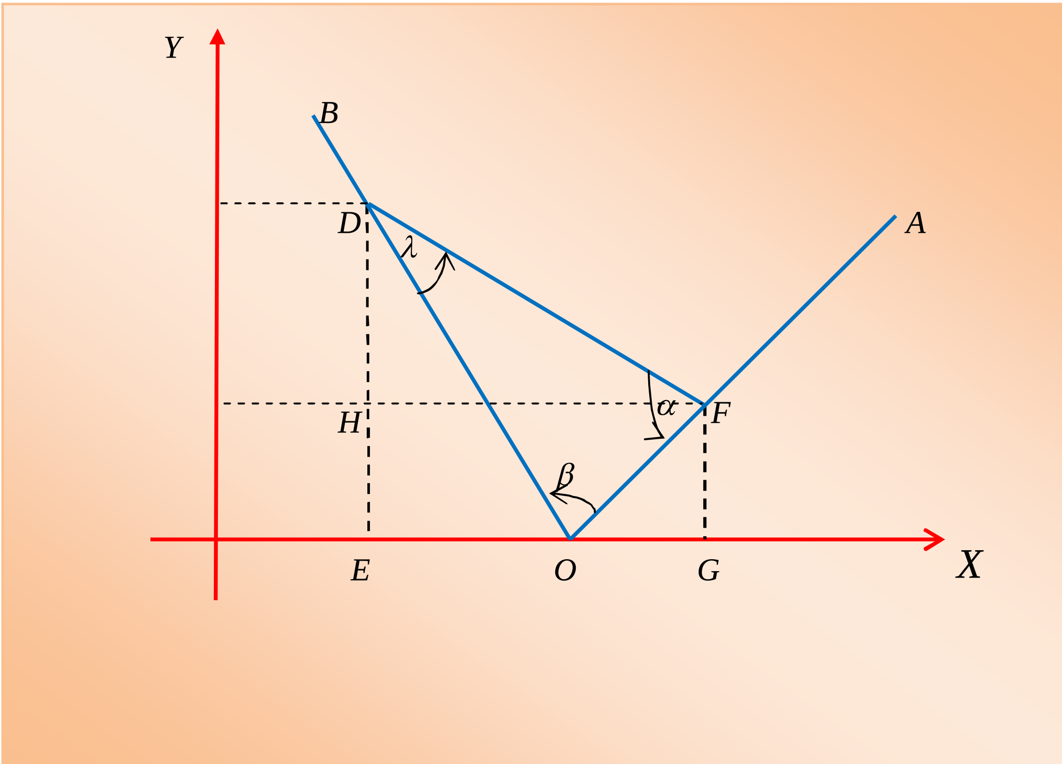
TRIGONOMETRI

(ILMU UKUR SUDUT)



Oleh

Dwi Purnomo

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

IKIP BUDI UTOMO MALANG

TAHUN 2013

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT. atas limpahan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulisan bahan ajar yang berjudul Trigonometri (Ilmu Ukur Sudut) dapat diselesaikan sesuai dengan jadual yang telah direncanakan sebelumnya. Namum demikian isinya belum sepenuhnya sesuai dengan harapan pembaca terutama mahasiswa yang sedang mengikuti perkuliahan Trigonometri.

Bahan ajar ini berisikan konsep-konsep tentang Sistem Koordinat, Perbandingan Goniometri Sudut Lancip, Dalil-dalil dalam Segitiga, Jumlah dan Selisih Sudut, Grafik Fungsi Trigonometri, Persamaan Trigonometri, dan Bilangan Komplek. Konsep-konsep tersebut selain membantu mahasiswa juga diharapkan dapat memberikan bekal tambahan dalam mengikuti perkuliahan Trigonometri

Proses penulisan bahan ajar ini dari awal hingga akhir sangat dibantu oleh teman-teman dan kolega, khususnya teman satu profesi di Program Studi Pendidikan Matematika IKIP Budi Utomo Malang, lebih-lebih para mahasiswa yang menjadi sumber inspirasi dan bantuan motivasi kepada penulis untuk segera menyelesaikan bahan ajar ini. Secara khusus penulis menyampaikan terima kasih kepada Prof. Mustofa Usman dosen Universitas Lampung yang telah banyak memberikan bahan-bahan tulisan dan sekaligus sebagai guru penulis. Semoga konsep teori, pembahasan soal, dan soal-soal latihan yang disajikan dalam bahan ajar ini dapat berguna dan membantu mahasiswa. Kekurangan dan kekhilafan disana sini *Insya'allah* diperbaiki dikemudian hari.

Malang, Januari 2013
Penulis

Dwi Purnomo

Untuk yang tercinta
Pandu, Prisma, Caesar, dan Mamanya

BAB I
SISTEM KOORDINAT

Bab I buku ini membahas empat hal pokok yang berhubungan dengan sistem koordinat, antara lain (1) sistem koordinat dalam bidang, (2) sistem koordinat ruang, (3) sistem koordinat lainnya, dan (4) soal-soal.

Standar Kompetensi

Setelah mempelajari pokok bahasan ini diharapkan mahasiswa memahami sistem koordinat dalam bidang dan ruang dan dapat menerapkannya pada masalah-masalah praktis dalam kehidupan sehari-hari.

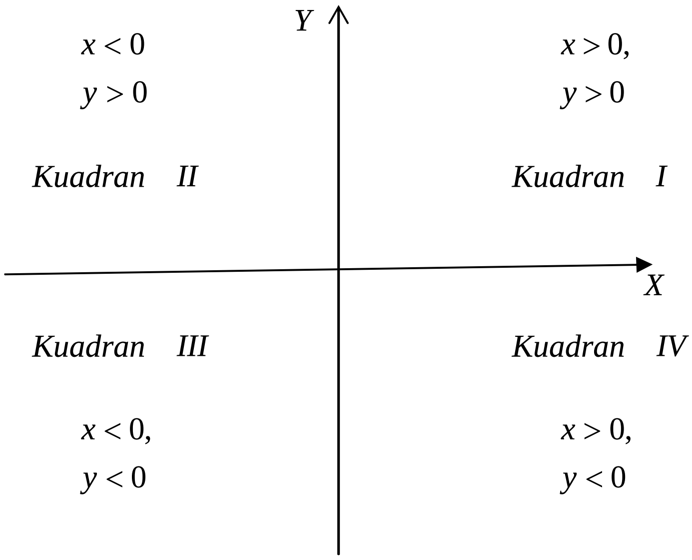
Kompetensi Dasar

1) Mahasiswa dapat menjelaskan kembali tentang sistem koordinat.
2) Mahasiswa dapat membedakan letak suatu titik pada bidang dalam koordinat kartesius dan koordinat kutub.
3) Mahasiswa dapat membedakan letak suatu titik pada ruang dalam koordinat kartesius, koordinat tabung, dan koordinat bola.
4) Mahasiswa dapat menjelaskan kembali pengertian sistem koordinat ekliptika heliosentrik, sistem koordinat ekliptika geosentrik, sistem koordinat ekuator geosentrik, dan sistem koordinat horison.

Sistem koordinat adalah suatu cara yang digunakan untuk menentukan letak suatu titik pada bidang (R^2) atau ruang (R^3). Beberapa macam sistem koordinat yang kita kenal, antara lain sistem koordinat kartesius (Rene Descartes: 1596-1650), sistem koordinat kutub, sistem koordinat tabung, dan sistem koordinat bola. Pada bidang (R^2), letak titik pada umumnya dinyatakan dalam koordinat kartesius dan koordinat kutub. Sedangkan pada ruang (R^3) letak suatu titik pada umumnya dinyatakan dalam koordinat kartesius, koordinat tabung dan koordinat bola.

1.1 Sistem Koordinat dalam Bidang

Sebagaimana telah dijelaskan di atas, bahwa letak suatu titik dalam bidang dinyatakan dalam koordinat kartesius dan koordinat kutub. Masing-masing sistem koordinat dalam bidang dijabarkan sebagai berikut:



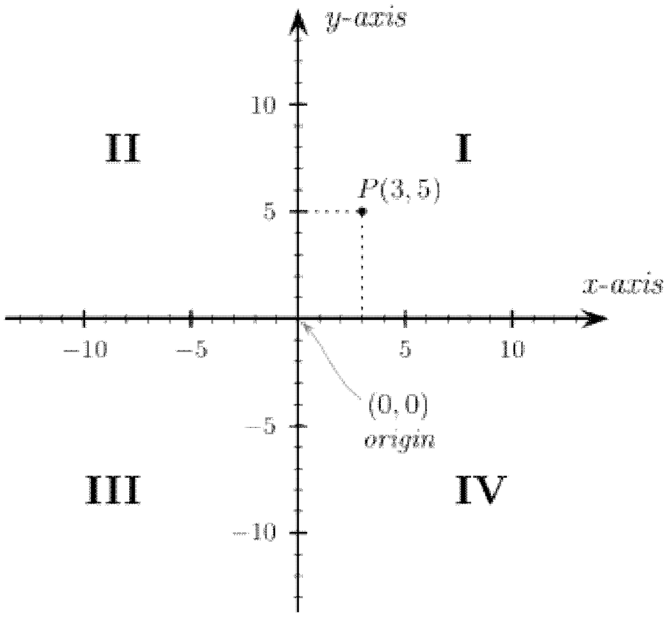
Gambar 1.1

Berdasarkan Gambar 1.1 di atas, terdapat 4 bidang simetris yang dibatasi oleh sumbu-sumbu koordinat X dan Y, masing-masing bidang yang dibatasi oleh sumbu-sumbu koordinat dinamakan kwadran. Pada gambar 1.1 di atas terdapat 4 kuadran, yaitu kuadran I dengan batas-batas $(x > 0, y > 0)$, kuadran II dengan batas-batas $(x < 0, y > 0)$, kuadran III dengan batas-batas $(x < 0, y < 0)$, dan kuadran IV dengan batas-batas $(x > 0, y < 0)$. Dengan demikian dapat dibuat tabel keberadaan kuadran sebagai berikut:

Kuadran	Nilai x	Nilai y
I	> 0	> 0
II	< 0	> 0
III	< 0	< 0
IV	> 0	< 0

Misalkan $P(x, y)$ sebarang titik pada bidang XOY, maka letak titik $P(x, y)$ tersebut sangat memungkinkan posisinya di kuadran I, kuadran II, kuadran III, atau kuadran IV tergantung dari besaran x dan besaran y.

Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 1.2

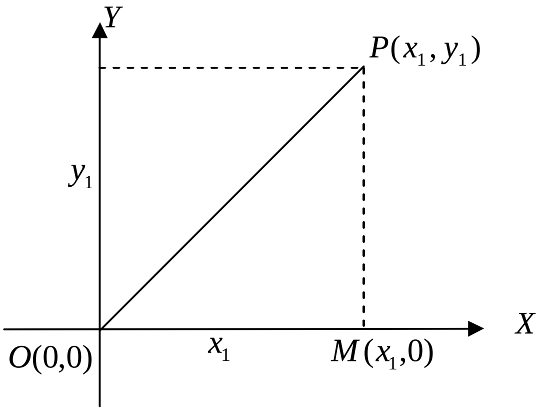
Pada gambar 1.2 di atas keempat kuadran sistem koordinat kartesius. Panah yang ada pada sumbu berarti panjang sumbunya tak terhingga pada arah panah tersebut. Pilihan huruf-huruf didasari oleh konvensi, yaitu huruf-huruf yang dekat akhir (seperti x dan y) digunakan untuk menandakan variabel dengan nilai yang tak diketahui, sedangkan huruf-huruf yang lebih dekat awal digunakan untuk menandakan nilai yang diketahui.

Misal $P(x_1, y_1)$ dan terletak di kuadran I hal ini berarti $x_1 > 0$ dan $y_1 > 0$

Misal $P(x_1, y_1)$ dan terletak di kuadran II hal ini berarti $x_1 < 0$ dan $y_1 > 0$

Misal $P(x_1, y_1)$ dan terletak di kuadran III hal ini berarti $x_1 < 0$ dan $y_1 < 0$

Misal $P(x_1, y_1)$ dan terletak di kuadran IV hal ini berarti $x_1 > 0$ dan $y_1 < 0$



Gambar 1.3

Berdasarkan gambar 1.3 di atas, tampak suatu segitiga yaitu ΔOPM yang salah satu sudutnya siku-siku dititik M . Menurut teorema Pythagoras

$$OP^2 = OM^2 + MP^2$$

$$OP^2 = (x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2$$

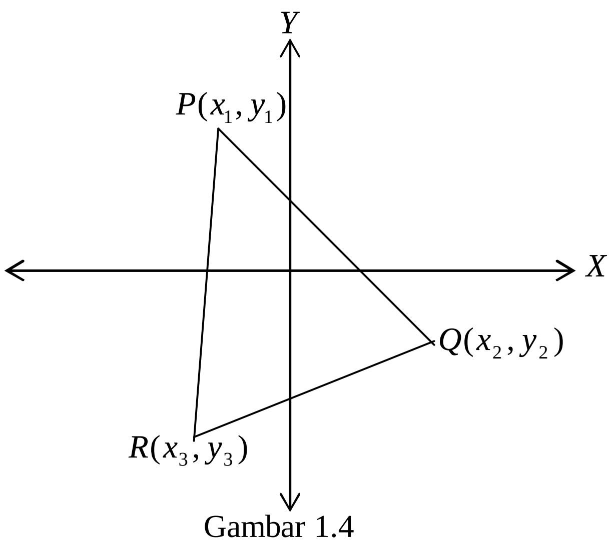
$$OP^2 = x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}$$

$$OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

atau ditulis dengan notasi $|OP| = \sqrt{x_1^2 + y_2^2}$

Rumus di atas dinamakan rumus jarak dua titik yang menghubungkan titik $O(0,0)$ dengan titik $P(x_1, y_1)$

Selanjutnya perhatikan gambar berikut.



Gambar 1.4

Gambar 1.4 di atas menunjukkan ΔPQR yang masing-masing titik sudutnya yaitu $P(x_1, y_1)$ terletak pada kuadran II, $Q(x_2, y_2)$ terletak pada kuadran IV, $R(x_3, y_3)$ terletak pada kuadran III dan jarak masing-masing titik dinyatakan oleh:

1. $|PQ| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$

   $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

2. $|PR| = \sqrt{(x_R - x_P)^2 + (y_R - y_P)^2}$

   $= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$

3. $|QR| = \sqrt{(x_R - x_Q)^2 + (y_R - y_Q)^2}$

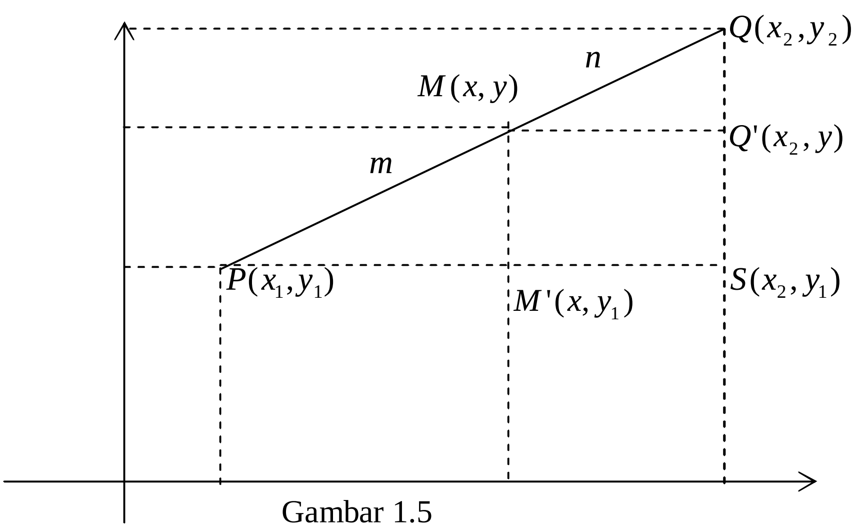
   $= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_1)^2}$

Selanjutnya, misal $P(x_1,y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ terletak pada bidang, maka jarak dua titik $P(x_1,y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ dapat dinyatakan dengan rumus

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Untuk membuktikan rumus tersebut dapat dilakukan dengan menggunakan teorema Pythagoras.

Selanjutnya perhatikan gambar berikut ini!



Gambar 1.5

Berdasarkan gambar 1.5 di atas, pandang ΔPSQ, dengan menggunakan teorma Pythagoras

$$PQ^2 = PS^2 + QS^2$$

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|PQ| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

Selanjutnya

Pada gambar 1.5 di atas M adalah sebarang titik pada garis PQ dengan perbandingan $PM : MQ = m : n$ atau $\dfrac{PM}{MQ} = \dfrac{m}{n}$

Sehingga diperoleh

$PM' : MQ' = m : n$ dan $MM' : QQ' = m : n$

Selanjutnya akan dicari koordinat M .

Karena

$\dfrac{PM'}{MQ'} = \dfrac{m}{n}$ maka $\dfrac{(x - x_1)}{(x_2 - x)} = \dfrac{m}{n}$

$$\Leftrightarrow n(x - x_1) = m(x_2 - x)$$

$$\Leftrightarrow (m + n)x = mx_2 + nx_1$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{mx_2 + nx_1}{(m + n)}$ atau $x = \dfrac{mx_Q + nx_P}{m + n}$

Dengan cara yang sama

$\dfrac{MM'}{QQ'} = \dfrac{m}{n}$ maka $\dfrac{(y - y_1)}{(y_2 - y)} = \dfrac{m}{n}$

$$\Leftrightarrow n(y - y_1) = m(y_2 - y)$$

$$\Leftrightarrow (m + n)y = my_2 + ny_1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{my_2 + ny_1}{(m + n)}$$

Jika diketahui $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ dan $M(x, y)$ titik tengah PQ maka Koordinat M dapat ditentukan dengan rumus

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ dan } y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Pembuktian rumus di atas ditinggalkan penulis sebagai latihan bagi pembaca buku ini.

Perhatikan beberapa contoh berikut ini.

1) Tentukan jarak titik $P(3,5)$ dan $Q(1,-6)$

   Jawab

   Untuk menentukan jarak titik P dan Q dapat digunakan rumus

   $$\begin{aligned}|PQ| &= \sqrt{(x_Q - x_p)^2 + (y_Q - y_P)^2} \\ &= \sqrt{(1-3)^2 + (-6-5)^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2 + (-11)^2} \\ &= \sqrt{4+121} \\ &= 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

2) Tunjukkan bahwa titik-titik $A(3,8), B(-11,3), C(-8,-2)$ adalah titik-titik sudut dari segitiga sama kaki ABC.

   Jawab

   Dengan menggunakan rumus jarak dua titik, diperoleh $|AB| = \sqrt{221}$

   $|BC| = \sqrt{34}$ dan $|AC| = \sqrt{221}$

   Karena panjang sisi AB sama dengan panjang sisi AC, maka dapat dikatakan segitiga tersebut di atas adalah segitiga sama kaki.

3) Tunjukkan bahwa titik $A(-3,-2), B(5,2), C(9,4)$ terletak pada satu garis lurus

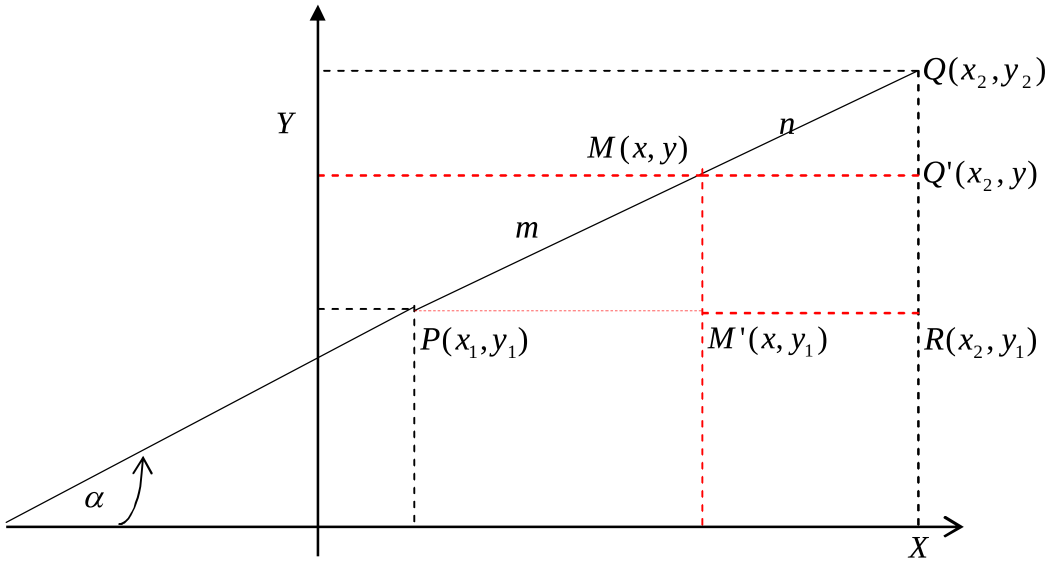
   Jawab

   Terlebih dahulu dicari panjang AB, BC, AC

   Dengan rumus jarak dua titik diperoleh AB = $4\sqrt{5}$, BC = $2\sqrt{5}$ dan

   AC = $6\sqrt{5}$, sehingga hal ini berarti titik A, B, C terletak pada satu garis lurus

Gradien Garis Lurus



Gambar 1.6

Selanjutnya jika garis PQ diperpanjang, maka garis tersebut akan memotong sumbu X atau sumbu Y. Sudut yang dibentuk oleh garis PQ dengan sumb X disebut disebut inklinasi.

Selanjutnya perhatikan ΔPQR, menurut perbandingan goniometri diperoleh

$$\tan\alpha = \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

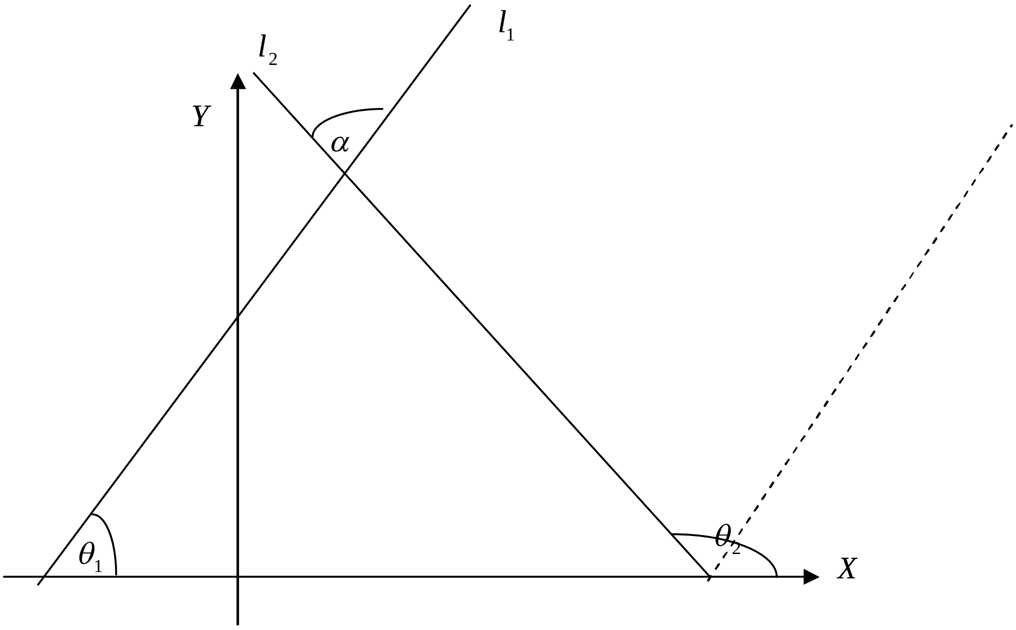
Perbandingan goniometri tersebut selanjutnya disebut kemiringan atau gradien atau tangensial dan dinotasian dengan

$$m = \tan\alpha = \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Dengan demikian gradien garis lurus didefinisikan sebagai tangen sudut inklinasi.

Misal l_1 dan l_2 dua garis yang terletak pada sumbu koordinat, maka beberapa hal yang mungkin dari kedua garis tersebut adalah l_1 dan l_2 sejajar, l_1 dan l_2 berpotongan, l_1 dan l_2 atau saling tegak lurus.

Jika l_1 dan l_2 sejajar syarat yang harus dipenuhi adalah gradien l_1 dan gradien l_2 sama atau $ml_1 = ml_2$. Jika l_1 dan l_2 saling tegak lurus maka perhatikan gambar di bawah ini



Gambar 1.7

Karena l_1 dan l_2 saling tegak lurus, maka $\alpha = \theta_2 - \theta_1$, sehingga

$$\tan\alpha = \tan(\theta_2 - \theta_1))$$

$$= \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\cos(\theta_2 - \theta_{1)}}$$

$$= \frac{\sin\theta_2\cos\theta_1 - \cos\theta_2\sin\theta_1}{\cos\theta_2\cos\theta_1 + \sin\theta_2\sin\theta_1}$$

Dengan membagi masing-masing bagian dengan $\cos\theta_2\cos\theta_1$, diperoleh

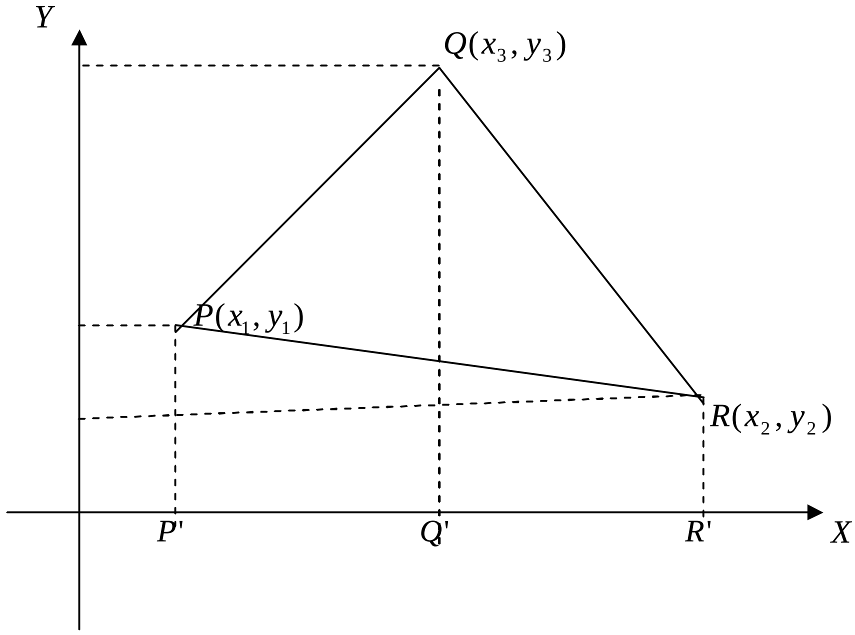
$$\tan\alpha = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2\tan\theta_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

Karena l_1 dan l_2 saling tegak lurus, maka $\alpha = 90^o$, sehingga haruslah

$1 + m_1 m_2 = 0$ atau $m_1 m_2 = -1$

Luas Poligon yang Titik Sudutnya Ditentukan

Misal $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$, dan $R(x_3,y_3)$. Adalah titik sudut segitiga yang terletak pada bidang XOY seperti berikut.



Gambar 1.8

Pada gambar 1.8 di atas, luas ΔPQR adalah

(Luas trapesium $PP'Q'Q$ + luas trapesium $QQ'R'R$) - luas trapesium P'R' $P'R'RP$

$$= \frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1)+\frac{1}{2}(y_3+y_2)(x_2-x_3)-\frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_2-x_1)$$

$$= \frac{1}{2}\left((y_1+y_3)(x_3-x_1)+(y_3+y_2)(x_2-x_3)-(y_1+y_3)(x_2-x_1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(y_1x_3-y_1x_1+y_3x_3-y_3x_1+y_3x_2-y_3x_2-y_3x_3+y_2x_3-y_1x_2+y_1x_1-y_2x_2+y_2x_1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(y_1x_3-y_1x_1+y_3x_3-y_3x_1+y_3x_2-y_3x_2-y_3x_3+y_2x_3-y_1x_2+y_1x_1-y_2x_2+y_2x_1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((y_1x_3+y_3x_2+y_2x_1)-(y_3x_1+y_2x_3+y_1x)\right)$$

Bentuk di atas dapat dinyatakan dalam bentuk determinan matrik ordo 3 x 3

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Soal-soal

1. Buatlah ruas garis dan tentukan jarak antara pasangan titik yang diketahui berikut ini:
    a. $P(4,5), Q(-1,3)$
    b. $P(8,-2), Q(3,-1)$
    c. $P(-1,-2), Q(-3,-8)$
    d. $P(5,3), Q(2,-5)$
2. Gambarlah luas suatu poligon (segi banyak) yang titik-titik sudutnya adalah
    a. $(-3.2), (1,5), (5,3), (1,-2)$
    b. $(-5,0), (-3,-4), (3,-3), (7,2), (1,6)$
3. Tunjukkan bahwa segitiga yang titik-titik sudutnya dibawah ini adalah sama sisi.
    a. $A(2,2), B(-3,-4), C(1,6)$
    b. $K(-2,2), L(6,6), M(2,-2)$
    c. $P(6,7), Q(-8,-1), R(-2,-7)$
    d. $S(2,4), T(5,1), U(6,5)$

4. Tunjukkan bahwa segitiga berikut adalah siku-siku dan tentukan luasnya dengan menggunakan aturan yang ada.
    a. $A(0,9), B(-4,-1), C(3,2)$
    b. $M(10,5), N(3,2), O(6,-5)$
    c. $A(3,-2), B(-2,3), C(0,4)$
    d. $K(-2,8), L(-6,1), M(0,4)$

5. Buktikan bahwa titik-titik berikut ini adalah *paralelogram*
    a. $A(-1,-2), B(0,1), C(-3,2), D(-4,-1)$
    b. $A(-1,-5), B(2,1), C(1,5), D(-2,-1)$
    c. $A(2,4), B(6,2), C(8,6), D(4,8)$

6. Tunjukkan bahwa titik-titik berikut terletak pada satu garis lurus dengan menggunakan metode jarak.
   a. $(0,4),(3,-2),(-2,8)$
   b. $(-2,3),(-6,1),(-10,-1)$
   c. $(1,2),(-3,10),(4,-4)$
   d. $(1,3),(-2,-3),(3,7)$

7. Tentukan sebuah titik yang berjarak 10 satuan dari titik $(-3,6)$.

8. Tentukan koordinat titik $P(x,y)$ yang membagi ruas garis dengan perandingan diketahui:
   a. $A(4,-3), B(1,4), AP : PB = r = 2$
   b. $A(2,-5), B(6,3), AP : PB = r = \frac{3}{4}$
   c. $A(-5,2), B(1,4), AP : PB = r = -\frac{5}{3}$
   d. $A(0,3), B(7,4), AP : PB = r = -\frac{2}{7}$
   e. $A(-2,3), B(3,-2), AP : PB = r = \frac{2}{5}$ A
9. Jika $M(9,2)$ membagi ruas garis yang melalui $P(6,8)$ dan $Q(x,y)$ dengan perbandingan $\frac{3}{7}$. Tentukan koordinat titik Q..
10. Tentukan titik pusat (*centroid*) setiap segitiga diketahui titik-titik sudutnya di bawah ini:
    a. $(5,7),(1,-3),(-5,1)$
    b. $(2,-1),(6,7),(-4,-3)$
    c. $(3,6),(-5,2),(7,-6)$
    d. $(7,4),(3,-6),(-5,2)$
    e. $(-3,1),(2,4),(6,2)$
11. Tentukan luas poligon yang titik sudutnya adalah:

a. $(-3,2),(1,5),(5,3),(1,-2)$

b. $(-5,0),(-3,-4),(3,-3),(7,2),(1,6)$

12. Tentukan koordinat titik-titik suatu segitiga, jika titik-titik tengah sisi-sisinya adalah:

a. $(-2,1),(5,2),(2,-3)$

b. $(3,2),(-1,-2),(5,-4)$

13. Gradien dari garis lurus yang melalui titik $A(3,2)$ adalah $\frac{3}{4}$. Lukislah titik-titik pada garis yang berjarak 5 satuan dari A.

