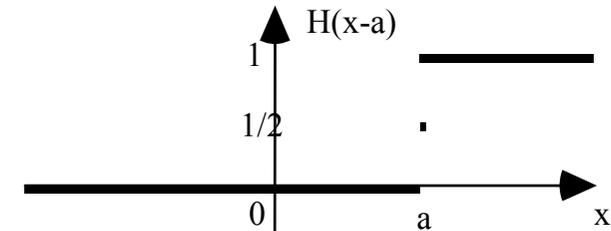
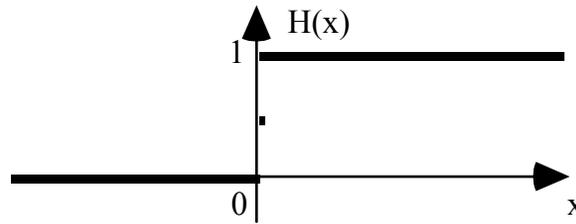
Table de développements

	$V(t) = \frac{4E}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right]$
	$V(t) = E \frac{\tau}{T} + \frac{2E}{\pi} \left[\sin\left(\pi \frac{\tau}{T}\right) \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \sin\left(2\pi \frac{\tau}{T}\right) \cos(2\omega t) + \frac{1}{3} \sin\left(3\pi \frac{\tau}{T}\right) \cos(3\omega t) \dots \right]$
	$V(t) = \frac{8E}{\pi^2} \left[\cos(\omega t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega t) + \dots \right]$
	$V(t) = \frac{2E}{\pi} \left[\sin(\omega t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) - \frac{1}{4} \sin(4\omega t) + \dots \right]$
	$V(t) = \frac{2E}{\pi} + \frac{4E}{\pi} \left[\frac{1}{3} \cos(2\omega t) - \frac{1}{3 \times 5} \cos(4\omega t) + \frac{1}{5 \times 7} \cos(6\omega t) - \dots \right]$

Distributions

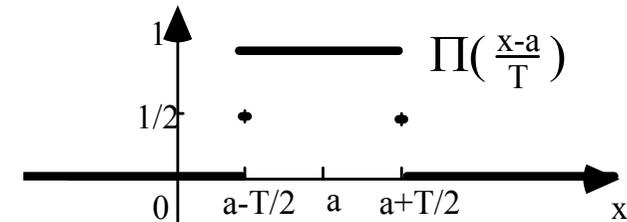
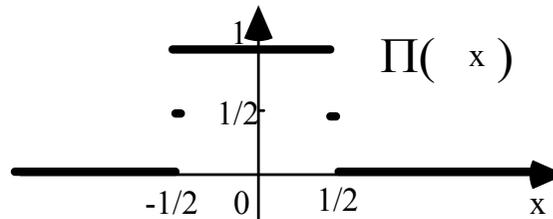
Heaviside

ou échelon unitaire
ou fonction caractéristique
sur $]0, +\infty[$



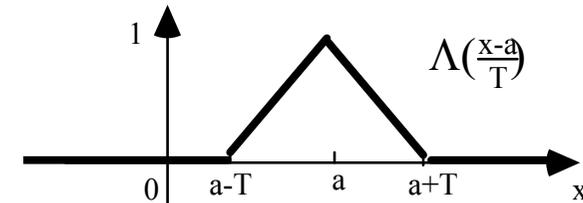
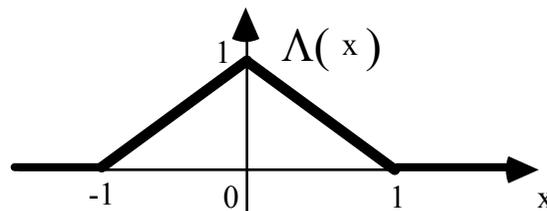
Porte

ou fenêtre unitaire
ou fonction caractéristique
sur $]-1/2, +1/2[$



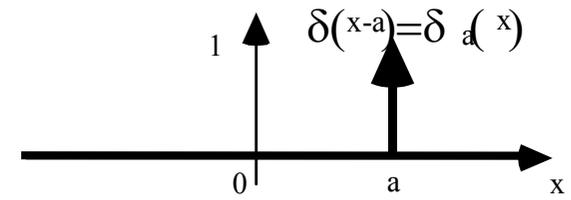
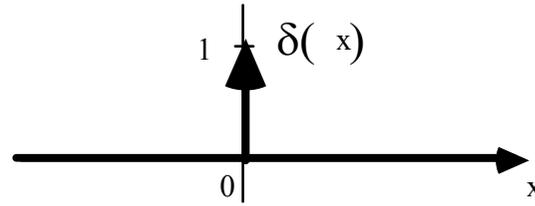
Triangle

$\Lambda(x)$



Dirac

$$\delta(x) = \perp(x)$$



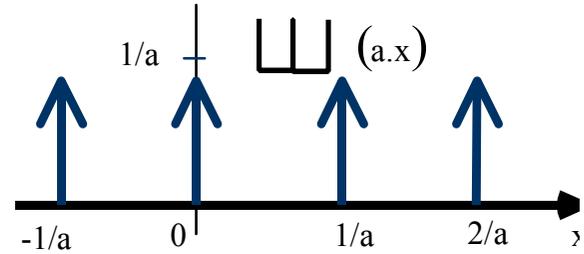
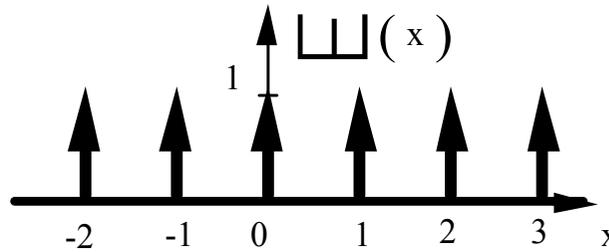
$$\delta(ax) = 1/a \delta(x)$$

$$f(x) \cdot \delta(x-a) = f(a) \cdot \delta(x-a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \delta(\theta-a) d\theta = f(a)$$

Peigne de Dirac

$$\sqcup(x)$$



Dérivation au sens des distributions

- $H'(x-a) = \delta(x-a)$
- $D(x) = f(x) + \sigma H(x-a)$ avec f continue en a et dérivable à droite et à gauche, alors $D'(x) = f'(x) + \sigma \delta(x-a)$

)

Transformation de Fourier

$$\hat{f}(v) = \mathcal{F}[f(x)] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi j v x} dx \quad \Rightarrow \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$
$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(v)] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(v) e^{+2\pi j v x} dv \quad \Rightarrow f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(v) dv$$

Propriétés

- \mathcal{F} est un *opérateur linéaire*
- *Parité*
- *Inversion de x*
- *Conjugaison*
- *Changement d'échelle*

$$\mathcal{F}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathcal{F}[f] + \mu \mathcal{F}[g]$$

$$\mathcal{F}[f(-x)] = \hat{f}(-v)$$

$$\mathcal{F}[\overline{f(x)}] = \overline{\hat{f}(-v)}$$

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{v}{a}\right)$$

• *Translation*

$$\mathcal{F} [f(x-a)] = e^{-2\pi jva} \hat{f}(v)$$

• *Modulation*

$$\mathcal{F} [e^{2\pi jv_0a} f(x)] = \hat{f}(v - v_0)$$

• *Convolution*

$$\mathcal{F} [f \otimes g] = \mathcal{F} [f] \cdot \mathcal{F} [g]$$

$$\mathcal{F} [f \cdot g] = \mathcal{F} [f] \otimes \mathcal{F} [g]$$

A un produit simple dans un espace correspond un produit de convolution dans l'autre.

• *Formule de Parseval - Plancherel*

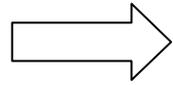
$$\langle f/f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(v)|^2 dv$$

Le passage d'une représentation temporelle à une représentation fréquentielle conserve l'énergie.

