Transformée de Fourier

à temps continu

Hugues GARNIER

hugues.garnier@univ-lorraine.fr

Organisation de l'UE de TdS

I. Introduction

II. Analyse et traitement de signaux déterministes

- ***Analyse de Fourier de signaux analogiques***
  - *Signaux à temps continu*
  - *Décomposition en série de Fourier*
  - **Transformée de Fourier à temps continu**
- De l'analogique au numérique
- Analyse de Fourier de signaux numériques

III. **Filtrage des signaux**

IV. **Analyse et traitement de signaux aléatoires**

Objectifs à l'issue du cours sur la TFtc

- Etre capable de :
  - déterminer la transformée de Fourier à temps continu d'un signal quelconque *(périodique ou non)*
  - d'en déduire les tracés des spectres d'amplitude et de phase
  - d'en déduire les tracés des densités spectrales d'énergie ou de puissance
  - de savoir exploiter les principales propriétés de la TFtc
  - d'interpréter les spectres en déduisant, par exemple, la bande de fréquences utilisée par le signal

Introduction

- L'observation d'un signal ***dans le domaine temporel*** est souvent insuffisante pour réaliser l'analyse du signal

  ⇨ ***Analyse dans le domaine fréquentiel***

- Dans le cas de signaux périodiques à temps continu, la ***décomposition en série de Fourier*** permet de déduire une représentation fréquentielle

- Comment obtenir la représentation fréquentielle de signaux déterministes quelconques *(non périodiques) ?*

  Nouvel outil mathématique :

  la Transformée de Fourier à temps continu

Définitions

- ***Transformée de Fourier à temps continu (TFtc)***
  - Soit un signal à temps continu *s(t) (non périodique)*

$$S(f)=\mathcal{F}\left(s(t)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt$$

  - *S(f)* est la ***TFtc*** de *s(t)* ou encore le ***spectre*** de *s(t)*
  - La variable continue *f* représente la fréquence en Hz

- ***Transformée de Fourier inverse à temps continu***

Connaissant *S(f)*, on peut revenir au signal *s(t)* à l'aide de la transformée de Fourier inverse à temps continu définie par :

$$s(t)=\mathcal{F}^{-1}\left(S(f)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, e^{j2\pi ft}\, df$$

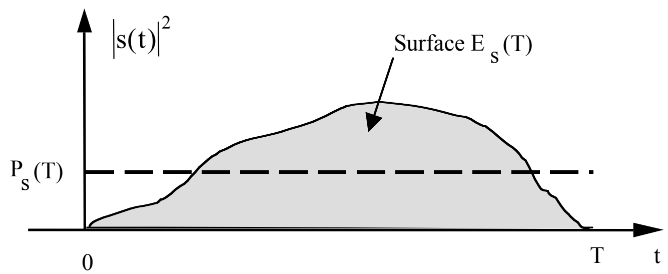
Existence de la TFtc d'un signal

- Pour que l'intégrale impropre de la définition de la TFtc existe, il faut et il suffit que *s(t)* soit à support bornée *(existence de durée finie)* :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty$$

- Tous les signaux physiquement mesurés, qui ont une énergie finie, ont donc une TFtc

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt$$



- En faisant appel à la *théorie des distributions*, on verra que tous les signaux idéalisés : impulsion et peigne de Dirac, échelon, signaux périodiques, … , possèdent également une TFtc.

Spectres d'amplitude et de phase

A partir de la relation : $e^{-j2\pi ft} = cos(2\pi ft) - j\,sin(2\pi ft)$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)cos(2\pi ft)dt + j\int_{-\infty}^{+\infty} -s(t)\,sin(2\pi ft)dt$$
$$= Re\left(S(f)\right) + j\,Im\left(S(f)\right)$$

S(f) est, en général, une **fonction à valeurs complexes.** La TFtc d'un signal peut s'écrire sous une forme exponentielle :

$$S(f) = \left|S(f)\right| e^{j\varphi(f)}$$

Spectre d'amplitude $\left|S(f)\right| = \sqrt{Re\left(S(f)\right)^2 + Im\left(S(f)\right)^2}$

Spectre de phase $\varphi(f) = Arg\left(S(f)\right) = Arctan\left(\dfrac{Im\left(S(f)\right)}{Re\left(S(f)\right)}\right)$

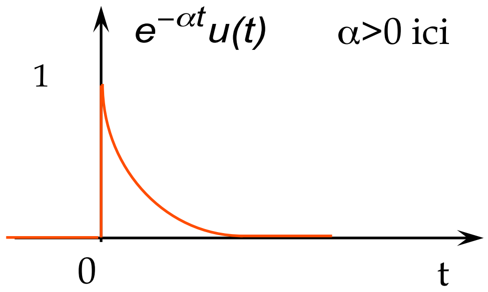
Propriétés des spectres d'amplitude et de phase

- $|S(f)|$ et $\varphi(f)$ sont des fonctions de la variable f s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$:
  - on parle de ***spectres bilatéraux***
- $|S(f)|$ et $\varphi(f)$ sont des fonctions de la variable continue f :
  - on parle de **spectres continus** *(en opposition avec les **spectres de raies** dans le cas de signaux périodiques)*
- Si $s(t)$ est à valeurs réelles :
  - $|S(f)|$ est ***pair***
  - $\varphi(f)$ est ***impair***

Exemple : TFtc d'un signal causal à décroissance exponentielle

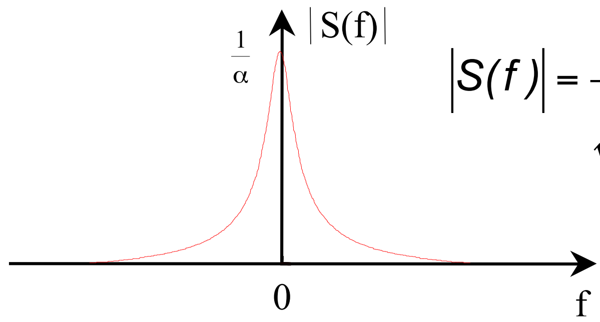
Domaine temporel

$$s(t) = e^{-\alpha t}\, u(t) \quad \alpha > 0$$

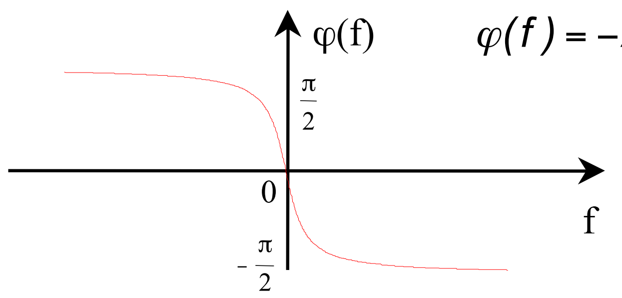


Domaine fréquentiel

$$S(f) = \frac{1}{j2\pi f + \alpha}$$



$$|S(f)| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi f)^2 + \alpha^2}}$$



$$\varphi(f) = -\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right)$$

Propriétés de la transformée de Fourier

Si la transformée de Fourier est devenue un outil privilégié pour l'analyse d'un signal, c'est en grande partie à ses propriétés mathématiques qu'elle le doit

- ***Linéarité***

$$\mathrm{F}\left(ax(t)+by(t)\right)=a\,X(f)+b\,Y(f)$$

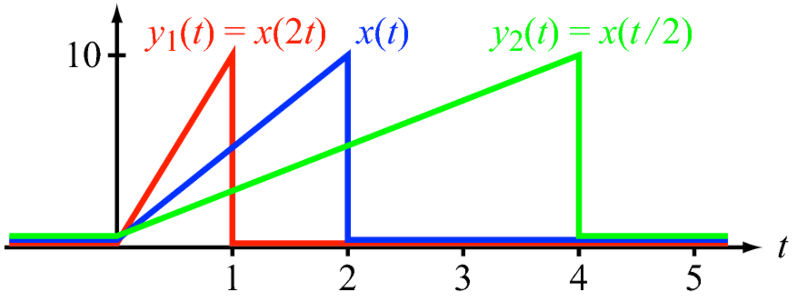
  - Cette propriété est fondamentale
  - ***Attention*** : toutes les transformées ou opérations ne possèdent pas cette propriété !

    Exemple le plus connu : $\left|X(f)+Y(f)\right| \neq \left|X(f)\right|+\left|Y(f)\right|$

Propriétés de la transformée de Fourier

- ***Homothétie ou facteur d'échelle (a>0)***

$$\mathrm{F}\left(x(at)\right) = \frac{1}{|a|}\, X\left(\frac{f}{a}\right)$$



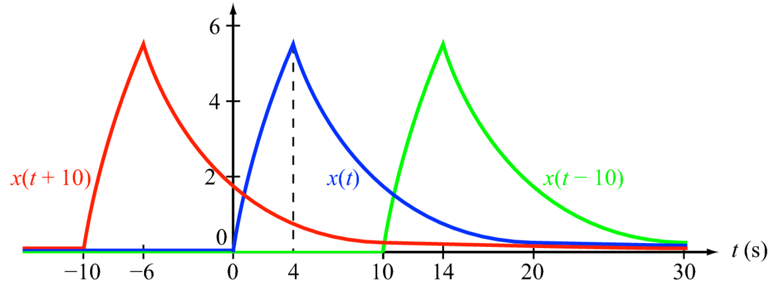
- Si *a>1, x(at)* est compressé sur l'axe des temps par rapport à *x(t)* et ses spectres d'amplitude et de phase sont dilatés par rapport à ceux de *x(t)*
- Si *a<1, x(at)* est dilaté sur l'axe des temps par rapport à *x(t)* et ses spectres d'amplitude et de phase sont compressés par rapport à ceux de *x(t)*

voir exemples plus loin

Propriétés de la transformée de Fourier

- ***Théorème du retard***

$$\mathrm{F}\left(x(t\text{-}t_o)\right) = e^{-j2\pi t_o f}\ X(f)$$



$$\left|\mathrm{F}\left(x(t-t_0)\right)\right| = \left|X(f)\right| \qquad car\ \left|e^{-j2\pi t_0 f}\right| = 1$$

$$Arg\left(\mathrm{F}\left(x(t-t_0)\right)\right) = -2\pi t_o f + Arg\left(X(f)\right)$$