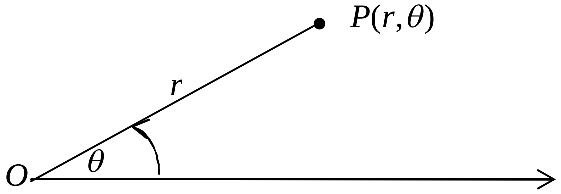
14. Tentukan gradien suatu garis lurus yang membuat sudut 45^0 dengan titik $(2-1),(5,3)$.

15. Garis p membentuk sudut 60^0 dengan garis s, Jika gradien $p=1$, tentukan gradien garis s.

16. Sudut yang dibentuk oleh garis l yang melalui titik $A(-4,5),B(3,y)$, garis u yang melalui titik $A(-2,4),B(9,1)$. Tentukan konstanta y tersebut.

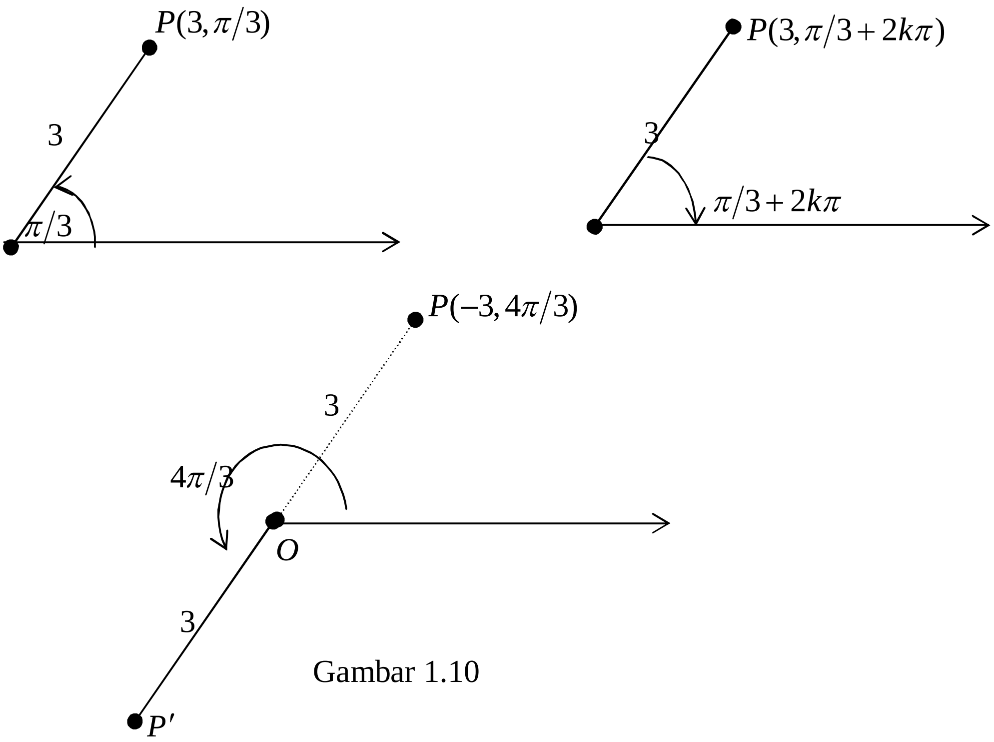
2) Sistem Koordinat Kutub

Sistem koordinat kartesius, menyatakan bahwa letak titik pada bidang dinyatakan dengan pasangan (x,y), dengan x dan y masing-masing menyatakan jarak berarah ke sumbu-*y* dan ke sumbu-*x*. Pada sistem koordinat kutub, letak sebarang titik P pada bidang dinyatakan dengan pasangan bilangan real (r,θ), dengan r menyatakan jarak titik P ke titik O (disebut *kutub*) sedangkan θ adalah sudut antara sinar yang memancar dari titik O melewati titik P dengan sumbu-*x* positif (disebut *sumbu kutub*)



Gambar 1.9

Berbeda dengan sistem koordinat kartesius dalam koordinat kutub letak suatu titik dapat dinyatakan dalam tak hingga banyak koordinat. Sebagai contoh, letak titik $P(3, \pi/3)$ dapat digambarkan dengan cara terlebih dulu melukiskan sinar yang memancar dari titik asal *O* dengan sudut sebesar $\frac{\pi}{3}$ radian terhadap sumbu mendatar arah positif. Kemudian titik *P* terletak pada sinar tadi dan berjarak 3 satuan dari titik asal *O*. Titik *P* dapat pula dinyatakan dalam koordinat $(3, \pi/3 + 2k\pi)$, dengan *k* bilangan bulat. Mudah ditunjukkan pula bahwa koordinat $(-3, 4\pi/3)$ pun juga menggambarkan titik *P*. Pada koordinat yang terakhir, jarak bertanda negatif. Hal ini dikarenakan titik *P* terletak pada bayangan sinar OP'.



Gambar 1.10

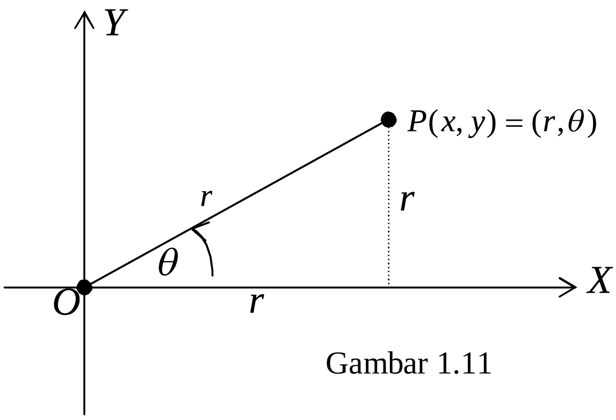
Secara umum, jika (r, θ) menyatakan koordinat kutub suatu titik maka koordinat titik tersebut dapat pula dinyatakan sebagai berikut:

$(r, \theta + 2k\pi)$ atau $(-r, \theta + (2k+1)\pi)$ dengan *k* bilangan bulat.

Kutub mempunyai koordinat $(0, \theta)$ dengan θ sebarang bilangan.

Hubungan antara Sistem Koordinat Kartesius dan Sistem Koordinat Kutub

Suatu titik P berkoordinat (x, y) dalam sistem koordinat kartesius dan (r, θ) dalam sistem koordinat kutub. Apabila kutub dan titik asal diimpitkan, emikian pula sumbu kutub dan sumbu-x positif juga diimpitkan, maka kedudukan titik dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 1.11

Dari rumus segitiga diperoleh hubungan sebagai berikut:

(1.1) $\quad x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$

atau:

(1.2) $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \arcsin\left(\dfrac{y}{r}\right) = \arccos\left(\dfrac{x}{r}\right)$

Contoh

1) Nyatakan ke dalam system koordinat kartesius.

a. $A\left(4, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ b. $B\left(-5, \dfrac{\pi}{4}\right)$ c. $C\left(-3, -\dfrac{5\pi}{6}\right)$

Jawab

Dengan menggunakan persamaan (1.1):

a. $x = 4\cos\dfrac{2\pi}{3} = -2 \qquad y = 4\sin\dfrac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3}$.

Jadi, $A\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$.

b. $x = -5\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{5}{2}\sqrt{2} \qquad y = -5\sin\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$.

Jadi, dalam system koordinat kartesius $B\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2},-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$.

c. $x=-3\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ $\qquad$ $y=-3\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$.

Jadi, $C\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},\frac{3}{2}\right)$.

Apabila $x\neq 0$ maka persamaan (1.2) dapat dinyatakan sebagai:

(1.3) $\qquad r^2=x^2+y^2 \qquad \theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right),\ \ x\neq 0$

Hati-hati apabila menggunakan persamaan (1.3), karena $\theta=\arctan\frac{y}{x}$ akan memberikan 2 nilai θ yang berbeda, $0\leq\theta\leq 2\pi$. Untuk menentukan nilai θ yang benar perlu diperhatikan letak titik P, apakah di kuadran I atau II, ataukah dikuadran II atau IV. Apabila dipilih nilai θ yang lain, maka $r=-\sqrt{x^2+y^2}$.

2) Nyatakan ke dalam sistem koordinat kutub:

a. $P(4,-4)$ $\qquad$ b. $Q(-4,4)$

Penyelesaian: Dari persamaan (1.3), diperoleh:

a. $\quad r=\pm\sqrt{4^2+(-4)^2}=\pm 4\sqrt{2}$

$\theta=\arctan\frac{4}{-4}=\frac{3\pi}{4}$ atau $\frac{7\pi}{4}$

Selanjutnya, karena letak titik P di kuadran IV, maka:

$r=4\sqrt{2}$ dengan $\theta=\frac{7\pi}{4}$, atau

$r=-4\sqrt{2}$ dengan $\theta=\frac{3\pi}{4}$.

Jadi, $P\left(4\sqrt{2},\frac{7\pi}{4}\right)$ atau $P\left(-4\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$.

b. $r = \pm\sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \pm 4\sqrt{2}$

$\theta = \arctan\dfrac{-4}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$ atau $\dfrac{7\pi}{4}$

Selanjutnya, karena letak titik Q di kuadran II, maka:

$r = 4\sqrt{2}$ dengan $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$, atau

$r = -4\sqrt{2}$ dengan $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$.

Jadi, $Q\left(4\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ atau $Q\left(-4\sqrt{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right)$.

3) Nyatakan persamaan $r = 2a\sin\theta$ ke dalam sistem koordinat kartesius.

Jawab

Jika ke dua ruas persamaan di atas dikalikan dengan r maka diperoleh:

$$r^2 = 2a(r\sin\theta)$$

Selanjutnya, karena $r^2 = x^2 + y^2$ dan $r\sin\theta = y$ maka:

$$x^2 + y^2 = 2ay$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ay = 0,$$

yaitu persamaan lingkaran dengan pusat $(0, a)$ dan jari-jari $|a|$.

4) Nyatakan $x^2 + 4y^2 = 16$ ke dalam system koordinat kutub.

Penyelesaian: Dengan substitusi $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$ maka diperoleh:

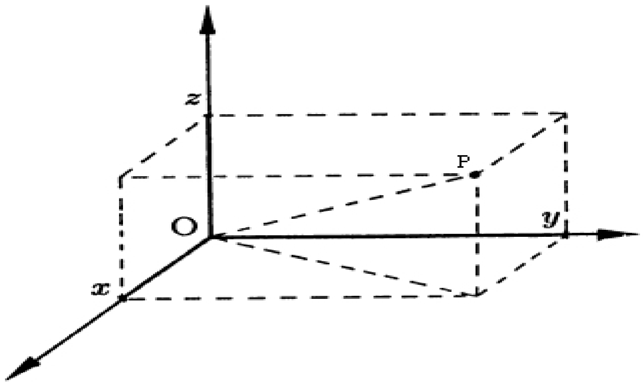
$$r^2\cos^2\theta + 4r^2\sin^2\theta = 16$$

$$\Leftrightarrow r^2(1 + 3\sin^2\theta) = 16.$$

1.2 Sistem Koordinat dalam Ruang

Untuk menyatakan posisi sebuah benda di dalam ruang, dibutuhkan suatu sistem koordinat yang memiliki pusat koordinat dan sumbu koordinat. Sistem koordinat yang paling umum adalah koordinat . Jika kita berbicara ruang 2 dimensi, maka koordinat Kartesius 2 dimensi memiliki pusat di O dan 2 sumbu koordinat yang saling tegaklurus, yaitu x dan y.

Selanjutnya koordinat kartesius 2 dimensi dapat diperluas menjadi koordinat Kartesius 3 dimensi yang berpusat di O dan memiliki sumbu x, y, z. Pada Gambar berikut menyatakan titik P dapat dinyatakan dalam x, y, z. OP adalah jarak titik P ke pusat O.

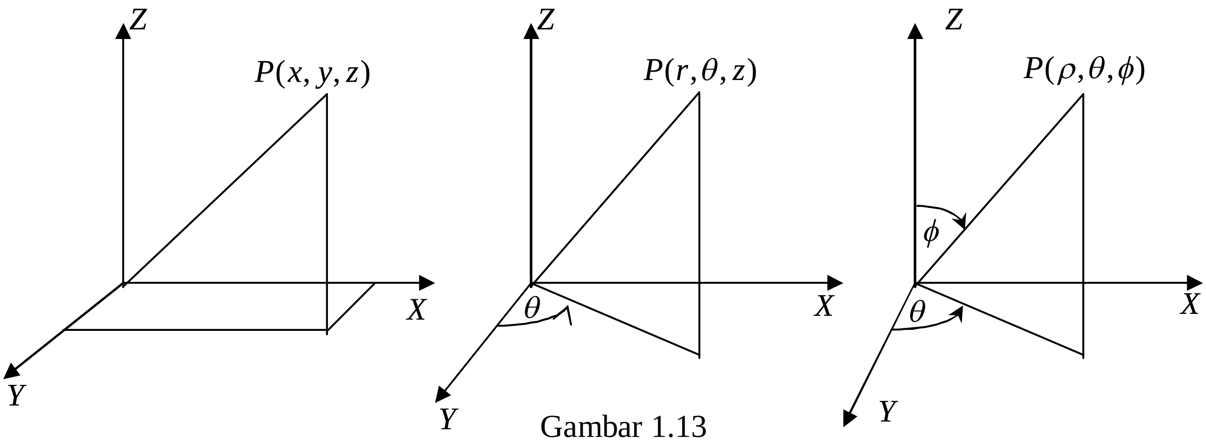


Gambar 1.12

Koordinat 3 dimensi (x, y, z) pada gambar 1.12 di atas dapat diubah menjadi koordinat tabung dan koordinat bola.

Hubungan diantara ketiganya, jika $P(x, y, z)$ adalah letak titik dalam koordinat , maka $P(r, \theta, z)$ adalah letak dalam koordinat tabung dan $P(\rho, \theta, \phi)$ adalah titik dalam koordinat bola (*Spherical Coordinate*).

Hubungan ketiga koordinat dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 1.13

Koordinat dan koordinat tabung dihubungkan oleh persamaan:

$x = r\cos\theta$

$y = r\cos\theta$

$z = z$

$x^2 + y^2 = r^2$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

Perhatikan contoh berikut:

1. $(3,3,5)$ menyatakan letak titik P pada ruang dalam koordinat . Ubah dan Nyatakan letak titik dalam koordinat tabung.

   Jawab

   Koordinat kartesius dan koordinat tabung dinyatakan dalam hubungan

   $x = r\cos\theta$, $y = r\cos\theta$, $z = z$, $x^2 + y^2 = r^2$ dan $\tan\theta = \frac{y}{x}$

   sehingga:

   $r = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

   $\tan\theta = \frac{3}{3} = 1$ *atau* $\theta = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

   Jadi koordinat tabung dari $(3,3,5)$ adalah $\left(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 5\right)$

2. $\left(6, \frac{\pi}{6}, -2\right)$ menyatakan letak titik Q pada ruang dalam koordinat tabung. Ubah dan Nyatakan letak titik Q dalam koordinat .

   Jawab

   Koordinat kartesius dan koordinat tabung dinyatakan dalam hubungan

   $x = r\cos\theta$, $y = r\cos\theta$, $z = z$, $x^2 + y^2 = r^2$ dan $\tan\theta = \frac{y}{x}$

   sehingga:

   $x = 6\cos\frac{\pi}{6} = 6.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

$$y = 6\sin\frac{\pi}{6} = 6.\frac{1}{2} = 3$$

Jadi koordinat $\left(6, \frac{\pi}{6}, -2\right)$ adalah $\left(3\sqrt{3}, 3, -2\right)$

3. $\left(8, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ menyatakan letak titik W dalam koordinat bola. Ubah dan nyatakan letak titik W dalam koordinat dan koordinat tabung.

Jawab

Koordinat , koordinat tabung dan koordinat bola mempunyai hubungan sebagai berikut:

$$r = \rho\,\sin\phi \; atau \; r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \theta$$

$$z = \rho\cos\phi$$

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta$$

$$y = \rho\sin\phi\sin\theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

sehingga dari titik $\left(8, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ diketahui $\rho = 8, \theta = \frac{\pi}{3} \; dan \; \phi = \frac{2\pi}{3}$

dan diperoleh

$$x = 8\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} = 8.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$

$$y = 8\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} = 8.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6$$

$$z = 8\cos\frac{2\pi}{3} = 8\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

$$r = \rho\,\sin\frac{2\pi}{3} = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{3} \; atau \; r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Jadi koordinat $\left(8,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ adalah $\left(2\sqrt{3},6,-4)\right)$, dan koordinat tabung $\left(8,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ adalah $\left(4\sqrt{3},\frac{\pi}{3},-4\right)$.

4. $\left(4\sqrt{3},-4,6\right)$ menyatakan letak titik M dalam koordinat . Ubah dan nyatakan letak titik M dalam koordinat tabung dan koordinat bola.

   Jawab

   Koordinat kartesius, koordinat tabung dan koordinat bola mempunyai hubungan sebagai berikut:

   $r=\rho\sin\phi \text{ atau } r=\sqrt{x^2+y^2}$

   $\theta=\theta$

   $z=\rho\cos\phi$

   $x=\rho\sin\phi\cos\theta$

   $y=\rho\sin\phi\sin\theta$

   $z=\rho\cos\phi$

   $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

   sehingga dari titik $\left(-4,4\sqrt{3},6\right)$ diketahui $x=-4, y=4\sqrt{3} \text{ dan } z=6$

   dan diperoleh

   $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-4)^2+(4\sqrt{3})^2}=\sqrt{64}=8$

   $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{4}{4\sqrt{3}}=-\frac{1\sqrt{3}}{3}$

   $\theta=\frac{5\pi}{6}$

   $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(-4)^2+(4\sqrt{3})^2+(6)^2}=10$

   $z=\rho\cos\phi \Leftrightarrow 6=10\cos\phi$

   $\phi=\arccos\frac{6}{10}$

Jadi koordinat tabung $\left(-4,4\sqrt{3},6\right)$ adalah $\left(8,\frac{5\pi}{6},6\right)$, dan koordinat bola $\left(-4,4\sqrt{3},6\right)$adalah $\left(10,\frac{5\pi}{6},ar\cos\frac{6}{10}\right)$.

5. $\left(4,\frac{4\pi}{3},-8\right)$ menyatakan letak titik T dalam koordinat tabung. Ubah dan nyatakan letak titik T dalam koordinat dan koordinat bola.

Jawab

Koordinat , koordinat tabung dan koordinat bola mempunyai hubungan sebagai berikut:

$r = \rho \sin\phi \; atau \; r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \theta$

$z = \rho \cos\phi$

$x = \rho \sin\phi \cos\theta$

$y = \rho \sin\phi \sin\theta$

$z = \rho \cos\phi$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

sehingga dari titik $\left(4,\frac{4\pi}{3},-8\right)$ diketahui $r = 4, \theta = \frac{4\pi}{3}, z = -8$ dan diperoleh

$\theta = \frac{4\pi}{3}$

$x = r\cos\theta \Leftrightarrow x = 4\cos\frac{4\pi}{3} = -2\sqrt{3}$

$y = r\sin\theta \Leftrightarrow y = 4\sin\frac{4\pi}{3} = -2$

$\rho = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2 + (-8)^2} = 4\sqrt{5}$

$z = \rho\cos\phi \Leftrightarrow -8 = 4\sqrt{5}\cos\phi \Leftrightarrow \phi = \arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Jadi koordinat kartesius $\left(4, \frac{4\pi}{3}, -8\right)$ adalah $\left(-2\sqrt{3}, -2, -8\right)$, dan koordinat bola $\left(4, \frac{4\pi}{3}, -8\right)$ adalah $\left(4\sqrt{5}, \frac{4\pi}{3}, \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

1.3 Sistem Koordinat Lainnya

Selain sistem koordinat kartesius, koordinat kutub pada bidang dan koordinat kartesius, koordinat tabung, koordinat bola pada ruang yang telah dijelaskan di atas, terdapat beberapa sistem koordinat lain yang sering digunakan dalam ilmu hisab. Sistem koordinat tersebut adalah:

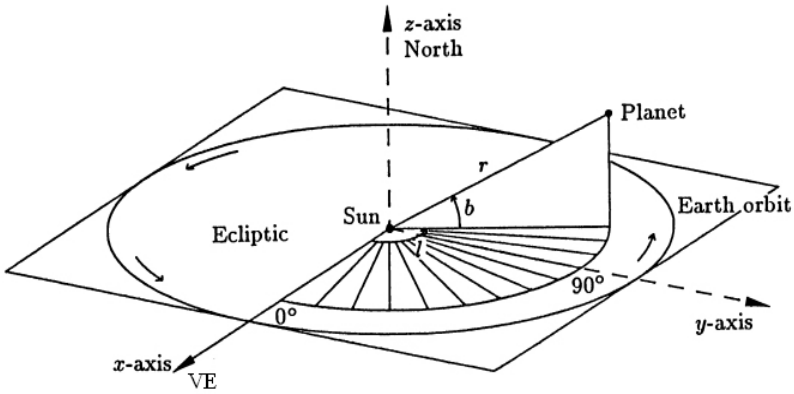
1. Koordinat Ekliptika Heliosentrik (*heliocentric ecliptical coordinate*).
2. Koordinat Ekliptika Geosentrik (*geocentric ecliptical coordinate*).
3. Koordinat Ekuator Geosentrik (*geocentric equatorial coordinate*).
4. Koordinat Horison (*horizontal coordinate*).

Keempat sistem koordinat di atas termasuk ke dalam koordinat bola. Sebenarnya masih ada sistem koordinat lainnya, seperti sistem koordinat ekuator toposentrik (*topocentric equatorial coordinate*). Namun tidak dibahas dalam tulisan ini. Sekilas, banyaknya sistem koordinat di atas bisa membuat rumit. Namun pembagian sistem koordinat di atas berasal dari benda langit manakah yang dijadikan pusat koordinat, apakah bidang datar sebagai referensi serta bagaimana cara mengukur posisi benda langit lainnya. Penting pula untuk diketahui bahwa seluruh benda langit dapat dianggap seperti titik. Bisa pula dianggap seperti benda yang seluruhnya terkonsentrasi di pusat benda tersebut. Jika kita memperoleh jarak bumi-bulan, maka yang dimaksud adalah jarak antara pusat bumi dengan pusat bulan.

Sistem koordinat ekliptika heliosentrik dan sistem koordinat ekliptika geosentrik sebenarnya identik. Yang membedakan keduanya hanyalah manakah yang menjadi pusat koordinat. Pada sistem koordinat ekliptika heliosentrik, yang menjadi pusat koordinat adalah matahari (*helio* = *matahari*). Sedangkan pada sistem koordinat ekliptika geosentrik, yang menjadi pusat koordinat adalah bumi (*geo* = *bumi*). Karena itu keduanya dapat digabungkan menjadi sistem koordinat ekliptika. Pada sistem koordinat ekliptika, yang menjadi bidang datar sebagai referensi adalah bidang orbit bumi mengitari matahari (*heliosentrik*) yang juga sama dengan bidang orbit matahari mengitari bumi (*geosentrik*).

Sistem Koordinat Ekliptika Heliosentrik (*heliocentric ecliptical coordinate*)

Pada koordinat ini, matahari (*sun*) menjadi pusat koordinat. Benda langit lainnya seperti bumi (*earth*) dan planet bergerak mengitari matahari. Bidang datar yang identik dengan bidang xy adalah bidang ekliptika yatu bidang bumi mengitari matahari.



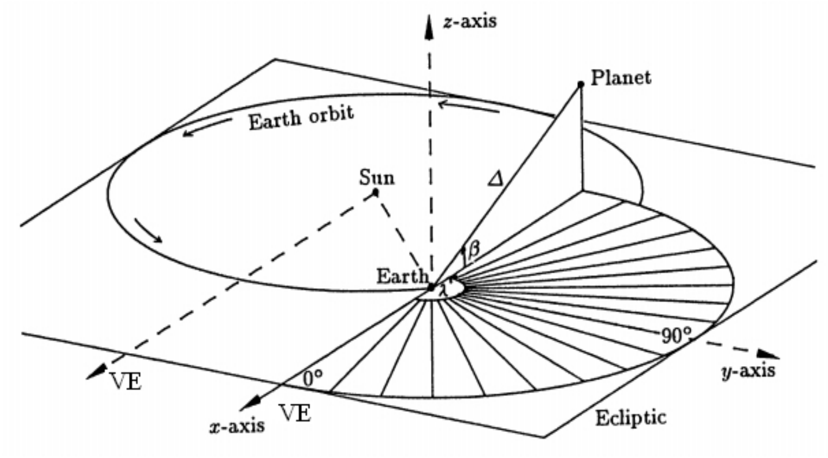
Gambar 1.14

Sistem Koordinat Ekliptika Heliosentrik

1. Pusat koordinat: Matahari (*Sun*).
2. Bidang datar referensi: Bidang orbit bumi mengitari matahari (*bidang ekliptika)* yaitu bidang xy
3. Titik referensi: Vernal Ekuinoks (VE), didefinisikan sebagai sumbu x.
4. Koordinat:
   r = jarak (*radius*) benda langit ke matahari
5. l = sudut bujur ekliptika (*ecliptical longitude*), dihitung dari VE berlawanan arah jarum jam
6. b = sudut lintang ekliptika (*ecliptical latitude*), yaitu sudut antara garis penghubung benda langit-matahari dengan bidang ekliptika.

Sistem Koordinat Ekliptika Geosentrik (*geocentric ecliptical coordinate*)

Pada sistem koordinat ini, bumi menjadi pusat koordinat. Matahari dan planet-planet lainnya nampak bergerak mengitari bumi. Bidang datar xy adalah bidang ekliptika, sama seperti pada ekliptika heliosentrik.



Gambar 1.15

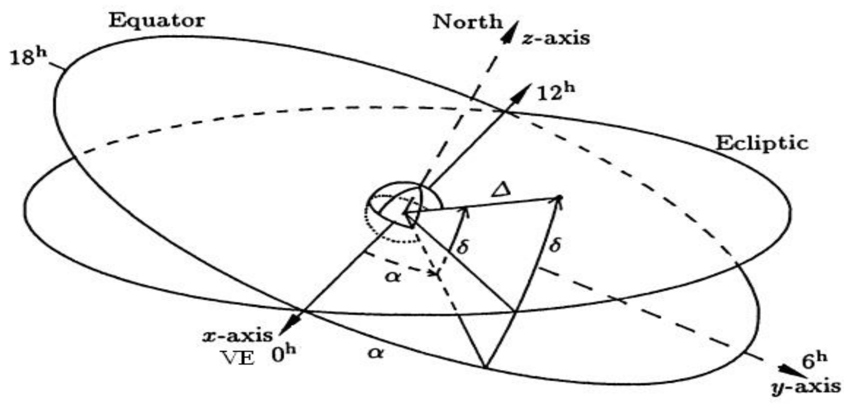
Sistem Koordinat Ekliptika Geosentrik

1. Pusat Koordinat: Bumi (*Earth*)
2. Bidang datar referensi: Bidang Ekliptika (Bidang orbit bumi mengitari matahari, yang sama dengan bidang orbit matahari mengitari bumi) yaitu bidang xy.
3. Titik referensi: Vernal Ekuinoks (VE) yang didefinisikan sebagai sumbu x.
4. Koordinat:

   Jarak benda langit ke bumi (seringkali diabaikan atau tidak perlu dihitung)
5. Lambda = Bujur Ekliptika (*Ecliptical Longitude*) benda langit menurut bumi, dihitung dari VE.
6. Beta = Lintang Ekliptika (*Ecliptical Latitude*) benda langit menurut bumi yaitu sudut antara garis penghubung benda langit-bumi dengan bidang ekliptika

Sistem Koordinat Ekuator Geosentrik (*geocentric equatorial coordinate*).

Ketika bumi bergerak mengitari matahari di bidang Ekliptika, bumi juga sekaligus berotasi terhadap sumbunya. Penting untuk diketahui, sumbu rotasi bumi tidak sejajar dengan sumbu bidang ekliptika. Atau dengan kata lain, bidang ekuator tidak sejajar dengan bidang ekliptika, tetapi membentuk sudut kemiringan (*epsilon*) sebesar kira-kira 23,5 derajat. Sudut kemiringan ini sebenarnya tidak bernilai konstan sepanjang waktu. Nilainya semakin lama semakin mengecil.



Gambar 1.16

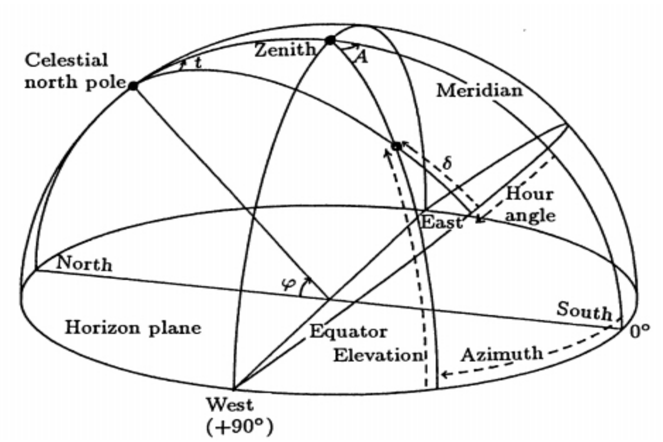
Sistem Koordinat Ekuator Geosentrik

1. Pusat koordinat: Bumi
2. Bidang datar referensi: Bidang ekuator, yaitu bidang datar yang mengiris bumi menjadi dua bagian melewati garis khatulistiwa
3. Koordinat: jarak benda langit ke bumi.
4. Alpha = Right Ascension = Sudut antara VE dengan proyeksi benda langit pada bidang ekuator, dengan arah berlawanan jarum jam. Biasanya Alpha bukan dinyatakan dalam satuan derajat, tetapi jam (hour disingkat h). Satu putaran penuh = 360 derajat = 24 jam = 24 h. Karena itu jika Alpha dinyatakan dalam derajat, maka bagilah dengan 12 untuk memperoleh satuan derajat. Titik VE menunjukkan 0 h.
5. Delta = *Declination* (Deklinasi) = Sudut antara garis hubung benda langit-bumi dengan bidang ekliptika.Nilainya mulai dari -90 derajat (selatan) hingga 90 derajat (utara). Pada bidang ekuator, deklinasi = 0 derajat.

Seringkali, Alpha (*right ascension*) dinyatakan dalam bentuk H (*hour angle*). Hubungan antara Alpha dengan H adalah H = LST - Alpha.
Disini, LST adalah *Local Sidereal Time*, yang sudah penulis bahas sebelumnya pada tulisan tentang Macam-Macam Waktu

Sistem Koordinat Horison (*horizontal coordinate*)

Pada sistem koordinat ini, pusat koordinat adalah posisi pengamat (bujur dan lintang) yang terletak di permukaan bumi. Kadang-kadang, ketinggian pengamat dari permukaan bumi juga ikut diperhitungkan. Bidang datar yang menjadi referensi seperti bidang *xy* adalah bidang horison (bidang datar di sekitar pengamat di permukaan bumi).



Gambar 1.17

Sistem Koordinat Horison

1. Pusat koordinat: Pengamat di permukaan bumi
2. Bidang datar referensi: Bidang horison (*Horizon plane*)
3. Koordinat:
4. Altitude/Elevation = sudut ketinggian benda langit dari bidang horison. h = 0 derajat berarti benda di bidang horison. h = 90 derajat dan -90 derajat masing-masing menunjukkan posisi di titik zenith (tepat di atas kepala) dan nadir (tepat di bawah kaki).

5. A (*Azimuth*) = Sudut antara arah Utara dengan proyeksi benda langit ke bidang horison.

Jarak benda langit ke pengamat dalam sistem koordinat ini seringkali diabaikan, karena telah dapat dihitung sebelumnya dalam sistem koordinat ekliptika.