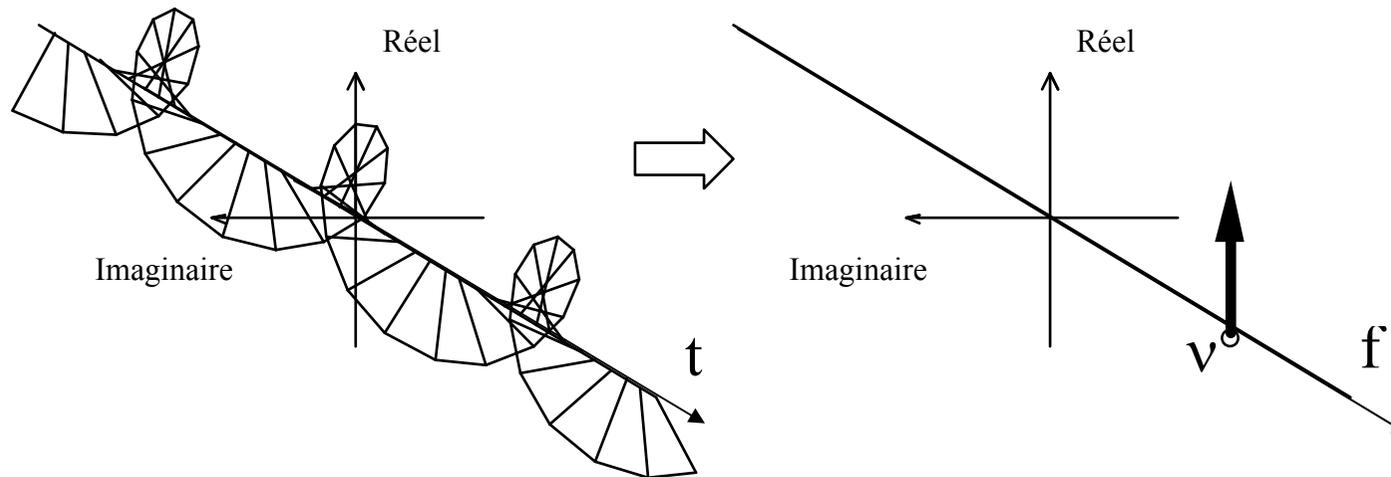
Exemple 1

La figure de couverture symbolise la transformation de Fourier permettant de passer d'une représentation temporelle complexe, ici l'une des fonctions de base de l'analyse en diagramme de Bode en analogique, à une représentation fréquentielle complexe.

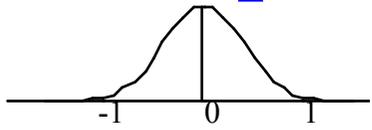
$$e^{2\pi j v^{\circ} t}$$



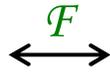
$$\delta(f - v^{\circ})$$



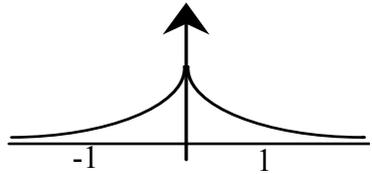
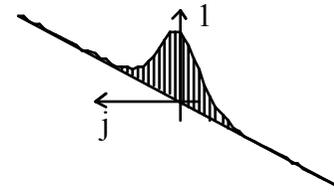
Exemples



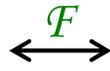
$$e^{-\pi x^2}$$



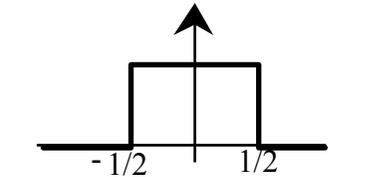
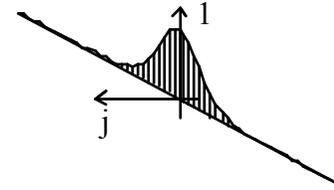
$$e^{-\pi v^2}$$



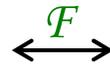
$$e^{-|x|}$$



$$\frac{2}{1+(2\pi v)^2}$$

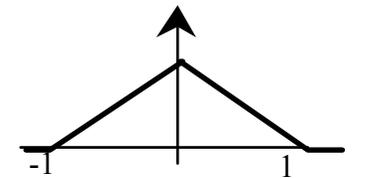
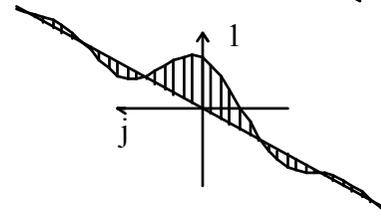


$$\Pi(x)$$

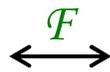


$$\text{sinc}(\pi v) =$$

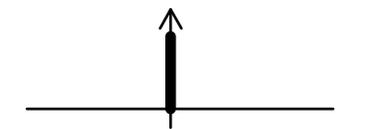
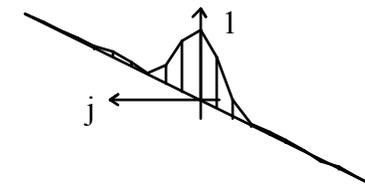
$$\frac{\sin(\pi v)}{\pi v}$$



$$\Lambda(x) = \Pi \otimes \Pi(x)$$



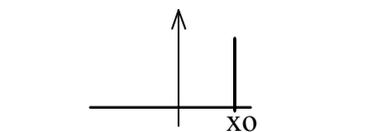
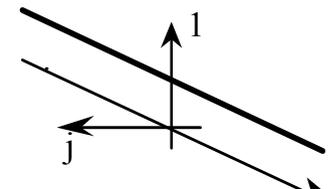
$$|\text{sinc}(\pi v)|^2$$



$$\delta(x)$$



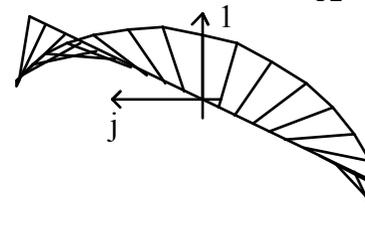
$$1$$

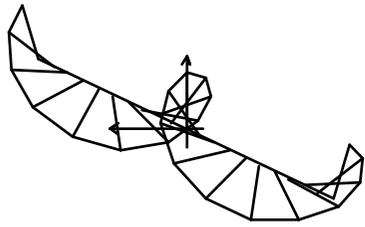


$$\delta(x - x_0)$$



$$e^{-2\pi j v x_0}$$

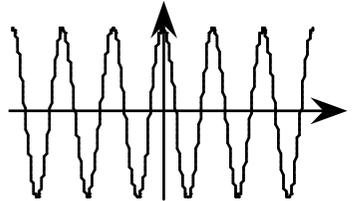
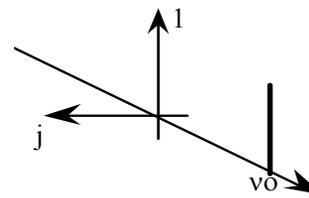




$$e^{+2\pi j\nu_0 x}$$

$\mathcal{F} \rightarrow$

$$\delta(\nu - \nu_0)$$

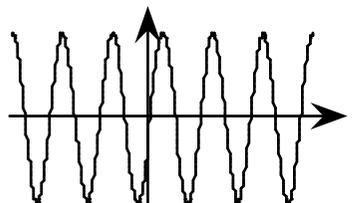
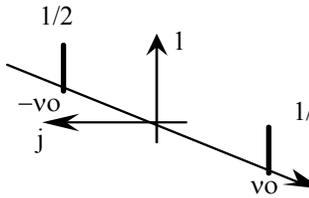


$$\cos(2\pi\nu_0 x) =$$

$$\frac{e^{2\pi j\nu_0 x} + e^{-2\pi j\nu_0 x}}{2}$$

$\mathcal{F} \leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}\delta(\nu - \nu_0) + \frac{1}{2}\delta(\nu + \nu_0)$$