Une translation temporelle d'un signal ne modifie pas le spectre d'amplitude mais seulement le spectre de phase du signal

voir exemple plus loin

Propriétés de la transformée de Fourier

- ***Théorème de convolution***

$$\mathcal{F}\Big(x(t)*y(t)\Big) = X(f)\times Y(f) \qquad x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)d\tau$$

A un ***produit de convolution*** dans le domaine temporel correspond un ***produit simple*** dans le domaine fréquentiel

Dualité temps-fréquence

$$\mathcal{F}\Big(x(t)\times y(t)\Big) = X(f)*Y(f)$$

A un ***produit simple*** dans le domaine temporel correspond un ***produit de convolution*** dans le domaine fréquentiel

- Théorème très utile : échantillonnage, modulation d'amplitude,…

Propriétés de la transformée de Fourier

- ***Théorème de modulation***

$$\mathrm{F}\left(x(t)\times e^{j2\pi f_o t}\right) = X\left(f\text{-}f_o\right)$$

$$\left|\mathrm{F}\left(x(t)e^{j2\pi f_o t}\right)\right| = \left|X(f-f_o)\right|$$

$$Arg\left(\mathrm{F}\left(x(t)e^{j2\pi f_o t}\right)\right) = Arg\left(X(f-f_o)\right)$$

La multiplication d'un signal par une fonction exponentielle complexe de fréquence f_o ne modifie pas l'allure des spectres d'amplitude et de phase du signal ; ceux-ci sont simplement translatés de f_o sur l'axe des fréquences

Théorème très utile dans le cadre des télécoms: *modulation d'amplitude*

Propriétés de la transformée de Fourier

- ***Intégration par rapport au temps***

$$\mathrm{F}\left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

- ***Dérivation par rapport au temps***

$$\mathrm{F}\left(\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right) = \left(j2\pi f\right)^n \; X(f)$$

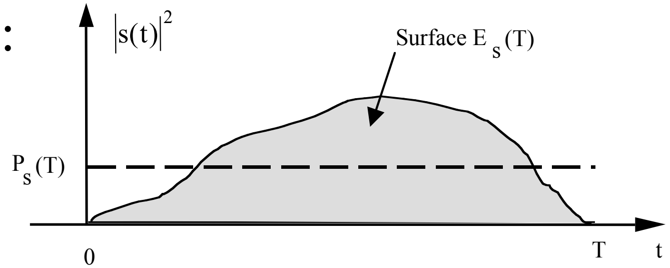
Classification énergétique des signaux à temps continu

- Signaux à temps continu
  - Energie finie
    - Puissance moyenne nulle
      - Signaux physiquement mesurés ou transitoires
  - Energie infinie
    - Puissance moyenne finie (non nulle)
      - Echelon, constante, Signaux périodiques, …
    - Puissance moyenne infinie
      - Signaux divergents dans le temps

Transformée de Fourier de signaux à énergie finie

- Les signaux à énergie finie satisfont :

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \, dt$$



Cette condition implique que ces signaux sont à support borné *(existence de durée finie)*

- ***Tout signal à énergie finie possède donc une transformée de Fourier*** qui peut s'écrire sous une forme exponentielle :

$$S(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = |S(f)|\, e^{j\varphi(f)}$$

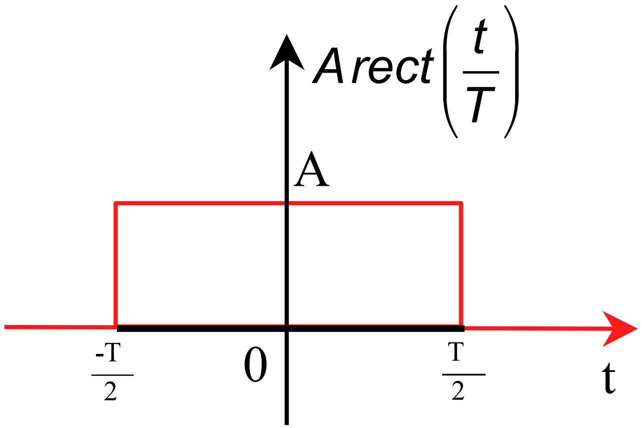
spectre d'amplitude $|S(f)|$

spectre de phase $\varphi(f) = Arg\big(S(f)\big)$

Exemple : TFtc d'une fenêtre rectangulaire

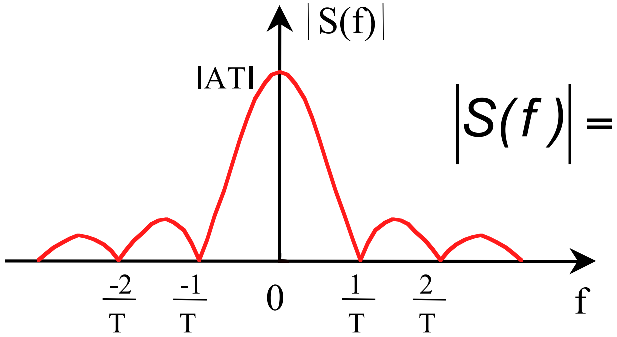
Domaine temporel

$$s(t) = A\,rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

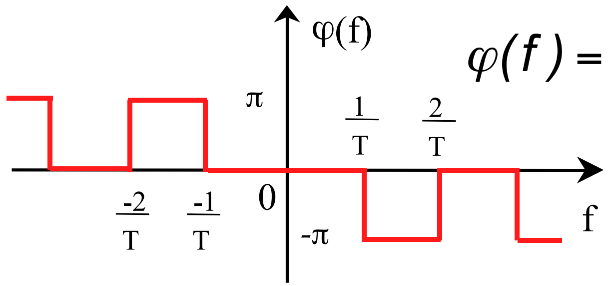


Domaine fréquentiel

$$S(f) = AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$



$$|S(f)| = |AT|\,|\mathrm{sinc}(fT)|$$



$$\varphi(f) = Arg\left(\mathrm{sinc}(fT)\right)$$

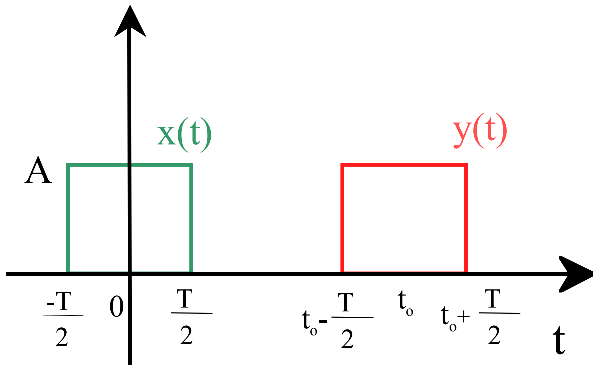
Illustration du théorème du retard : TFtc d'une fenêtre rectangulaire retardée

Domaine temporel

$$x(t) = A\,rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$y(t) = x(t - t_o)$$

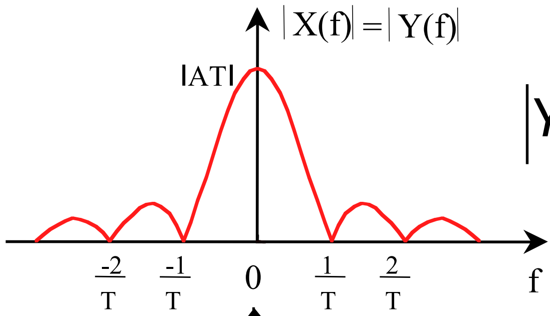
$$= A\,rect\left(\frac{t - t_o}{T}\right)$$



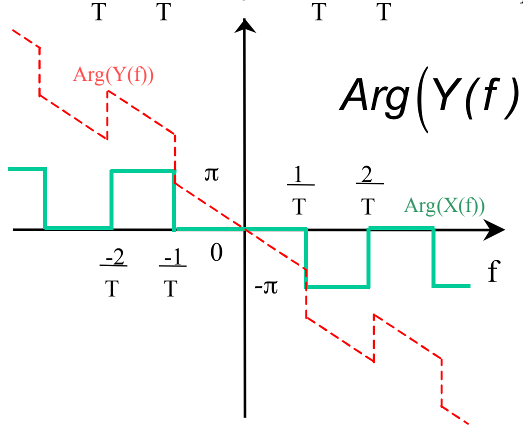
Domaine fréquentiel

$$\mathrm{F}\left(x(t - t_0)\right) = e^{-j2\pi t_0 f} X(f)$$

$$X(f) = AT\,\mathrm{sinc}(fT) \qquad Y(f) = e^{-j2\pi t_o f} X(f)$$



$$\left|Y(f)\right| = \left|X(f)\right|$$



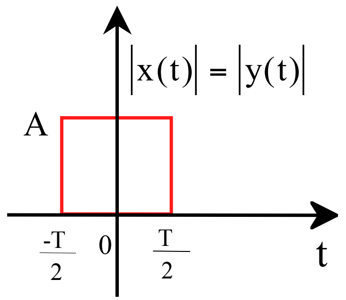
$$Arg\left(Y(f)\right) = -2\pi t_o f + Arg\left(X(f)\right)$$

Illustration du théorème de modulation : TFtc du produit d'une fenêtre rectangulaire par une exponentielle complexe

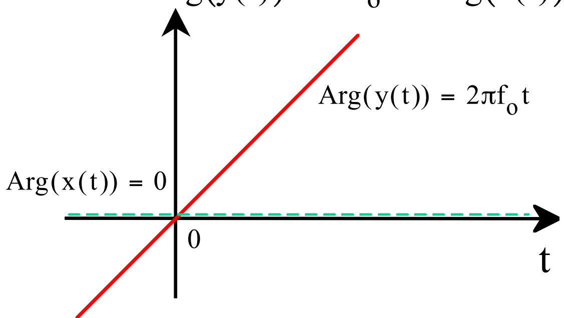
Domaine temporel

$$x(t) = A\,rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$y(t) = x(t) \times e^{j2\pi f_0 t}$$