Catatan penting: Dalam banyak buku referensi, azimuth seringkali diukur dari arah selatan (*South*) yang memutar ke arah barat (*West*). Gambar 1.17 di atas juga menunjukkan bahwa azimuth diukur dari arah Selatan. Namun demikian, dalam pemahaman umum, orang biasanya menjadikan arah Utara sebagai titik referensi. Karena itu dalam tulisan ini penulis menjadikan sudut azimuth diukur dari arah Utara. Untuk membedakannya, lambang untuk azimuth dari arah selatan dinyatakan sebagai As, sedangkan azimuth dari arah utara dinyatakan sebagai A saja. Hubungan antara As dan A adalah A = As - 180 derajat. Jika As atau A negatif, tinggal tambahkan 360 derajat.

Suatu sistem koordinat dengan sistem koordinat lainnya dapat dihubungkan melalui transformasi koordinat. Misalnya, dari algoritma untuk menghitung posisi bulan menurut sistem koordinat ekliptika geosentrik, kita dapat menentukan jarak bulan dari pusat bumi, sudut lambda dan beta. Selanjutnya, sudut lambda dan beta ditransformasi untuk mendapat sudut alpha dan delta dalam sistem koordinat ekuator geosentrik. Dari alpha dan beta, serta memperhitungkan posisi pengamat (bujur dan lintang) dan waktu saat pengamatan/penghitungan, maka sudut ketinggian (*altitude*) dan azimuth bulan menurut sistem koordinat horison dapat diketahui dengan tepat. Rumus-rumus transformasi koordinat yang membutuhkan pengetahuan trigonometri

1.4 Soal-soal

Untuk soal 1 – 8, nyatakan masing-masing dengan dua koordinat yang lain, satu dengan $r > 0$ dan yang lain dengan $r < 0$.

1. $(6, \pi/3)$	2. $(-3, 2\pi/5)$	3. $(5, -\pi/4)$	4. $(5, 7\pi/4)$
5. $(\sqrt{2}, 5\pi/2)$	6. $(-7, -5\pi/6)$	7. $(6, -7\pi/3)$	8. $(4, 6\pi/7)$

Untuk soal 9 – 16, nyatakan dalam sistem koordinat kartesius .

9. $(6, 2\pi/3)$ 10. $(-4, \pi/8)$ 11. $(5, -\pi/4)$ 12. $(6, 7\pi/4)$

13. $(\sqrt{2}, 5\pi/2)$ 14. $(-7, -5\pi/6)$ 15. $(6, -7\pi/3)$ 16. $(4, 7\pi/8)$

Untuk soal 17 – 23, ubahlah ke dalam sistem koordinat kutub.

17. $(-3, -3)$ 18. $(2, 2)$ 19. $(-2, 2\sqrt{3})$ 20. $(\sqrt{3}, 1)$

21. $(0, -11)$ 22. $(3\sqrt{3}, -3)$ 23. $(-\sqrt{2}/3, \sqrt{6}/3)$

Untuk soal 24 – 29, nyatakan masing-masing persamaan ke dalam sistem koordinat kartesius.

24. $r = 3\cos\theta$ 25. $r^2 = 1 + \sin\theta$ 26. $r = \dfrac{4}{1 - \cos\theta}$

27. $r = -4$ 28. $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$ 29. $r^2 = \theta$

Nyatakan persamaan pada soal 30 – 32 ke dalam sistem koordinat kutub.

30. $x - y = 0$ 31. $y^2 = 1 - 4x$ 32. $xy = 1$

33. Tunjukkan bahwa jarak titik $P(r, \theta)$ dan $Q(R, \varphi)$ adalah:

$$d = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \theta)}$$

34. Untuk latihan bagi pembaca ubah koordinat berikut dalam koordinat yang sesuai:

No	**Koordinat**		
	Kartesius	**Tabung**	**Bola**
1.	$(2\sqrt{3}, 6, -4)$	$\left(4\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{3}, -4\right)$	$\left(8, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$
2.	$(2, 2, 3)$	$\left(2\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}, 3\right)$	....
3.	$(2, -2\sqrt{3}, 4)$	....	....

4.	$\left(-\sqrt{2},\sqrt{2},2\sqrt{3}\right)$	....	....
5.	....	$\left(6,\frac{\pi}{6},-2\right)$	....
6.	....	$\left(2,\frac{2\pi}{3},-4\right)$	....
7.	....	$\left(2,\frac{\pi}{3},1\right)$	.....
8.	....	....	$\left(8,\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$
9.	....	....	$\left(4,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$
10.	.....	....	$\left(4,\frac{\pi}{3},0\right)$
11.	....	....	$\left(1,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

BAB II
PERBANDINGAN GONIOMETRI SUDUT LANCIP

Bab II buku ini membahas tiga hal pokok yang berhubungan dengan perbandingan goniometri sudut lancip, antara lain (1) perbandingan goniometri, (2) hubungan perbandingan goniometri dalam sudut, dan (3) soal-soal.

Standar Kompetensi

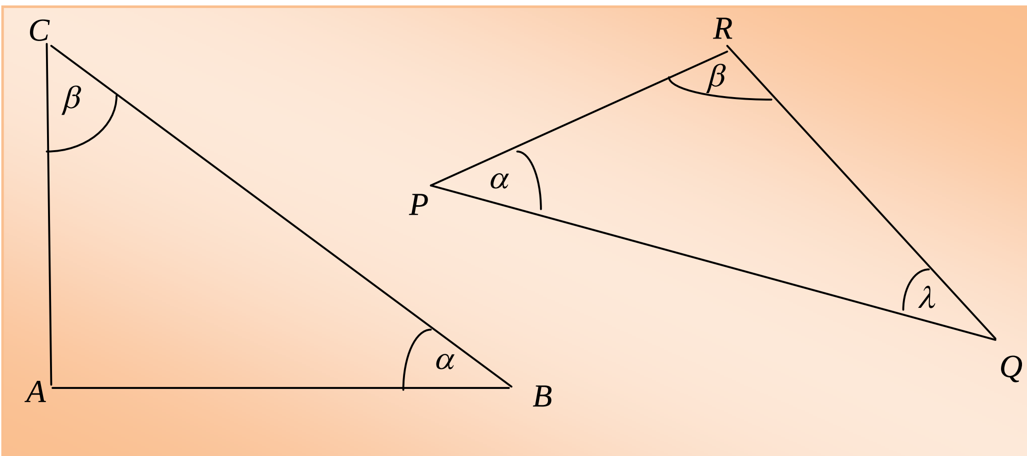
Setelah mempelajari pokok bahasan ini diharapkan mahasiswa dapat memahami perbandingan goniometri sudut lancip dan dapat mengaplikasikannya dalam pembuktian kesamaan trigonometri.

Kompetensi Dasar

1. Mahasiswa dapat membandingkan pengertian perbandingan goniometri sudut.
2. Mahasiswa dapat menentukan perbandingan goniometri yang lain jika diketahui salah satu perbandingan goniometrinya.
3. Mahasiswa dapat membuktikan kesamaan trigonometri.
4. Mahasiswa dapat menentukan hubungan dalam perbandingan goniometri.

2.1 Perbandingan Goniometri

Perhatikan gambar segitiga di bawah ini

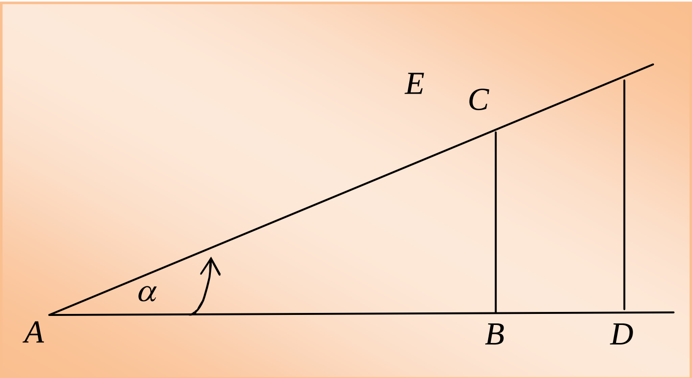


Gambar 2.1

Pada gambar 2.1 di atas, tampak bahwa ΔABC adalah segitiga yang salah satu sudutnya siku-siku yaitu $\angle BAC$, sudut lainnya dimisalkan α dan β. Pada gambar lainnya diketahui ΔPQR adalah segitiga sebarang dan masing-masing sudutnya adalah $\alpha, \beta, dan \ \lambda$. Berdasarkan geometri analitika jika suatu segitiga adalah siku-siku dan salah satu sudutnya diketahui maka dengan mudah akan dapat diketahui besar sudut yang lainnya. Hal yang demikian tidak sama untuk segitiga yang tidak siku-siku, sehingga untuk mengetahui besar sudut ketiga harus diketahui sudut yang pertama dan kedua dan selanjut dihubungan dengan kesamaan $\alpha + \beta + \lambda = 180^0$.

Pada gambar 2.1 di atas sisi AB disebut garis hasil pemroyeksi (*proyeksi*), sisi AC disebut garis yang memporyeksi (*proyektor*) sedangkan sisi BC disebut garis yang diproyeksi (*proyektum*). Untuk selanjutnya garis-garis tersebut dinamakan garis-garis goniometri $\angle\alpha$.

Sinus, Cosinus dan Tangen



Gambar 2.2

Misal α adalah suatu sudut lancip dengan titik sudut A, dan B adalah suatu titik pada salah satu kaki sudut tersebut, maka kita dapat memproyeksikan AC pada kaki yang lain dan diperoleh

AB : proyeksi

BC : garis yang memproyeksi (*proyektor*)

AC : garis yang diproyeksi (*proyektum*)

Ketiga garis AB, BC, dan AC disebut garis-garis goniometri $\angle\alpha$.

Berdasarkan gambar 2.2 dapat dibuat definisi sebagai berikut:

1) Yang dimaksud dengan sinus suatu sudut adalah perbandingan antara garis yang memproyeksi dengan garis yang diproyeksi. Dengan kata lain sinus adalah perbandingan antara proyeksi dengan proyektum dalam suatu segitiga. Untuk selanjutnya sinus suatu sudut α dinotasikan dengan $\sin\alpha$.

   Dengan demikian $\sin\alpha = \dfrac{proyektor}{proyektum}$.

   Garis yang diproyeksi dapat diambil dengan sekehendak kita, makin panjang garis yang diproyeksi, makin panjang pula proyeksi dan garis yang memproyeksinya, Namun demikian perbadingan antara garis-garis tersebut tidak berubah, hal ini dikarenakan bangun segitiga yang terbentuk sebangun. Seperti tampak pada gambar 2.2. Selanjutnya menurut gambar 2.2 $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{DE}{AE} = \sin\alpha$.

   Jadi sinus suatu sudut adalah suatu konstanta, namun nilainya tidak lebih dari satu dan tidak kurang dan -1.

2) Yang dimaksud dengan cosinus suatu sudut adalah perbandingan antara garis proyeksi dengan garis yang diproyeksi. Dengan kata lain cosinus adalah perbandingan antara proyeksi dengan proyektum dalam suatu segitiga. Untuk selanjutnya cosinus suatu sudut α dinotasikan dengan $\cos\alpha.$.

   Dengan demikian $\cos\alpha = \dfrac{proyeksi}{proyektum}.$.

   Cosinus suatu sudut adalah suatu konstanta, namun nilainya tidak lebih dari 1 satu dan tidak kurang dan -1.

3) Yang dimaksud dengan tangen suatu sudut adalah perbandingan antara garis yang memproyeksi dengan garis proyeksi. Dengan kata lain tangen adalah perbandingan antara proyektor dengan proyeksi. Untuk selanjutnya tangen suatu sudut α dinotasikan dengan $\tan\alpha.$.

   Dengan demikian $\tan\alpha = \dfrac{proyektor}{proyeksi}$.

4) Yang dimaksud dengan cotangen suatu sudut adalah perbandingan antara proyeksi dangan garis yang memproyeksi. Dengan kata lain cotangen sudut adalah perbandingan antara proyeksi dengan proyektor dalam suatu segitiga. Untuk selanjutnya cotengen suatu sudut α dinotasikan dengan $\cot\alpha.$.

   Dengan demikian $\cot\alpha = \dfrac{proyeksi}{proyektor}$.

5) Yang dimaksud dengan secan suatu sudut adalah perbandingan antara garis yang diproyeksi dengan proyeksi. Dengan kata lain secan suatu sudut adalah perbandingan antara proyektum dengan proyeksi dalam suatu segitiga. Untuk selanjutnya secan suatu sudut α dinotasikan dengan $\sec\alpha$.

   Dengan demikian $\sec\alpha = \dfrac{proyektum}{proyeksi}$..

6) Yang dimaksud dengan cosecan suatu sudut adalah perbandingan antara garis yang di proyeksi dengan garis yang memproyeksi. Dengan kata lain cosecan adalah perbandingan antara proyektum dengan proyektor. Untuk selanjutnya cosecant suatu sudut α dinotasikan dengan $\csc\alpha$.

   Dengan demikian $\csc\alpha = \dfrac{proyektum}{proyektor}$.

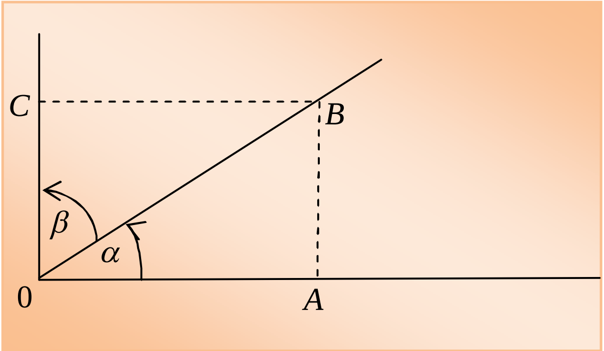
   Untuk selanjutnya sinus, cosinus, tangen, cotangen, secan, cosecant disebut perbandingan goniometri sudut lancip atau perbandingan goniometri dalam segitiga yang salah satu sudutnya siku-siku. Berdasarkan perbandingan ginometri yang telah didefinisikan di atas maka diperoleh hubungan

$$\sin\alpha\csc\alpha = 1,\ \cos\alpha\sec\alpha = 1,\ \tan\alpha\cot\alpha = 1$$

Dalil

Jika suatu sudut α penyikunya (*komplemen*) adalah β maka $\sin\alpha = \cos\alpha.$

Bukti



Gambar 2.3

Pada gambar 2.3 di atas, jika α mempunyai penyiku β maka $\alpha + \beta = 90^0$. Misal B adalah titik pada kaki yang berimpit dari kedua sudut tersebut maka kita dapat memproyeksikan OB pada kaki-kaki yang lain, yaitu OA dan OC. Karena $OABC$ adalah persegi panjang, maka $OA = BC$ dan $OC = AB$ sehingga:

$\sin\alpha = \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{OC}{OB} = \cos\beta$ dan

$\cos\alpha = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{BC}{OB} = \sin\beta$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa

$\cot\alpha = \tan\beta$

$\csc\alpha = \sec\beta$

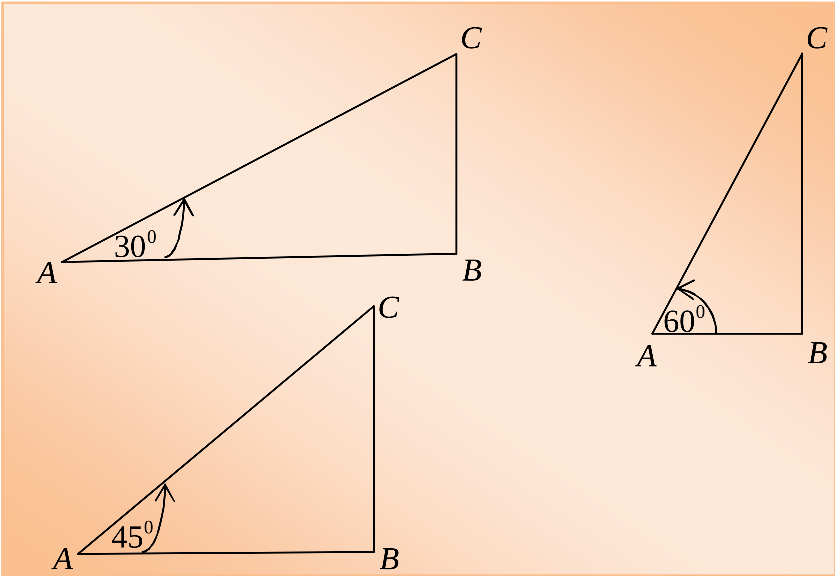
Karena $\alpha + \beta = 90^0$ maka $\beta = 90^0 - \alpha$ sehingga berdasarkan dalil di atas diperoleh

$\sin\ (90^0 - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos\ (90^0 - \alpha) = \sin\alpha$

$\tan\ (90^0 - \alpha) = \cot\alpha$

Selanjutnya perhatikan gambar segitiga berikut ini.



Gambar 2.4

Besarnya sudut dapat dinyatakan dalam derajat atau radian. Kedua ukuran sudut tersebut mempunyai hubungan $360^0 = 2\pi \ radian$ atau $1^0 = \dfrac{\pi}{180} \ radian$

Sehingga, untuk

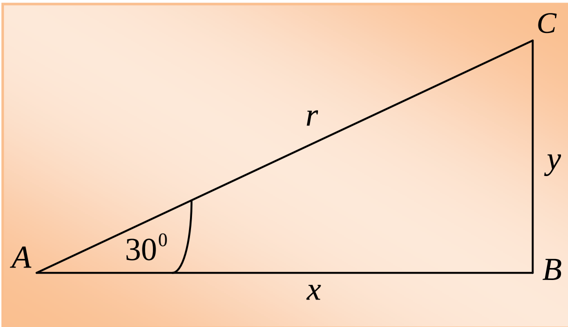
$$\alpha = 30^0 = 30\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{6} \ radian.$$

Dengan cara sama, dapat dibuat tabel konversi mengubah ukuran sudut dari derajat menjadi radian atau sebaliknya sebagai berikut:

Nomor	**Ukuran Sudut**		**Keterangan**
1.	0^0	0	Sudut istimewa
2.	30^0	$\pi/6$	Sudut istimewa
3.	45^0	$\pi/4$	Sudut istimewa
4.	60^0	$\pi/3$	Sudut istimewa
5.	90^0	$\pi/2$	Sudut istimewa
6.	120^0	$2\pi/3$	Sudut Tumpul
7.	135^0	$3\pi/4$	Sudut Tumpul
8.	150^0	$5\pi/6$	Sudut Tumpul
9.	180^0	π	Sudut Tumpul
10	210^0	$7\pi/6$	Sudut Tumpul
11.	225^0	$5\pi/4$	Sudut Tumpul
12.	240^0	$4\pi/3$	Sudut Tumpul

13.	270^0	$3\pi/2$	Sudut Tumpul
14.	300^0	$5\pi/3$	Sudut Tumpul
15.	315^0	$21\pi/12$	Sudut Tumpul
16.	330^0	$11\pi/6$	Sudut Tumpul
17.	360^0	2π	Sudut Tumpul

Selanjutnya perhatikan gambar di bawah ini.



Gambar 2.5

Menurut teorma Pytagoras, berlaku hubungan $x^2 + y^2 = r^2$. Karena $\alpha = 30^o$ maka $x : y : r = \sqrt{3} : 1 : 2$. Dengan demikian persamaan

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \left(y\sqrt{3}\right)^2 + y^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 = r^2$$

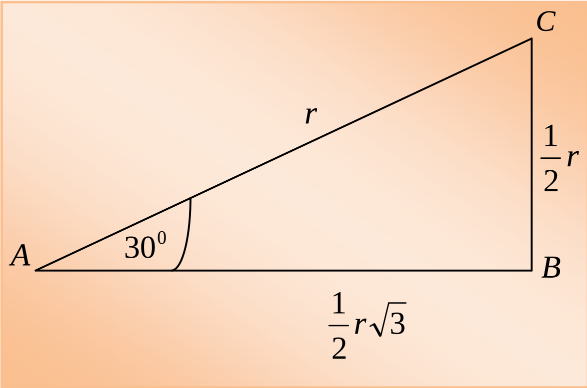
$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{4}r^2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}r$$

Sehingga diperoleh hubungan untuk $\alpha = 30^0$ diperoleh perbandingan

$$x : y : r = \frac{1}{2}r\sqrt{3} : \frac{1}{2}r : r$$

seperti pada gambar berikut:



Gambar 2.6

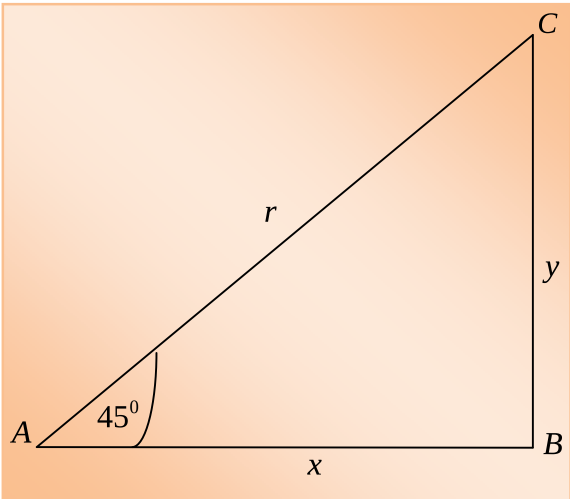
Dan

$$\cos 30^0 = \frac{x}{r} = \frac{\frac{1}{2}r\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\sin 30^0 = \frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{2}r}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^0 = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}r}{\frac{1}{2}r\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 2.7

Menurut teorma Pytagoras, berlaku hubungan $x^2 + y^2 = r^2$. Karena $\alpha = 45^o$ maka $x : y : r = 1 : 1 : \sqrt{2}$. Dengan demikian persamaan

$x^2 + y^2 = r^2$

$\Leftrightarrow x^2 + x^2 = r^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 = r^2$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} r\sqrt{2}$

Sehingga diperoleh hubungan $x : y : r = \frac{1}{2} r\sqrt{2} : \frac{1}{2} r\sqrt{2} : r$

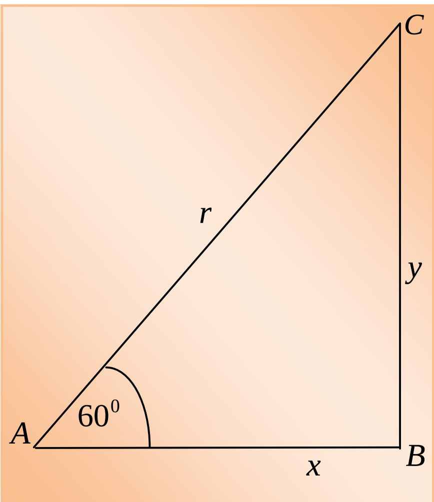
Dan

$$\cos 45^0 = \frac{x}{r} = \frac{\frac{1}{2} r\sqrt{2}}{r} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sin 45^0 = \frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{2} r\sqrt{2}}{r} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan 45^0 = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2} r\sqrt{2}}{\frac{1}{2} r\sqrt{2}} = 1$$

Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 2.8

Menurut teorma Pytagoras, berlaku hubungan $x^2 + y^2 = r^2$. Karena $\alpha = 60^o$ maka $x : y : r = 1 : \sqrt{3} : 2$. Dengan demikian persamaan

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(x\sqrt{3}\right)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}r$$

Sehingga diperoleh hubungan $x : y : r = \frac{1}{2}r : \frac{1}{2}r\sqrt{3} : r$

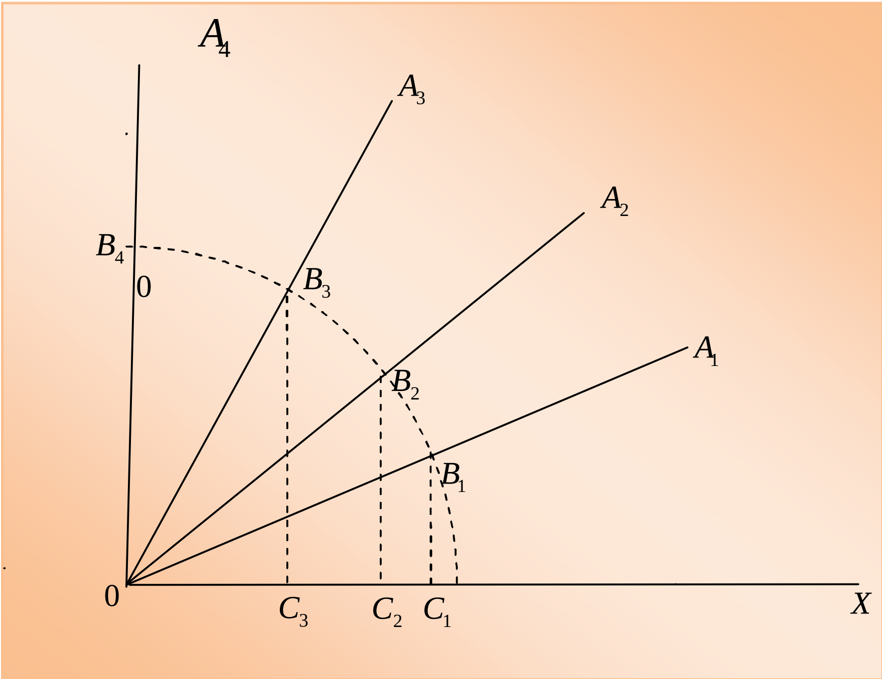
Dan

$$\cos 60^0 = \frac{x}{r} = \frac{\frac{1}{2}r}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^0 = \frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{2}r\sqrt{3}}{r} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan 60^0 = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}r\sqrt{3}}{\frac{1}{2}r} = \sqrt{3}$$

Sinus suatu sudut hanya bergantung pada besarnya sudut, jika sudutnya bertambah besar maka sinusnya akan berubah, sehingga boleh dikatakan bahwa suatu sinus adalah fungsi sudut-sudutnya.



Gambar 2.9

Berdasarkan gambar 2.9 di atas, kita dapat melihat bagaimana berubahnya suatu sinus, jika sudutnya berubah. $\angle XOA$ kaki sudutnya OX tetap pada tempatnya, sedangkan kaki OA berlawanan dengan jarum jam sehingga diperoleh $\angle XOA_1, \angle XOA_2, \angle XOA_3, \angle XOA_4$ dan seterusnya.

Jika $OB_1 = OB_2 = OB_3 = OB_4$ dan masing-masing terletak pada maka berturut-turut diperoleh garis proyeksi OC_1, OC_2, OC_3. dan garis-garis yang memproyeksi B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3.

Kenyataan ini menunjukkan bahwa garis yang memproyeksi selalu lebih kecil dari garis yang diproyeksi karena dalam tiap-tiap segitiga siku-siku, sisi sudut siku-siku selalu lebih kecil dari sisi miring segitiga siku-siku dan garis yang memproyeksi makin lama makin panjang jika sudutnya makin lama makin panjang. Jika kaki yang berputar pada penghabisan $\perp OX$ maka garis yang memproyeksinya berimpit dengan garis yang diproyeksi, sehingga disimpulkan:

1) Sinus tiap-tiap sudut lancip adalah lebih kecil dari 1, sinusnya makin lama makin besar jika sudutnya menjadi semakin besar dan

$\sin 90^0 = 1$.

2) Cosinus tiap-tiap sudut lancip adalah lebih kecil dari 1, cosinusnya makin lama makin kecil jika sudutnya menjadi semakin besar dan

$\cos 90^0 = 0$.

3) Tangen tiap-tiap sudut dapat berupa konstanta, tangent tiap-tiap sudut makin lama makin besar jika sudutnya menjadi bertambah besar dan

$$\tan 90^0 = \frac{\sin 90^0}{\cos 90^0} = \frac{1}{0} = \textit{tidak didefinisikan } (\textit{mengapa}?).$$

Hal yang demikian juga ditemukan dalam cotangent, secan dan cosecant yaitu

$$\cot 0^0 = \frac{\cos 0^0}{\sin 0^0} = \frac{1}{0} = \textit{tidak didefinisikan}$$

$$\sec 90^0 = \frac{1}{\cos 90^0} = \frac{1}{0} = \textit{tidak didefinisikan}$$

$$\csc 0^0 = \frac{1}{\sin 0^0} = \frac{1}{0} = \textit{tidak didefinisikan}$$

.Dan besar sudutnya akan berubah sesuai dengan perioda fungsinya

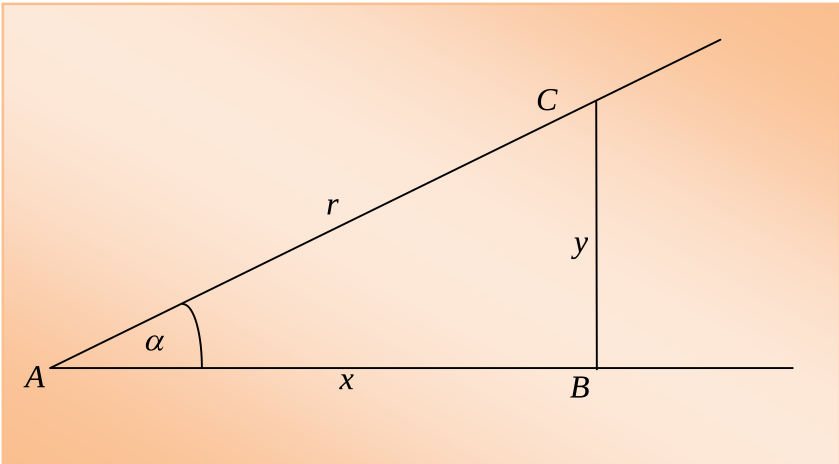
Berdasarkan perbandingan tersebut di atas dapat dibuat tabel perbandingan goniometri sebagai berikut:

Ukuran Sudut		$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$
0^0	0	0	1	0	$\neq$	1	$\neq$
30^0	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
45^0	$\pi/4$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60^0	$\pi/3$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
90^0	$\pi/2$	1	0	$\neq$	0	$\neq$	1
120^0	$2\pi/3$	+	-	-	-	-	+
135^0	$3\pi/4$	+	-	-	-	-	+
150^0	$5\pi/6$	+	-	-	-	-	+
180^0	π						

210^0	$7\pi/6$	-	-	+	+	-	-
225^0	$5\pi/4$	-	-	+	+	-	-
240^0	$4\pi/3$	-	-	+	+	-	-
270^0	$3\pi/2$						
300^0	$5\pi/3$	-	+	-	-	-	+
315^0	$21\pi/12$	-	+	-	-	-	+
330^0	$11\pi/6$	-	+	-	-	-	+
360^0	2π						

2.2 Hubungan Perbandingan Goniometri dalam Sudut

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 2.10

Pada gambar 2.10 di atas, garis yang memproyeksi adalah y, proyeksi adalah x dan garis yang diproyeksi adalah r.

Karena $AC \perp BC$ maka menurut dalil Pythagoras diperoleh

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Jika masing-masing ruas dibagi dengan r^2 maka diperoleh

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \left(\frac{r}{r}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = (1)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Jika masing-masing ruas dibagi dengan y^2 maka diperoleh

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{y}\right)^2 = \left(\frac{r}{y}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (\cot\alpha)^2 + (1)^2 = (\csc\alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow \cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$$

Jika masing-masing ruas dibagi dengan x^2 maka diperoleh

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{r}{x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (1)^2 + (\tan\alpha)^2 = (\sec\alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$$

Karena $\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$ dan $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ maka

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \tan\alpha.$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{x}{y} = \cot\alpha.$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{x}{r}} = \frac{r}{x} = \sec\alpha.$$

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{y}{r}} = \frac{r}{y} = \csc\alpha.$$

Contoh soal

1) Dalam suatu segitiga siku-siku diketahui $\tan\alpha = p$. Tentukan perbandingan goniometri α yang lain.