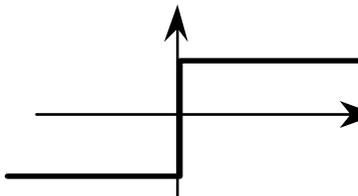
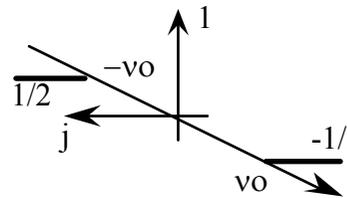


$$\sin(2\pi\nu_0 x) =$$

$$\frac{e^{2\pi j\nu_0 x} - e^{-2\pi j\nu_0 x}}{2j}$$

$\mathcal{F} \leftrightarrow$

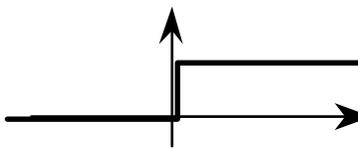
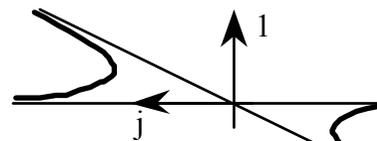
$$\frac{j}{2}\delta(\nu + \nu_0) - \frac{j}{2}\delta(\nu - \nu_0)$$



$$\text{signe}(x)$$

$\mathcal{F} \rightarrow$

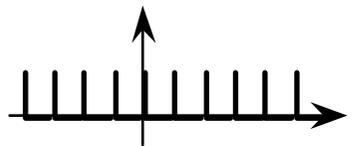
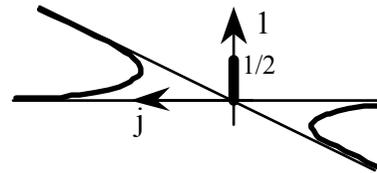
$$-\frac{j}{\pi\nu}$$



$$H(x)$$

$\mathcal{F} \rightarrow$

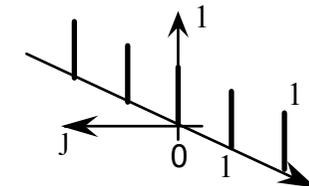
$$-\frac{j}{2\pi\nu} + \frac{1}{2}\delta(\nu)$$



$$\square(x)$$

$\mathcal{F} \leftrightarrow$

$$\square(\nu)$$



$$\sqcup_T(x) = \frac{1}{T} \sqcup_T\left(\frac{x}{T}\right)$$

$$= \sum \delta(x - n \cdot T)$$

$$= \frac{1}{T} \sum \delta\left(\frac{x}{T} - n\right)$$

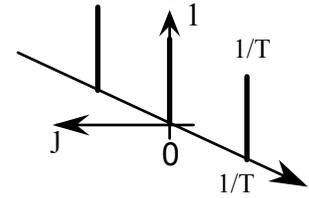
 $\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$

$$\sqcup(v \cdot T)$$

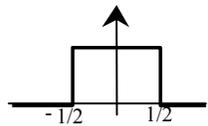
$$= \sum \delta(v \cdot T - n)$$

$$= \frac{1}{T} \sum \delta\left(v - \frac{n}{T}\right)$$

$$= \frac{1}{T} \sqcup_{\frac{1}{T}}(x)$$



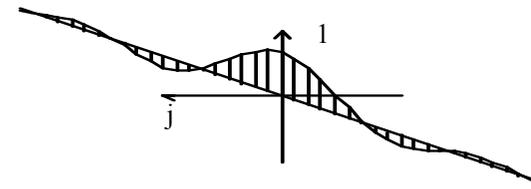
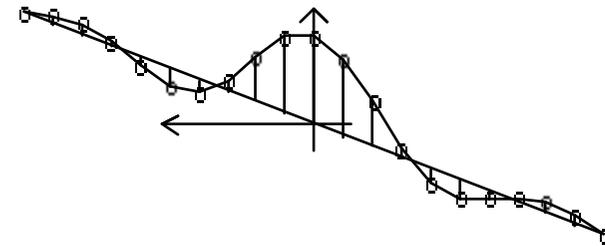
Soit $f^\circ(x)$ le motif de base d'une fonction périodique $f(x)$ sur une période $[a, a+T[$ et valant 0 ailleurs.



$f^\circ(x)$ = une porte

 $\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$

$\hat{f}^\circ(v)$

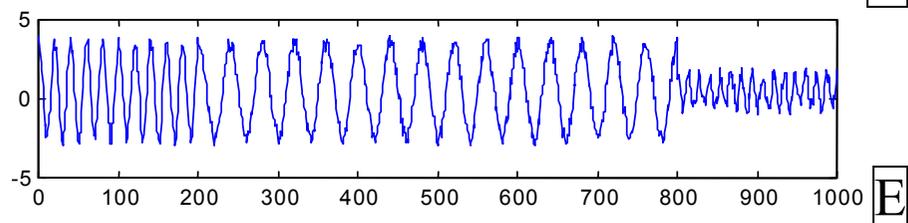
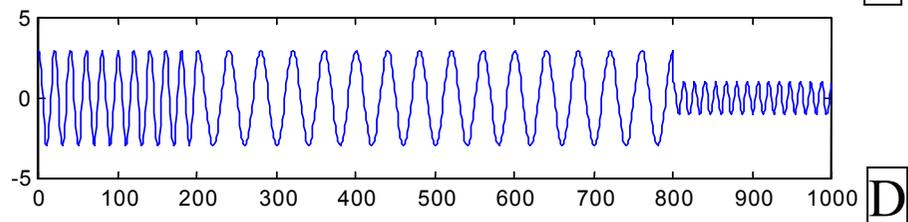
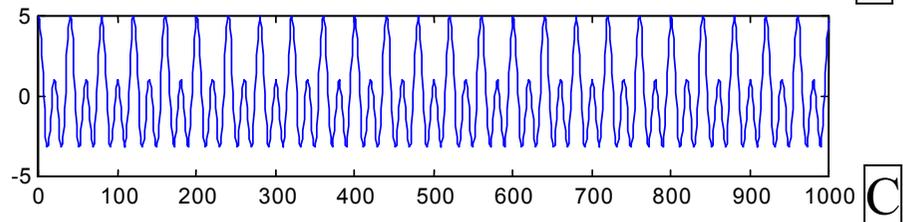
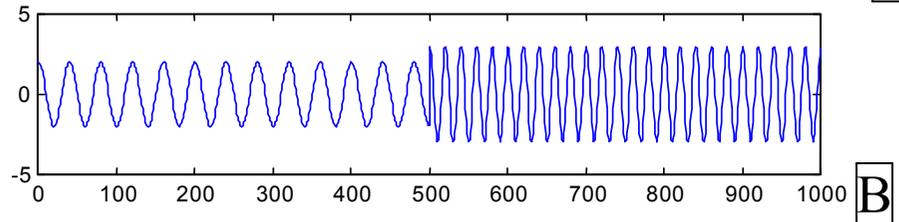
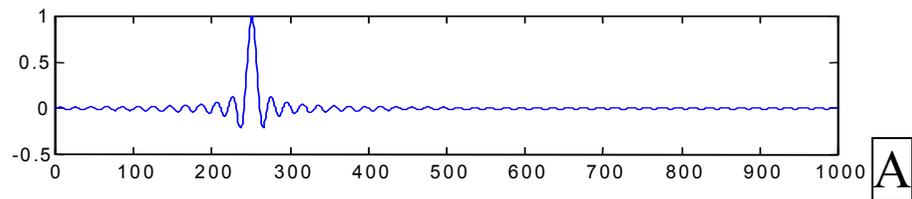