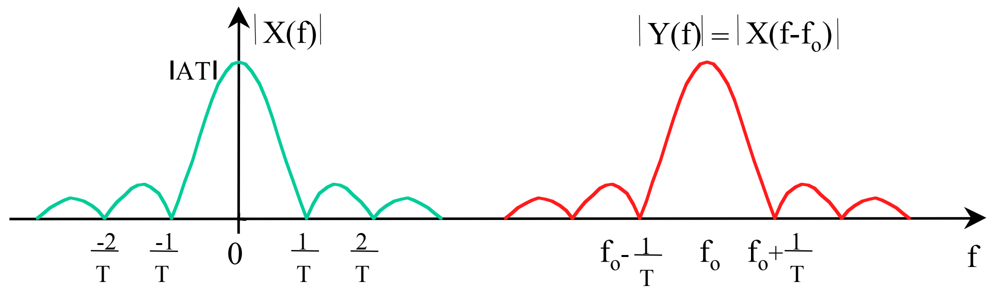
$$\mathrm{Arg}\big(y(t)\big) = 2\pi f_o t + \mathrm{Arg}\big(x(t)\big)$$



Domaine fréquentiel

$$\mathrm{F}\left(x(t)e^{j2\pi f_0 t}\right) = X(f - f_0)$$

$$X(f) = AT\,\mathrm{sinc}(fT) \qquad Y(f) = X\left(f - f_o\right)$$



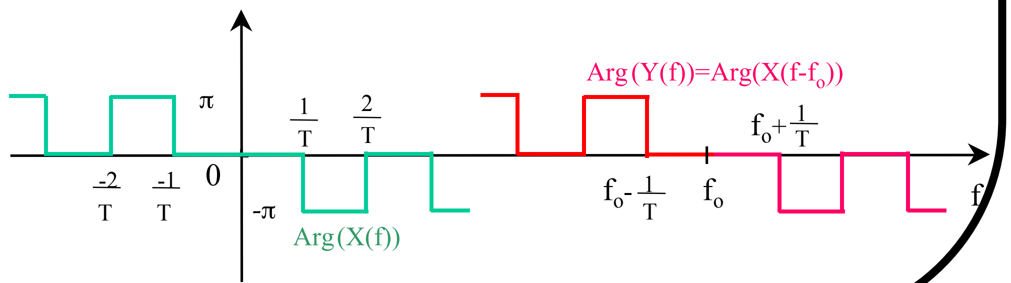
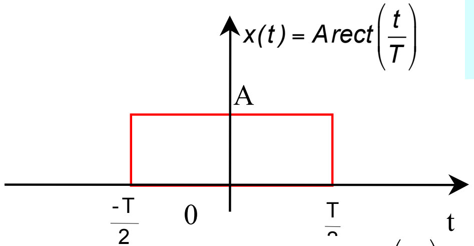


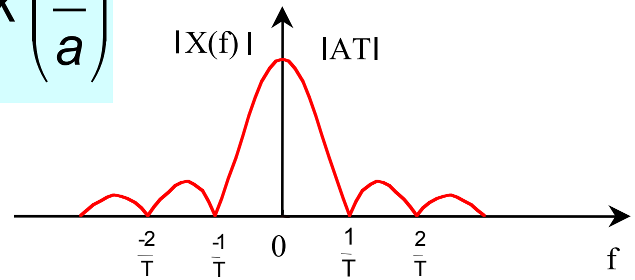
Illustration de la propriété de facteur d'échelle

Domaine temporel

Domaine fréquentiel

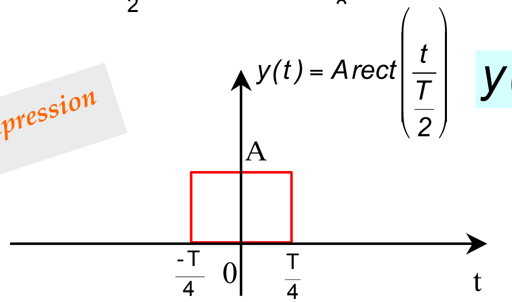
$$\mathrm{F}\left(x(at)\right) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$



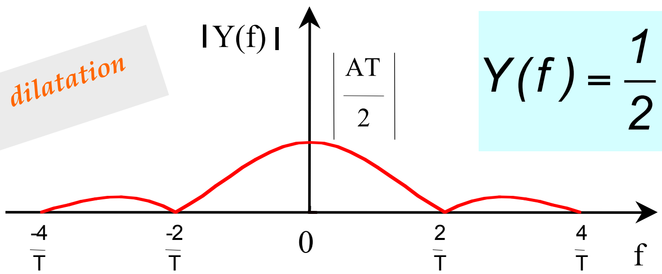


compression

$$y(t) = x(2t)$$



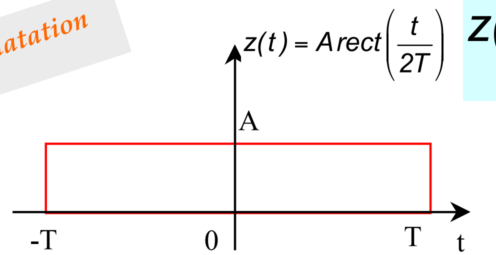
dilatation



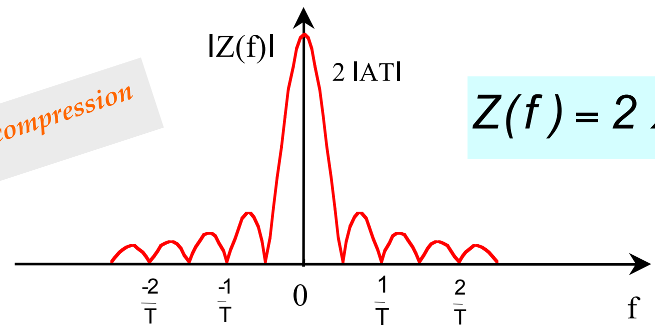
$$Y(f) = \frac{1}{2} X\left(\frac{f}{2}\right)$$

dilatation

$$z(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$$



compression



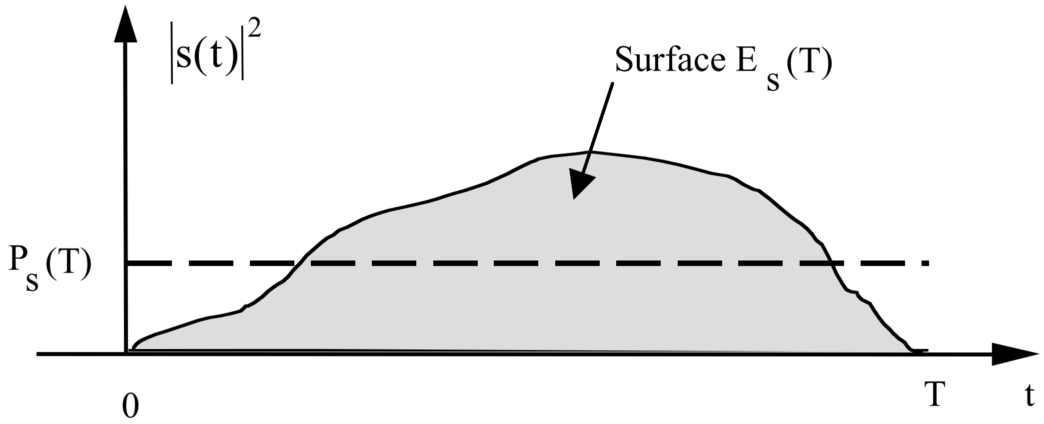
$$Z(f) = 2\,X\left(2f\right)$$

Densité temporelle d'énergie

- L'énergie d'un signal est définie par :

$$E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \, dt$$

- La fonction $|s(t)|^2$ caractérise la répartition de l'énergie dans le temps, c'est une densité temporelle d'énergie.



Densité Spectrale d'Energie (DSE)

- Par analogie avec la densité temporelle d'énergie, on définit la ***densité spectrale d'énergie (DSE)*** d'un signal à énergie finie par :

$$\Phi_S(f) = \mathrm{F}\left(\phi_{ss}(\tau)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{ss}(\tau) e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

avec $\phi_{ss}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation du signal à énergie finie :

$$\phi_{ss}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t)\, s(t+\tau)\, dt$$

La DSE d'un signal à énergie finie est par définition la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation du signal

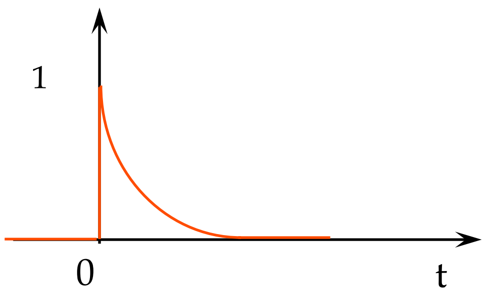
- On montre que dans le cas d'un signal à énergie finie :

$$\Phi_S(f) = \left|S(f)\right|^2$$

DSE d'un signal causal
à décroissance exponentielle

Domaine temporel

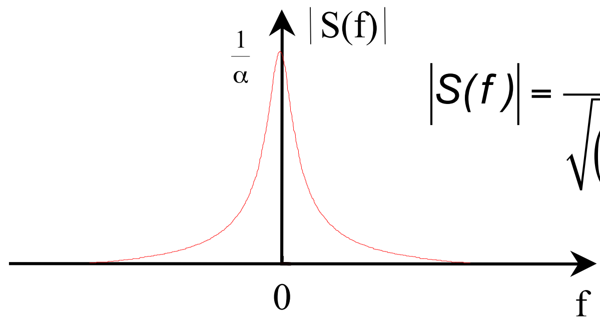
$$s(t) = e^{-\alpha t}\, u(t) \qquad \alpha > 0$$



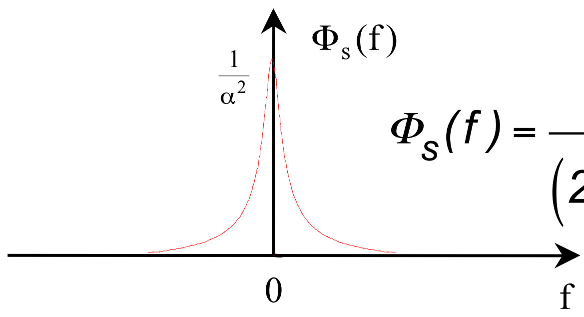
Domaine fréquentiel

$$S(f) = \frac{1}{j2\pi f + \alpha}$$

$$\Phi_S(f) = \left|S(f)\right|^2$$



$$\left|S(f)\right| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi f)^2 + \alpha^2}}$$