   Jawab

   Berdasarkan rumus identitas diperoleh

   $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

   $\Leftrightarrow 1 + p^2 = \sec^2\alpha$

   Sehingga $\sec\alpha = \sqrt{1+p^2}$ dan $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$

   Selanjutnya dengan rumus identintas yang lain

   $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

   $$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)^2 + \sin^2\alpha = 1$$

   $$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+p^2}\right) + \sin^2\alpha = 1$$

   $$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{1+p^2}$$

   $$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{p^2}{1+p^2}$$

Sehingga $\sin\alpha = \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$

Perbandingan goniometri lainnya adalah

$$\csc\alpha = \frac{\sqrt{1+p^2}}{p}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\sqrt{1+p^2}}{p} = \frac{1}{p}$$

2) Sederhanakanlah

a. $\tan\alpha.\cos\alpha$

Jawab

$$\tan\alpha.\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\cos\alpha = \sin\alpha$$

b. $\csc\alpha(\csc\alpha - \sin\alpha) - \cot^2\alpha$

Jawab

$$\csc\alpha(\csc\alpha - \sin\alpha) - \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right) - \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right) - \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1 - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right) - \left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)$$

$$= \left(\frac{1 - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha}\right)$$

$$= \left(\frac{1-1}{\sin^2\alpha}\right)$$

$$= 0$$

3) Buktikan bahwa:

a. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$

Bukti

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = (1 - \cos^2\alpha) - (1 - \cos^2\beta)$$

$$(1-\cos^2\alpha)-(1-\cos^2\beta)=-\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$$

b. $\dfrac{\tan\alpha-\cot\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$

Bukti

$$\frac{\tan\alpha-\cot\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha`}}=\frac{\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin}}{\dfrac{\sin\alpha^2+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{1}=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$$

2.3 Soal-soal

1) Dalam suatu segitiga siku-siku diketahui $\sin\alpha=\frac{5}{`13}$. Tentukan perbandingan goniometri α yang lain.
2) Dalam suatu segitiga siku-siku diketahui $\cos\alpha=\frac{3}{4}$. Tentukan perbandingan goniometri α yang lain.
3) Dalam suatu segitiga siku-siku diketahui $\sec\alpha=2$. Tentukan perbandingan goniometri α yang lain.
4) Dalam suatu segitiga siku-siku diketahui $\csc=2\frac{1}{4}$. Tentukan perbandingan goniometri α yang lain.
5) Dalam suatu segitiga siku-siku diketahui $\tan\alpha=\frac{m}{n}$. Tentukan perbandingan goniometri α yang lain.

6) Sederhanakanlah

a. $\dfrac{\cot\alpha\sec\alpha}{\csc\alpha}$

b. $(\tan\alpha+\cot\alpha)(\sin\alpha)(\cos\alpha)$

c. $(\csc\alpha-\cot\alpha)(\csc\alpha+\cot\alpha)$

d. $\csc\alpha(\csc\alpha-\sin\alpha)-\cot^2\alpha$

e. $\csc\alpha(\csc\alpha-\sin\alpha)-\cot^2\alpha$

f. $\sin^4\beta+2\sin^2\beta+\cos^2\beta+\cos^4\beta$

g. $\sin^2\beta+\tan^2\beta+\cos^2\beta-\sec^2\beta$

h. $\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}-\dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x}$

i. $\sqrt{\dfrac{1}{1-\cos y}-\dfrac{1}{1+\cos y}}$

j. $\dfrac{\sin x-\sin y}{\cos x-\cos y}+\dfrac{\cos x+\cos y}{\sin x+\sin y}$

k. $(1+\sin x-\cos x)^2-2(1+\sin x-\cos x)$

l. $\dfrac{\tan^2 x+\cot^2 x}{\tan x+\cot x}-(\tan x+\cot x)^2$

m. $\dfrac{1-\sin x}{1+\sin(90^0+x)}.\dfrac{1+\cos(90^0-x)}{1-\cos x}$

n. $\left(\dfrac{\tan x-\cot x}{\tan x+\cot x}\right)^2+(2\sin x\cos x)^2$

o. $\left(\dfrac{1}{\cos z+1}+\dfrac{1}{\sec z-1}\right)\left(\dfrac{\cos z}{\sin z}\right)-2\csc z$

p. $\tan^2\beta\csc^2\beta-\dfrac{\cot^2\beta}{\csc^2\beta}-\tan^2\beta$

q. Hitunglah sudut lancip 2α jika diketahui

$\tan 2\alpha=\cos(x+10^0)\sqrt{1+\tan^2(x+10^0)}$

7) Buktikan kesamaan berikut

a. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

b. $(\csc x + \cot x)(1 - \cos x) = \sin x$

c. $\sec^4 x(1 - \sin^4 x) - 2\tan^2 x = 1$

d. $\dfrac{1+\sin y}{1+\cos y} . \dfrac{1+\sec y}{1+\csc y} = \tan y$

e. $(\sec^2 t)(\csc^2 t) = \sec^2 t + \csc^2 t$

f. $\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \sec x - \tan x$

g. $\sin y \sec y + \cos y \csc y = \sec y \csc y$

h. $\sec x - \cos x = \tan x \sin x$

i. $\dfrac{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} = \sec^2 x \csc^2 x - 3$

j. $\tan^2 t \cos^4 t - \cot^2 t \sin^4 t = 0$

k. $(1 - \sin^2 a)^2 + (1 - \cos^2 a)^2 = 1 - 2\sin^2 a \cos^2 a$

l. $(\sin x + \sin^2 x + \cos x + \cos^2 x)^2 = 2(1 + \sin x + \cos x + \cos x \sin x)$

m. $(\sin x + \sin y)(1 - \sin x \sin y) = \sin x \cos^2 y + \sin y \cos^2 x$

8) Hitunglah x sehingga

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = p \\ \cos x + \sin x = q \end{cases}$$

BAB III

DALIL-DALIL DALAM SEGITIGA

Bab III buku ini membahas enam hal pokok yang berhubungan dengan dalil-dalil dalam segitiga, antara lain (1) segitiga siku-siku, (2) dalil sinus, (3) dalil tangent (4) dalil cosinus, (5) menghitung sudut segitiga yang sisinya diketahui, dan (6) soal-soal.

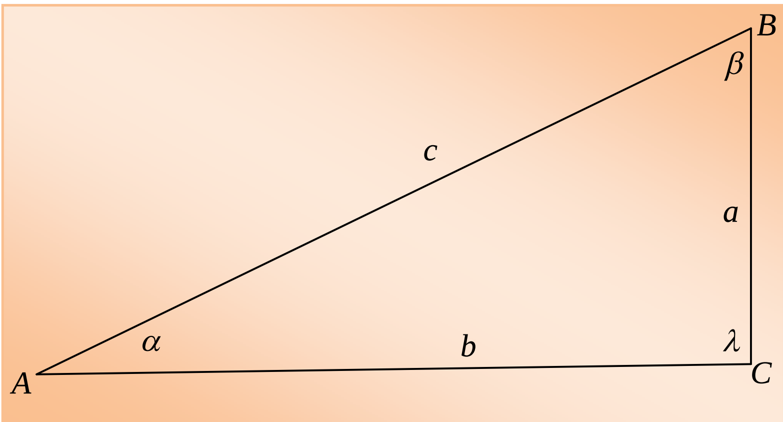
Standar Kompetensi

Setelah mempelajari pokok bahasan ini diharapkan mahasiswa dapat memahami dalil-dalil yang berhubungan dengan segitiga, baik segitiga lancip atau tumpul dan dapat mengaplikasikannya pada masalah-masalah praktis.

Kompetensi Dasar

1. Mahasiswa dapat menentukan unsur-unsur suatu segitiga siku-siku jika diketahui unsur yang lain.
2. Mahasiswa dapat mengaplikasikan dalil sinus dalam segitiga.
3. Mahasiswa dapat mengaplikasikan dalil tangen dalam segitiga
4. Mahasiswa dapat mengaplikasikan dalil cosinus dalam segitiga

3.1 Segitiga Siku-siku



Gambar 3.1

Pada gambar 3.1 di atas. ΔABC adalah segitiga siku-siku yang masing-masing sudutnya ditentukan oleh $\angle CAB = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle BCA = \lambda.$ Selanjutnya dimisalkan $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{AC} = b.$ Jika $\beta = 90^0$ maka diperoleh:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \rightarrow a = c\sin\alpha$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} \rightarrow b = c\sin\beta$$

Sehingga sisi siku-siku adalah sama dengan sinusnya sudut yang berhadapan, kali sisi miring.

Sedangkan

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \rightarrow b = c\cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} \rightarrow a = c\cos\beta$$

Dengan demikian sisi siku-siku adalah sama dengan cosinus sudut lancip yang bersisihan kali sisi miring.

Selanjutnya

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \rightarrow a = b\tan\alpha$$

$$\tan\beta = \frac{b}{a} \rightarrow b = a\tan\beta$$

Dengan demikian sisi siku-siku adalah sama dengan tangent sudut yang berhadapan, kali sisi siku-siku yang lain.

Akhirnya

$$cat\alpha = \frac{b}{a} \rightarrow b = a\cot\alpha$$

$$\cot\beta = \frac{a}{b} \rightarrow a = b\cot\beta$$

Dengan demikian sisi siku-siku adalah sama dengan cotangent sudut lancip yang bersisihan kali sisi siku-siku yang lain.

Pada sisi-sisi segitiga siku-siku berlaku teorema Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$, Sehingga dalam segitiga siku-siku dapat dihitung semua unsur-unsurnya jika diketahui 2 unsur yang bebas sesamanya. Unsur-unsur yang diketahui tersebut mungkin:

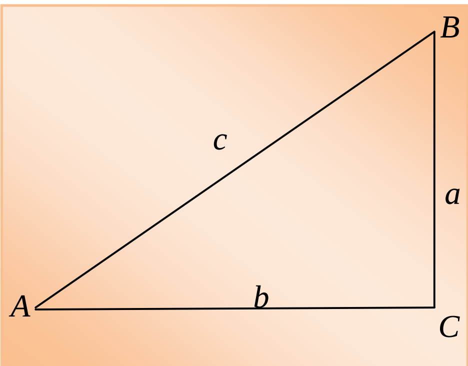
1) **Sisi miring dan salah satu sudut lancip.**
2) **Satu sisi siku-siku dan satu sudut lancip**
3) **Sisi miring dan satu sisi siku-siku**
4) **Kedua sisi siku-sikunya.**

Catatan

Jika ΔABC adalah segitiga sama kaki dengan $\overline{CA} = \overline{CB}$ maka dengan menarik garis tinggi $\overline{CD}$ maka akan terbentuk dua segitiga siku-siku yaitu $\Delta ACD, \Delta BCD$. Dengan menggunakan rumus yang telah dijelaskan di atas, selanjutnya dapat ditentukan unsure-unsur segitiga sama kaki tersebut.

Contoh soal

1. Perhatikan gambar segitiga di bawah ini.



Gambar 3.2

Pada gambar 3.2 di atas adalah segitiga siku-siku yang sisi miringnya adalah sisi c dan $\angle ACB$ siku-siku. Hitunglah unsur-unsur yang lain jika diketahui panjang $c = 12{,}93 cm$ dan $\angle BAC = 67^0 22'$

Jawab

Berdasarkan data di atas dipeoleh $\angle ABC = 90^0 - 67^0 22' = 22^0 38'$

Misal $\angle BAC = \alpha$ maka

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c\sin\alpha \text{ dan}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c\sin\alpha$$

Karena $a = c\sin\alpha$ maka

$$\log a = \log(c\sin\alpha)$$
$$\Leftrightarrow \log a = \log c + \log\sin\alpha$$
$$\Leftrightarrow \log a = \log(12{,}93) + \log(\sin 67^0 22,)$$
$$\Leftrightarrow \log a = 1{,}1116 - (9{,}652 - 10)$$
$$\Leftrightarrow \log a = 1{,}0768$$
$$a = 11{,}935 cm$$

Dengan cara yang sama

Karena $b = c\sin\alpha$ maka

$$\log b = \log(c\cos\alpha)$$
$$\Leftrightarrow \log b = \log c + \log\cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow \log b = \log(12{,}93) + \log(\cos 67^0 22,)$$
$$\Leftrightarrow \log b = 1{,}1116 - (9{,}5853 - 10)$$
$$\Leftrightarrow \log b = 0{,}6969$$
$$b = 4{,}976 cm$$

2. Berdasarkan gambar 3.2 di atas diketahui $\angle ABC = \beta$ dan sisi-sisi penyikunya yaitu p dan q. Tentukan unsur-unsur segitiga yang lainnya.

   Jawab

   Dalam hal ini dapat digunakan rumus $\tan\beta = \frac{b}{a}, \alpha = 90^0 - \beta$

   Karena $\tan\beta = \frac{b}{a}$ maka $b = a\tan\beta$

   Dan $\cos\beta = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\cos\beta}$

3. Berdasarkan gambar 3.2 di atas diketahui sisi miring c dan sisi siku-siku a Tentukan unsur-unsur segitiga yang lainnya.

Jawab

Dalam hal ini dapat digunakan rumus $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}, \beta = 90^0 - \alpha$

Karena $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c-a)(c+a)}$

Sehingga $\log b = \dfrac{1}{2}\left(\log(c-a) + \log(c+a)\right)$

4. Berdasarkan gambar 3.2 di atas diketahui sisi-sisi penyikunya yaitu a dan b Tentukan unsur-unsur segitiga yang lainnya.

   Jawab

   Dalam hal ini dapat digunakan rumus $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}, \beta = 90^0 - \alpha$

   Karena $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$

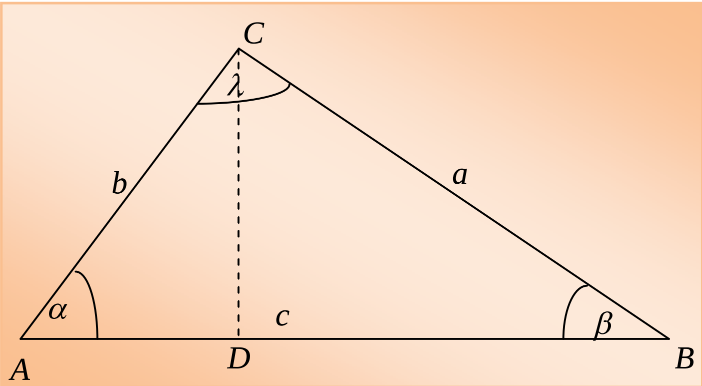
3.2 Dalil Sinus

Beberapa dalil sinus dalam segitiga lancip yang terkenal adalah

1) Pada tiap-tiap segitiga, sisi-sisinya berbanding sebagai sinus sudut didepannya yaitu $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

   Bukti

   Cara I



Gambar 3.3

Pada gambar 3.1 di atas

$\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle ACB = \lambda$

Selanjutnya $\overline{AC} = b, \overline{AB} = c,\ dan\ \overline{BC} = a$

Jika α *dan* β adalah sudut-sudut lancip maka $\overline{CD}$ sebagai garis tinggi akan terlatak pada $\Delta ABC.$

Pandang ΔACD dan akan diperoleh

$$\sin\alpha = \frac{\overline{CD}}{b} \text{ sehingga } \overline{CD} = b\sin\alpha ....(1)$$

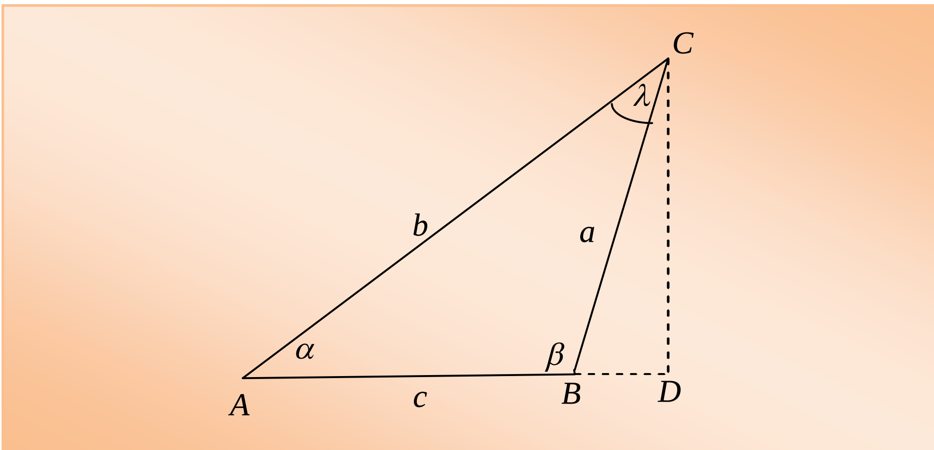
Pandang ΔBCD dan akan diperoleh

$$\sin\beta = \frac{\overline{CD}}{a} \text{ sehingga } \overline{CD} = a\sin\beta ....(2)$$

Berdasarkan (1) dan (2) diperoleh $b\sin\alpha = a\sin\beta$...........(3)

Bentuk (3) dapat disederhanakan menjadi $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

Cara II



Gambar 3.4

Pada gambar 3.2 di atas

$\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle ACB = \lambda$

Selanjutnya $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \text{ dan } \overline{AC} = b$

Jika β adalah sudut-sudut tumpul maka $\overline{CD}$ sebagai garis tinggi akan terlatak di luar $\Delta ABC.$

Pandang ΔACD dan akan diperoleh

$$\sin\alpha = \frac{\overline{CD}}{b} \text{ sehingga } \overline{CD} = b\sin\alpha ....(4)$$

Pandang ΔBCD dan akan diperoleh

$\sin \angle BCD = \frac{\overline{CD}}{a}$ sehingga $\overline{CD} = a \sin \angle BCD$......(5)

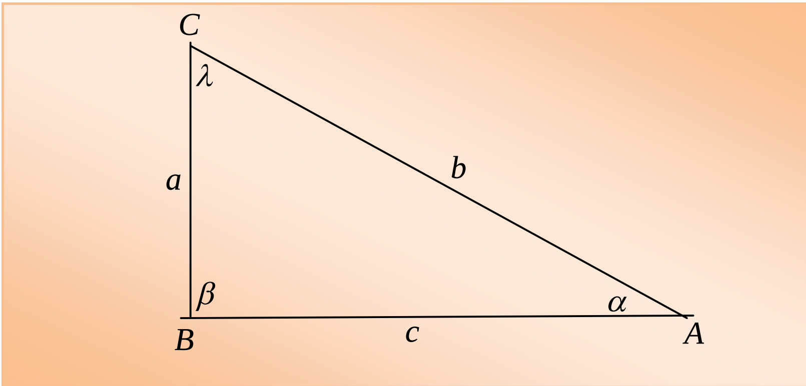
Berdasarkan (5) $\angle BCD = 180 - \beta$

sehingga $\overline{CD} = a \sin (180 - \beta) = \overline{CD} = a \sin \beta$

Akhirnya diperoleh $b \sin \alpha = a \sin \beta$.......(6)

Bentuk (6) dapat disederhanakan menjadi $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$

Cara III



Gambar 3.5

Pada 3.5 gambar di atas

$\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle ACB = \lambda$

Selanjutnya $\overline{AC} = b, \overline{BC} = a, dan\ \overline{AB} = c$

Jika salah satu sudutnya siku-siku (β) maka dengan aturan di atas diperoleh

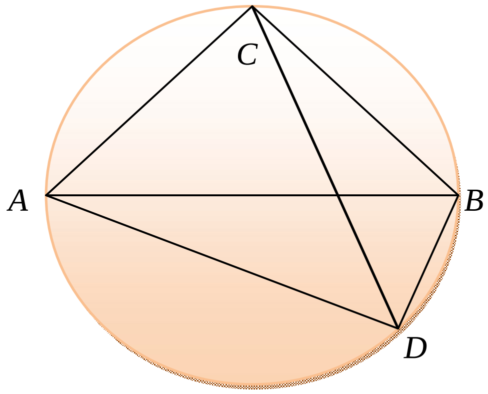
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin 90^0}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{a}{b}$$

Hal ini adalah sesuai dengan ketentuan sinus suatu sudut.

Dalil sinus sebagaiman telah dijelaskan di atas, dapat dibuktikan dengan cara lain



Gambar 3.6

Pada gambar 3.6 di atas terdapat lingkaran luar ΔABC dan menarik garis tengah yaitu $CD = 2R.$

Misal $\angle BDC = \angle BAC = \alpha.$

Sehingga

$$\sin\alpha = \frac{BC}{CD}$$

$$\Leftrightarrow BC = CD \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow a = 2R \sin\alpha$$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan pula bahwa $b = 2R\sin\beta$ dan $c = 2R\sin\gamma$

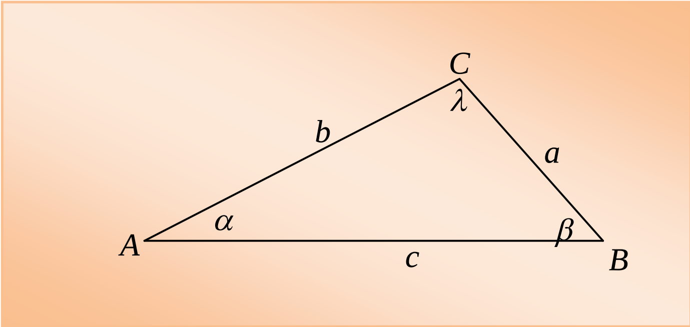
Karena $a = 2R\sin\alpha, b = 2R\sin\beta, c = 2R\sin\gamma$

Akhirnya diperoleh

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Contoh soal

1) Perhatikan gambar berikut



Gambar 3.7.

Berdasarkan gambar 3.7 di atas diberikan data sebagai berikut:

$a = 97{,}5cm \quad \beta = 53^0 8', \quad dan \quad \gamma = 59^0 29'$

Hitunglah unsure-ussur yang lain dalam segitiga tersebut

Jawab

Berdasarkan data tersebut dapat dihitung

$\alpha = 180^0 - (53^0 8' + 59^0 29') = 67^0 23'.$

Dengan menggunakan aturan sinus

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \rightarrow b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \rightarrow c = \frac{a\sin\lambda}{\sin\alpha}$$

Berdasarkan 2 kesamaan di atas diperoleh

$$\log b = \log\left(\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}\right)$$
$$\Leftrightarrow \log b = \log(a\sin\beta) - \log\sin\alpha$$
$$\Leftrightarrow \log b = \log a + \log\sin\beta - \log\sin\alpha$$
$$\Leftrightarrow \log = \log b + \log\sin\alpha - \log\sin\beta$$

Demikian pula

$$\log c = \log\left(\frac{a\sin\lambda}{\sin\alpha}\right)$$
$$\Leftrightarrow \log c = \log(a\sin\lambda) - \log\sin\alpha$$
$$\Leftrightarrow \log c = \log a + \log\sin\lambda - \log\sin\alpha$$

$\log a = 1{,}9890, \log\sin\alpha = 9{,}9652 - 10$

Sehingga

$$\log \frac{a}{\sin \alpha} = 2{,}0238$$

$$\log \sin \beta = 9{,}9031 - 10$$

$$\log b = 1{,}9269 \Rightarrow b = 84{,}51 cm$$

Demikian pula

$$\log \frac{a}{\sin \alpha} = 2{,}0238$$

$$\log \sin \lambda = 9{,}9352 - 10$$

$$\log c = 1{,}9590 \Rightarrow c = 91 cm$$

3.3 Dalil Tangen

Jumlah dua buah sisi suatu segitiga berbanding dengan selisih sisi-sisi tersebut, sebagai tangen setengah jumlah sudut-sudut depannya berbanding dengan tangen setengah selisih sudut-sudut tersebut, yaitu

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

Bukti

Berdasarkan dalil sinus yang telah dijabarkan sebelumnya diperoleh

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2R \sin \alpha + 2R \sin \beta}{2R \sin \alpha - 2R \sin \beta} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$$

Atau

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

Contoh Soal

1) Dari suatu segitiga seperti pada gambar 3.7 diketahui data sebagai berikut:

$a = 2{,}519dm \;\; b = 1{,}199dm, \lambda = 131^0 24'$

Hitunglah unsur-unsur yang lain dari segitiga tersebut.

Jawab

Menurut dalil tangent

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

Karena $a = 2{,}519dm \;\; b = 1{,}199dm, \lambda = 131^0 24'$ maka menurut rumus tersebut

Hanya α, β yang belum diketahui, sehingga

$\alpha + \beta = 180^0 - \lambda = 180^0 - 131^0 24' = 48^0 36'$

Sedangkan menurut dalil tangent di atas

$$\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{(a-b)\tan\frac{1}{2}(\alpha+\phi)}{(a+b)}$$

$$\Leftrightarrow \log\left(\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right) = \log(a-b) + \log\frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \log(a-b)$$

Sehingga untuk menentukan α, β dapat ditentukan dengan cara:

$a + b = 3{,}718$

$a - b = 1{,}320$

$\log(a-b) = 0{,}1206$

$\log\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 9{,}6547 - 10$

______________________________ +

9,7763-10

$$\log(a+b) = 0{,}5703$$

$$\overline{\hspace{12cm}}\; -$$

$$\log \tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 9{,}2050 - 10$$

$$\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 9^{0}\,'$$

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 24^{0}18'$$

$$\overline{\hspace{12cm}}$$

$$\alpha = 33^{0}24'$$

$$\beta = 15^{0}12'$$

Sedangkan untuk menghitung sisi c dengan menggunakann dalil sinus

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$c = \frac{a \sin \lambda}{\sin \alpha}$$

$$\log c = \log a + \log \sin \lambda - \log \sin \alpha$$

$$\log c = \log 2{,}519 + \log \sin(131^{0}24') - \log \sin(33^{o}24')$$

$$\log c = 0{,}4019 + (9{,}8751 - 10) - (9{,}7407 - 10)$$

$$\log c = 0{,}5358$$

$$c = 3{,}432 dm$$

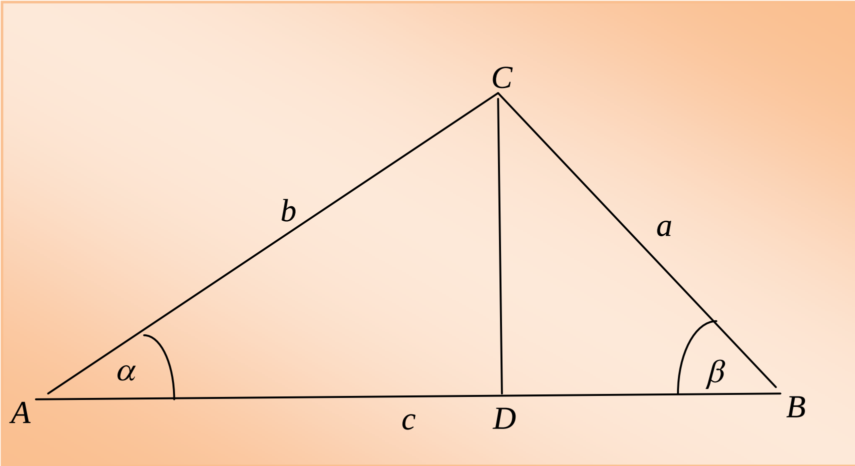
3.4 Dalil Cosinus

1) Pada tiap-tiap segitiga, kuadrat suatu sisi adalah sama dengan jumlah kuadrat sisi-sisi lainnya dikurangi dengan dua kali hasil perbanyakan sisi-sisi tersebut dan cosines sudut apit kedua sisi tersebut, yaitu:

   $$a^{2} = b^{2} + c^{2} - 2bc \cos \alpha$$

   Bukti

   Cara I



Gambar 3.8

Perhatikan gambar 3.5 di atas

Misal $\angle DAC = \alpha, \angle DBC = \beta$ dengan α *dan* β keduanya sudut lancip

Selanjutnya pandang ΔACD *dan* ΔBCD

Pada ΔBCD berlaku $BC^2 = BD^2 + DC^2$............(1)

$\Leftrightarrow BC^2 = (AB - AD)^2 + DC^2$

Karena ΔACD berlaku

$$\cos\alpha = \frac{AD}{AC} \Leftrightarrow AD = b\cos\alpha$$

dan

$$\sin\alpha = \frac{CA}{AC} \Leftrightarrow CD = b\sin\alpha$$

Sedangkan pada ΔBCD berlaku

$$\cos\beta = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow BD = a\cos\alpha$$

dan

$$\sin\beta = \frac{CD}{BC} \Leftrightarrow CD = a\sin\beta$$

Sehingga dari (1) diperoleh

$BC^2 = BD^2 + DC^2$

$BC^2 = BD^2 + DC^2$

$$\Leftrightarrow BC^2 = (AB - AD)^2 + DC^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = (c - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = (c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha) + (b^2\sin^2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow a^2 = c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow a^2 = c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Dengan cara yang sama diperoleh

Pada ΔACD berlaku $AC^2 = AD^2 + DC^2$...........(2)

$$\Leftrightarrow AC^2 = (AB - BD)^2 + DC^2$$

Karena ΔBCD berlaku

$$\cos\beta = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow BD = a\cos\beta$$

dan

$$\sin\beta = \frac{CD}{BC} \Leftrightarrow CD = a\sin\beta$$

Sehingga dari (1) diperoleh

$$\Leftrightarrow AC^2 = (AB - BD)^2 + DC^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 = (c - a\cos\alpha)^2 + (a\sin\alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 = (c^2 - 2ac\cos\beta + a^2\cos^2\beta) + (a^2\sin^2\beta)$$

$$\Leftrightarrow b^2 = c^2 - 2ab\cos\beta + a^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta)$$

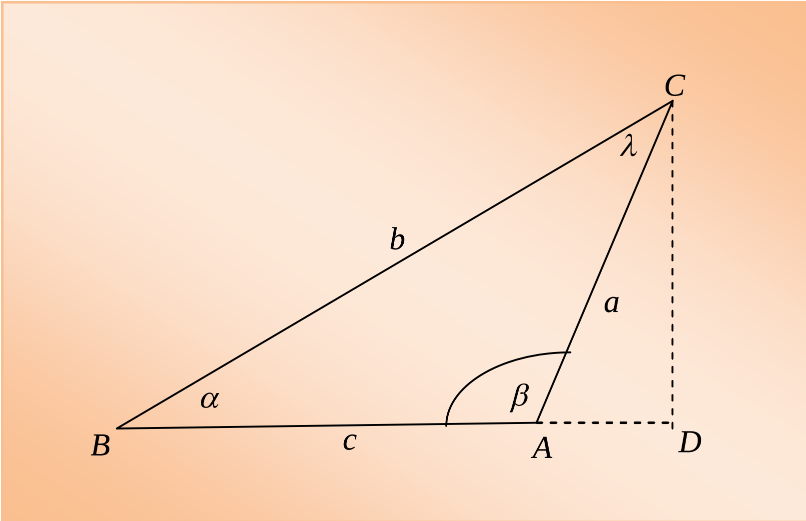
$$\Leftrightarrow b^2 = c^2 - 2ac\cos\beta + a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Selanjutnya hal yang sama untuk kesamaan diperoleh:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\lambda$$

Cara II



Gambar 3.9

Pada gambar 3.6 di atas terdapat 3 segitiga, yaitu

Misal $\angle BAD = \alpha$ dan merupakan sudut tumpul, sehingga garis tinggi ΔABC segitiga di luar. Selanjutnya dalam ΔABC

Berdasarkan kesamaan $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ diperoleh

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2ab}$$

Cara III

Jika $\alpha = 90^o$ maka $\cos\alpha = 0$ sehingga persamaan $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ menjadi $a^2 = b^2 + c^2$ yang merupakan dalil Pythagoras. Dengan cara yang sama akan dapat ditunjukkan bahwa:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2bc\cos\beta$$

dan

$$c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\lambda$$

3.5 Menghitung Sudut Segitiga yang Sisinya Diketahui.

Berdasarkan dalil cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

didapatkan persamaan yang lain yaitu

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Pembilang pecahan di atas tidak dapat digunakan untuk menghitung dengan logaritma, sehingga untuk membuat pembilang menjadi bentuk logaritma maka harus diubah rumus tersebut menjadi:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos\alpha = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos\alpha = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Menurut definisi penjumlahan dua sudut diperoleh

$$2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bc}$$

Misal

$$(b + c + a) = 2s \; dan \left(b + c - a\right) = 2s - 2a = 2(s - a)$$

Sehingga

$$2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2s.2(s - a)}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{s(s - a)}{bc}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{s(s - a)}{bc}}$$