 $\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$

 \rightarrow

Spectre de raies $\hat{f}(v) = \hat{f}^\circ(v) \cdot \sqcup(v \cdot T)$

$f(x)$ de période T
 $f(x) = f^\circ(x) \otimes \sqcup_T(x)$

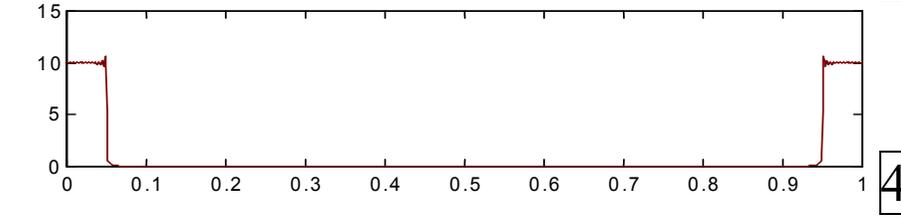
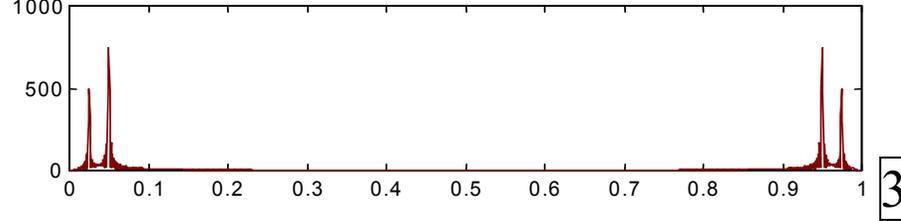
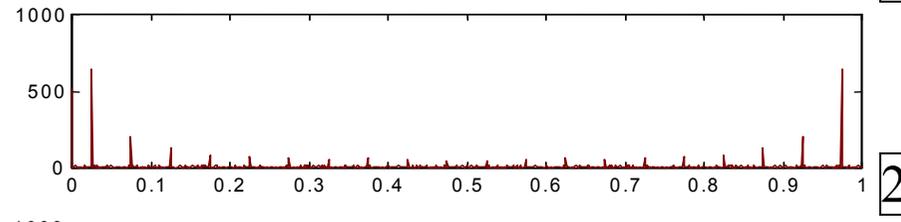
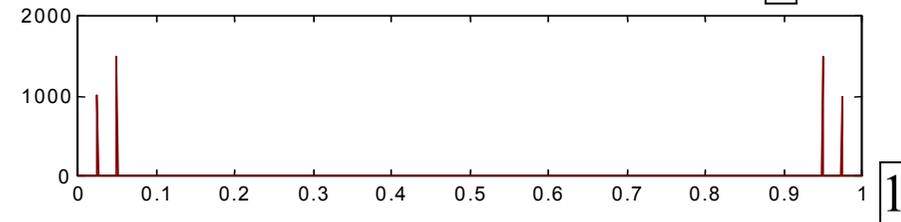
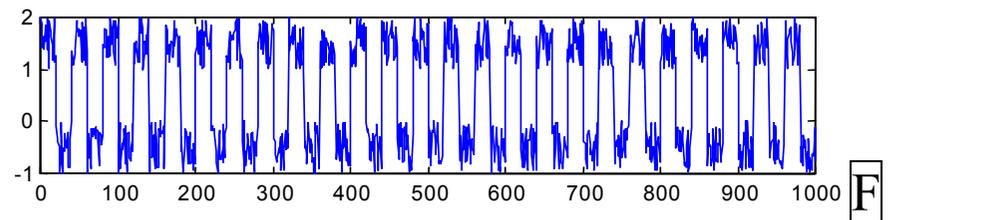
$$\hat{f}(v) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}^\circ\left(\frac{n}{T}\right) \cdot \delta\left(v - \frac{n}{T}\right)$$

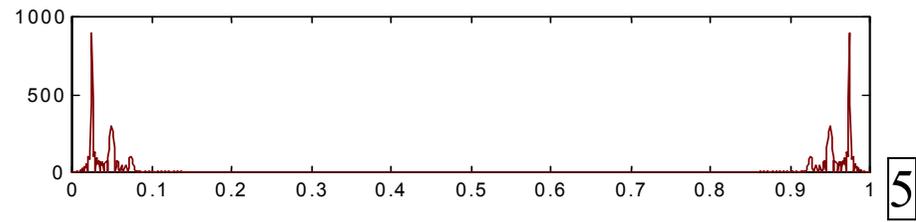
Signal



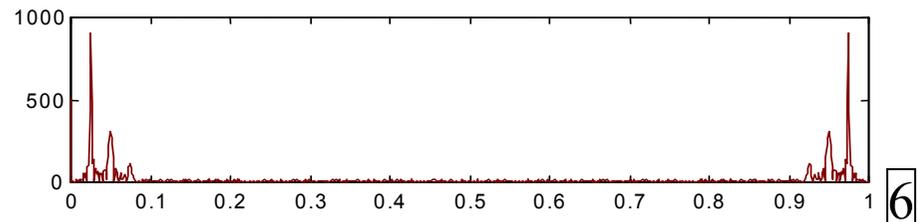
Associer

Spectre





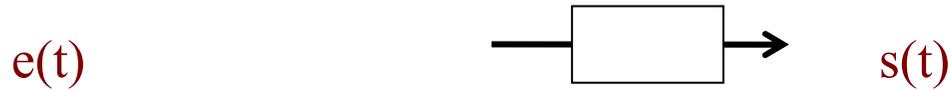
5



6

Réponse d'un système linéaire à une entrée périodique

Nous disposons d'un filtre linéaire, invariant par décalage.



Analyse pratique → diagramme de Bode.

Pour chaque entrée sinusoïdale pure de fréquence $n \nu$, la sortie correspondante est sinusoïdale et vaut

$$e(t) = e^{2\pi j n \nu t} \quad \longrightarrow \quad \boxed{H(j\omega)} \quad \longrightarrow \quad s(t) = H(jn\nu) \cdot e^{2\pi j n \nu t}$$

Pour tout signal périodique $f(t)$ de période $T = 1/\nu$, de fréquence ν ou de pulsation $\omega = 2\pi\nu$,

→ Décomposition en série de Fourier à partir du fondamental et de ses harmoniques.

Par linéarité la sortie $s(t)$ correspondante est donnée par :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2\pi j n \nu t} \quad \longrightarrow \quad \boxed{H(j\omega)} \quad \longrightarrow \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n H(jn\nu) \cdot e^{2\pi j n \nu t}$$

Forme module et déphasage

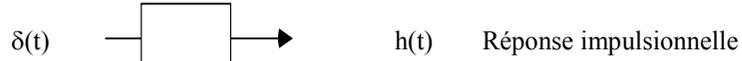
$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \cos(n\omega t + \phi_n) \quad \longrightarrow \quad \boxed{H(j\omega)} \quad \longrightarrow \quad |H(jn\nu)| d_n \cos(n\omega t + \phi_n + \arg[H(jn\nu)])$$