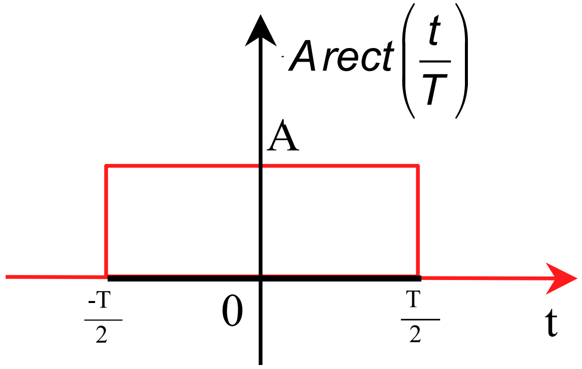


$$\Phi_S(f) = \frac{1}{(2\pi f)^2 + \alpha^2}$$

Exemple : DSE d'une fenêtre rectangulaire

Domaine temporel

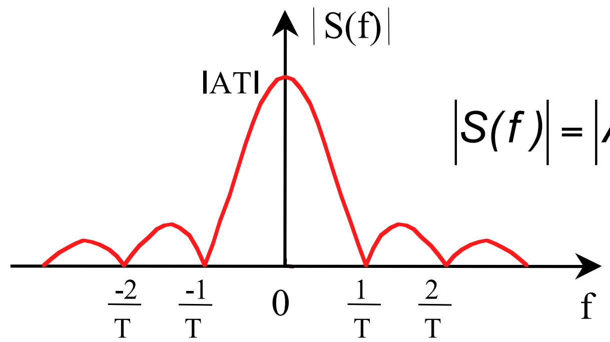
$$s(t) = A\,rect\left(\frac{t}{T}\right)$$



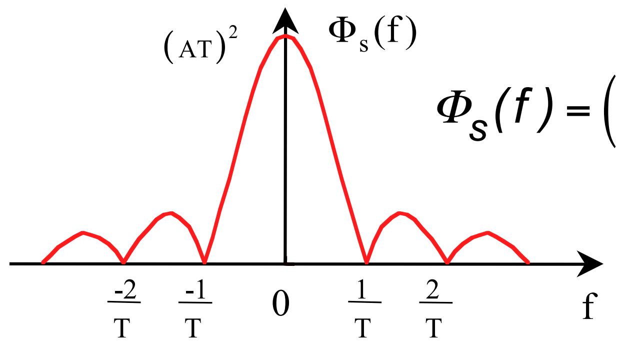
Domaine fréquentiel

$$S(f) = AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$$\Phi_S(f) = |S(f)|^2$$



$$|S(f)| = |AT|\,|\mathrm{sinc}(fT)|$$



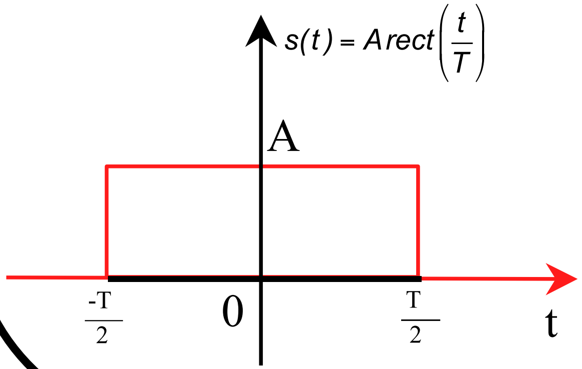
$$\Phi_S(f) = (AT)^2\,\mathrm{sinc}^2(Tf)$$

Identité de Parseval

- Soit un signal à énergie finie, Parseval a montré l'identité :

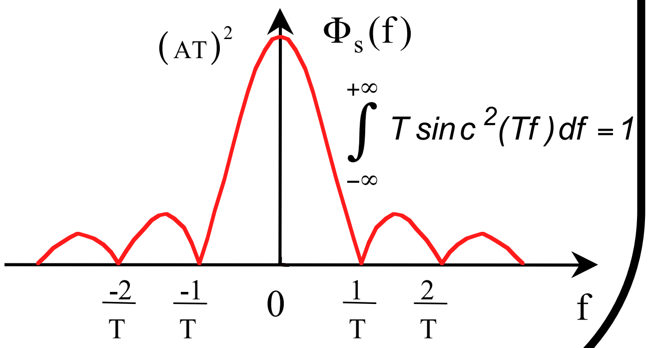
$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_s(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df$$

- Elle montre que l'énergie totale du signal peut se calculer soit en intégrant la distribution temporelle $|s(t)|^2$, soit en intégrant sa distribution fréquentielle $\Phi_S(f) = |S(f)|^2$

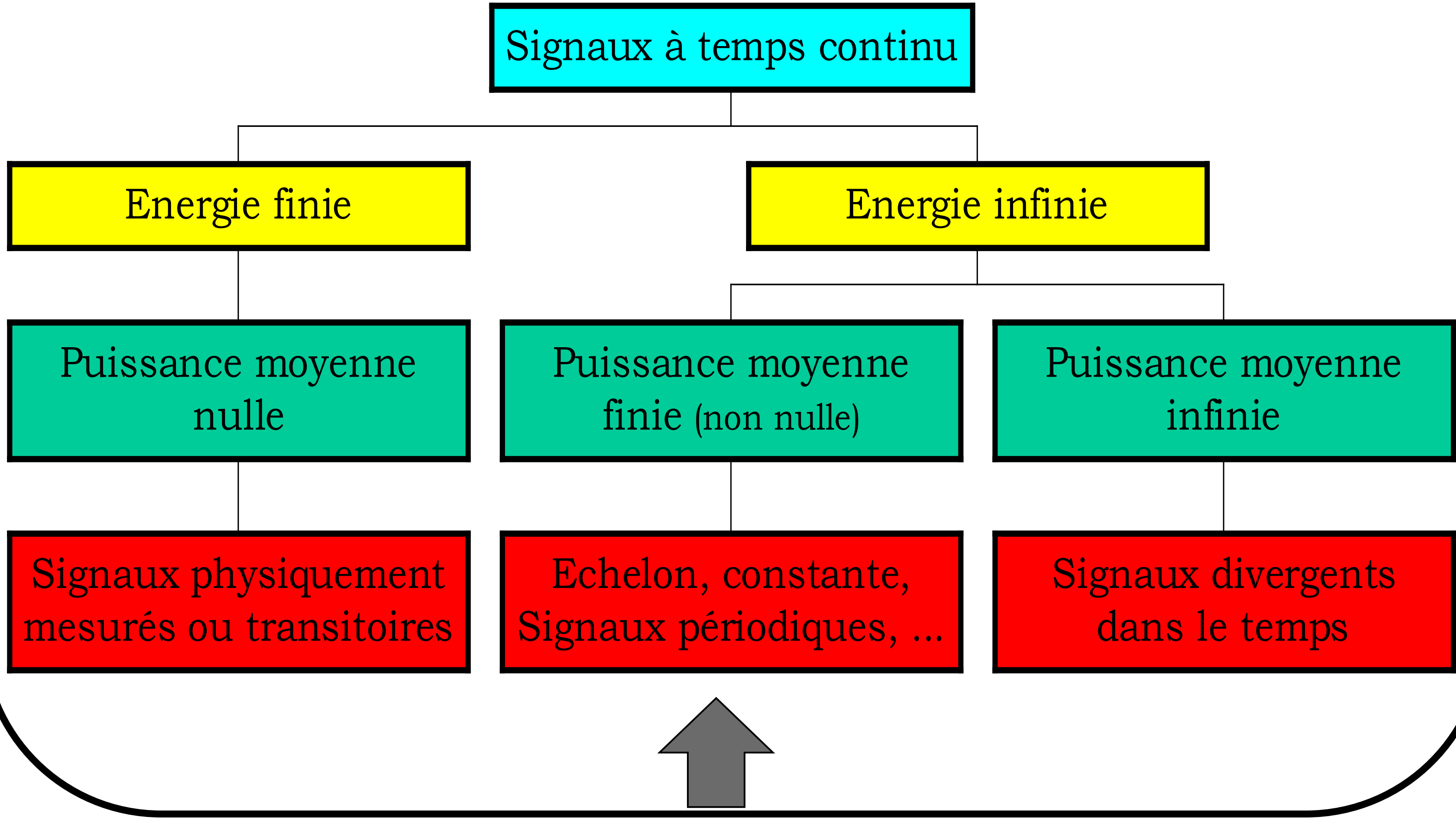


$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = A^2 T$$

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_s(f)\, df = A^2 T$$



Classification énergétique des signaux à temps continu



Transformée de Fourier de signaux à puissance moyenne finie

- Les signaux à puissance moyenne finie *(énergie infinie)* satisfont :

$$0 < P_s = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 \, dt < \infty$$

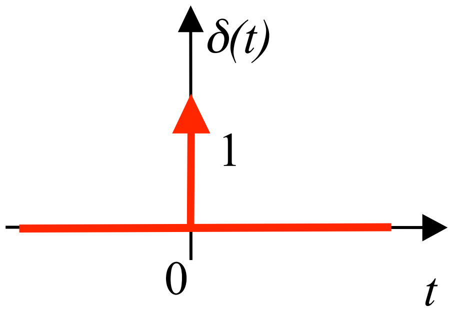
- Ils constituent une idéalisation qui permet de modéliser les signaux comme une constante, un échelon ou les signaux périodiques
- Les signaux à puissance moyenne finie ***<u>ne satisfont pas</u> les critères habituels d'existence de l'intégrale de Fourier***
- La définition de la transformée de Fourier de signaux à puissance moyenne finie fait appel à l'utilisation de ***l'impulsion de Dirac***