Dengan cara yang sama

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{s(s - b)}{ac}}$$

Dan

$$\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

Selanjutnya

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos\alpha=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos\alpha=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos\alpha=\frac{a^2+2bc-b^2-c^2}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{a^2+2bc-b^2-c^2}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$$

Jika $a+b+c=2s$

maka $(a+b-c)=2s-2c$ dan $(a+c-b)=2s-2b$

Sehingga

$$(a-b+c)(a+b-c)=(2s-2b)(2s-2c)=4(s-b)(s-c)$$

Akhirnya diperoleh

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

Karena $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}$

Sehingga

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}}$$

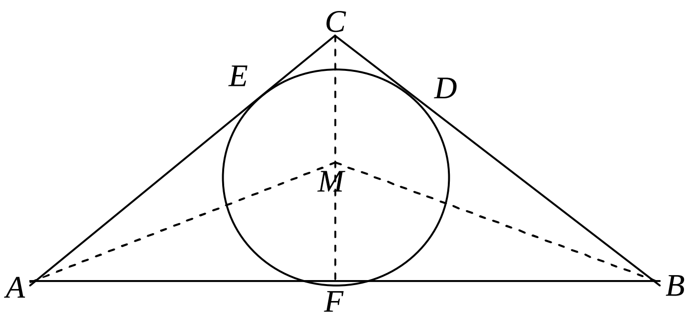
$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

$$\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right)=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-a)}}$$

Rumus di atas dapat juga dinyatakan dalam bentuk lain, sebagai berikut



Gambar 3.10

Berdasarkan gambar di atas, ΔABC dibuat garis bagi sudut α, β, λ yang berpotong di M. dan merupakan pusat lingkaran dalam ΔABC. Lingkaran ini menyinggung sisi-sisi AB, BC, CA dititik D, E, F

Selanjutnya ΔAFM siku-siku dan $AF = s - a$ dan $MF = r = \dfrac{O}{s}$, sehingga

$$MF = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)s-c}}{s}$$

Atau setelah pembilang dan penyebut dibagi dengan $\sqrt{s}$ diperoleh

$$MF = r = \frac{O}{s} = \sqrt{\frac{s(-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Sedangkan pada ΔAFM terdapat pula

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a} = \frac{1}{r-a}\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Demikian pula

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b} = \frac{1}{s-b}\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$\tan\frac{\lambda}{2} = \frac{r}{s-c} = \frac{1}{r-c}\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Sehingga dapat dimisalkan

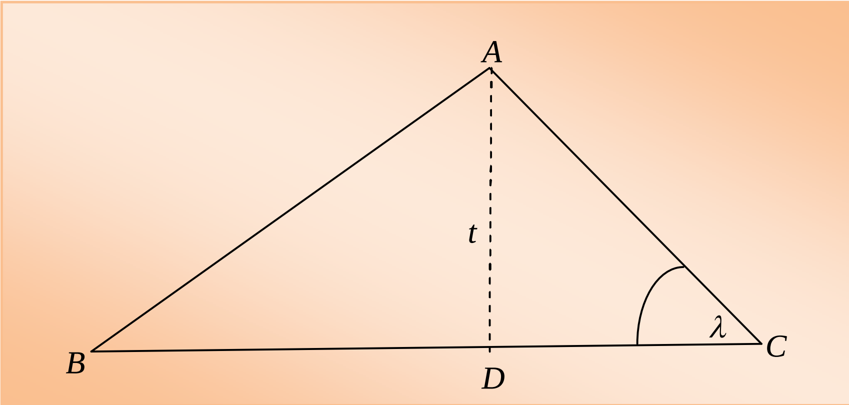
$$A = \frac{1}{2}\left(\log(s-a) + \log(s-b) + \log(s-c) - \log s\right)$$

maka

$$\log\tan\frac{1}{2}\alpha = A - \log(s-a)$$

$$\log\tan\frac{1}{2}\beta = A - \log(s-b)$$

$$\log\tan\frac{1}{2}\lambda = A - \log(s-c)$$



Gambar 3.11

Pada gambar 3,11 $\overline{AD} = t$ dinamakan garis tinggi pada sisi $\overline{BC}$. Selanjutnya dalam segitiga siku-siku ACD berlaku

$$\sin\lambda = \frac{AD}{AC} = \frac{t}{AC} \rightarrow t = AC\sin\lambda = b\sin\lambda.$$

Rumus di atas dapat diubah dengan menggunakan dalil sinus dan diperoleh:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\lambda)}$$

Sehingga

$$t = \frac{a\sin\beta\sin\lambda}{\sin(\beta+\lambda)}$$

Rumus di atas untuk garis tinggi dapat juga ditulis hanya dengan sisi-sisi segitiga tersebut, yaitu:

$$t = b\sin\lambda = 2b\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$= 2b\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{ab}}$$

$$= \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(a-b)(s-c)}$$

Contoh soal

1. Dari suatu segitiga seperti pada gambar 3.7 diketahui data sebagai berikut:

   $a = 317{,}6cm, b = 442{,}5cm, c = 495{,}6cm$

   Hitunglah besar sudut masing-masing.

   Jawab

   Karena yang diketahui sisinya, maka besar sudutnya dapat ditentukan dengan rumus tangen

   $$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a} = \frac{1}{r-a}\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

   $$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b} = \frac{1}{s-b}\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

   $$\tan\frac{\lambda}{2} = \frac{r}{s-c} = \frac{1}{r-c}\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

   Berdasarkan data tersebut diperoleh

   $a = 317{,}6cm, b = 442{,}5cm, c = 495{,}6cm, 2s = 1256 \rightarrow s = 628$

   Sehingga

   $\log(s-a) = 2{,}4919$
   $\log(s-b) = 2{,}2676$
   $\log(s-c) = 2{,}1219$
   ____________________ +
   $6{,}8814$
   $\log s = 2{,}7980$
   ____________________ −
   $2A = 4{,}0834 \Rightarrow A = 2{,}0417$

   $A = 2{,}0417$
   $\log(s-a) = 2{,}4919$
   ____________________________ −

   $$\log\tan\frac{1}{2}\alpha = 9{,}5498 - 10$$

   $$\frac{1}{2}\alpha = 19^0 32'$$

   $$\alpha = 39^0 4'$$

$$
\begin{array}{l}
A = 2{,}0417 \\
\log(s-b) = 2{,}2676 \\
\hline
\end{array} -
$$

$$\log\tan\frac{1}{2}\beta = 9{,}7741 - 10$$

$$\frac{1}{2}\beta = 30^0 44'$$

$$\beta = 61^0 21'$$

$$
\begin{array}{l}
A = 2{,}0417 \\
\log(s-c) = 2{,}1219 \\
\hline
\end{array} -
$$

$$\log\tan\frac{1}{2}\lambda = 9{,}9198 - 10$$

$$\frac{1}{2}\lambda = 39^0 44'$$

$$\lambda = 79^0 28'$$

Akhirnya

$$\alpha + \beta + \lambda = 39^0 4' + 61^0 28' + 79^0 28' = 180$$

3.6 Soal-soal

1) Hitunglah unsur-unsur segitiga siku-siku yang lain jika diketahui:
   a. $c = 945\ cm, \alpha = 33^0 45'$
   b. $c = 585{,}1 cm, \beta = 54^0 21'$
   c. $b = 238{,}7 cm, \alpha = 54^0{,}18'$
   d. $a = 69{,}19 cm, \alpha = 22^0 23'$
   e. $a = 12 cm, c = 13 cm$
   f. $b = 19{,}14 cm, c = 51{,}24 cm$
   g. $a = 16{,}89 cm, b = 13{,}25 cm$
   h. $a = 13{,}50 cm, b = 17{,}05 cm$

2) Kaki-kaki segitiga sama kaki adalah 27,45 cm dan sudut puncaknya $\lambda = 134^0 29'$. , hitunglah panjang alas dan panjang garis tinggi yang dibuat memotong alas tersebut.
3) Panjang alas suatu segitiga sama kaki adalah 21,24 cm dan panjang kaki-kakinya adalah 27,45 cm. Hitunglah besarnya masing-masing sudut dan tinggi segitiga.
4) Suatu trapesium panjang sisi-sisi sejajarnya masing-masing 50,22 cm dan 10,10 cm. Sudut-sudut pada garis alas adalah $58^0 45'$. .Hitunglah panjang sisi miringnya dan tinggi.
5) Suatu segitiga ΔABC.sebarang seperti pada gambar 3.7, hitunglah unsur-unsur yang lain jika diketahui:
   a. $a = 65cm, \beta = 67^0 23', \lambda = 59^0 29'$
   b. $a = 1050cm, \alpha = 96^0 44', \beta = 9^0 32'$
   c. $a = 61cm, \alpha = 15^0 11', \beta = 79^0 37'$
   d. $a = 13{,}3cm, b = 3{,}77cm, \lambda = 124^0 59'$
   e. $a = 401cm, b = 408cm, \lambda = 5^0 43'$
   f. $a = 704cm, b = 302, \lambda = 71^0 16'$
   g. $a = 226{,}7cm, b = 107{,}9, c = 308{,}9$
   h. $a = \sqrt{2}cm, b = \sqrt{3}cm, c = \sqrt{5}7cm$
   i. $a = 2cm, b = 3cm, c = 6cm$
5) Lukislah segitiga berikut dan hitunglah sisi-sisi yang belum diketahui
   a. $a = 2cm, b = 3cm, \beta = 30^0$
   b. $a = 4cm, b = 5cm, \beta = 30^0$
   c. $a = 4cm, b = 3cm, \beta = 120^0$
   d. $a = \sqrt{3}cm, b = \sqrt{5}cm, \beta = 135^0$
   e. $a = 4cm, b = 7cm, \beta = 60^0$

BAB IV
JUMLAH DAN SELISIH DUA SUDUT

Bab IV buku ini membahas hal-hal pokok yang berhubungan dengan jumlah dan selisih dua sudut, antara lain (1) jumlah dua sudut, (2) selisih dua sudut, (3) rumus sudut kembar dan sudut pertengahan (4) perubahan jumlah atau selisih menjadi hasil perkalian sudut, (5) menghitung dua sudut jika diketahui jumlah dan perbandingan sinus sudutnya, (6) menghitung dua sudut jika diketahui jumlah dan perbandingan tangen sudutnya, dan (7) soal-soal.

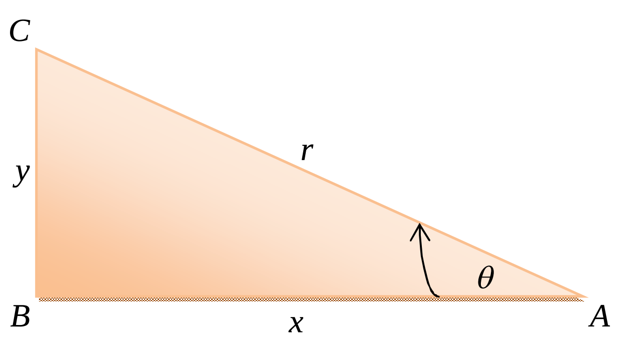
Standar Kompetensi

Setelah mempelajari pokok bahasan ini diharapkan mahasiswa memahami dalil dan rumus dalam jumlah dan selisih sudut serta dapat mengaplikasikannya pada masalah-masalah praktis.

Kompetensi Dasar

5. Mahasiswa dapat menggunakan rumus jumlah dua sudut.
6. Mahasiswa dapat menggunakan rumus selisih dua sudut.
7. Mahasiswa dapat menunjukkan kesamaan rumus sudut kembar.
8. Mahasiswa dapat mengubah rumus jumlah atau selisih menjadi perkalian.
9. Mahasiswa dapat menghitung dua sudut dengan menggunaka rumus jumlah dan perbandingan sinus atau tangen.

4.1 Jumlah Dua Sudut



Gambar 4.1

Pada gambar 4,1 di atas, ΔABC adalah segitiga yang salah satu sudutnya adalah θ dan sudut tersebut siku-siku. Karena $\angle CBA = \theta$ dan misal $AB = x, BC = y$, dan $AC = r$, sehingga berdasarkan ΔABC diperoleh enam perbandingan panjang sisi suatu segitiga yang salah satu sudutnya siku-siku.

Perbandingan dimaksud sesuai dengan gambar 4.1 adalah

$$\frac{BC}{AC}, \frac{AB}{AC}, \frac{BC}{AB}, \frac{AB}{BC} \frac{AC}{AB}, \frac{AC}{BC}.$$

Keenam perbandingan tersebut dinamakan perbandingan goniometri. Karena $AB = x, BC = y$, $AC = r$ dan $\angle BAC = \theta$ maka perbandingan goniometri di atas dapat dinyatakan dalam bentuk yang lain yaitu:

1. $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{y}{r} = \sin\theta$
2. $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{x}{r} = \cos\theta$
3. $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \dfrac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$
4. $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\frac{AB}{AC}}{\frac{BC}{AC}} = \dfrac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot\theta$
5. $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{\frac{AB}{AC}} = \dfrac{1}{\frac{x}{r}} = \dfrac{r}{x} = \dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$
6. $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{1}{\frac{BC}{AC}} = \dfrac{1}{y/r} = \dfrac{r}{y} = \dfrac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$

Menurut teorema Pyathagoras jika suatu ΔABC salah satu sudutnya siku-siku, maka berlaku:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

Selanjutnya secara berurutan persamaan $x^2 + y^2 = r^2$ dibagi x^2, y^2, r^2 diperoleh persamaan baru

1. $\dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = \dfrac{r^2}{r^2}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{r}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \cdots\cdots\cdots (1)$

2. $\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{r^2}{x^2}$

$\Leftrightarrow 1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = \left(\dfrac{r}{x}\right)^2$

$\Leftrightarrow 1 + (\tan\theta)^2 = (\sec\theta)^2$

$\Leftrightarrow 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \cdots\cdots\cdots (2)$

3. $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{y^2} = \dfrac{r^2}{y^2}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 1^2 = \left(\dfrac{r}{y}\right)^2$

$\Leftrightarrow (\cot\theta)^2 + 1 = (\csc\theta)^2$

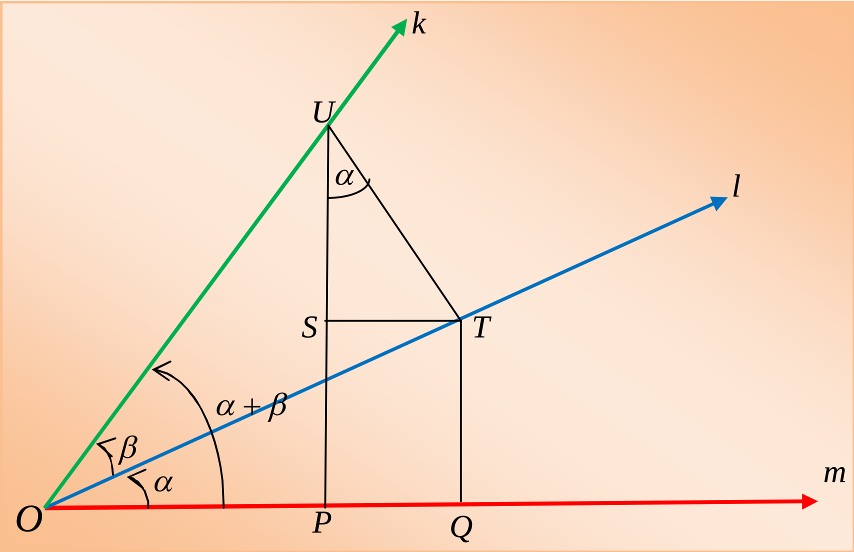
$\Leftrightarrow \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta \cdots\cdots\cdots (3)$

Persamaan (1), (2), dan (3) dinamakan rumus-rumus identitas.

Berdasarkan perbandingan giniometri yang telah disebutkan di atas dapat dibuat beberapa rumus tentang jumlah dua sudut. Rumus-rumus jumlah dua sudut dapat dapat dijelaskan dengan menggunakan gambar berikut ini.

Cara I

Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 4.2

Pada gambar 4.2 di atas terdapat 4 segitiga dan masing-masing adalah siku-siku, yaitu $\Delta QOT, \Delta TSU, \Delta OTU, dan\ \Delta OPU$ dan diketahui $\angle QOT = \alpha,\ \angle TOU = \beta$. $\Delta QOT \approx \Delta TSU$ sehingga $\angle SUT = \alpha$

Berdasarkan ΔOPU diperoleh perbandingan panjang sisi

$\sin \angle POU = \dfrac{UP}{OU}$ dengan UP = PS + SU

Karena $\Delta QOT \approx \Delta TSU$ maka SU = UT cos α

Karena PS = QT dan karena ΔOQT siku-siku di $\angle TQU$ maka OQ = OT cos α dan QT = OT sin α

Karena ΔOTU siku-siku di $\angle OTU$ maka OT = OU cos β dan UT = OU sin β

Karena $\angle POU = \alpha + \beta$

$$\sin \angle POU = \frac{UP}{OU}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta) = \frac{UP}{OU}$$

$$= \frac{PS + SU}{OU}$$

$$= \frac{QT + SU}{OU}$$

$= \dfrac{OT \sin\alpha + UT \cos\alpha}{OU}$

$= \dfrac{OU \cos\beta \sin\alpha + OU \sin\beta \cos\alpha}{OU}$.

Sehingga diperoleh rumus $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ .... (4)

Dengan cara yang sama diperoleh:

$\cos\angle POU = \dfrac{OP}{OU}$, OP = OQ – PQ

Karena $\Delta QOT \approx \Delta TSU$ maka SU = UT cos α

Karena PQ = ST dan karena ΔUST siku-siku di $\angle TSU$ maka ST = SU sin α

Karena ΔOTU siku-siku di $\angle OTU$ maka OT = OU cos β dan UT = OU sin β

Karena ΔOQT siku-siku di $\angle TQU$ maka OQ = OT cos α dan QT = OT sin α

Karena $\angle POU = \alpha + \beta$

$\cos\angle POU = \dfrac{UP}{OU}$

$\Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta) = \dfrac{OP}{OU}$

$= \dfrac{OQ - PQ}{OU}$

$= \dfrac{OQ - ST}{OU}$

$= \dfrac{OT\cos\alpha - UT\sin\alpha}{OU}$

$= \dfrac{OU\cos\beta\cos\alpha - OU\sin\beta\sin\alpha}{OU}$

Sehingga diperoleh rumus $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ .... (5)

Karena $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Maka $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

Sehingga menurut (4) dan (5)

$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$

Persamaan di atas dibagi dengan cos α cos β , diperoleh

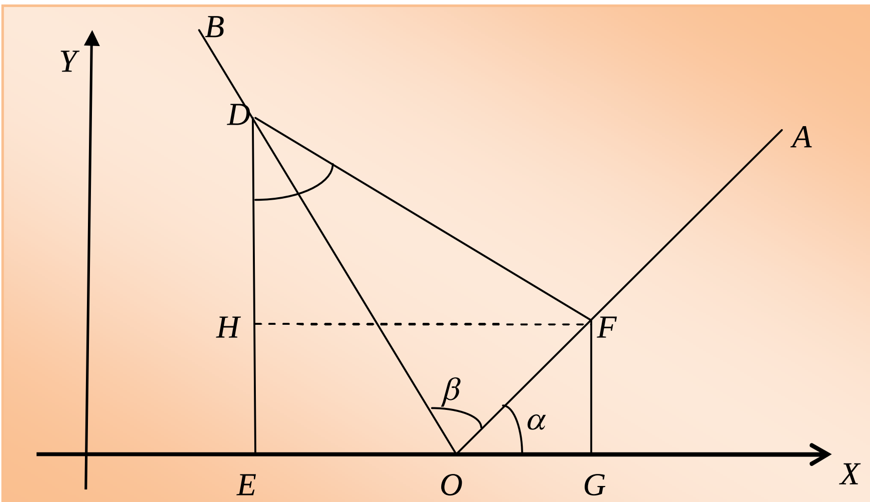
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Sehingga $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ .... (6)

Cara II



Gambar 4.3

Pada gambar 4.3 di atas sudut-sudut α, β adalah sudut lancip, sedangkan $\alpha+\beta$ adalah sudut tumpul.

Selanjutnya pada gambar 4.3 di atas, $\angle XOA=\alpha$ dan $\angle AOB=\beta$. Kemudian dilukis garis-garis $FG \perp OX$ dan $DE \perp OX'$ serta garis-garis $DF \perp OA$ dan $FH \perp DE$.

Pandang ΔDFO dan ΔFGO , Jika $OD = p$

Pada ΔDFO diperoleh $\sin\beta = \dfrac{DF}{OD}$ sehingga $DF = p\sin\beta$ demikian pula $\cos\beta = \dfrac{OF}{OD}$ sehingga $OF = p\cos\beta$

Pandang ΔFGO

Pada ΔFGO $\sin\alpha = \dfrac{FG}{OF}$ sehingga $FG = OF\sin\alpha = p\cos\beta\sin\alpha$

Demikian pula $\cos\alpha = \dfrac{OG}{OF}$ sehingga $OG = OF\cos\alpha = p\cos\beta\cos\alpha$

Dengan cara yang sama pada ΔDHF diperoleh

$DH = p\sin\beta\cos\alpha$ dan $FH = p\sin\beta\sin\alpha$

Sehingga $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{DE}{OD} = \dfrac{DH + FG}{OD} = \dfrac{p\sin\beta\cos\alpha + p\cos\beta\sin\alpha}{p}$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{-OE}{OD} = \frac{OG - FH}{OD} = \frac{p\cos\beta\cos\alpha - p\sin\beta\sin\alpha}{p}$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

Sehingga menurut (7) dan (8)

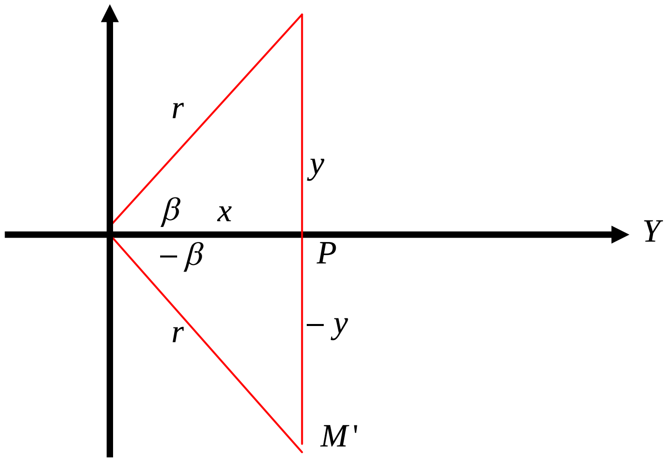
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

Persamaan di atas dibagi dengan cos α cos β, diperoleh:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Sehingga $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ .... (9)



Berdasarkan gambar di atas

$$\sin\beta = \frac{y}{r}, \sin(-\beta) = -\frac{y}{r}$$

Sehingga

$$\sin(-\beta) = -\sin\beta$$

Dengan cara yang sama

$$\cos\beta = \frac{x}{r}, \cos(-\beta) = \frac{x}{r}$$

Sehingga

$$\cos\beta = \cos(-\beta)$$

Berdasarkan fakta ini dapat ditentukan rumus pengurangan dua sudut sebagai berikut

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) \\ &= \sin\alpha\ \cos(-\beta) + \cos\alpha\ \sin(-\beta) \\ &= \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ (-\sin\ \beta) \\ &= \sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\ \beta\ \ ....(6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) \\ &= \cos\alpha\ \cos(-\beta) - \sin\alpha\ \sin(-\beta) \\ &= \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\ \alpha\ (-\sin\ \beta) \\ &= \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\ \alpha\ \sin\ \beta\ \ ....(7)\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

Persamaan di atas dibagi dengan $\cos\alpha\cos\beta$, diperoleh:

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Sehingga $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ .... (8)

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

Persamaan di atas dibagi dengan $\cos\alpha\cos\beta$, diperoleh:

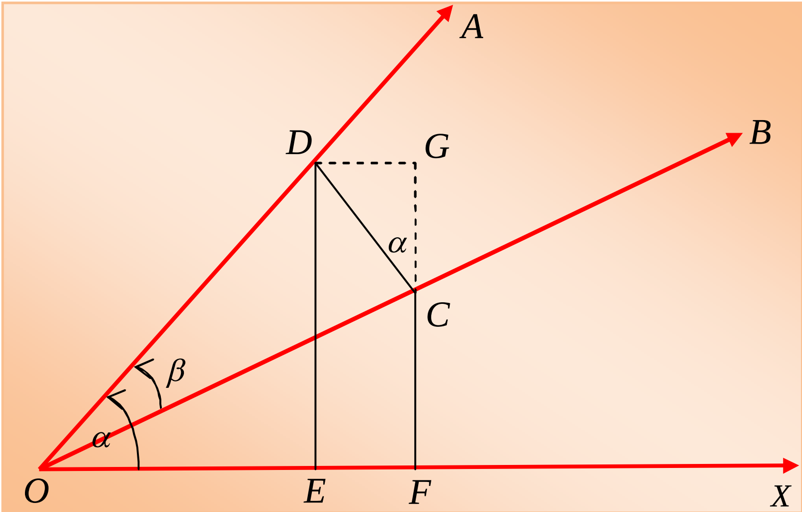
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1+\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

Sehingga $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ .... (9)

4.2 Selisih Dua Sudut



Gambar 4.4

Perhatikan gambar 4.4 di atas.

Misal $\angle XOA = \alpha$, $\angle AOB = \beta$, sehingga $\angle XOB = (\alpha - \beta)$

Misal C adalah titik pada OB Selanjutnya dibuat garis dengan ketentuan $CD \perp OA$, $CF \perp OX$, $DE \perp OX$ dan $DG \perp FC$ sehingga $\angle DCG = \alpha$.

Jika $OC = p$`maka dalam ΔCDO diperoleh

$$\sin \beta = \frac{CD}{OC} = \frac{CD}{p} \text{ atau } CD = p \sin \beta$$

$$\cos \beta = \frac{OD}{OC} = \frac{OD}{p} \text{ atau } OD = p \sin \beta$$

Demikian pula dalam ΔDEO

$$\sin \alpha = \frac{DE}{OD} \text{ atau } DE = OD \sin \alpha$$

$$= p \sin \beta \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{OE}{OD} \text{ atau } OE = OD \cos \alpha$$

$$= p \sin \beta \cos \alpha$$

Dalam ΔCDG

$$\sin \alpha = \frac{DG}{DC} \text{ atau } DG = DC \sin \alpha$$

$\cos\alpha = \dfrac{CG}{DC}$ atau $CG = \cos\alpha$

Dengan demikian diperoleh

$DG = p\sin\alpha\sin\beta$

$CG = p\cos\alpha\sin\beta$

Sehingga

$$\sin\angle BOX = \frac{CF}{OC} = \frac{FG-CG}{OC} = \frac{DE-CD}{OC}$$

Atau

$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{p\sin\alpha\cos\beta - p\cos\alpha\sin\beta}{p} = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos\angle BOX = \frac{OF}{OC} = \frac{OE+EF}{OC} = \frac{OE+DG}{OC}$$

Atau

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{p\cos\alpha\cos\beta - p\sin\alpha\sin\beta}{p} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Berdasarkan kesamaan di atas, diperoleh

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

Persamaan di atas dibagi dengan $\cos\alpha\cos\beta$, diperoleh:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 + \dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Sehingga $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ ....

Contoh soal

1) Buktikan dengan menggunakan rumus yang sesuai

a) $\cos(90^0+\alpha)=-\sin\alpha$

Bukti

Menurut rumus cosinus jumlah dua sudut diperoleh

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

Sehingga

$\cos(90^o+\alpha)=\cos 90^o\cos\alpha-\sin 90^0\sin\alpha$

$=0\cos\alpha-1.\sin\alpha$

$=-\sin\alpha$

b) $\sin(90+\alpha)=\cos\alpha$

Bukti

Menurut rumus sinus jumlah dua sudut diperoleh

$\sin(\alpha+\beta)=\sin c\varepsilon os\beta+\cos\alpha\sin\beta$

Sehingga

$\sin(90^o+\alpha)=\sin 90^o\cos\alpha+\cos 90^0\sin\alpha$

$=1.\cos\alpha-0.\sin\alpha$

$=\cos\alpha$

2) Diketahui $\alpha\ dan\ \beta$ adalah sudut lancip dengan $\cos\alpha=\frac{5}{12}$, dan $\sin\beta=\frac{3}{5}$,

Hitunglah $\sin(\alpha+\beta)$ dan $\cos(\alpha+\beta)$

Jawab

Menurut rumus sinus jumlah diperoleh

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

Karena $\cos\alpha=\frac{5}{12}$, maka $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$

atau $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{1}{12}\sqrt{119}$

Demikian pula, karena $\sin\beta = \frac{3}{5}$,

maka $\cos\beta = \pm\sqrt{1-\sin^2\beta} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\frac{4}{5}$

sehingga

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha+\beta) = \left(\frac{1}{12}\sqrt{119}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{15}\sqrt{119} + \frac{1}{4}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\beta$$

sehingga

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta) = \left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{1}{12}\sqrt{119}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{120}\sqrt{119}$$

Latihan soal

1) Mudahkanlah dengan cara yang sesuai

a) $\sin(90^o - \alpha)$	$f)\sin(180^o + \alpha)$	$k)\sin(270^o + \alpha)$
b) $\cos(90^o - \alpha)$	$g)\sin(180^o - \alpha)$	$l)\tan(180^o - \alpha)$
c) $\tan(90^o - \alpha)$	$h)\sin(270^0 + \alpha)$	$m)\cos(270^o - \alpha)$
d) $\tan(270^o - \alpha)$	$i)\cos(180^o + \alpha)$	$n)\sin(270^o + \alpha)$
e) $\sin(270 - \alpha)$	$j)\cos(270^o + \alpha)$	$o)\cos(270 + \alpha)$

2) Tunjukkan bahwa $\tan(90^o + \alpha) = -\cot\alpha$

3) Diketahui α *dan* β adalah sudut lancip dengan $\cos\alpha = \frac{5}{12}$, dan $\sin\beta = \frac{3}{5}$,

Hitunglah

a) $\sin(\alpha - \beta)$

b) $\cos(\alpha - \beta)$

c) $\sin(\beta - \alpha)$

d) $\cos(\beta - \alpha)$

4) Buktikan

1) $\cot(\alpha + \beta) = \dfrac{\cot\alpha \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$

2) $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$

3) $\cot\alpha - \cot\beta = \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$

5) Buktikan kesamaan berikut ini

a) $\tan(45^0 + \alpha) = \dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{sos\alpha - \sin\alpha}$

b) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha \cos\beta$

c) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha \cos\beta$

d) $\cos(150^0 + \alpha) - \cos(180 - \alpha) = -\sin\alpha$

e) $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$

f) $\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \sin\beta} + \dfrac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin\beta \sin\gamma} + \dfrac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin\gamma \sin\alpha} = 0$

6) Uraikanlah dan sederhanakan!

a) $\sin\left((\alpha + \beta) + \gamma\right)$

b) $\cos\left((\alpha + \beta) + \gamma\right)$

c) $\cos\left((\alpha - \beta) + \gamma\right)$

d) $\sin\left((\alpha - \beta) - \gamma\right)$

4.3 Rumus Sudut Kembar dan Sudut Pertengahan

Sebagaimana telah dijelaskan dalam rumus sinus jumlah dua sudut yang telah dijelaskan dalam pasal 4.1

$\sin\,(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

Jika $\alpha=\beta$ maka rumus di atas menjadi

$\sin\,(\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

Dengan cara yang sama diperoleh

$\sin\,\alpha=\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\sin\,3\alpha=\sin\left(\frac{3\alpha}{2}+\frac{3\alpha}{2}\right)=\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)=2\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)$

$\sin\,4\alpha=\sin(2\alpha+2\alpha)=\sin 2\alpha\cos 2\alpha+\cos 2\alpha\sin 2\alpha=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$

Sehingga secara umum dapat ditulis dalam bentuk umum:

$$\sin\,n\alpha=2\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

Selanjutnya menurut rumus cosinus jumlah dua sudut yang telah dijelaskan pada pasal 4.1

$\cos\,(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

Jika $\alpha=\beta$ maka rumus di atas menjadi

$\cos\,(\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

Karena

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

Maka

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\left(1-\cos^2\alpha\right)=2\cos^2\alpha-1$

Atau

$\cos 2\alpha=\left(1-\sin^2\alpha\right)-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

Dengan cara yang sama diperoleh

$\cos\alpha=2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1\;atau\;\cos\alpha=1-2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$\cos 3\alpha = 2\cos^2\left(\frac{3\alpha}{2}\right) - 1 \textit{ atau } \cos 3\alpha = 1 - 2\sin^2\left(\frac{3\alpha}{2}\right)$$

$$\cos 4\alpha = 2\cos^2(2\alpha) - 1 \textit{ atau } \cos 4\alpha = 1 - 2\sin^2(2\alpha)$$

Sehingga secara umum dapat ditulis dalam bentuk:

$$\cos n\alpha = 2\cos^2\left(\frac{n\alpha}{2}\right) - 1 \textit{ atau } \cos n\alpha = 1 - 2\sin^2\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

dan seterusnya.