Atténuation ou amplification en module

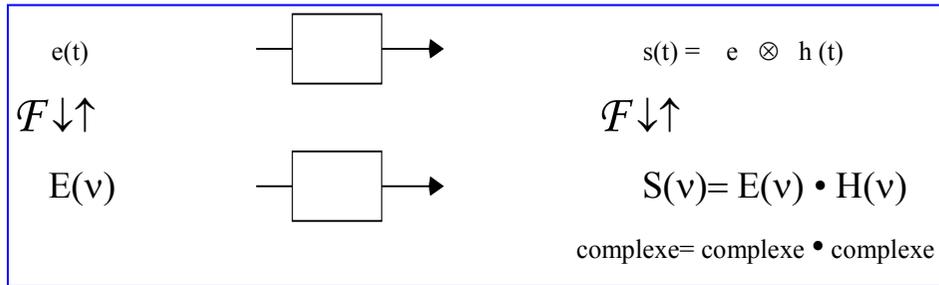
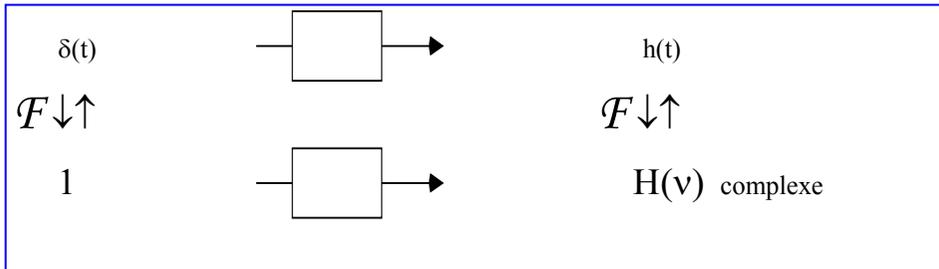
Rajout d'un déphasage

Application au filtrage

Domaine temporel



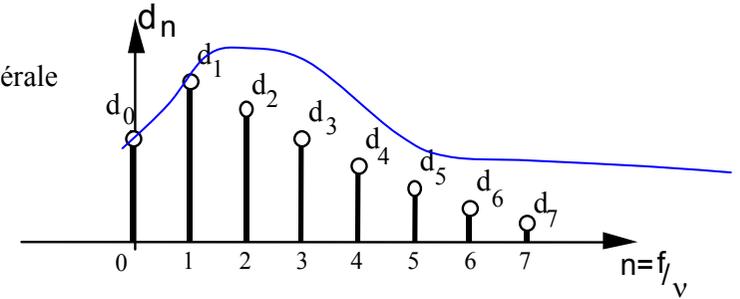
Passage au domaine fréquentiel



Spectre de raies

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2\pi j n v^0 t} \xrightarrow{F} G[v] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(v - n v^0)$$

Représentation monolatérale



Transformation de Fourier

$$E(v) = F[e(t)] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) e^{-2\pi j n v t} dt$$

$$e(t) = F^{-1}[E(v)] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} E(v) e^{2\pi j n v t} dv$$

Tout signal quelconque est alors décomposable suivant des signaux particuliers, les signaux sinusoidaux de la forme

$$e^{2\pi j n v t}$$

Diagramme de Bode

$$e^{2\pi j\nu t} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{H}(\nu) e^{2\pi j\nu t}$$

Ces signaux ont la propriété remarquable de traverser les filtres linéaires en restant sinusoidaux, Ils ressortent amplifiés ou atténués et déphasés entre l'entrée et la sortie

Gain = $20 \log_{10}(|\mathcal{H}(\nu)|)$ et déphasage = $\arg(\mathcal{H}(\nu))$

Linéarité

$$\mathcal{E}(\nu) e^{2\pi j\nu t} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{E}(\nu) \cdot \mathcal{H}(\nu) e^{2\pi j\nu t}$$

$$\rightarrow S(\nu) = \mathcal{E}(\nu) \mathcal{H}(\nu)$$

$$\mathcal{H}(\nu) = \frac{S(\nu)}{\mathcal{E}(\nu)}$$

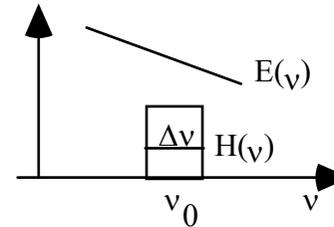
Filtrage fréquentiel

transformées de Fourier

un produit de convolution \leftrightarrow un produit simple

problème beaucoup plus simple à résoudre

Cette représentation spectrale est donc la représentation privilégiée



difficultés de réalisation d'un tel filtre dans le domaine temporel

Soit $E(\nu)$ le spectre du signal d'entrée, $H(\nu)$ le spectre de la réponse impulsionnelle et donc la transmittance du système linéaire associé, alors $S(\nu)$ est le spectre de la sortie résultante et est égal au produit simple des spectres.

$$\text{En conséquence, } S(\nu) = E(\nu) \cdot H(\nu) = E(\nu) \cdot \text{rect}_{\Delta\nu}(\nu - \nu_0)$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } s(t) &= \mathcal{F}^{-1}[S(\nu)] &= \mathcal{F}^{-1}[E(\nu)] \otimes \mathcal{F}^{-1}[\text{rect}_{\Delta\nu}(\nu - \nu_0)] \\ &= e(t) \otimes \Delta\nu \text{sinc}(\pi \Delta\nu t) \exp(2j\pi \nu_0 t) \end{aligned}$$

$$S(\nu) = E(\nu) \cdot H(\nu)$$

Filtrage temporel

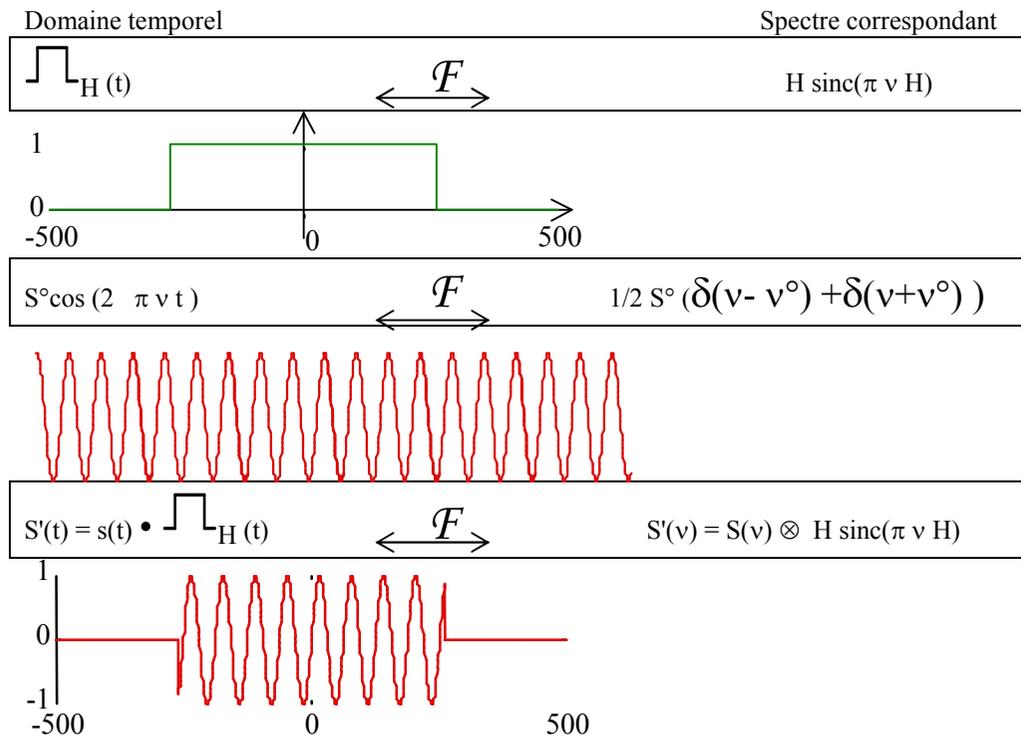
produit simple de deux représentations temporelles.

L'observation d'un phénomène physique

réaliser une observation durant un temps limité

→ filtrage temporel par une fenêtre d'observation à support limité.

Cette opération déforme le spectre en fréquence du signal. Soit H la durée de la fenêtre d'observation, H pour Horizon d'observation.