Transformée de Fourier de l'impulsion de Dirac

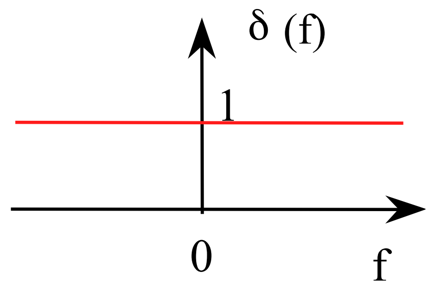
- D'après la propriété d'échantillonnage de l'impulsion de Dirac :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, s(t-t_o)\, dt = s(t)\big|_{t=t_o} = s(t_o)$$

$$\delta(f) = \mathrm{F}\big(\delta(t)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = e^{-j2\pi ft}\Big|_{t=t_o=0} = 1$$



$$\boxed{\mathrm{F}\big(\delta(t)\big) = 1}$$



Transformée de Fourier d'une fonction exponentielle complexe

- TFtc d'une impulsion de Dirac retardée :

$$\mathrm{F}\left(x(t-t_0)\right)=e^{-j2\pi t_0 f}X(f) \qquad \textit{théorème du retard}$$

$$\mathrm{F}\left(\delta(t-t_o)\right)=e^{-j2\pi t_o f}\delta(f)=e^{-j2\pi t_o f} \qquad \delta(f)=1$$

$$\boxed{\mathrm{F}\left(\delta(t-t_o)\right)=e^{-j2\pi t_o f}}$$

- ***De la dualité temps-fréquence*** :

$$\boxed{\mathrm{F}\left(e^{j2\pi f_o t}\right)=\delta(f-f_o)}$$

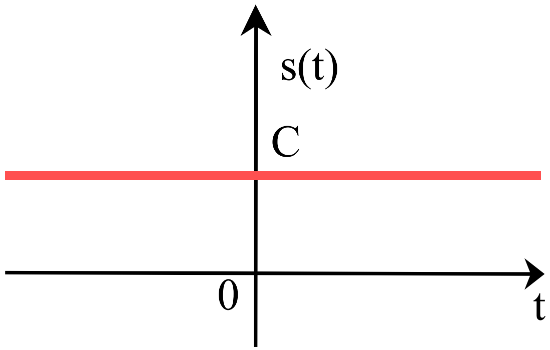
$$\text{si } \mathrm{f_o}=0 \quad \mathrm{F}\left(1\right)=\delta(f)$$

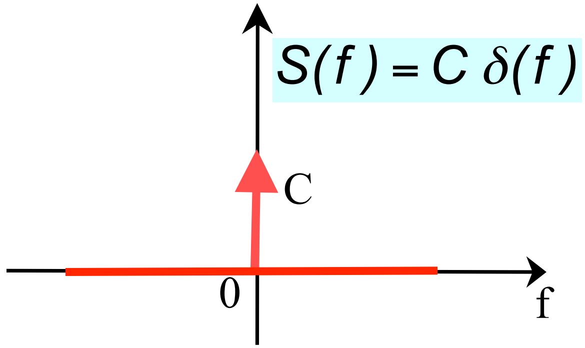
Transformée de Fourier d'une constante

$s(t) = C \qquad \forall t$

$$\mathrm{F}\left(Ce^{j2\pi f_o t}\right) = C\delta(f - f_o)$$

$$\text{si } f_o = 0 \quad \mathrm{F}\left(C\right) = C\delta(f)$$

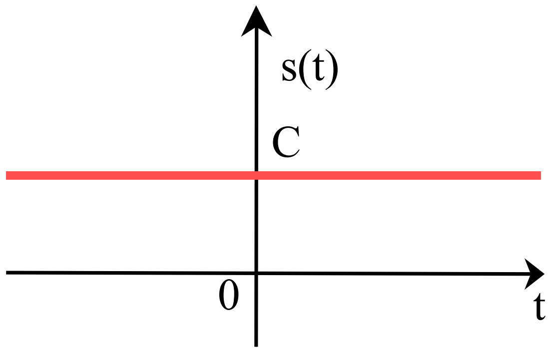




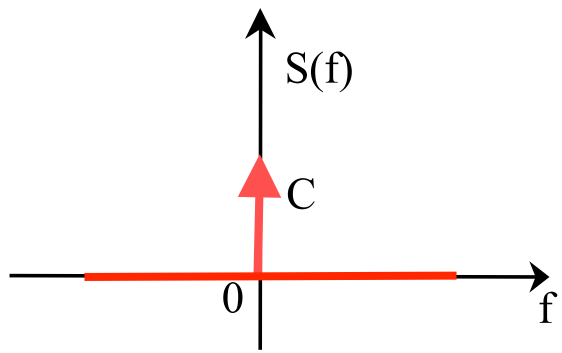
- Un signal constant peut être considéré comme la valeur moyenne temporelle d'un signal

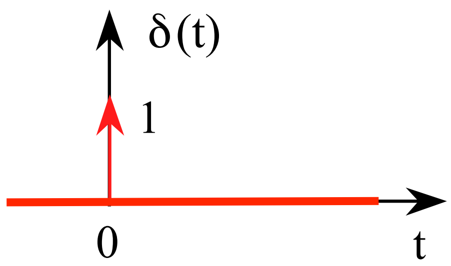
$$\bar{s} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)dt \qquad\qquad \mathrm{F}(\bar{s}) = \bar{s}\ \delta(f)$$

Illustration de la dualité temps-fréquence

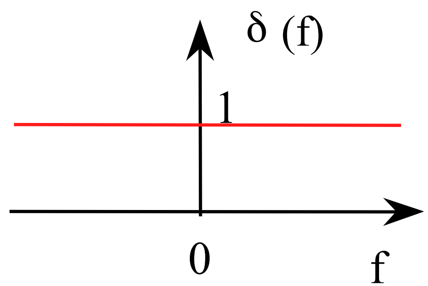


$$S(f) = C\,\delta(f)$$





$$\mathrm{F}\big(\delta(t)\big) = 1$$



TFtc des signaux à puissance moyenne finie

- Tout signal à puissance moyenne finie $s(t)$ peut s'écrire :

$$s(t) = \bar{s} + s_o(t)$$

Propriété de linéarité $$\mathrm{F}\big(s(t)\big) = \mathrm{F}(\bar{s}) + \mathrm{F}\big(s_o(t)\big)$$

Propriété de dérivation $$\mathrm{F}\left(\frac{ds_o(t)}{dt}\right) = j2\pi f\ \mathrm{F}\big(s_o(t)\big)$$

$$\mathrm{F}\big(s_o(t)\big) = \frac{1}{j2\pi f}\mathrm{F}\left(\frac{ds_o(t)}{dt}\right) \qquad \mathrm{F}(\bar{s}) = \bar{s}\,\delta(f)$$

- La TFtc d'un signal à puissance moyenne finie peut toujours s'écrire :

$$\mathrm{F}\big(s(t)\big) = \bar{s}\,\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}\mathrm{F}\left(\frac{ds_o(t)}{dt}\right)$$

Transformée de Fourier d'un échelon

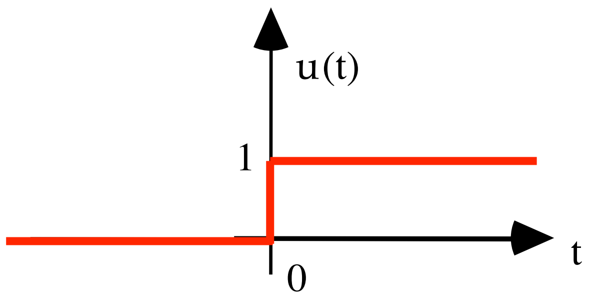
$$s(t) = \bar{s} + s_o(t) \qquad \mathcal{F}\big(s(t)\big) = \bar{s}\,\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}\,\mathcal{F}\left(\frac{ds_o(t)}{dt}\right)$$

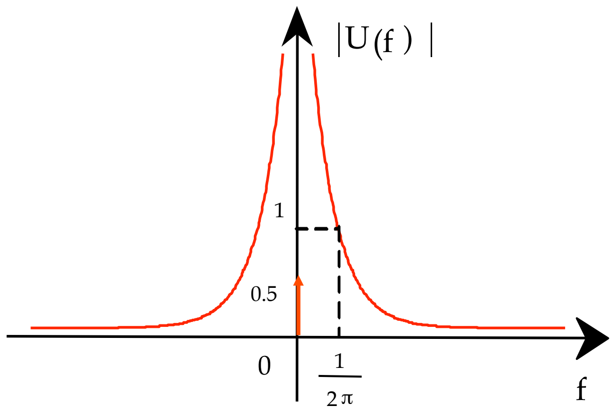
$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,sgn(t)$$

$$\bar{s} = \frac{1}{2}$$

$$s_o(t) = \frac{1}{2}\,sgn(t) \;\; et \;\; \frac{ds_o(t)}{dt} = \delta(t)$$

$$\mathcal{F}\big(u(t)\big) = \frac{1}{2}\,\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$





Densité Spectrale de Puissance (DSP)

- Par analogie avec la densité spectrale d'énergie (DSE), la densité spectrale de puissance (DSP) d'un signal à puissance moyenne finie est définie par :

$$\Phi_S(f) = \mathrm{F}\left(\phi_{ss}(\tau)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{ss}(\tau) e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

avec $\phi_{ss}(\tau)$ la fonction d'auto-corrélation du signal à puissance moyenne finie définie par :

$$\phi_{ss}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^*(t)\, s(t+\tau)\, dt$$

La DSP d'un signal à puissance moyenne finie est par définition la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation

- Attention ! Dans le cas d'un signal à puissance moyenne finie

$$\Phi_S(f) \neq \left|S(f)\right|^2$$

Identité de Parseval

- Soit un signal à puissance moyenne finie, Parseval a montré l'identité :

$$P_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left|s(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_s(f)\,df$$

- Elle montre que la puissance moyenne du signal peut se calculer soit en intégrant la distribution temporelle $\left|s(t)\right|^2$, soit en intégrant sa distribution fréquentielle $\Phi_S(f)$

Transformée de Fourier de signaux périodiques

- Signaux périodiques *(puissance moyenne finie)*
  - possèdent un développement en série de Fourier

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n f_o t}$$

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \,\delta\left(f - nf_o\right)$$

$$\mathrm{F}\left(e^{j2\pi n f_o t}\right) = \delta(f - nf_o)$$

  - ***La TFtc d'un signal périodique est donc une somme d'impulsions de Dirac régulièrement espacées de f_o pondérées par les coefficients de Fourier c_n du signal***