Demikian pula untuk rumus tangen jumlah dua sudut, diperoleh

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

Jika $\alpha = \beta$ maka rumus di atas menjadi

$$\tan(\alpha + \alpha) = \tan 2\alpha = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\tan\alpha = \tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\tan 3\alpha = \tan\left(\frac{3\alpha}{2} + \frac{3\alpha}{2}\right) = \frac{\tan\left(\frac{3\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{3\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{3\alpha}{2}\right)} = \frac{2\tan\left(\frac{3\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{3\alpha}{2}\right)}$$

$$\tan 4\alpha = \tan(2\alpha + 2\alpha) = \frac{\tan(2\alpha) + \tan(2\alpha)}{1 - \tan^2(2\alpha)}$$

dan seterusnya

Dengan menggunakan rumus-rumus di atas, selanjutnya dapat ditentukan rumus setengah sudut jika cosinusnya sudut tersebut diketahui, misalnya:

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1+\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

Selanjutnya dapat dibuktikan beberapa rumus berikut.

$$\sec\alpha = \pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

Soal-soal

1) Diketahui

$$\cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Hitunglah perbandingan-perbandingan goniometri sudut tersebut dan sudut $22^0 30'$

2) Diketahui

$$\tan\frac{\alpha}{2} = p$$

Tentukan nilai dari

$\cos\alpha$

3) Hitunglah

$\cos\alpha$

Jika diketahui $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - t$

4) Hitunglah

$\sin\alpha$

Jika diketahui $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 + t$

Jawab

Menurut rumus identitas

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$$

Sehingga

$$1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sec^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + (1+t)^2 = \sec^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{1+1+2t+t^2} \; \textit{atau} \; \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2+2t+t^2}}$$

Menurut rumus identitas yang lain

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1$$

5) Buktikan bahwa

$$\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{2\cot\alpha}$$

Jawab

$$\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{\cot\alpha-\tan\alpha}{2\cot\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1+\left(\cos^2-\sin^2\alpha\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+\left(\cos^2-\sin^2\alpha\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}{2\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)-\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}{2\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{\cot\alpha-\tan\alpha}{2\cot\alpha}$$

6) Buktikan bahwa

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

7) Hitunglah

$\cos\alpha$

Jika diketahui

$$\tan\frac{\alpha}{2}=2p$$

4.4 Perubahan Jumlah atau Selisih Menjadi Hasil Perkalian Sudut

1) Menurut rumus cosinus jumlah dua sudut dan cosinus selisih sudut diperoleh:

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

________________________________ +

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$$

Atau

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)$$

Jika

$(x+y) = A$ dan $(x-y) = B$ maka diperoleh $x = \frac{1}{2}(A+B)$ dan $y = \frac{1}{2}(A-B)$

sehingga diperoleh

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

2) Menurut rumus cosinus jumlah dua sudut dan cosinus selisih sudut diperoleh:

$$\begin{array}{l} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \hline \cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \sin y \end{array} \; -$$

Atau

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}\left(\cos(x+y) - \cos(x-y)\right)$$

Jika

$(x+y) = A$ dan $(x-y) = B$ maka diperoleh $x = \frac{1}{2}(A+B)$ dan $y = \frac{1}{2}(A-B)$

sehingga diperoleh

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$

3) Menurut rumus sinus jumlah dua sudut dan cosinus selisih sudut diperoleh:

$$\begin{array}{l} \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \hline \sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y \end{array} \; +$$

Atau

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)$$

Jika

$(x+y)=A$ dan $(x-y)=B$ maka diperoleh $x=\frac{1}{2}(A+B)$ dan $y=\frac{1}{2}(A-B)$

sehingga diperoleh

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

4) Menurut rumus sinus jumlah dua sudut dan sinus selisih sudut diperoleh:

$$\begin{array}{l} \sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \\ \sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y \\ \hline \sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y \end{array} \; -$$

Atau

$$\cos x\sin y=\frac{1}{2}\left(\sin(x+y)-\sin(x-y)\right)$$

Jika

$(x+y)=A$ dan $(x-y)=B$ maka diperoleh $x=\frac{1}{2}(A+B)$ dan $y=\frac{1}{2}(A-B)$

sehingga diperoleh

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$

Berdasarkan rumus-rumus perkalian yang dapat diubah menjadi rumus penjumlahan tersebut dapat ditentukan ukuran dua sudut, misalnya x dan y jika hasil perkalian dua sudut tersebut diketahui.

Misal $x+y=p$ dan $\sin x.\sin y=p$

Berdasarkan pemisalan di atas

$2\sin x.\sin y=2p$

Karena $2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)$ maka

$\cos(x-y)-\cos(x+y)=\cos(x-y)-\cos\alpha=2p$

Sehingga $(x-y)$ dapat dihitung, Karena $(x+y)$ diketahui.

Dengan cara yang sama dapat ditentukan besarnya dua sudut x dan y jika perkalian cosinusnya diketahui, demikian pula yang diketahui perkalin sinus dan cosinus, serta diketahui perkalian cosinus dan sinusnya.

Contoh

1) Hitunglah sudut-sudut $x\ (x < 180^0)$ dan $y\ (y < 180^0)$,jika $x + y = 60^0$ dan $\sin x \sin y = 0{,}2$

   Jawab

   Berdasarkan soal diatas diketahui $\alpha = 60^{0`}$ dan $\sin x \sin y = 0{,}2$

   Sehingga

   $2\sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y) = \cos(x - y) - \cos\alpha = 2p$

   $\Leftrightarrow 2(0{,}2) = \cos(x - y) - \cos 60^0$

   $\Leftrightarrow \cos(x - y) = 0{,}400 + 0{,}500$

   $\Leftrightarrow \cos(x - y) = 0{,}900$

   $\Leftrightarrow (x - y) = 0{,}900$

   Karena $x + y = 60^0$ dan $x - y = ...$

   Akhirnya dengan metode substitusi diperoleh $x = ...$ dan $y = ...$

2) Hitunglah sudut-sudut $x\ (x < 180^0)$ dan $y\ (y < 180^0)$,jika $x - y = 10^0$ dan $\cos x \cos y = 0{,}4$

   Jawab

   Berdasarkan soal diatas diketahui $x - y = \alpha = 10^{0`}$ dan $\cos x \cos y = 0{,}4$

   Sehingga

   $2\cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y) = \cos(x + y) - \cos\alpha = 2p$

   $\Leftrightarrow 2(0{,}4) = \cos(x + y) + \cos 10^0$

   $\Leftrightarrow \cos(x + y) = 0{,}800 + \cos 10^0$

   $\Leftrightarrow \cos(x + y) = ...$

   $\Leftrightarrow (x - y) = ...$

   Karena $x - y = 10^0$ dan $x + y = ...$

   Akhirnya dengan metode substitusi diperoleh $x = ...$ dan $y = ...$

Soal-soal

1) Ubahlah jumlah atau selisih berikut ini menjadi suatu perkalian dan jika mungkin mudahkan

$\sin 33^0 + \sin 23^0$

$\cos 33^0 + \cos 23^0$

$\sin 33^0 - \sin 23^0$

$\cos 33^0 - \cos 23^0$

2. Buktikan kesamaan-kesamaan berikut ini.

a) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \dfrac{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$

b) $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = -\dfrac{\cot(\alpha+\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$

c) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = \tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

d) $\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = -\cot\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

e) $(\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\alpha - \sin\beta) = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

f) $(\cos\alpha + \cos\beta)(\cos\alpha - \cos\beta) = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

g) $(\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha) = 4\sin 2\alpha\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

4.5 Menghitung Dua Sudut, Jika Diketahui Jumlah dan Perbandingan Sinus Sudutnya

Misal dalam suatu segitiga diketahui

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{p}{q}\ dan\ x + y = \alpha$$

Dari persamaan di atas dapat dibuat persamaan baru

$$\frac{\frac{\sin x}{\sin y}+1}{\frac{\sin x}{\sin y}-1}=\frac{\frac{p}{q}+1}{\frac{p}{q}-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\sin x+\sin y}{\sin y}}{\frac{\sin x-\sin y}{\sin y}}=\frac{\frac{p+q}{q}}{\frac{p-q}{q}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\frac{p+q}{p-q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)}{2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)}=\frac{p+q}{p-q}$$

Jika ruas kiri dibagi dengan

$$2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$$

Diperoleh

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(x+y)}{\tan\frac{1}{2}(x-y)}=\frac{p+q}{p-q}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{1}{2}(x-y)=\frac{p-q}{p+q}\tan\frac{1}{2}(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{1}{2}(x-y)=\left(\frac{p-q}{p+q}\right)\tan(x+y)$$

Sehingga $x-y$ dapat dihitung jika $x+y$ diketahui, demikian pula x dan y dapat diketahui.

Contoh soal

1) Hitunglah x dan y dengan $(x<180^0, y<180^0)$ jika diketahui

   a. $x+y=60^0, \sin x:\sin y=1:2$

   Jawab

   Berdasarkan soal tersebut di atas dapat diketahui $x+y=\alpha=60^0$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{1}{2}, \text{ sehingga diperoleh } p = 1, q = 2$$

Sehingga

$$\tan\frac{1}{2}(x-y) = \frac{p-q}{p+q}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{1}{2}(x-y) = \frac{1-2}{1+2}\tan\left(\frac{60^0}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{1}{2}(x-y) = \frac{-1}{3}\tan 30^0$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{1}{2}(x-y) = \frac{-\tan 30^0}{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{1}{2}(x-y) = \frac{-\frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{6}$$

4.6 Menghitung Dua Sudut, Jika Diketahui Jumlah dan Perbandingan Tangen Sudutnya.

Misal dalam suatu segitiga diketahui

$$\frac{\tan x}{\tan y} = \frac{p}{q}\ dan\ x + y = \alpha$$

Dari persamaan di atas dapat dibuat persamaan baru

$$\frac{\frac{\tan x}{\tan y}+1}{\frac{\tan x}{\tan y}-1} = \frac{\frac{p}{q}+1}{\frac{p}{q}-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\tan x + \tan y}{\tan y}}{\frac{\tan x - \tan y}{\tan y}} = \frac{\frac{p+q}{q}}{\frac{p-q}{q}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y} = \frac{p+q}{p-q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos y}{\sin x \cos y - \sin y \cos x} = \frac{p+q}{p-q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\sin \alpha}{\sin(x-y)} = \frac{p+q}{p-q}$$

Sehingga $x-y$ dapat dihitung jika $x+y$ diketahui, demikian pula x dan y dapat diketahui.

4.7 Menghitung Dua Sudut, Jika Diketahui Jumlah dan Perbandingan Cosinus Sudutnya.

Misal dalam suatu segitiga diketahui

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{p}{q} \; dan \; x + y = \alpha$$

Dari persamaan di atas dapat dibuat persamaan baru

$$\frac{\frac{\cos x}{\cos y} + 1}{\frac{\cos x}{\cos y} - 1} = \frac{\frac{p}{q} + 1}{\frac{p}{q} - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\cos x + \cos y}{\cos y}}{\frac{\cos x - \cos y}{\cos y}} = \frac{\frac{p+q}{q}}{\frac{p-q}{q}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x + \cos y}{\cos y - \cos y} = \frac{p+q}{p-q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)}{-2\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)} = \frac{p+q}{p-q}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)}{\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)} = \frac{p+q}{p-q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)}{\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)} = -\left(\frac{p+q}{p-q}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{1}{2}(x+y)\cot\frac{1}{2}(x-y) = -\left(\frac{p+q}{p-q}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{1}{2}(x-y) = \tan\frac{1}{2}(x-y)\left(\frac{p+q}{q-p}\right)$$

Sehingga $x-y$ dapat dihitung jika $x+y$ diketahui, demikian pula x dan y dapat diketahui.

Contoh

1) Hitunglah sudut-sudut $x\ (x < 180^0)$ dan $y\ (y < 180^0)$,jika $x + y = 50^0$ dan $\tan x : \tan y = 5 : 11$

Jawab

Berdasarkan soal diatas diketahui $\alpha = 50^{0`}$ dan $\dfrac{p}{q} = \dfrac{5}{11}$

Sehingga

$$\Leftrightarrow \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y} = \frac{5+11}{5-11}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos y}{\sin x \cos y - \sin y \cos x} = \frac{16}{-6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\sin 50^0}{\sin(x-y)} = \frac{16}{-6}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x-y) = -\frac{16}{6}\sin 50^0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) = ...$$

Karena $x + y = 50^0$ dan $x - y = ...$

Akhirnya dengan metode substitusi diperoleh $x = ...$ dan $y = ...$

4.7 Soal-soal

1) Buktikan kesamaan

a) $\sin\alpha\cos(\beta-\alpha) + \cos\alpha\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta$.

b) $(\sec x - 1)(\sec + 1) = \tan^2 x$

c) $(1+\sin x)(1-\sin x)=\dfrac{1}{\sec^2 x}$

d) $\sec x-\sin x\cos x=\cos x$

e) $\dfrac{\sec^2 x-1}{\sec^2 x}=\sin^2 x$

f) $\sin^2 x+\dfrac{1}{\sec^2 x}=1$

g) $\cos 3y=4\cos^3 y-3\cos y$

h) $\sin 4s=8\sin s\cos^3 s-4\sin s\cos s$

i) $(1+\cos x)(1-\cos x)=\sin^2 x$

j) $\dfrac{\sin p}{\cos p}+\dfrac{\cos p}{\sec p}=1$

k) $(1-\cos^2 x)(1+\cot^2 x)=1$

l) $\sin t(\csc t-\sin t)=\cos^2 t$

m) $\dfrac{1-\csc^2 y}{\csc^2 y}=-\dfrac{1}{\sec^2 t}$

2) Diketahui $\tan\alpha=-n$,hitunglah perbandingan goniometri sudut α yang lainnya.

3) Diketahui $\sec\alpha=-p$,hitunglah perbandingan goniometri sudut α yang lainnya.

4) Buktikan bahwa:

a) $\tan\alpha-\sin\alpha=\tan\alpha\sin\alpha\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

b) $\sin 8t=8\sin t\cos t\cos 2t\cos 4t$

c) $\sin 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

d) $\sin(x-y)+\sin(y-z)+\sin(z-x)=-4\sin\dfrac{1}{2}(x-y)\sin\dfrac{1}{2}(y-z)\sin\dfrac{1}{2}(z-x)$

5) Jika $p+q+r+s=180^0$

buktikan bahwa $\cos p\cos q+\cos q\cos r=\sin p\sin q+\sin q\sin r$

6) Hitunglah x dan y dengan $(x<180^0, y<180^0)$ jika diketahui $x+y=70^0$,

$\sin x:\sin y=5:3$

7) Hitunglah x dan y dengan $(x < 180^0, y < 180^0)$ jika diketahui $x + y = 150^0$,
$\sin x : \sin y = 1 : 2$

8) Hitunglah x dan y dengan $(x < 180^0, y < 180^0)$ jika diketahui $x + y = 20^0$,
$\cos x : \cos y = 1044 : 1111$

9) Hitunglah x dan y dengan $(x < 180^0, y < 180^0)$ jika diketahui $x + y = 100^0$,
$\cos x : \cos y = 3 : 7$

10) Hitunglah x dan y dengan $(x < 180^0, y < 180^0)$ jika diketahui $x + y = 50^0$,
$\tan x : \tan y = 5 : 11$

11) Hitunglah x dan y dengan $(x < 180^0, y < 180^0)$ jika diketahui $x + y = 60$,
$\tan x : \tan y = 1 : 2$

12) Hitunglah sudut-sudut x $(x < 180^0)$ dan y $(y < 180^0)$,jika $x + y = 100^0$ dan
$\sin x \cos y = 0{,}6$

13) Hitunglah sudut-sudut x $(x < 180^0)$ dan y $(y < 180^0)$,jika $x - y = 15^0$ dan
$\cos x \sin y = 0{,}36$

14) Hitunglah sudut-sudut x $(x < 180^0)$ dan y $(y < 180^0)$,jika $x + y = 70^0$ dan
$\tan x \tan y = 0{,}25$

15) Hitunglah sudut-sudut x $(x < 180^0)$ dan y $(y < 180^0)$,jika $x - y = 50^0$ dan
$\tan x - \tan y = 1{,}5$

BAB V
GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI

Bab V buku ini membahas empat hal pokok yang berhubungan dengan grafik fungsi trigonometri, antara lain (1) fungsi trigonometri (2) grafik fungsi trigonometri, (3) fungsi cyclometri, dan (4) soal-soal.

Standar Kompetensi

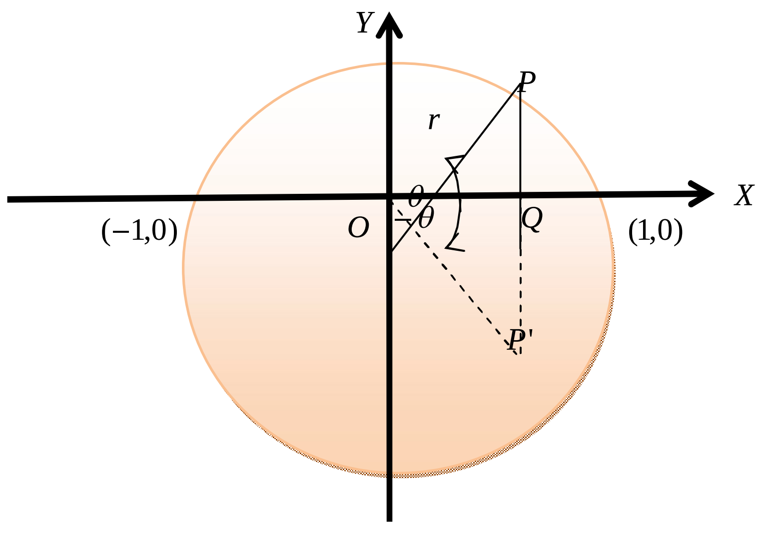
Setelah mempelajari pokok bahasan ini diharapkan mahasiswa dapat memahami gambar grafik fungsi trigonometri dan pengembangannya serta memahami bentuk-bentuk fungsi cyclometri.

Kompetensi Dasar

1. Mahasiswa dapat menggambarkan grafik fungsi trigonometri.
2. Mahasiswa dapat menjelaskan fungsi cyclometri sebagai fungsi balikan.
3. Mahasiswa dapat membuktikan beberapa kesamaan dalam fungsi cyclometri.

5.1 Fungsi Trigonometri

Untuk menggambarkan fungsi trigonometri, kita gambarkan lingkaran satuan yaitu lingkaran yang berjari-jari satu satuan. Lingkaran tersebut sebagaimana terlihat pada gambar 5.1 berikut ini.



Gambar 5.1

Selanjutnya kita gunakan referensi arah positip berlawanan dengan arah jarum jam, artinya makin besar sudut θ jika jari-jari r berputar berlawanan dengan jarum jam. Berikut ini adalah fungsi-fungsi trigonometri dengan θ sebagai peubah bebas.

1. $y = \sin\theta$
2. $y = \cos\theta$
3. $y = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$
4. $y = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$
5. $y = \dfrac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$
6. $y = \dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$

Fungsi-fungsi trigonometri di atas dapat dijelaskan sebagai berikut.

Fungsi Sinus

Dengan membuat jari-jari $r = OP = 1$ sebagaimana pada gambar 5.1 dapat dinyatakan $\sin\theta = \dfrac{PQ}{r} = PQ$. $PQ = 0$ pada saat $\theta = 0^0$ dan bertambah besar sampai maksimum $PQ = 1$ pada saat $\theta = 90^0$. Selanjutnya PQ menurun lagi dan mencapai $PQ = 0.$ pada waktu $\theta = 180^0$ Setelah itu PQ menjadi negative (arah turun ke bawah) dan mencapai minimum $PQ = -1$ pada saat $\theta = 270^0$, kemudian meningkat lagi mencapai $PQ = 0.$ pada saat $\theta = 360^0$. Setelah itu keadaan akan berulang dan satu siklus (perioda) pada saat $\theta = 720^0.$ Kejadian yang demikian ini dan berulang-ulang sampai tak berhingga banyaknya disebut satu perioda. Berdasarkan fakta ini diperoleh

$\sin 0^0 = 0$
$\sin 90^0 = 1$
$\sin 180^0 = 0$
$\sin 270^0 = -1$
$\sin 360^o = 0$

Fungsi Cosinus

Karena telah ditetapkan jari-jari $r = OP = 1$ sebagaimana pada gambar 5.1 maka $\cos\theta = \dfrac{OQ}{r} = OQ.$ $OQ = 1$ pada saat $\theta = 0^0$ dan dan mengecil jika θ membesar sampai mencapai minimum $OQ = 0$ pada saat $\theta = 90^0$. Selanjutnya OQ meningkat lagi tetapi negative dan mencapai $OQ = -1$ pada waktu $\theta = 180^0$ Setelah itu OQ mengecil dan tetap dan mencapai minimum $OQ = 0$ pada saat $\theta = 270^0$, kemudian meningkat lagi mencapai $OQ = 1.$ pada saat $\theta = 360^0$. Setelah itu keadaan akan berulang dan satu siklus (perioda) pada saat $\theta = 720^0.$ Kejadian yang demikian ini dan berulang-ulang sampai tak berhingga banyaknya disebut satu perioda. Berdasarkan fakta ini diperoleh

$\cos 0^0 = 1$
$\cos 90^0 = 0$
$\cos 180^0 = -1$
$\cos 270^0 = 0$
$\cos 360^o = 1$

Pada ΔOPQ dan $\Delta OP'Q$ yang salah satu sudutnya siku-siku sisi tegak selalu lebih kecil dari sisi miring. Oleh karena itu nilai $\sin\theta$ maupun $\cos\theta$ selalu terletak dalam $-1 \le \sin\theta \le 1$ dan $-1 \le \cos\theta \le 1$.

Fungsi Tangen

Berdasarkan gambar 5.1 diperoleh perbandingan

$$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ} \text{ dan } \tan(-\theta) = \frac{P'Q}{OQ} = -\frac{PQ}{OQ} = -\tan\theta.$$

Nilai $\tan\theta$ akan menjadi 0 pada saat $\theta = 0^0$ dan akan menuju $+\infty$ jika θ mendekati 90^0. Karena pada waktu itu PQ juga menurun lagi dan mencapai $PQ = 0$. pada waktu juga $+\infty$ dan $\tan(-\theta)$ akan menuju $-\infty$ pada saat saat θ mendekati $-\infty$.

Nilai $\tan\theta = 1$ bila $\theta = 45^0$. Karena pada saat tersebut $PQ = OQ$. Sebaliknya nilai $\tan(-\theta) = -1$ jika $\theta = 45^0$. Berdasarkan fakta ini diperoleh

$$\tan 0^0 = \frac{\sin 0^0}{\cos 0^0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan 90^0 = \frac{\sin 90^0}{\cos 90^0} = \frac{1}{0} = tidak\ terdefinisi$$

$$\tan 180^0 = \frac{\sin 180^0}{\cos 180^0} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\tan 270^0 = tidak\ terdefinisi$$

$$\tan 360^o = 0$$

Fungsi Cotangen

Berdasarkan gambar 5.1 diperoleh perbandingan

$$\cot\theta = \frac{OQ}{OP} \text{ dan } \cot(-\theta) = \frac{OQ}{P'Q} = -\frac{OQ}{PQ} = -\cot\theta.$$

Nilai $\cot\theta$ akan menuju $+\infty$ jika θ menuju 0^0. Karena PQ akan menuju 0 walaupun OQ menuju 0. Dalam hal lain $\cot\theta = 0$ jika $\theta = 90^0$ hal ini dikarenakan $OQ = 0$. Sebaliknya nilai $\cot\theta$ akan menuju $-\infty$ jika θ menuju -0, $\cot\theta = 0$ jika $\theta = -90^0$. Karena $P'Q$. $-\infty$. Berdasarkan fakta ini diperoleh

$$\cot 0^0 = \frac{\cos 0^0}{\sin 0^0} = \frac{1}{0} = tidak\ terdefinisi$$

$$\cot 90^0 = \frac{\cos 90^0}{\sin 90^0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 180^0 = \frac{\cos 180^0}{\sin 180^0} = \frac{-1}{0} = tidak\ terdefinisi$$

$$\cot 270^0 = 0$$

$$\cot 360^o = tidak\ terdefinisi$$

Fungsi Secan dan Cosecan

Berdasarkan gambar 5.1 dibuat perbandingan

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{r}{OQ} \text{ dan } \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{r}{PQ}$$

Nilai $\sec\theta$ menuju ∞ jika θ menuju 90^0 . Karena OQ menuju 0 dan $\sec\theta = 1$ pada waktu $\theta = 0^0$ dan pada saat tersebut $OQ = r$ atau $\cos\theta = 1$. Sementara itu $\csc\theta$ akan menuju ∞ jika θ , menuju 0. Karena $\sin\theta = 0$ Berdasarkan fakta ini diperoleh

$$\sec 0^0 = \frac{1}{\cos 0^0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 90^0 = \frac{1}{\cos 90^0} = \frac{1}{0} = \textit{tidak terdefinisi}$$

$$\sec 180^0 = \frac{1}{\cos 180^0} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\sec 270^0 = \frac{1}{\sin 270^0} = \frac{1}{0} = \textit{tidak terdefinisi}$$

$$\sec 360^o = \frac{1}{\cos 360^0} = \frac{1}{1} = 1$$

dan

$$\csc 0^0 = \frac{1}{\sin 0^0} = \frac{1}{0} = \textit{tidak terdefinisi}$$

$$\csc 90^0 = \frac{1}{\sin 90^0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc 180^0 = \frac{1}{\sin 180^0} = \frac{1}{0} = \textit{tidak terdefinisi}$$

$$\csc 270^0 = \frac{1}{\sin 270^0} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\csc 360^o = \frac{1}{\sin 360^0} = \frac{1}{0} = \textit{tidak terdefinisi}$$

5.2 Grafik Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri yang sederhana dapat digambarkan langsung grafiknya dengan cara mensubstitusikan nilai-nilai peubah bebas x kedalam peubah tidak bebas y. Sedangkan untuk fungsi trigonometri yang tidak sederhana grafiknya tidak dapat digambarkab secara langsung.

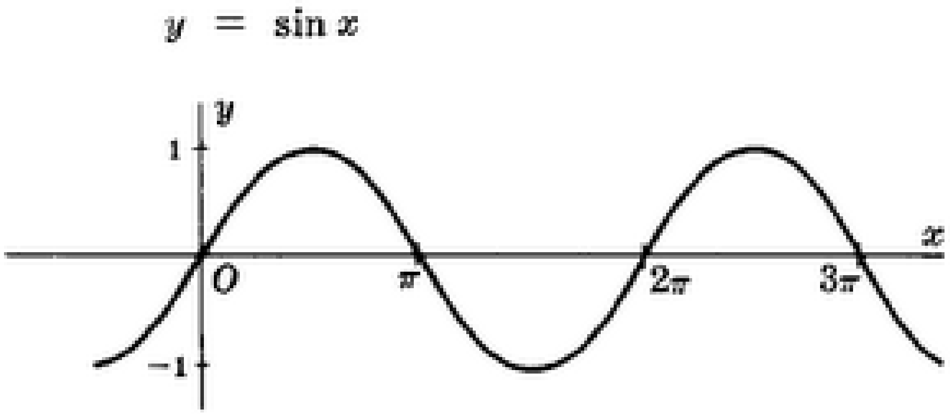
Langkah untuk menggambar grafik fungsi trigonometri terdapat beberapa syarat yang perlu dan cukup, antara lain (1) fungsinya dibuat dalam bentuk yang paling sederhana, (2) tentukan nilai ekstrim fungsi, (3) menentukan titik potong kurva dengan sumbu-sumbu koordinat, dan (4) menentukan titik lainnya. Untuk memenuhi syarat cukup dan perlu di atas, maka ukuran sudut sebagai skala dalam sumbu mendatar bidang XOY dapat ditentukan satuannya dalam bentuk derajat atau radin sebagaimana yang dijelaskan pada bab sebelumnya. Sedangkan sumbu y merupakan daerah hasil fungsi yang untuk beberpa fungsi trigonometri konstantanya terletak $-1 \leq y \leq 1$.

Grafik fungsi sinus

Fungsi $f(x) = \sin x$ mencapai nilai maksimum di $x = 1$ pada saat nilai peubah $x = \frac{\pi}{2}$, mencapai 0 pada saat $x = \pi$. Selanjutnya Grafik fungsi sinus mencapai nilai minimum pada saat $x = \frac{3\pi}{2}$ atau $\frac{5\pi}{2}$. dan fungsi sinus kembali lagi ke 0 pada saat $x = \pi$. Hal yang digambarkan diata dinamakan 1 perioda. Beberapa nilai sudut untuk satu periode dapat dilihat pada tabel berikut ini.

x	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0	210^0	240^0	270^0	300^0	330^0	360^0
y	0	0,5	0,83	1	0,86	0,5	0	-0,5	-0.86	-1	-0.86	-0,5	0

Sehingga grafik untuk $y = \sin x$ dalam interval $0 \leq x \leq 360^0$ adalah sebagai berikut



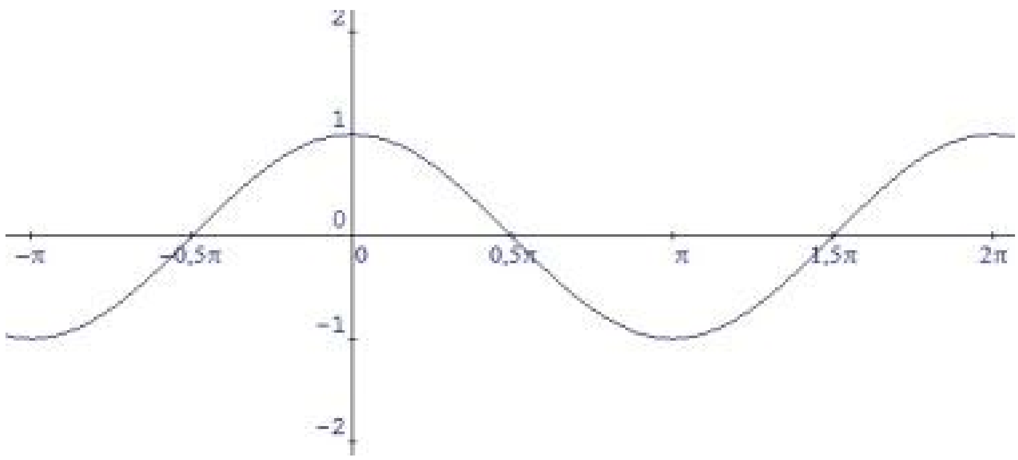
Gambar 5.2

Grafik fungsi cosinus

Fungsi $f(x) = \cos x$ mencapai nilai maksimum di $x = 1$ pada saat nilai peubah $x = 0$, mencapai 0 pada saat $x = \dfrac{\pi}{2}$. Selanjutnya Grafik fungsi cosinus mencapai nilai minimum pada saat $x = \pi$. dan fungsi cosinus kembali lagi ke 0 pada saat $x = \dfrac{3\pi}{2}$. Hal yang digambarkan diatas dinamakan 1 perioda. Beberapa nilai sudut untuk satu periode dapat dilihat pada tabel berikut ini.

x	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0	210^0	240^0	270^0	300^0	330^0	360^0
y	1	0,83	0,50	0	0,86	-5	0	-0,5	-0.86	0	0.83	0.5	0

Sehingga grafik untuk $y = \cos x$ dalam interval $0 \le x \le 360^0$ adalah sebagai berikut



Gambar 5.3

Grafik fungsi tangen

Fungsi $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ sehinga pada saat nilai $\cos x=0$ maka nilai dari $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\textit{tidak terdefinisi.}$

Berdasarkan data tersebut maka periode $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ adalah 180^0.