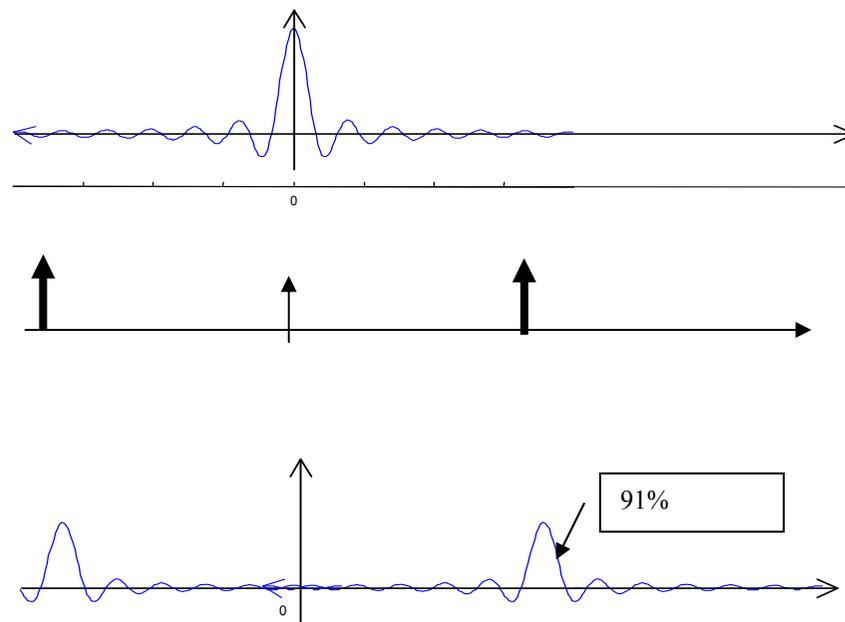


□ Horizon centré sinon introduction d'un déphasage proportionnel à la fréquence

$$t-t_0 \rightarrow e^{2\pi j\nu(t-t_0)}$$

□ Si le temps d'observation H est grand et la fenêtre symétrique ($t_0=0$), alors $S'(\nu) \cong S(\nu)$.
En effet $H \text{sinc}(\pi \nu H)$ tend alors vers un $\delta(t)$ qui est élément neutre du produit de convolution.

- Oscillation résiduelle
 - Plusieurs lobes secondaires
 - Diminution de la résolution fréquentielle
 - Localisation temporelle → imprécision fréquentielle
- relation analogue à la relation d'incertitude de Heisenberg : plus la localisation temporelle est précise (correspondant à un horizon d'observation court), plus la résolution fréquentielle est imprécise.
- Difficulté pour découvrir l'amplitude des lobes proches d'un lobe principal, qui sont masqués par les lobes secondaires
 - Puissance du signal contenu dans le lobe principal



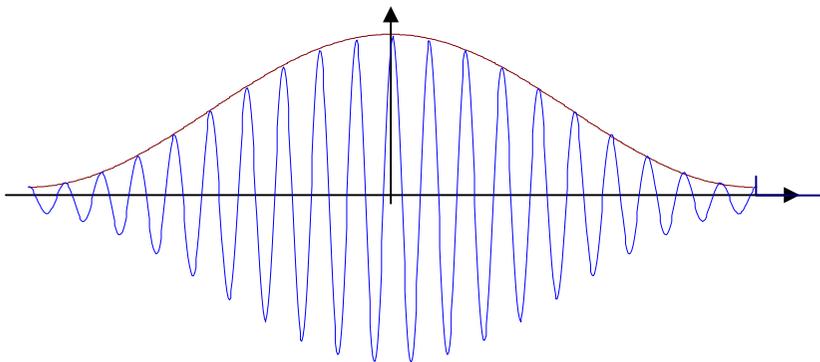
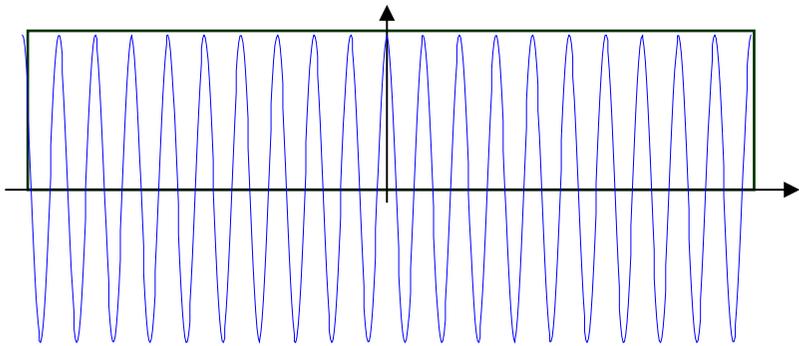
Fenêtre de pondération

Fenêtre rectangulaire centrée = $\text{rect}_H(t)$

Hamming(t) = $[0,54 + 0,46 \cos(2\pi t/H)] \text{rect}_H(t)$

- 99% de son énergie est contenu dans le lobe principal de sa représentation en fréquence.
- Le déphasage des spectres dépend quant à lui toujours du centrage de la fenêtre d'observation. La nouvelle relation devient :

$$s'(t) = s(t) \cdot \text{Fenêtre}(t) \xrightarrow{F} S'(v) = S(v) \otimes \mathcal{F}(v)$$



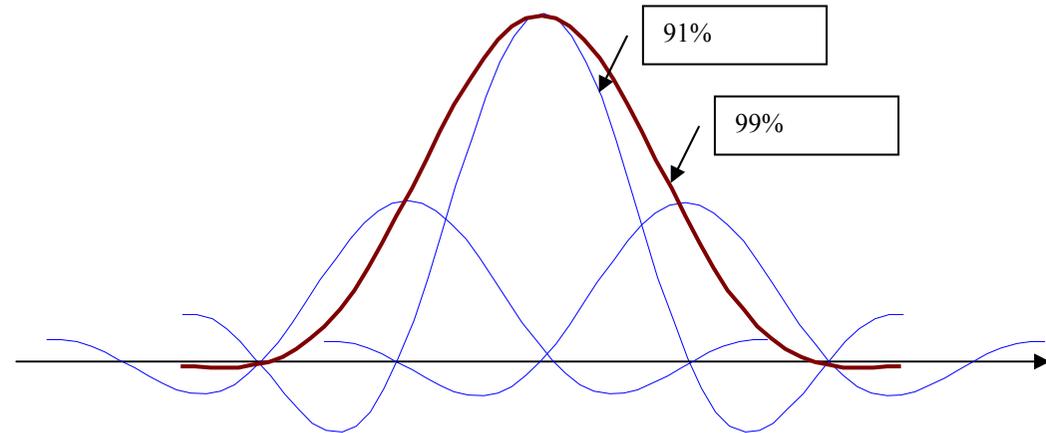
exemple la fenêtre de Hamming

Hamming(t) = $[0,54 + 0,46 \cos(2\pi t/H)] \cdot \text{rect}_H(t)$

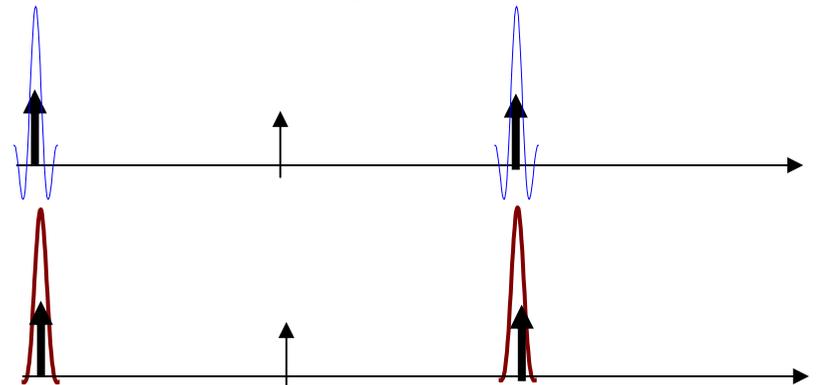
$$\mathcal{H}_{\text{amming}}(v) = [0,54\delta(v) + 0,23\delta(v - \frac{1}{H}) + 0,23\delta(v + \frac{1}{H})] \otimes H \text{sinc}(\pi v H)$$

$$\mathcal{H}_{\text{amming}}(v) = H [0,54 \text{sinc}(\pi v H) + 0,23 \text{sinc}(\pi (v - \frac{1}{H}) H) + 0,23 \text{sinc}(\pi (v + \frac{1}{H}) H)]$$

Tracé



Nous voyons ici le résultat d'une fenêtre de pondération. Le produit simple par une fenêtre de pondération a pour objet de concentrer 99% de l'énergie du spectre de cette fenêtre dans le lobe principal au détriment d'un élargissement de ce lobe qui devient approximativement le double de largeur. La largeur devient environ $\frac{4}{T}$.