Spectres d'amplitude et de phase de signaux périodiques par TFtc

- ***Par convention***, le module et l'argument de la transformée de Fourier d'un signal périodique sont définis par

$$\left|S(f)\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n\right| \delta\left(f - nf_o\right)$$

$$\varphi(f) = Arg\left(c_n\right)\Big|_{f=nf_o}$$

- Spectres d'amplitude et de phase d'un signal périodique obtenus par :
  - TFtc : ***impulsions de Dirac***
  - décomposition en série de Fourier : ***simples raies***

- On parle néanmoins dans les deux cas de ***spectres de raies*** caractéristiques de signaux périodiques à temps continu

Exemple: spectres d'un signal co-sinusoïdal

$$s(t) = A\cos(2\pi f_0 t) = A\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

$$S(f) = \frac{A}{2}F\left(e^{j2\pi f_0 t}\right) + \frac{A}{2}F\left(e^{-j2\pi f_0 t}\right)$$

$$S(f) = \frac{A}{2}\delta(f + f_0) + \frac{A}{2}\delta(f - f_0)$$

$$\mathrm{F}\left(e^{j2\pi f_o t}\right) = \delta(f - f_o)$$

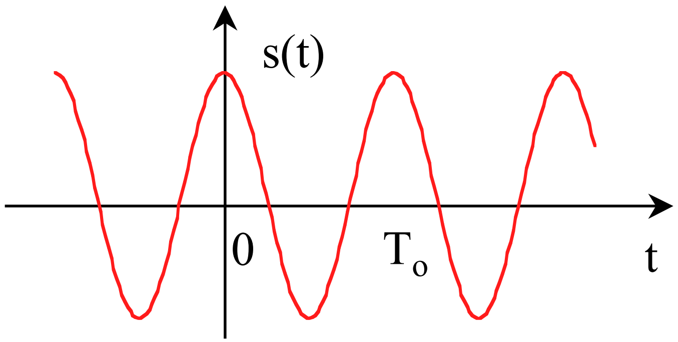
$$S(f) = c_{-1}\,\delta\left(f + f_o\right) + c_1\,\delta\left(f - f_o\right)$$

$$c_{-1} = \frac{A}{2} \quad et \quad c_1 = \frac{A}{2}$$

Spectres d'un signal co-sinusoïdal

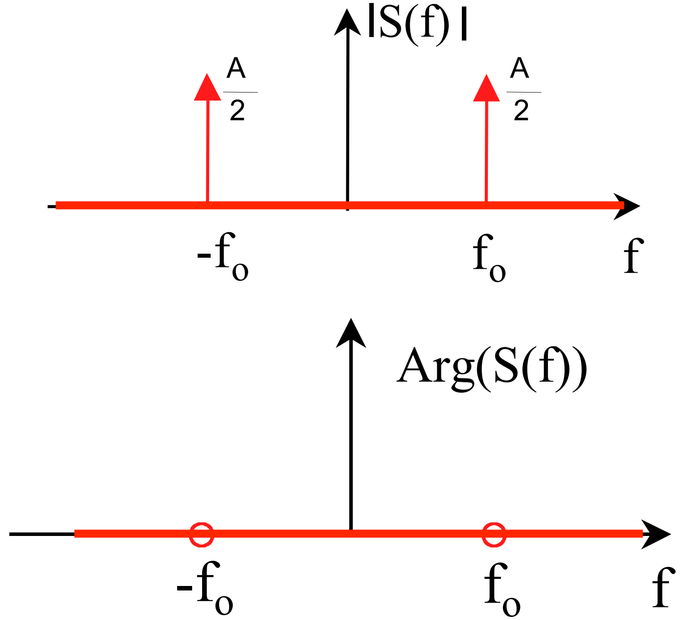
Domaine temporel

$$s(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$



Domaine fréquentiel

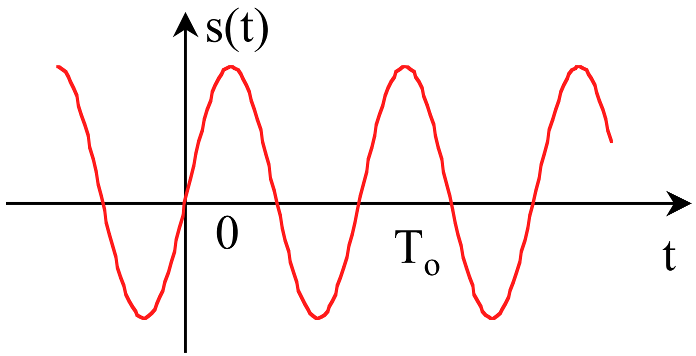
$$S(f) = \frac{A}{2}\delta(f+f_0) + \frac{A}{2}\delta(f-f_0)$$



spectres d'un signal sinusoïdal

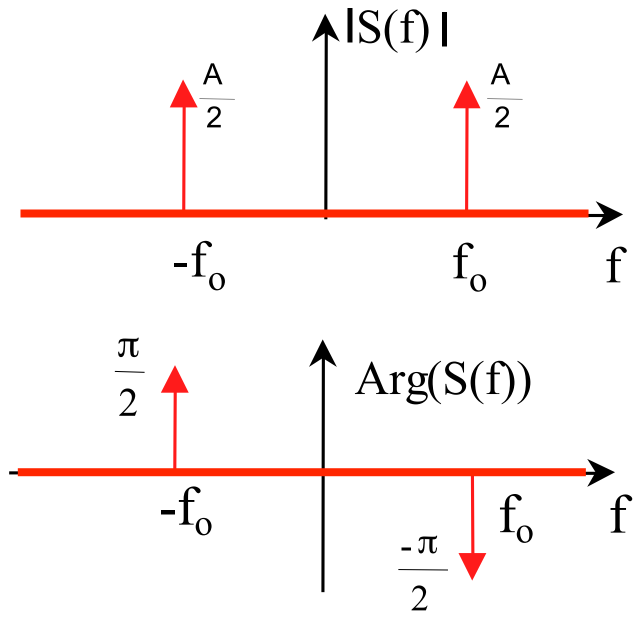
Domaine temporel

$$s(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$$



Domaine fréquentiel

$$S(f) = \frac{A}{2} j\delta(f + f_0) - \frac{A}{2} j\delta(f - f_0)$$



TFtc du produit d'un signal périodique par un signal à énergie finie

- Soit le signal $z(t)$ résultant de la multiplication d'un signal périodique $x(t)$ de fréquence f_o par un signal à énergie finie $y(t)$:

$$z(t) = x(t)\times y(t)$$ $z(t)$ est aussi un signal à énergie finie

- D 'après les propriétés de la TFtc :

$$Z(f) = F(x(t)\times y(t)) = X(f) * Y(f)$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, \delta\left(f - nf_o\right)$$

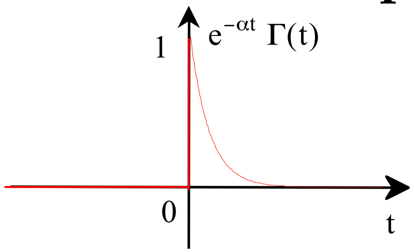
$$Z(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, \delta\left(f - nf_o\right) * Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, Y\left(f - nf_o\right)$$

$$\delta(f - nf_o) * S(f) = S(f - nf_o)$$

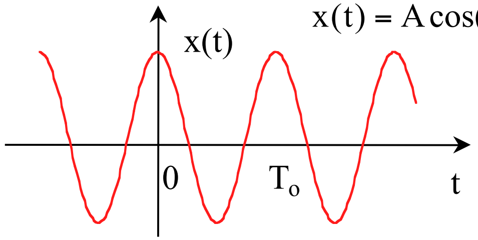
Le résultat est une combinaison linéaire de versions du spectre de $y(t)$, décalées par pas régulier de f_o sur l'axe des fréquences

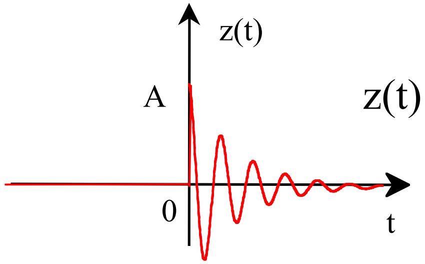
TFtc du produit d'un signal co-sinusoïdal par un signal à énergie finie

Domaine temporel



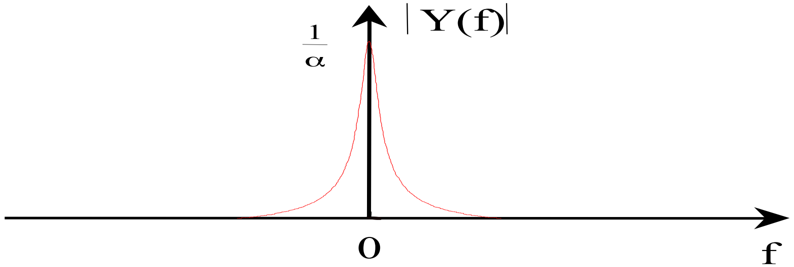
$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$