Demikian pula untuk grafik

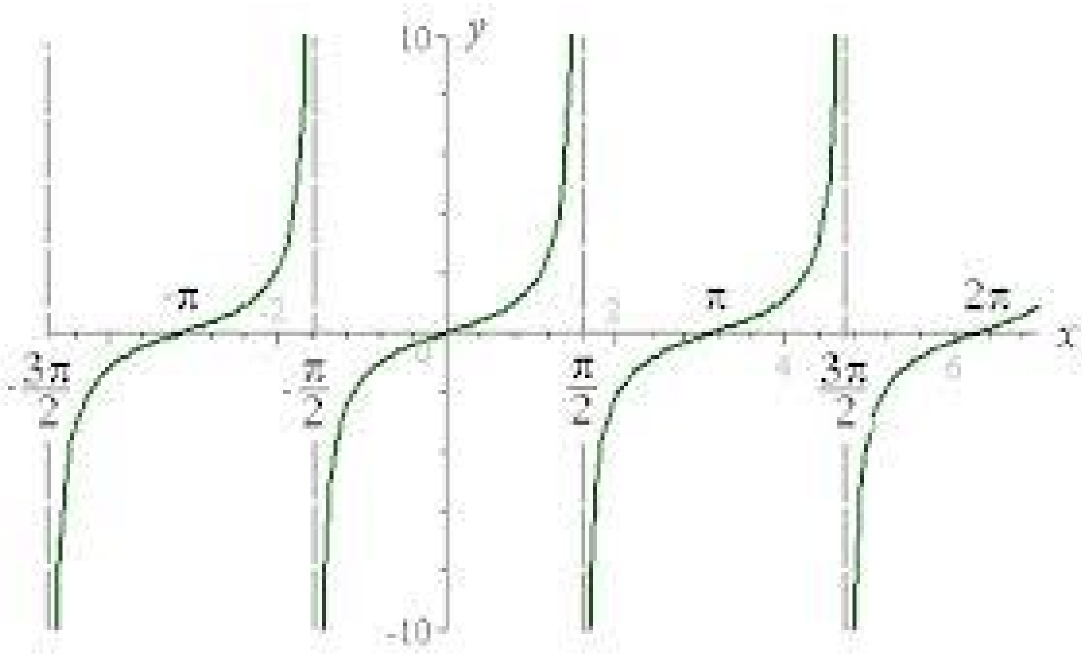
$f(x)=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$, $f(x)=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$, $f(\csc x)=\dfrac{1}{\sin x}$.

Secara berturut-turut, grafik

$f(x)=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$, $f(x)=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$, $f(\csc x)=\dfrac{1}{\sin x}$

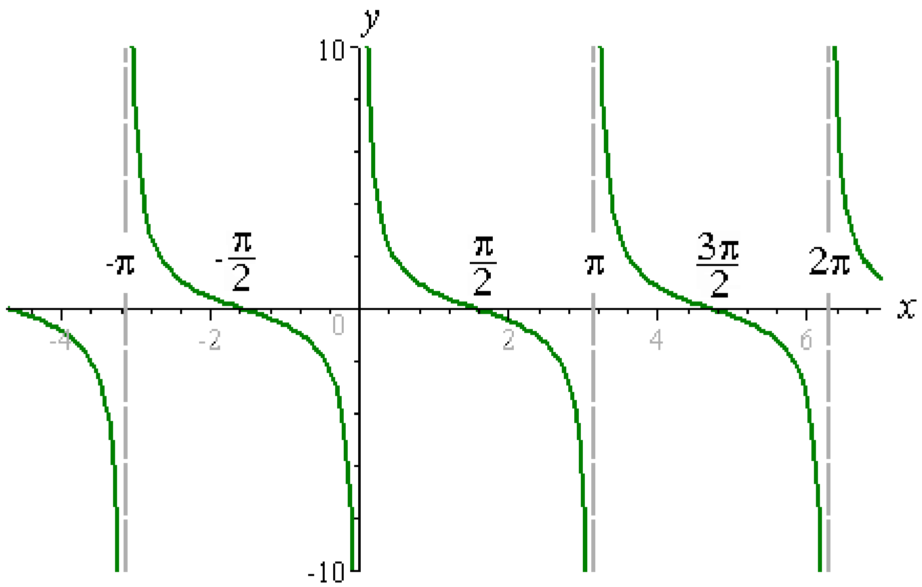
Seperti pada gambar berikut.

Grafik fungsi tangen



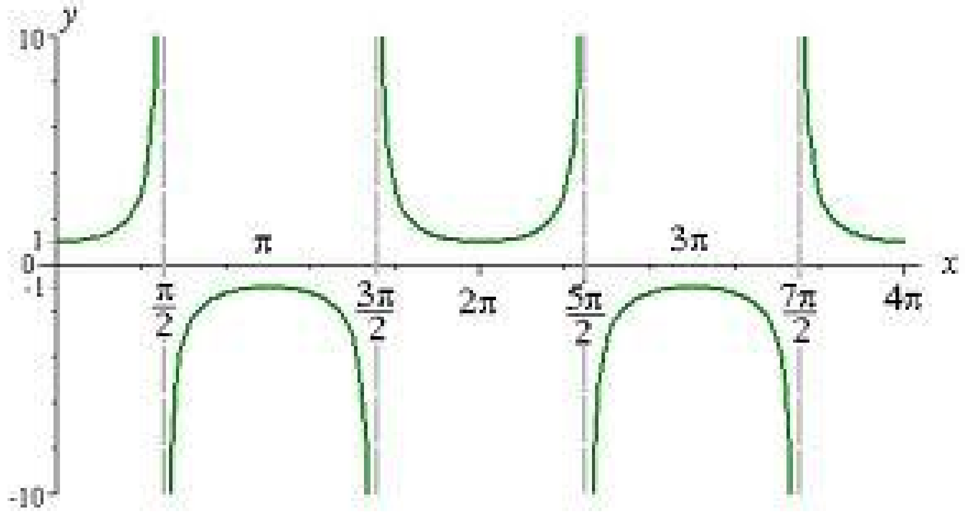
Gambar 5.4

Grafik fungsi cotangen



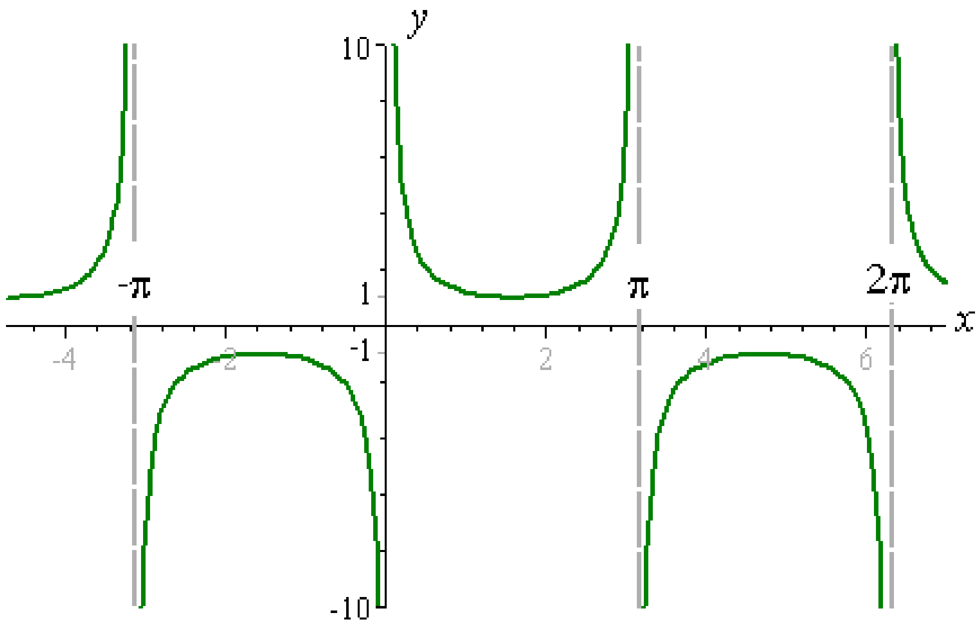
Gambar 5.5

Grafik fungsi secan



Gambar 5.6

Grafik fungsi cosecan



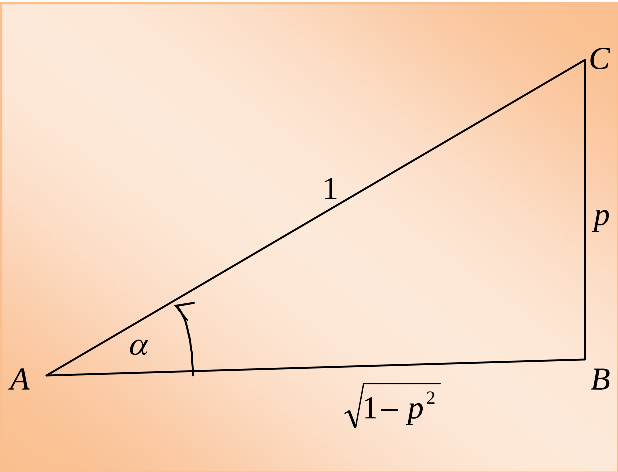
Gambar 5.7

5.3 Fungsi Cyclometri

Fungsi cyclometri merupakan balikan (invers) dari fungsi trigonometri.

No	Fungsi Trigonometri	Fungsi Cyclometri
1.	$y = \sin\alpha$	$\alpha = \arcsin y$
2.	$y = \cos\alpha$	$\alpha = \arccos y$
3.	$y = \tan\alpha$	$\alpha = \arctan y$
4.	$y = \cot\alpha$	$\alpha = ar\cot y$
5,	$y = \sec\alpha$	$\alpha = arc\sec y$
6.	$y = \csc\alpha$	$\alpha = arc\csc y$

Selanjutnya perhatikan gambar berikut ini



Gambar 5.8

Berdasarkan gambar di atas diperoleh

$$\sin\alpha = \frac{p}{1}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{1-p^2}}{1}$$

$$\tan\alpha = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\sqrt{1-p^2}}{p}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-p}}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{p}$$

Berdasarkan gambar 5.2 dapat ditentukan fungsi cyclometrinya.

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{p}{1}\right)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{1-p^2}}{1}\right)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right)$$

$$\alpha = arc\cot\left(\frac{\sqrt{1-p^2}}{p}\right)$$

$$\alpha = arc\sec\left(\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\right)$$

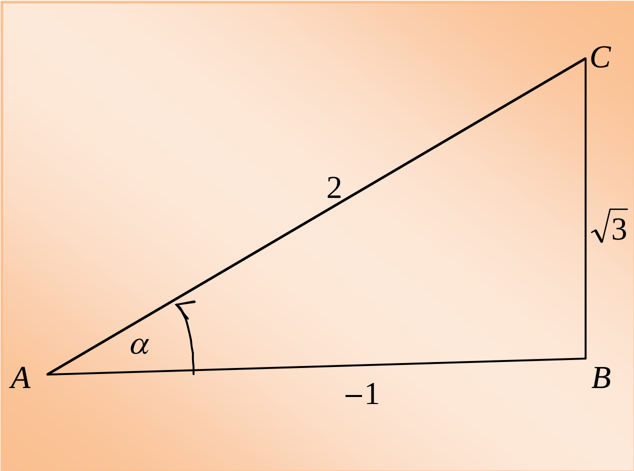
$$\alpha = arc\csc\left(\frac{1}{p}\right)$$

Contoh soal

1) Tentukan fungsi trigonometrinya jika diketahui $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

   Jawab

   $$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$$



Gambar 5.9

Karena $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ maka $-\frac{1}{2} = \cos\alpha$

Sehingga $\alpha = 120^0 = \frac{2\pi}{3}$ dengan demikian diperoleh

$$\sin\alpha = \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan\alpha = \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\cot\alpha = \cot\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\sec\alpha = \sec\frac{2\pi}{3} = -2$$

$$\csc\alpha = \csc\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

2) Hitunglah

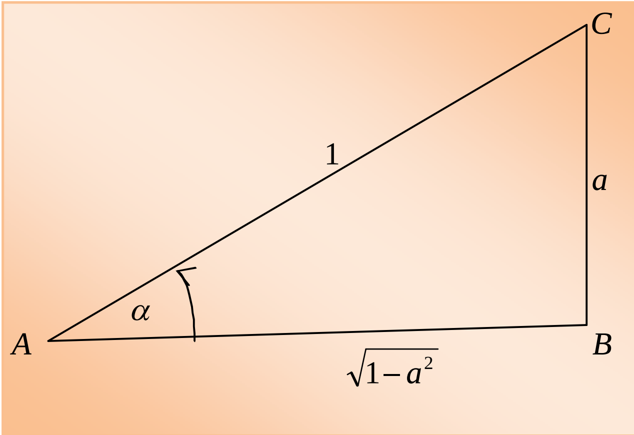
a. $\cot(\arcsin a)$

Jawab

Misal $\alpha = \arcsin a$ maka $\sin\alpha = a$

a)

b)



Gambar 5.10

Sehinggga $\cot(\arcsin a) = \cot\alpha = \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

b. $\sin(\arctan b)$

c) Jawab

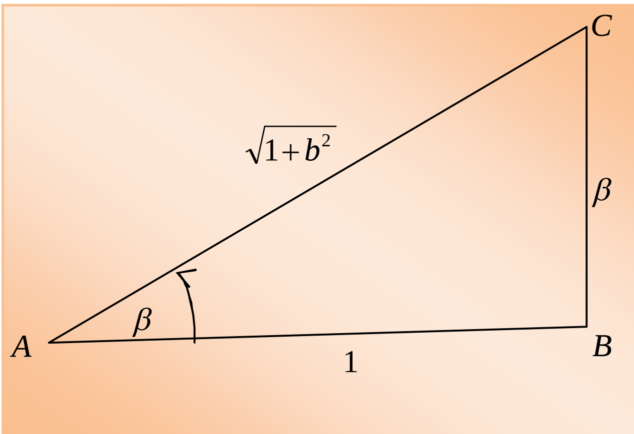
Misal $\arctan b = \beta$ maka $\tan\beta = b$

d)

e)

f)

g)



Gambar 5.11

Sehingga $\sin(\arctan b) = \sin\beta = \dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}}$

Seperti halnya pada fungsi trigonometri, dalam fungsi cyclometri juga terdapat beberapa rumus dan aturan penjumlahan fungsi.

1. Rumus penjumlahan pada fungsi cyclometri

   a. $\arcsin p + \arcsin(-p) = 0$

h)

b. $\arccos p + \arccos(-p) = \pi$

c. $arc\cot p + arc\cot(-p) = \pi$

d. $\arcsin p + \arccos p = \dfrac{\pi}{2}$

e. $\arctan p + arc\cot p = \dfrac{\pi}{2}$

2. Rumus jumlah dan selisih fungsi cyclometri

a. $\arcsin p - \arcsin q = \arcsin\left(p\sqrt{1-q^2} - q\sqrt{1-p^2}\right)$

b. $\arcsin p + \arcsin q = \arcsin\left(pq\left(\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-q^2} + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

c. $\arccos p + \arccos q = \arccos\left(p\sqrt{1-q^2} - q\sqrt{1-p^2} - \dfrac{\pi}{2}\right)$

d. $\arccos p - \arccos q = \arccos\left(pq - \left(\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-q^2}\right)\right)$

e. $\arctan p - \arctan q = \arctan\left(\dfrac{p-q}{1+pq}\right)$

f. $\arctan p + \arctan q = \arctan\left(\dfrac{pq-1}{p+q}\right) + \dfrac{\pi}{2}$

g. $arc\cot p + arc\cot q = \arctan\left(\dfrac{pq-1}{p+q}\right)$

h. $arc\cot p - arc\cot q = \arctan\left(\dfrac{p-q}{1+pq}\right) - \dfrac{\pi}{2}$

3. Sudut rangkap pada fungsi cyclometri

a. $2\arcsin p = \arcsin\left(2p^2 - 1\right) + \dfrac{\pi}{2}$

b. $2\arccos p = \arccos\left(2p^2 - 1\right)$

c. $2\arctan p = \arctan\left(\dfrac{p^2-1}{p} - 1\right) + \dfrac{\pi}{2}$

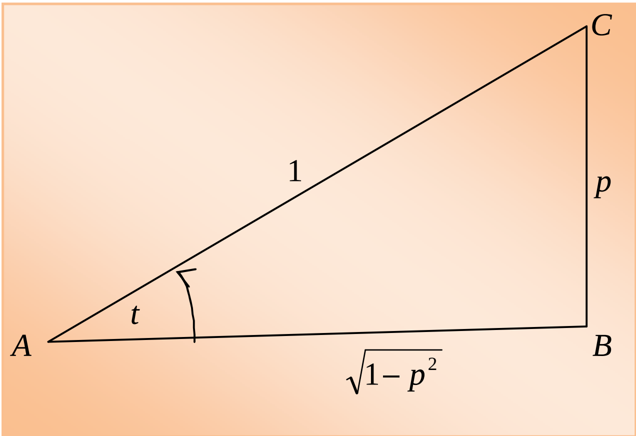
d. $2arc\cot p = arc\cot\left(\dfrac{p^2-1}{p}\right)$

Beberapa contoh soal.

Buktikan bahwa:

1) $\tan(\arcsin p) = \dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}$

Perhatikan gambar di bawah ini.



Gambar 5.12

Berdasarkan gambar di atas

Misal $\arcsin p = t \Rightarrow p = \sin t$

Sehingga

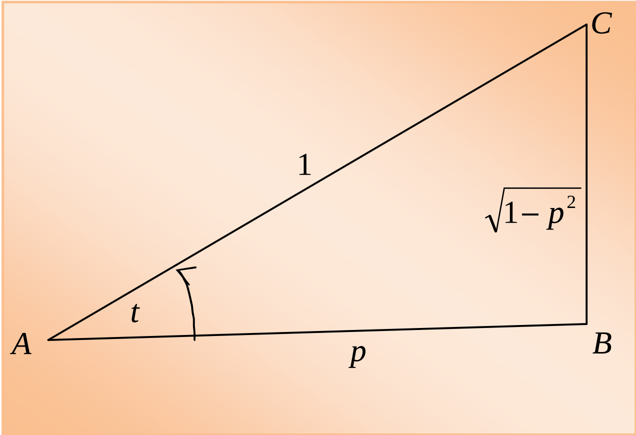
$$\tan t = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$$

Akibatnya

$$\tan(\arcsin p) = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$$

2) $\tan(\arccos p) = \dfrac{\sqrt{1-p^2}}{p}$

Perhatikan gambar di bawah ini



Gambar 5.13

Berdasarkan gambar di atas

Misal $\arccos p = t \Rightarrow p = \cos t$

Sehingga

$$\tan t = \frac{\sqrt{1-p^2}}{p}$$

Akibatnya

$$\tan(\arccos p) = \frac{\sqrt{1-p^2}}{p}$$

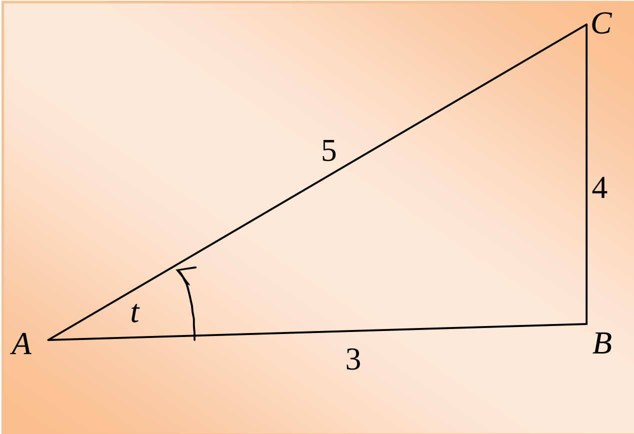
3) Jikan diketahui

$$\arctan\left(\frac{4}{3}\right):$$

Tentukan nilai dari fungsi trigonometrinya.

Jawab

$$\arctan\left(\frac{4}{3}\right) = t \Rightarrow \tan t = \frac{4}{3}$$



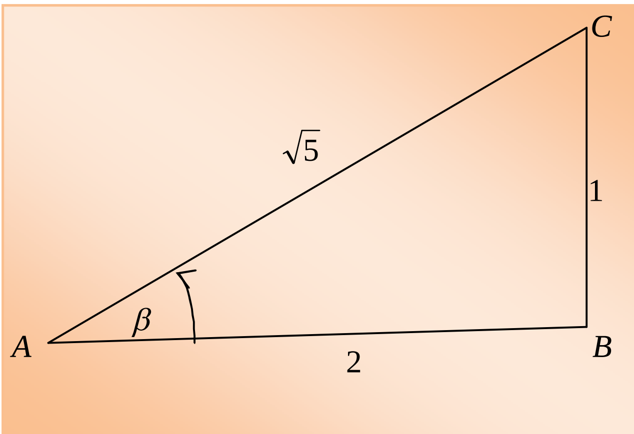
Gambar 5.14

Sehingga

$$\sin t = \frac{4}{5}, \cos t = \frac{3}{5} \tan t = \frac{4}{3}, \cot t = \frac{3}{4}, \sec t = \frac{5}{3}, \csc t = \frac{5}{4}$$

4) $\sin\left(\arctan\frac{1}{2}\right) = ...$

Perhatikan gambar di bawah ini



Gambar 5.15

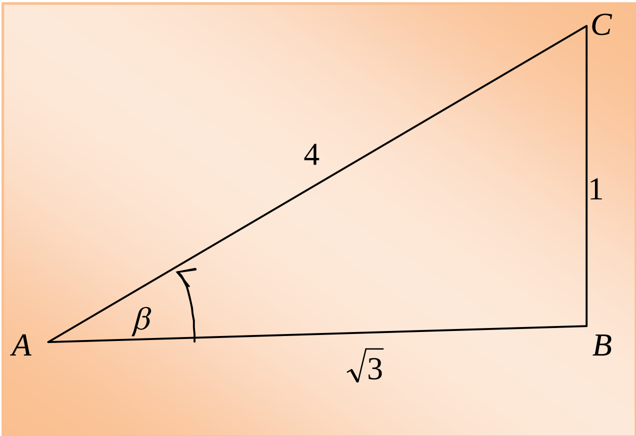
Misal $\arctan\frac{1}{2} = \beta \Rightarrow \tan\beta = \frac{1}{2}$

Sehingga

$$\sin\left(\arctan\frac{1}{2}\right) = \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$$

5) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$

Perhatikan gambar di bawah ini



Gambar 5.16

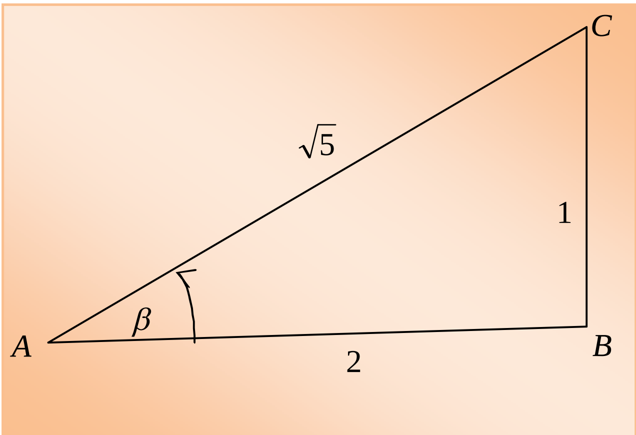
Misal $\arcsin\frac{1}{4}=\beta \Rightarrow \sin\beta=\frac{1}{4}$

Sehingga

$$\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)=\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

6) $\tan(arc\cot 2)$

Perhatikan gambar di bawah ini



Gambar 5.17

Misal $arc\cot 2 = \beta \Rightarrow \cot\beta = 2$

Sehingga

$$\tan(arc\cot 2) = \tan\beta = \frac{1}{2}$$

5.4 Soal-soal

A. Hitunglah

1) Buatlah grafik fungsi trigonometri dalam doman $0 \le \theta \le 2\pi$

   a. $y = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

   b. $y = \frac{1}{2}\sin\left(2x\frac{x}{2}\right)$

   c. $y = |\cos x|$

   d. $y = \cos|x|$

   e. $y = \tan(2x)$

2) $\tan\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$

3) $\csc\left(\arctan\frac{1}{4}\right)$

4) $\sin\left(\arccos\frac{3}{2-p}\right)$

5) $\cos\left(arc\cot\frac{1+2p}{5}\right)$

6) $\cot\left(\arccos\frac{4}{7p}\right)$

7) $\sec\left(\arcsin\frac{p^2-1}{p}\right)$

B. Dengan menggunakan rumus-rumus dalam fungsi cyclometri, tunjukkan:

1) $2\arctan\frac{4}{3}=\arctan\left(\frac{7}{24}\right)+\frac{\pi}{2}$

2) $3\arctan\frac{4}{3}=\pi-\arctan\left(\frac{44}{117}\right)$

C. Hitunglah x dari persamaan berikut.

1) $\arccos\left(\frac{12}{3}\right)+\arccos\left(\frac{15}{17}\right)=\arccos x$

2) $\arcsin\left(\frac{9}{41}\right)+\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)=\arcsin x$

3) $\arctan\left(\frac{15}{17}\right)+\arctan\left(\frac{21}{29}\right)=\arctan x$

D. Hitunglah

1) $\tan\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}\right)$

2) $\cos\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}\right)$

3) $\sin\left(\arcsin\frac{56}{33}-\arccos\frac{12}{13}\right)$

4) $\tan\left(\arctan\frac{1}{2}+\arccos\frac{3}{4}\right)$

5) $\cot\left(\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{3}\right)$

6) $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

7) $\arctan\frac{1}{7}+\left(\arctan\frac{1}{2}+2\arctan\frac{1}{3}\right)$

8) $2\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}+arc\cot\frac{16}{3}+\arccos\frac{7}{25}$

9) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$

10) $\tan\left(\arcsin\dfrac{-1\sqrt{3}}{3}\right)$

11) $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{2}\right)$

E. Buktikan

1) $\cos(\arcsin p) = \sqrt{1-p^2}$

2) $\sin(\arccos p) = \sqrt{1-p^2}$

3) $\tan(\arcsin p) = \dfrac{1}{p}\sqrt{1-p^2}$

BAB VI

PERSAMAAN TRIGONOMETRI

Bab VI buku ini membahas tiga hal pokok yang berhubungan dengan persamaan trigonometri, antara lain (1) persamaan trigonometri sederhana (2) persamaan trigonometri tipe khusus, dan (3) soal-soal.

Standar Kompetensi

Setelah mempelajari pokok bahasan ini diharapkan mahasiswa dapat memahami cara menentukan selesaian persamaan dalam trigonometri. .

Kompetensi Dasar

10. Mahasiswa dapat menentukan selesaian persamaan trigonometri sederhana
11. Mahasiswa dapat menentukan selesaian persmaan trigonometri tipe khusus.

Sepertihalnya dalam Aljabar, konsep trigonometri juga mengenal istilah persamaan triginomeri. Persamaan trigonometri bedakan menjadi dua jenis, yaitu persamaan trigonometri yang berhubungan dengan identitas dan persamaan bersyarat. Persamaan trigonometri yang berhubungan dengan identitas adalah persamaan yang memenuhi suatu nilai yang belum diketahui, sedangkan persamaan bersyarat adalah persamaan yang variabelnya dibatasi.

Persamaan trigonometri memuat suatu variabel yang belum diketahui, dan variabel tersebut merupakan besaran suatu sudut yang satuannya dapat dinyatakan dalam bentuk derajat atau radian. Variabel-variabel yang dapat ditentukan nilainya tersebut akan merupakan suatu selesaian jika disubstitusikan ke dalam persamaan maka variable tersebut memenuhi nilai persamaan. Pada umumnya selesaian tersebut dapat dihubungkan dengan periode grafik dari fungsi trigonometri, yaitu $360^0 = 2\pi$ radian untuk fungsi sinus dan cosinus, dan $180^0 = \pi$ radian untuk tangen, cotengen, secan, dan cosecan.

6.1 Persamaan Trigonometri Sederhana

Persamaan trigonometri adalah persamaan yang memuat fungsi trigonometri dari suatu sudut yang belum diketahui. Dengan demikian $\sin 2x - \tan x = 1$ adalah persamaan trigonometri, karena x suatu sudut yang belum diketahui ukurannya dan sebagaimana telah diketahui bersama bahwa ukuran sudut adalah derajat atau radian yang keduanya mempunyai hubungan $360^0 = 2\pi$ radian.

Sebaliknya, dalam trigonometri dikenal istilah persamaan triginometri invers. Jika $\cos x = k$ adalah suatu persamaan trigonometri maka persamaan tersebut mempunyai selesaian $x = \arccos k = \cos^{-1} k$. Bentuk-bentuk persamaan $\sin x = k, \cos x = k, \tan x = k, \cot x = k, \sec x = k. \csc x = k$ disebut persamaan trigonometri sederhana.

Selesaian persamaan trigonometri sebagaimana tersebut di atas dapat diselesaikan dengan beberapa langkah sederhana. Pertama, ubahlah persamaan menjadi persamaan sederhana yang terdiri atas satu lebih persamaan, Kedua, gunakan metode dalam Aljabar untuk menentukan varibel besarnya sudut yang belum diketahui, misalnya dengan pemfaktoran atau cara lainnya. Ketiga, setelah diperoleh variable yang belum diketahui tersebut, substitusikan ke persamaan semula sebagai pengecekan nilai dalam persamaan.

Jika x adalah sebarang bilangan real yang memenuhi persamaan, maka persamaan trignometri tersebut dapat ditentukan selesaiannya.

Perhatikan beberapa contoh persamaan trigonometri sederhana berikut ini.