Transformée de Laplace

Régime Continu → Transformée de Fourier

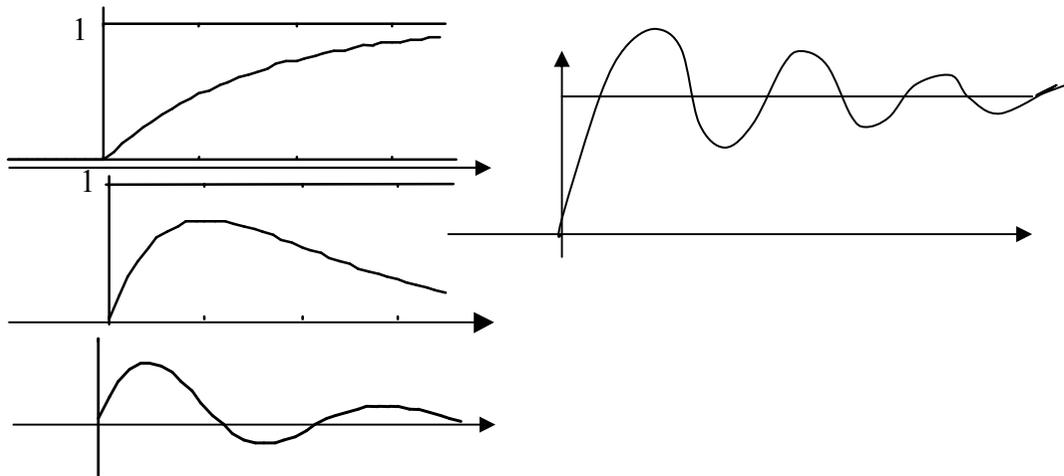
$$e^{2\pi j \nu t} \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow \underline{H}(\nu) \cdot e^{2\pi j \nu t}$$

$$\mathcal{F}[h(t)] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-2\pi j \nu t} dt = \underline{H}(\nu)$$

fonction à valeurs complexes

Régime transitoire

Réponse à un premier ordre et à trois filtres du 2^{ème} ordre.



Analyse en terme d'équation différentielle

Il s'agit de combinaison

- de signaux sinusoïdaux $e^{2\pi j \nu t}$
- Comportement oscillant
- multipliés par des signaux exponentiellement amortis. $e^{-\sigma t}$

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{2\pi j \nu t} \cdot e^{-\sigma t}$$

Laplace → une nouvelle formulation à base complexes

causalité → supports d'intégration de Zéro à l'infini

→ phénomènes transitoires supposés nuls dans le passé.

Représentation en variable complexe p

$$p = \sigma + 2\pi j \nu.$$

partie imaginaire → la transformée de Fourier et spectre

partie réelle → transitoire des signaux.

Généralisation de la transformation de Fourier adaptée aux signaux stationnaires.

Alors le terme e^{-pt} se développe suivant :

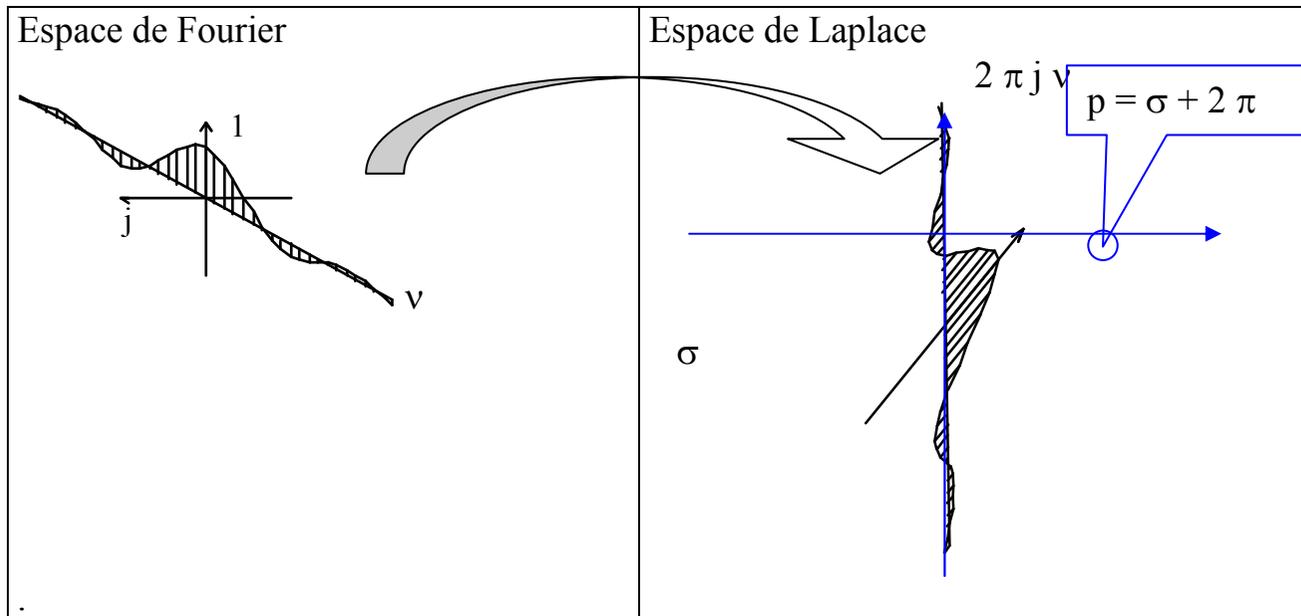
$$e^{-pt} = e^{-\sigma t - 2\pi j \nu t} = e^{-\sigma t} e^{-2\pi j \nu t}$$

Transformée de Laplace

La formulation proposée est la suivante :

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = F(p)$$

fonction à valeurs complexes de la variable complexe $p = \sigma + j\omega$.



La représentation de Fourier \rightarrow sur l'axe complexe de la représentation de Laplace.
 \rightarrow une 4^{ème} dimension

Fonctions continues →

Suites numériques

Forme initiale	Formule intermédiaire homogène en temps	Forme finale
Echantillonnage t	Continu → Discret t = n•Te	n
Fonction à paramètres continus f(t)	Suites numériques {f(n•Te)}	Suites numériques {f _n }
Convolution continue + causalité $f \otimes h (\theta) = \int_0^{+\infty} f(t) g(\theta - t) dt$	Continu → Discret $\theta = k \cdot Te$ $t = n \cdot Te$ $g(kTe) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nTe) h(kTe - nTe) Te$	Convolution discrète $\{f \otimes h\}_k \triangleq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \cdot h_{k-n}$

plus de référence au temps physique Te. La différence entre les tops des temps logiques est devenue 1. Par contre, il est nécessaire de connaître la période d'échantillonnage lorsque l'on retourne au monde physique continu.