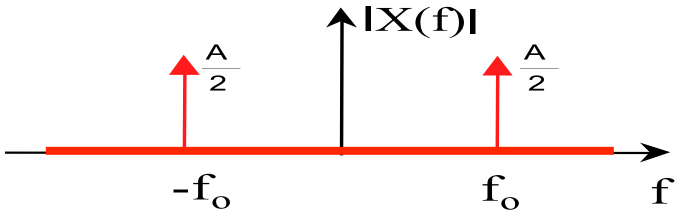


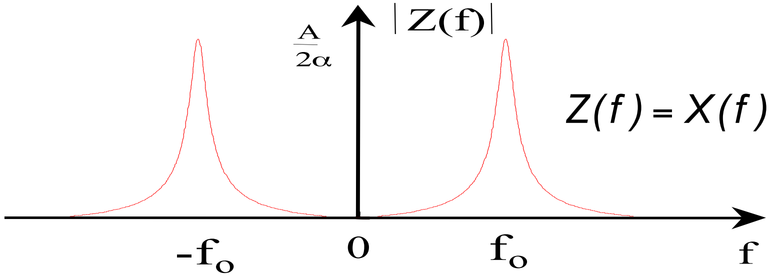


$z(t) = x(t) \times y(t)$

Domaine fréquentiel







$Z(f) = X(f) * Y(f)$

$$Z(f) = \frac{A}{2} Y(f - f_o) + \frac{A}{2} Y(f + f_o)$$

Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

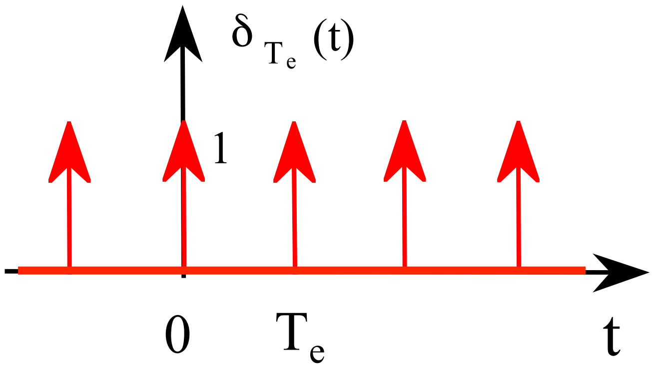
Domaine temporel

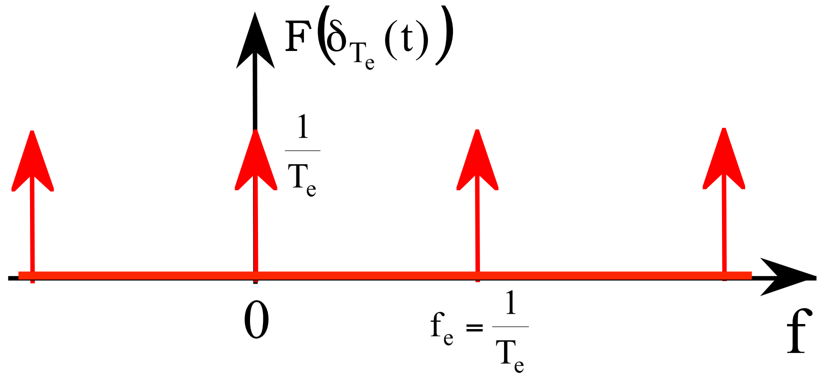
$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$
$$= \ldots + \delta(t + T_e) + \delta(t) + \delta(t - T_e) + \ldots$$

Domaine fréquentiel

$$F\left(\delta_{T_e}(t)\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_e} \delta\left(f - \frac{k}{T_e}\right)$$

$$F\left(\delta_{T_e}(t)\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_e} \delta(f - k f_e)$$





Densité Spectrale de Puissance d'un signal périodique

- *La densité spectrale de puissance d'un signal à puissance moyenne finie est par définition la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation du signal*

$$\Phi_S(f) = \mathrm{F}\left(\phi_{ss}(\tau)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{ss}(\tau) e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

avec $\phi_{ss}(\tau)$ la fonction d'auto-corrélation du signal périodique définie par :

$$\phi_{ss}(\tau) = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} s^*(t)\, s(t+\tau)\, dt \qquad \phi_{ss}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n\right|^2 e^{j2\pi n\tau f_o}$$

Dans le cas d'un signal périodique :

$$\Phi_S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n\right|^2 \delta\left(f - nf_o\right)$$

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

POLYTECH NANCY

DSP de signaux sinusoïdaux

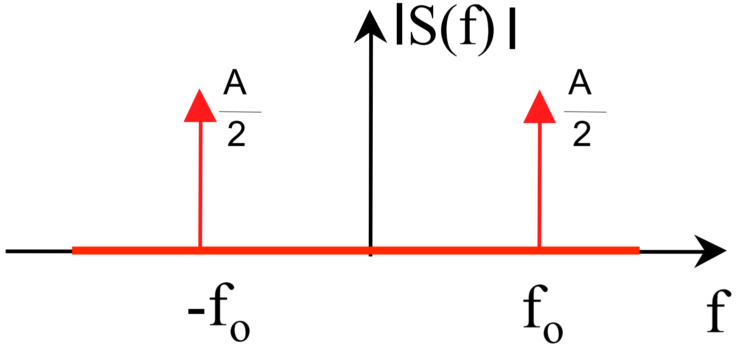
$$s(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, \delta\left(f - nf_o\right)$$

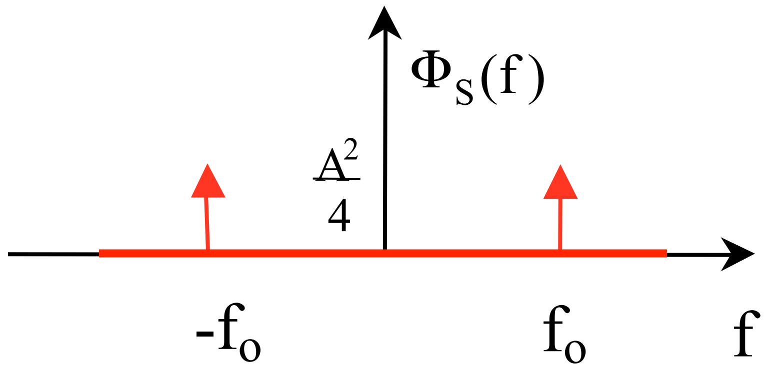
$$\Phi_S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n\right|^2 \delta\left(f - nf_o\right)$$

$$S(f) = \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0)$$

$$\Phi_S(f) = \frac{A^2}{4}\delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4}\delta(f + f_0)$$



Spectre d'amplitude



Densité spectrale de puissance

Identité de Parseval
Cas des signaux périodiques

- Soit un signal périodique de période T_o, Parseval a montré l'identité :

$$P_s = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} \left| s(t) \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_s(f)\, df = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| c_n \right|^2$$

- Elle montre que la puissance moyenne du signal peut se calculer soit en intégrant la distribution temporelle $\left| s(t) \right|^2$, soit en intégrant sa distribution fréquentielle $\Phi_S(f)$

Classification spectrale des signaux déterministes quelconques

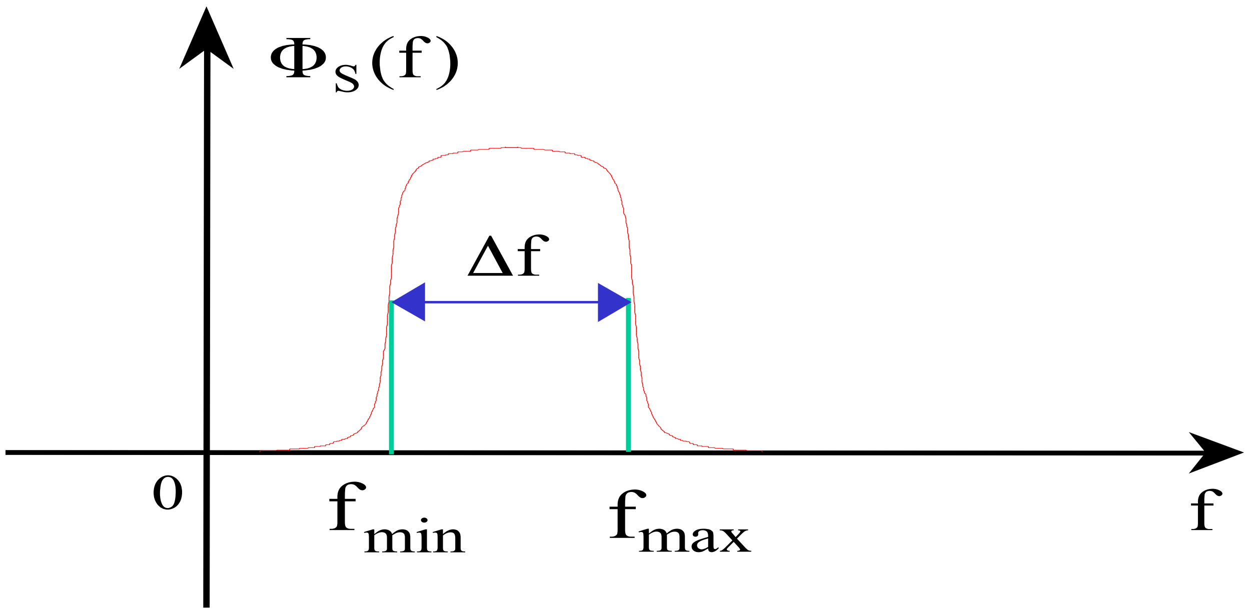
- La transformée de Fourier permet donc d'obtenir une représentation spectrale des signaux déterministes quelconques *(périodiques ou non)*

- Cette représentation spectrale exprime la répartition du module, de la phase, de l'énergie ou de la puissance en fonction de la fréquence

- Cette analyse dans le domaine fréquentiel des caractéristiques d'un signal conduit à une classification des signaux d'après les caractéristiques de cette représentation spectrale

Largeur de bande d'un signal

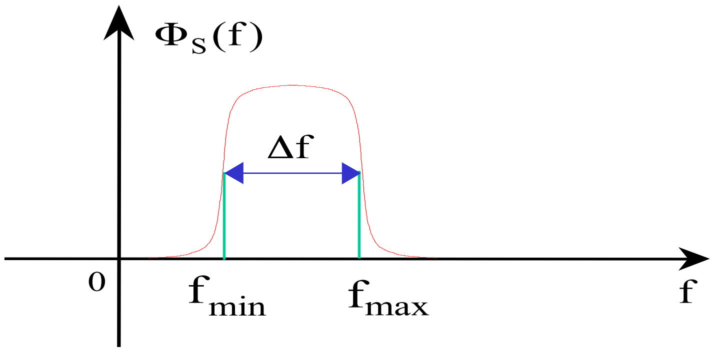
- Le domaine des fréquences Δf (Hz) occupé par le spectre d'un signal est appelé ***largeur de bande*** du signal qui peut être définie par $\Delta f = f_{max} - f_{min}$