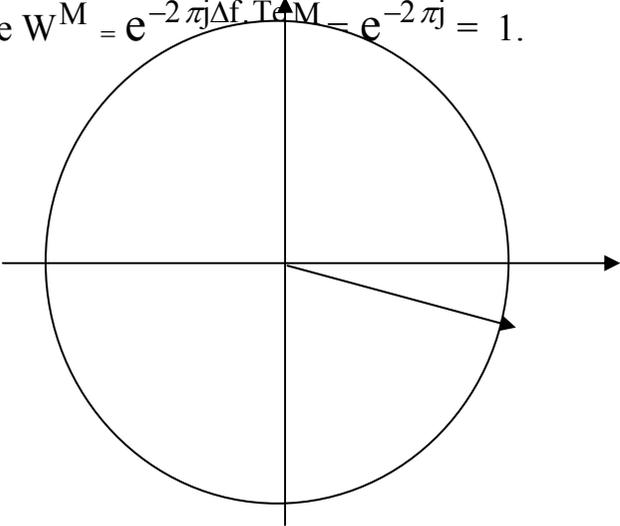
Transformées de Laplace



Transformées en Z

$\mathcal{L} [f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = F(p)$ <p>Fonction de la variable complexe p = σ+jω</p>	<p>Passage continu → Discret Nouvelle variable complexe</p> $z = e^{pTe}$	$\mathcal{Z} \{f_n\} \triangleq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^{-n} = F(z)$ <p>Fonction de la variable z</p>
---	--	--

Transformée de Fourier Discrète

	Forme initiale	Formule intermédiaire homogène en temps	Forme finale
Echantillonnage en temps → N points Pas d'échantillonnage → Te Horizon → N.Te	Transformée de Fourier continue $\hat{f}(v) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi j v t} dt$	M valeurs équiréparties sur Fe $v_k = k \cdot \Delta f = k \cdot \frac{Fe}{M}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n \cdot Te) \cdot e^{-2\pi j \cdot k \Delta f \cdot n Te} \cdot Te$	Transformée de Fourier discrète $\{\hat{f}_k\} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot W^{kn}$
Périodisation du spectre → M points ici N points Représentation suffisante : une période → l'intervalle [0; Fe] Horizon en fréquence Fe = 1/Te Pas en fréquence $\Delta F = Fe/N = 1/Te$	Transformée inverse $f(t) = \Delta \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(v) e^{2\pi j v t} dv$ Cas M = N	F(nTe)= $\sum_{k=0}^{+\infty} \hat{f}(k \cdot \Delta f) \cdot e^{2\pi j \cdot k \Delta f \cdot n Te} \cdot \Delta f$	TFD inverse $\{f_n\} = \Delta \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \hat{f}_k \cdot W^{-kn}$ $TFD^{-1} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k \cdot W^{-kn}$
Symétrie temps fréquence	W est une racine M ^{ième} de l'unité, puisque $W^M = e^{-2\pi j \Delta f \cdot Te \cdot M} = e^{-2\pi j} = 1$. $W \triangleq e^{-2\pi j \Delta f \cdot Te}$		

$$\{1\} \text{ suite constante} \xrightarrow{TFD} N\{\delta_k\} \xrightarrow{TFD^{-1}} \{1\}$$

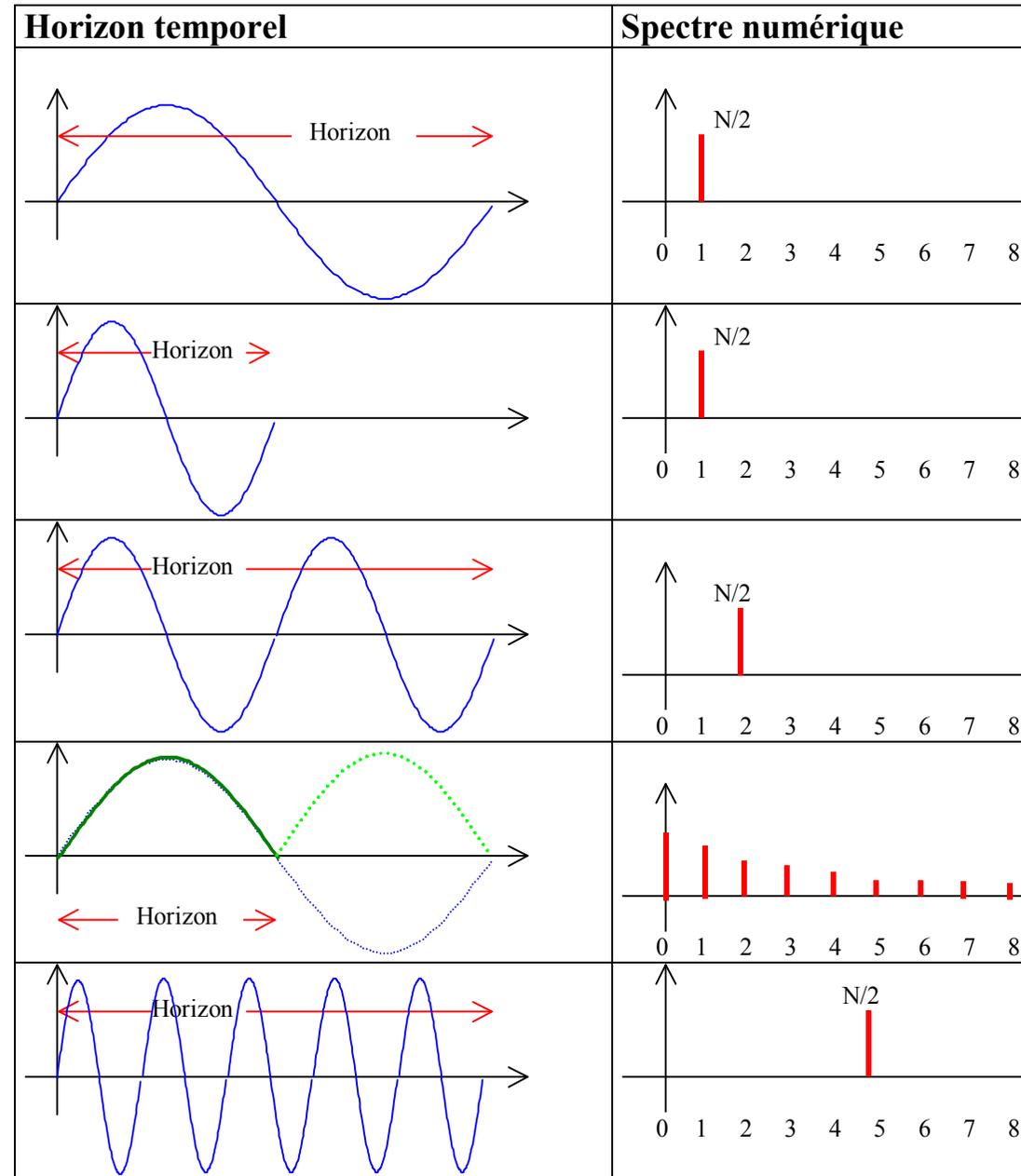
Transformée de Fourier Rapide

$N \rightarrow$ puissance de 2.

Propriétés identiques au cas continu

- Linéarité
- Translation
- Symétries et parités
- Convolution
- Égalité de Parseval :
-

Temporel	Fréquentiel
$\int x^2 dt$	$\int \hat{x} ^2 dt$
$\sum_{n=0}^{N-1} x_n ^2$	$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}_n ^2$



Signal périodique de période T

Il admet une décomposition en série de Fourier

Fondamental de fréquence $\frac{1}{T}$

Harmonique m de fréquence $\nu = m \frac{1}{T}$

Coefficients de la série de Fourier $C_m \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2\pi j \nu \cdot t} dt = \frac{1}{pT} \int_0^{pT} f(t) e^{-2\pi j \nu \cdot t} dt$ si p est entier

Supposons qu'il y ait p cycle par horizon $\rightarrow p \cdot T = N \cdot T_e$

P entier \rightarrow concentration de l'énergie sur la fréquence correspondante

$$C_m \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot W^{m \cdot n} = \frac{1}{N} \hat{f}_{p \cdot m}$$



P non entier \rightarrow distribution de l'énergie sur les fréquences voisines