Signaux à large bande et à bande étroite

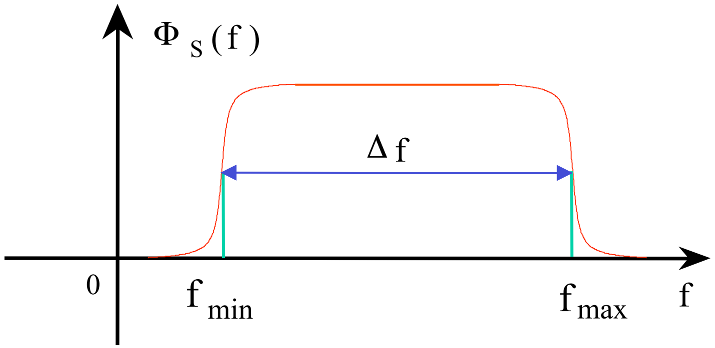
- Signaux à bande étroite

$$f_{max} \approx f_{min}$$



Signaux à large bande

$$f_{max} >> f_{min}$$



Caractéristiques des ondes hertziennes

Bande de fréquences	Longueur d'onde	Désignation métrique	Désignation courante	Abréviation internationale	Exemples d'utilisation
10kHz à 30 kHz	30km à 10km	Ondes myriamétriques	Très basses fréquences Very Low Frequencies	VLF	
30kHz à 300 kHz	10km à 1km	Ondes kilométriques	Basses fréquences Low Frequencies	LF	Navigation aéronautique
300kHz à 3 MHz	1km à 100m	Ondes hectométriques	Fréquences moyennes Meduim Frequencies	MF	Radio diffusion AM
3 MHz à 30 MHz	100m à 10m	Ondes décamétriques	Hautes fréquences High Frequencies	HF	Radio diffusion internationale, amateur
30 MHz à 300 MHz	10m à 1m	Ondes métriques	Très hautes fréquences Very High Frequencies	VHF	Radio diffusion FM
300 MHz à 3 GHz	1m à 10cm	Ondes décimétriques	Ultra hautes fréquences Ultra High Frequencies	UHF	UHF TV
3 GHz à 30 GHz	10cm à 1cm	Ondes centimétriques	Super hautes fréquences Super High Frequencies	SHF	Communication satellites, mobiles, Radar
30 GHz à 300 GHz	1cm à 1mm	Ondes millimétriques	Hyper fréquences Extremely High Frequencies	EHF	

Lorsque la fréquence du signal devient supérieure à quelques térahertz (=10^{12}Hz), la longueur d'onde λ devient le paramètre de référence avec $\lambda = \frac{c}{f}$ et c=300 000 Km/s

Table de spectres

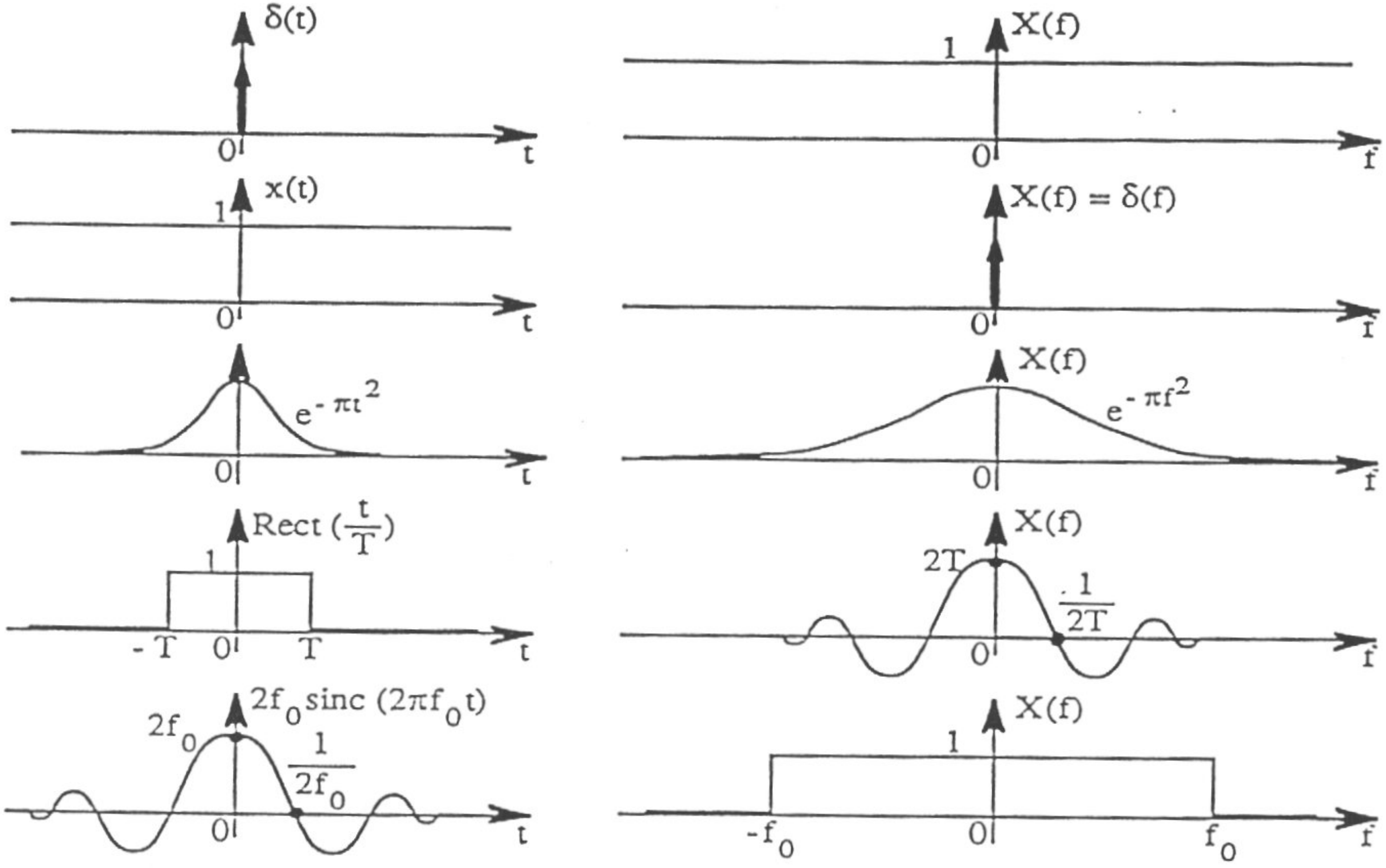
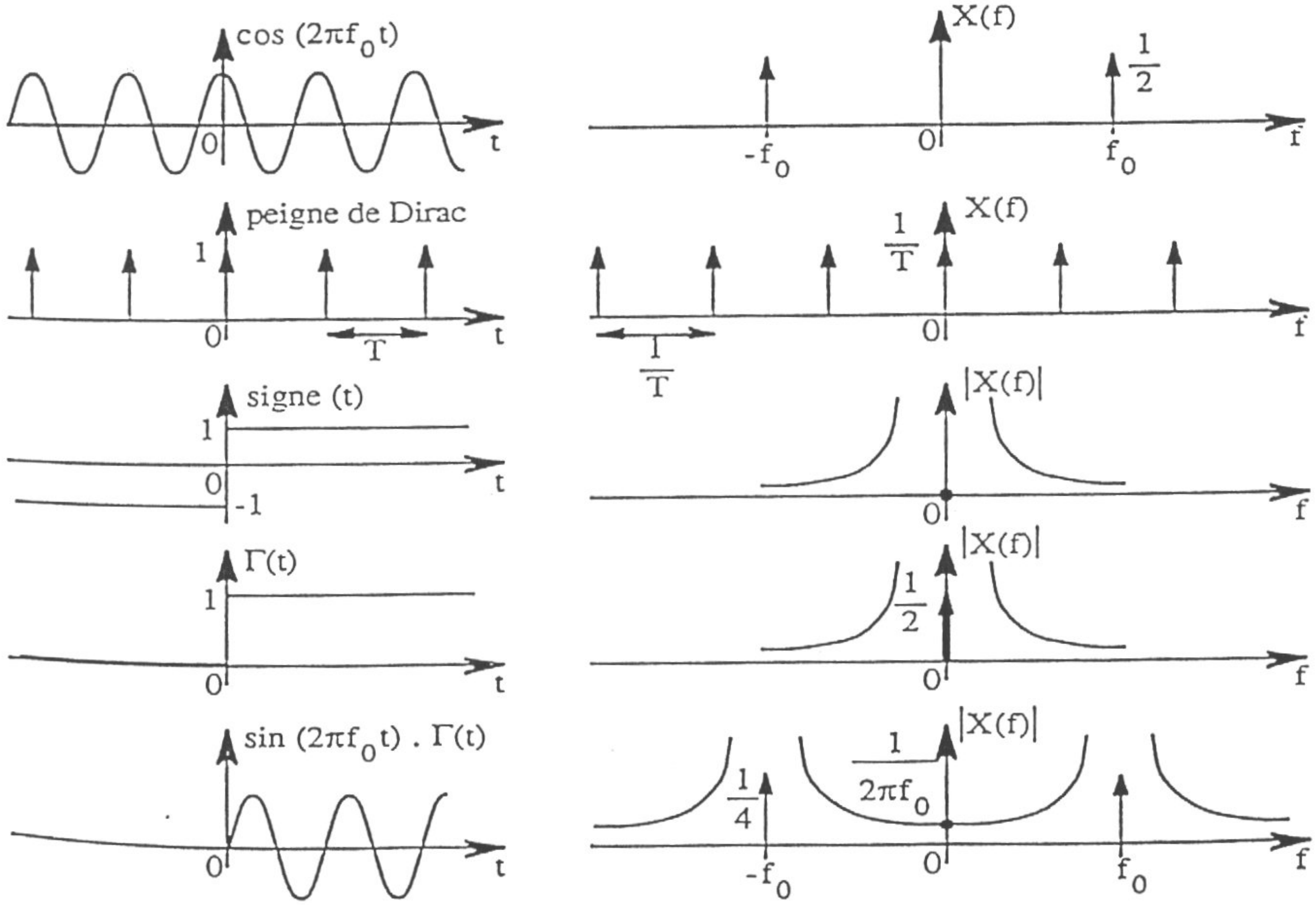


Table de spectres



Exemple d'application de l'analyse de Fourier : cryptage-décryptage du son Canal + analogique