Tentukan selesaian persamaan trigonometri:

1) $\sin^2 x = \dfrac{1}{4}$

Jawab

Dengan cara memberikan tanda akar pada kedua bagian diperoleh

$$\sqrt{\sin^2 x} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \pm\frac{1}{2}$$

$$x = \arcsin\left(\pm\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \ldots$$

Semua nilai sudut tersebut memenuhi persamaan di atas, sehingga selesaiannya dapat dinyatakan dalam bentuk

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z^+$$

2) $\tan x + \cot x = 2$

Jawab

Dengan mengganti $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

Maka persamaan

$$\tan x + \cot x = 2$$

$$\Leftrightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x - 1)(\tan x - 1) = 0$$

Sehingga diperoleh

$$\tan x = 1$$

$$x = \arctan 1$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, ,\ldots$$

Secara umum selesaian persamaan $\tan x + \cot x = 2$ adalah

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi$$

3) $3\sin 2x + 2\cos^2 x = 2$

Jawab

Karena

$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \cos^2 x = 1-\sin^2 x$ maka

$$3\sin 2x + 2\cos^2 x = 2$$
$$\Leftrightarrow 3(2\sin x\cos x) + 2(1-\sin^2 x) = 2$$
$$\Leftrightarrow 6\sin x\cos x + 2 - 2\sin^2 x = 2$$
$$\Leftrightarrow 6\sin x\cos x - 2\sin^2 x = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin x(3\cos x - \sin x) = 0$$

Sehingga diperoleh

$$\sin x = 0$$
$$x = \arcsin 0$$
$$x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, ...$$

Atau

$$3\cos x - \sin x = 0$$
$$\Leftrightarrow 3 - \tan x = 0$$
$$\Leftrightarrow \tan x = 3$$
$$\Leftrightarrow x = \arctan 3$$
$$x = 71^0 34', 251^0 31', ...$$

Sehingga secara umum selesaian persamaan $3\sin 2x + 2\cos^2 x = 2$ adalah

$$x = 0 + n\pi, n \in Z^+ \quad atau \quad x = 71^0 34' + n\pi = 71^0 34' + n(180^0)$$

4) $\sin x - 2\cos x = 1$

Jawab

$$\sin x - 2\cos x = 1$$
$$\Leftrightarrow \sin x = 1 + 2\cos x$$

Dengan mengkuadratkan masing-masing bagian, diperoleh

$$\sin^2 x = (1+2\cos x)^2$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 x = 1 + 4\cos x + 4\cos^2 x$$
$$\Leftrightarrow (1-\cos^2 x) = 1 + 4\cos x + 4\cos^2 x$$
$$\Leftrightarrow 5\cos^2 x + 4\cos x = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos x(5\cos x + 4) = 0$$

Sehingga diperoleh

$\cos x = 0$

$x = \arccos 0$

$x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, ..$

Atau

$5\cos x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow x = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$

$x = \pm 148^0 8', ...$

Setelah dicek ke dalam persamaan $\sin x - 2\cos x = 1$ yang memenuhi adalah untuk $x = 90, x = -143^0 8'$

Sehingga secara umum selesaian persamaannya adalah

$x = 0 + n2\pi, n \in Z^+$ *atau* $x = -143^0 8' + n2\pi, n \in Z^+$

5) $\sin 3x + \sin x = \cos x$

Jawab

$\sin 3x + \sin x = \cos x$

$\Leftrightarrow \sin 3x + \sin x - \cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{3x + x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x - x}{x}\right) - \cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x \cos x - \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin 2x - 1) = 0$

Sehingga diperoleh

$\cos x = 0$

$x = \arccos 0$

$x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, ..$

Atau

$$2\sin 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \arcsin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$2x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, ...$$

Setelah dicek ke dalam persamaan yang memenuhi adalah untuk

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, ...$$

Sehingga secara umum selesaian persamaannya adalah

$$x = \frac{\pi}{2} + n2\pi, n \in Z^{+}$$

6.2 Persamaan Trigonometri Tipe-tipe Khusus

Persamaan trigonometri tipe khusus dibedakan menjadi dibedakan menjadi dua tipe.

1) $a\cos x + b\sin x = c,\ c^2 \le a^2 + b^2$

Kedua bagian dibagi dengan $\sqrt{a^2 + b^2}$ diperoleh

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Selanjutnya kita definisikan $0 \le \alpha \le 2\pi$

Dengan $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ dan $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Sehingga

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha + x) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha + x = \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) - \alpha$$

Contoh

1) Tentukan selesian persamaan

   $3\cos x - \sqrt{7}\sin x = \frac{1}{2}$

   Jawab

   Dengan membagi kedua bagian dari persamaan

   $3\cos x - \sqrt{7}\sin x = 2$

   Diperoleh

   $3\cos x - \sqrt{7}\sin x = 2$

   $\Leftrightarrow \frac{3}{4}\cos x - \frac{\sqrt{7}}{4}\sin x = \frac{1}{2}$

   Karena

   $\sin\alpha = \frac{3}{4}, \, dan \, \cos\alpha = \frac{-\sqrt{7}}{4}, \alpha = 131^0 25'$

   $\sin(\alpha + x) = \frac{1}{2}$

   Sehingga

   $(\alpha + x) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30^0, 150^0, 390^0, ...$

   $(\alpha + x) = \frac{1}{2}$

   Karena

   $\alpha = 131^0 25'$

   Maka

   $x = 18^0 35', 258^0 35', ...$

   Secara umum selesesaian dari persamaan

   $3\cos x - \sqrt{7}\sin x = 2$

   Adalah

   $x = 18^0 35' + n(360^0) \;\; dan \;\; x = 258^0 35' + n(360^o)$

2) $\sin ax = \cos bx$, $\tan ax = \cot bx$, $\sec ax = \csc bx$

Persamaan triginometri bentuk di atas dapat diselesaikan dengan menggubah salah satu bagian dari persamaan menjadi bentuk penjumlahan atau pengurangan dua sudut sebegaiamana yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya.

Untuk lebih jelasnya perhatikan beberapa contoh di bawah ini,

1. Tentukan selesaian persamaan

$\tan 2x = \cot 3x$

Jawab

Dengan mengubah

$\cot 3x = \tan(90^0 - 3x)$

Persamaan

$\tan 2x = \cot 3x$

$\Leftrightarrow \tan 2x = \tan(90^0 - 3x)$

Karena grafik fungsi tangen mempunyai periodik 180^0 maka diperoleh

$2x = 90^0 - 3x, 2x = 270^0 - 3x, 2x = 450^0 - 3x, 2x = 630^0 - 3x, 2x = 810^0 - 3x, ..$

$5x = 90^0, 5x = 270^0, 5x = 450^0, 5x = 630^0, 5x = 810^0, ...$

$x = 15^0, 84^0, 90^0, 126^0, 162^0, ...$

2. Tentukan selesaian persamaan

$\cos 4x = \sin 5x$

Jawab

Dengan mengubah

$\sin(90^0 - 4x) = \cos 4x$

Persamaan

$12\sin x + 5\cos x = 13$

$\Leftrightarrow \sin(90^0 - 4x) = \sin 5x$

Karena grafik fungsi sinus mempunyai periodik 360 maka diperoleh

$$5x = 90^0 - 4x, 5x = 450^0 - 4x, 5x = 810^0 - 4x, \ldots 5x = (90^0 + n360^0 - 4x)$$
$$9x = 90^0, 9x = 450^0, 9x = 810^0, 9x = (90^0 + n.360^0)$$
$$x = 10^0, 50^0, 90^0, \ldots (10^0 + n.40^0)$$

6.3 Soal-soal

Soal-soal

A. Tentukan selesaian persamaa berikut ini.

1) $\cos 2x = \cos 70^0$
2) $\sin 2x = \sin \pi$
3) $\tan 3x = \tan \dfrac{3\pi}{4}$
4) $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$
5) $\tan 2x = \sqrt{3}$
6) $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}$
7) $\tan x + \cot x = 2$
8) $3\sin 2x + 2\cos^2 x = 2$
9) $\sin x - 2\cos x = 1$
10) $\sin 5x + \sin 3x = 0$
11) $\sin 3x + \sin x = \cos x$
12) $2\cos^2 x + 11\cos x - 6 = 0$
13) $4\sin^2 x = 3$
14) $\tan^2 x = 3$
15) $\cot^2 x = 1$
16) $\sec^2 x = 2$
17) $2\cos^2 x = 1$
18) $\sin 3x = 1$
19) $4\cos^2 2x = 3$
20) $\tan 5x = -1$

21) $\cot 4x = \sqrt{3}$

22) $\sin 2x = \sin^{2}$

23) $\cot x = 3\tan x$

24) $\sec x = 1 + \tan x$

25) $2\cos 2x(1 + \sin x) = 0$

26) $\sin 2x = \cos x$

27) $\sin 2x = \sqrt{2}\sin x$

28) $\tan 2x - 3\tan x = 0$

29) $2 - 3\cos x + \cos 2x = 0$

30) $\sin 4x = \sin 2x$

31) $\cos x - \cos 2x = 1$

32) $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = 1 - \cos x$

33) $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = 1 - \cos x$

34) $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) + \cos x = 1$

35) $\sin x + 2\cos x = 2$

36) $8\sin x + \cos x = 7$

37) $\tan x - \cot x - 2 = 0$

38) $\cot 2x \cot x = 1$

39) $\csc x + 2\sin x = 3$

40) $\cos + \cos 5x = \cos 2x$

41) $2\sin^{2} 3x - \cos 3x = 0$

42) $\cos 2x + 6\cos^{2}\left(\dfrac{x}{2}\right) = 4$

43) $\sin^{4} x + \cos^{4} x = \dfrac{1}{2}$

44) $\cos x + \cos 7x = \cos 4x$

45) $\sin 3x + \sin x = \cos x$

46) $\sin 3x + \sin x = \cos^{2} x \csc x$

47) $\sin 5x + \sin 3x + 2\cos x = 0$

48) $\cos 5x + \cos 3x + \cos x = 0$

49) $\sin 5x - \sin 3x + \sin x = 0$

50) $\tan 3x = \tan x$

51) $\sin 2x + \sin x = \cos 2x + \cos x$

52) $\tan 2x - 2\cos x = 0$

53) $5\sin x - \cos x = 3$

54) $\sin 3x - 4\sin^2 x = 0$

55) $\tan^2 x - 3\csc x = 7$

56) $\cos 3x + 4\cos^2 x = 0$

57) $4\sin 2x - 3\cos 2x = 4$

58) $\tan 4x = 2\tan 2x$

59) $6\cot^2 2x = 1 + \cos^2 2x$

60) $\cos 4x + 4\sec^2 x = 4 + \cos^2 2x$

61) $2\sin^3 x - 3\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

62) $3\tan^3 x + 5\tan^2 x - 11\tan x + 3 = 0$

63) $3\sec^4 x - 4\sec^2 x + 1 = 0$

64) $\csc^4 x - \csc^3 x - \csc^2 x - 2 = 0$

65) $\tan x(\tan^2 x - 4) = \sec^2 x - 5$

66) $6\sin^3 x + 17\sin^2 x - 4\sin x = 3$

B. Tentukan selesaian persamaan trigonometri berikut ini.

1) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$

2) $4\sin x + 3\cos x = 5$

3) $12\sin x + 5\cos x = 13$

4) $2\sin x - 3\cos x = \sqrt{5}$

5) $3\sin x - 4\cos x = 2$

6) $4\sin x + 5\cos x = 5$

7) $\sin x - 5\cos x = 3$

8) $3\sin x - 7\cos x = 2$

9) $\sin 3x = \cos 2x$

10) $\sin 5x = \cos 3x$

11) $\tan 3x = \cot 2x$

12) $\sec 5x = \csc x$

13) $\cot\left(\frac{3x}{4}\right) = \tan\left(\frac{2}{3}\right)x$

14) $\csc\left(\frac{3x}{5}\right) = \sec\left(\frac{5x}{8}\right)$

BAB VII
BILANGAN KOMPLEK

Bab VII buku ini membahas hal-hal pokok yang berhubungan dengan bilangan komplek, antara lain: (1) definisi bilangan komplek, (2) operasi bilangan komplek, (3) konjugate bilangan komplek, (4) penyajian bilangan komplek secara grafis, (5) bentuk polar bilangan komplek, (6) teorema De Moivre, (7) akar-akar bilangan komplek, (8) rumus Euler, (9) persamaan pangkat banyak, (10) akar-akar dari n unsur satuan, dan (11) interpretasi vektor dari bilangan komplek.

Standar Kompetensi

Setelah mempelajari pokok bahasan ini diharapkan mahasiswa dapat memahami sistem bilangan komplek dan aplikasi dan pengembangannya dalam masalah-masalah praktis.

Kompetensi Dasar

1. Mahasiswa dapat menentukan hasil operasi bilnagn komplek. .
2. Mahasiswa dapat menyajikan bilangan komplek secara grafis.
3. Mahasiswa dapat mengubah bilangan komplek dalam bentuk polar.
4. Mahasiswa dapat menentukan akar-akar persamaan pangkat banyak dalam bentuk variable bilangan komplek.
5. Mahasiswa dapat menggambarkan vektor dari bilangan komplek dan operasi jumlah dan pengurangan.
6. Mahasiswa dapat mengaplikasikan rumus Euler dalam bilangan komplek.
7. Mahasiswa dapat mengaplikasikan teorema De Moivre dalam bilangan komplek.

7.1 Definisi Bilangan Komplek

Persamaan kuadrat merupakan salah satu konsep dalam matematika yang telah dikenalkan sejak dini. Persamaan tersebut mempunyai bentuk umum $ax^2+bx+c=0,$ dengan $a,b,c \in real.$ Nilai peubah x yang memenuhi persamaan kuadrat dinamakan selesaian. Selesaian suatu persamaan yang juga disebut dengan akar-akar persamaan kuadrat dapat berupa bilangan real atau tidak real. Misal

$x^2+1=0$ adalah sebarang persamaan kuadrat, maka persamaan tersebut akar-akarnya tidak real atau dengan kata lain tidak ada bilangan real yang memenuhi persamaan $x^2+1=0$, hal ini dikarenakan $x^2=-1$. Pernyataan ini adalah sesuatu yang tidak mungkin karena tidak ada kuadrat suatu bilangan real yang hasilnya -1. Untuk itu perlu diperkenalkan bilangan komplek yaitu suatu bilangan yang mempunyai bentuk umum $a+bi$ dimana $a,b \in real$ dan $i=\sqrt{-1}$. Bilangan komplek didefinisikan sebagai pasangan berurutan dari bilangan real a,b yang memenuhi sifat-sifat tertentu yang secara umum dituliskan sebagai $z=a+bi$. Kita dapat mengangap sebuah bilangan komplek mempunyai sifat $i^2=-1$.. Untuk selanjutnya dalam bilangan komplek $z=a+bi$. a disebut bagian real dari dari z dan b disebut *bagian bilangan imajiner* dari z, secara berturut-turut keduanya dilambangkan dengan $a=\text{Re}\{z\}$ dan $b=\text{Im}\{z\}$. Variable yang berlaku pada bilangan komplek disebut sebagai variabel komplek.

Dua bilangan komplek $z_1=a_1+b_1i$ dan $z_2=a_2+b_2i$ disebut sama jika dan hanya jika $a=c$ dan Karena a,b dalam $z=a+bi$ adalah bilangan real maka kita dapat mengangap bahwa bilangan asli merupakan bagian dari bilangan komplek dengan *b = 0*. Bilangan komplek *0 + 0i* dan *-3 +0i* adalah contoh dari bilangan bilangan asli 0 dan -3 berturut-turut. Jika $a=0$ pada $z=a+bi$ maka bilangan komplek $a+bi=bi$ disebut bilangan tidak real (imajiner) sejati.

7.2 Operasi pada Bilangan Komplek

Sepertihalnya dalam bilangan real, bilangan komplek mempunyai beberapa sifat dan dinamakan sifat aljabar bilangan komplek. Operasi yang ditunjukan oleh bilangan komplek adalah sebagai berikut:

1 Penjumlahan

$$(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=(a+c)+(bi+di)=(a+c)+(b+d)i$$

2. Pengurangan

$$(a+bi)-(c+di)=a+bi-c-di=(a-c)+(bi-di)=(a+c)-(b+d)i$$

3. Perkalian

$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$

$= ac + (ad+bc)i + bd(-1)$

$= (ac-bd) + (ad+bc)i$

4. Pembagian

$\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{(a+bi)}{(c+di)} \cdot \dfrac{(c-di)}{(c-di)}$

$= \dfrac{(ac - adi + bci - bdi^2)}{c^2 - d^2 i^2}$

$= \dfrac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2 + d^2}$

$= \dfrac{(ac+bd)}{(c^2+d^2)} + \dfrac{(bc-ad)i}{(c^2+d^2)}$

Contoh

1) Jika $z_1 = (2+i), z_2 = (8-3i), z_3 = (4+2i)$

Maka

a. $z_1 + z_2 = (2+i) + (8-3i) = 2 + i + 8 - 3i = (2+8) + (1-3)i = 10 - 2i$

b. $z_1 + z_2 + z_3 = (2+i) + (8-3i) + (4+2i)$

$= (2+8+4) + (1-3+2)i = 14 + 0i = 14$

c. $z_1 z_2 = (2+i)(8+3i)$

$= 16 + 6i + 8i + 3i^2 = 16 + 14i + 3(-1)$

$= 16 - 3 + 14i = 13 + 14i$

d. $z_1(z_2 + z_3) = (2+i)\big((8-3i) + (4+2i)\big)$

$= (2+i)\big(12 - i\big)$

$= (24 - 2i + 12i - i^2)$

$= \big(24 - 2i + 12i - (-1)\big)$

$= 25 + 10i$

e. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2+i}{8-3i}$

$= \dfrac{2+i}{8-31} . \dfrac{8+3i}{8+3i}$

$= \dfrac{16+6i+8i+3i^2}{64-24i+24i-9i^2}$

$= \dfrac{13+14i}{73}$

$= \dfrac{13}{73} + \dfrac{14}{73} i$

f. $\overline{z_1 z_2} = \overline{(2+i)(8+3i)}$

$= \overline{(16+6i+8i+3i^2)}$

$= \overline{(13+14i)}$

$= 13-14i$

2) Jika $z_1 = a+bi, z_2 = b+ci, z_3 = p+qi$,

Buktikan kesamaan-kesamaan berikut ini.

a. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

Bukti

$z_1 + z_2 = (a+bi)+(c+di)$

$= (a+bi+c+di)$

$= (a+c)+(b+d)i$

$= (c+a)+(d+b)i$

$= (c+di)+(a+bi)$

$= z_2 + z_1$

b. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

Bukti

$z_1 + (z_2 + z_3) = (a+bi) + \big((c+di) + (p+qi)\big)$

$= (a+bi) + \big((c+p)+(d+p)i\big)$

$= \big((a+c+p)+(b+d+p)i\big)$

$= \big((a+c)+p\big) + \big((b+d)i\big) + qi$

$= \big((a+c) + \big((b+d)i\big) + \big(p+qi\big)$

$= \big(z_1 + z_2\big) + z_3$

c. $z_1 z_2 = z_2 z_1$

Bukti

$z_1 z_2 = (a+bi)(c+di)$

$= (ac + adi + bci + bdi^2)$

$= \left(ac + adi + bci + bd(-1)\right)$

$= (ac + adi + bci - bd)$

$= \left(ca + dai + cbi - db\right)$

$= \left(ca + dai + cbi + db(-1)\right)$

$= \left(ca + dai + cbi + dbi^2\right)$

$= (c+di)(a+bi)$

$= z_2 z_2$

d. $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

Bukti

$z_1(z_2 z_3) = (a+bi)\left((c+di)(p+qi)\right)$

$= (a+bi)\left(cp + cqi + dpi + dqi^2\right)$

$= (a+bi)\left(cp + cqi + dpi + dq(-1)\right)$

$= (a+bi)\left(cp + cqi + dpi - dq\right)$

$= \left(acp + acqi + adpi - adq + bcpi^2 + bcqi^2 - bdqi\right)$

$= \left(acp + acqi + adpi - adq + bcp(-1) + bcq(-1) - bdqi\right)$

$= \left(acp + acqi + adpi - adq - bcp - bcq - bdqi\right)$

$= \left(acp + acqi + adpi + adqi^2 + bcpi^2 + bcqi^2 - bdqi\right)$

$= \left((ac + adi + bci - bd\right)(p+qi)$

$= \left((a+bi)(c+di)\right)(p+qi)$

$= (z_1 z_2) z_3$

e. $z_1(z_2 + z_3) = (z_1 z_2) + (z_1 z_3)$

Bukti

$$z_1(z_2+z_3) = (a+bi)\big((c+di)+(p+qi)\big)$$
$$= (a+bi)\big((c+p)+(d+q)i\big)$$
$$= \big(a(c+p)+a(d+qi)+b(c+p)i+b(d+q)i^2\big)$$
$$= \big((ac+ap+(ad+aq)i\big)+\big((bc+bp)i-(bd+bq)\big)$$
$$= \big((ac+adi+bci-bd\big)+\big(ap+aqi+bpi-bq)\big)$$
$$= \big((ac+adi+bci+bdi^2)\big)+\big((ap+aqi+bpi+bqi^2)\big)$$
$$= \big((a+bi)(c+di)+(a+bi)(p+qi)\big)$$
$$= (z_1z_2)+(z_1z_3$$

f. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

Bukti

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{a+bi}{c+di}\right|$$
$$= \left|\frac{a+bi}{c+di}.\frac{c-di}{c-di}\right|$$
$$= \left|\frac{ac+bci-adi-bdi^2}{c^2-d^2i^2}\right|$$
$$= \left|\frac{ac+bci-adi+bd}{c^2+d^2}\right|$$
$$= \left|\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{(c^2+d^2)}\right|$$
$$= \left|\left(\frac{ac+bc}{c^2+d^2}\right)+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i\right|$$
$$= \sqrt{\left(\frac{ac+bc}{c^2+d^2}\right)^2+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$$
$$= \frac{|(a+bi)|}{|(c+di)|}$$

g. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

Bukti

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a+bi)(c+di)}$$
$$= \overline{(ac+adi+bci+bdi^2)}$$
$$= \overline{(ac+adi+bci+bd(-1)}$$
$$= \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$$
$$= (ac-bd)-(ad+bc)i$$
$$= (a-bi)+(c-di)$$
$$= |z_1||z_2|$$

7.3 Konjugat Bilangan Komplek

Konjugat dari suatu bilangan komplek $a+bi\,a$ adalah $a-bi$. Konjugat dari bilangan komplek $z = a+bi$ biasanya dinotasikan dengan $\overline{z}$ atau z^* sehingga $\overline{z} = z^* = a-bi.$

Misal $z = a+bi$, suatu bilangan komplek maka nilai mutlak atau *modulus* dari suatu bilangan komplek dinotasikan dengan $|z|$ dan didefinisikan sebagai bilangan real tidak negative dengan $|z = |\sqrt{a^2+b^2}$ .Dengan demikian nilai mutlak bilangan komplek adalah menyatakan jarak antara titik asal $O(0,0)$ dengan sebarang titik dalam $z.$

Contoh:

1) $\overline{2+3i} = 2+3$

2) $\overline{\dfrac{1-5i}{4}} = \dfrac{1+5i}{4} = \dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}i$

3) $\overline{(3-i)(2+2i)} = \overline{(6+6i-2i-2i^2)} = \overline{(6+6i-2i+2)} = \overline{8+4i} = 8-4i$

4) $|2+3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

5) $|-4-5i| = \sqrt{(-4)^2+(-5)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

6) $\left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}i\right| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{6}\sqrt{13}$

Selanjutnya jika $z_1, z_2, z_3, \ldots z_m$ adalah bilangan-bilangan komplek, maka yang berikut ini akan dipenuhi.

1) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ atau $|z_1 z_2, \ldots . z_m| = |z_1||z_2| \ldots . |z_m|$

2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

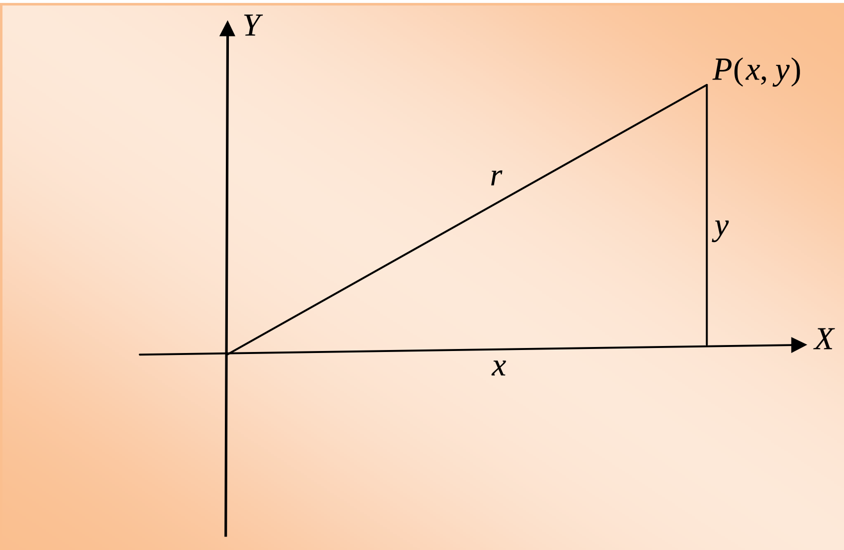
3) $|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$ atau $|z_1 + z_2 + \cdots + z_3| \leqq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_m|$

4) $|z_1 + z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$ atau $|z_1 - z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$

Bukti-bukti kesamaan di atas, ditinggalkan penulis sebagai latihan bagi pembaca.

7.4 Penyajian Bilangan Komplek Secara Grafis

Penyajian secara grafik dari bilangan komplek $z = a + bi$ adalah dengan cara meletakkan bagian real dan imajiner dari bilangan komplek tersebut secara berturut-turut sebagai absis dan ordinat pada sistem koordinat tegak lurus $P(x, y)$ pada XOY. seperti pada gambar berikut ini.

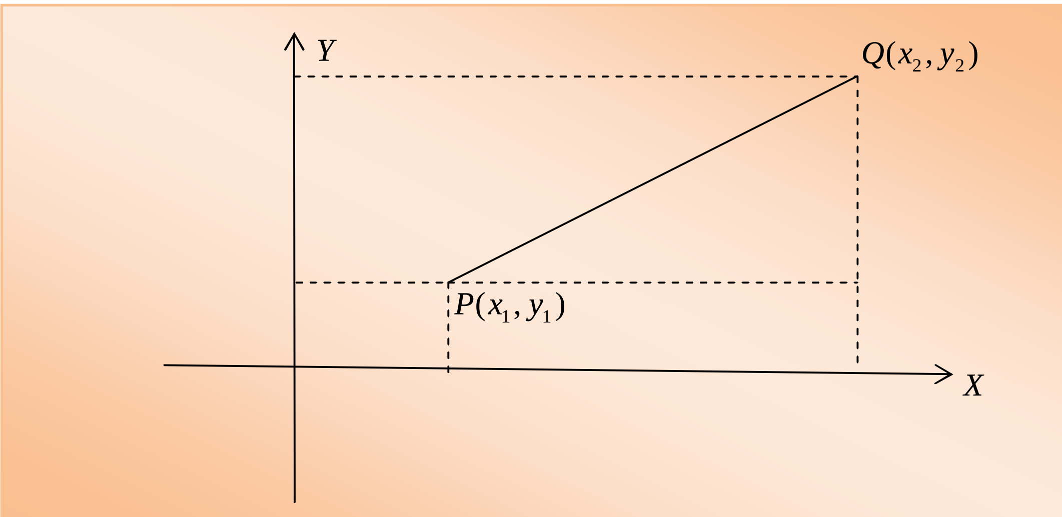


Gambar 7.1

Sebaliknya jika diberikan titik $P(x, y)$ maka titik tersebut berkorespondensi satu-satu dengan bilangan komplek $z = a + bi$. Korespondensi yang terjadi bersifat *unique*, dengan demikian setiap bilangan komplek satu dan hanya satu dengan titik dalam koodrdinat siku-siku. Oleh karena itu $z = 2 - 3i$ dapat ditunjukkan oleh titik $P(2,-3)$ dan titik $P(6,2)$ dapat ditunjukkan oleh bilangan komplek $z = 6 + 2i$. Bidang yang digunakan untuk menunjukan bilangan komplek dinamakan bidang komplek.

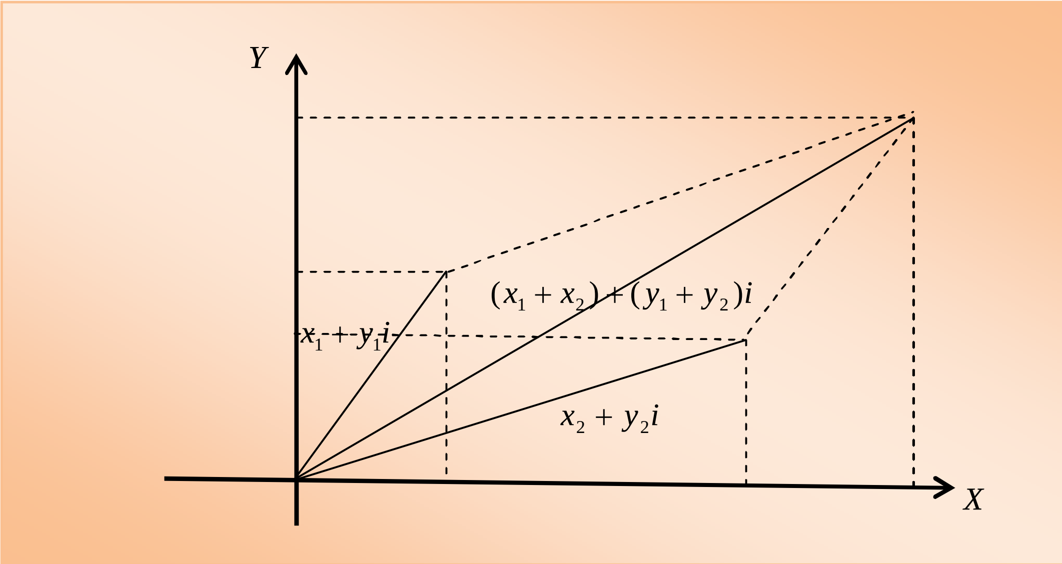
Karena suatu bilangan kompleks $z = a + bi$ dapat dianggap sebagai suatu pasangan berurut bilangan real, maka kita dapat menjumlahkan angka-angka yang ditunjukan oleh a, b yang terhubung pada bidang *kompleks atau argand diagram.* Bagi setiap bilangan kompleks disana bersesuaian atau berpasangan satu-satu pada titik didalam bidang, dan sebaliknya bagi masing-masing titik didalam bidang disana bersesuaian satu-satu pada satu bilangan kompleks. Oleh karena itu kita sering mengacu pada bilangan kompleks z sebagai titik z. Jarak antara dua bilangan $z_1 = x_1 + y_1 i$ dan $z_2 = x_2 + y_2 i$ didalam bidang komplek diberi oleh rumus:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



Gambar 7.2

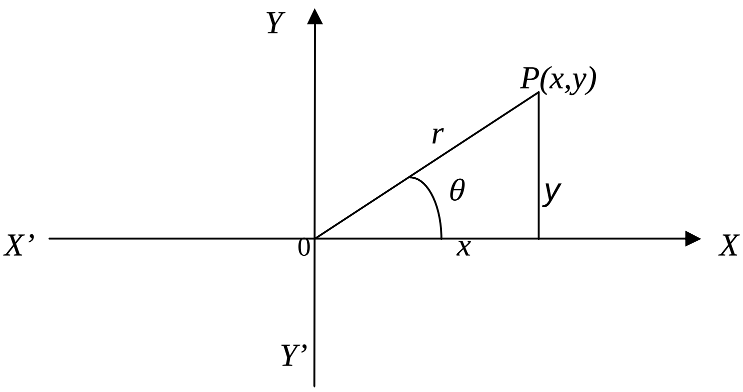
Misal $z_1 = x_1 + y_1 i$ dan $z_2 = x_2 + y_2 i$, maka jumlah keduanya dapat ditunjukkan oleh grafik dalam bidang komplek berikut



Gambar 7.3

7.5 Bentuk Polar Bilangan Komplek

Jika $P(x, y)$ adalah titik pada bidang komplek yang berkorepondensi dengan $z = x + yi$, seperti pada gambar berikut:



Gambar 7.4

diperoleh $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$ sehingga

$$z = x + yi = (r\cos\theta + r\sin\theta\; i) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (1)$$

Yang disebut bentuk polar dari bilangan kompleks, r dan θ disebut koordinat kutub *(polar)*. Kadang-kadang mudah untuk menulis singkatan *cis* θ untuk $\cos\theta + i\sin\theta$. Sehingga $z = x + yi = (r\cos\theta + r\sin\theta\ i) = r(\cos\theta + i\sin\theta) = rcis\theta$

Untuk setiap bilangan komplek $z \neq 0$ terdapat hanya satu nilai yang sesuai dengan θ untuk $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Namun, interval lain dari panjang 2π, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, dapat digunakan.

7.6 Teorema de Moivre

Jika $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ dan $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ kita dapat menunjukkan bahwa:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\} \qquad (2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\} \qquad (3)$$

Sebuah pernyataan dari (2) menyebabkan

$$z_1 z_2 \ldots\ldots z_n = r_1 r_2 \ldots\ldots r_n\{\cos(\theta_1 + \theta_2 \ldots\ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 \ldots\ldots + \theta_n)\} \qquad (4)$$

dan jika $z_1 = z_2 = \ldots\ldots\ldots = z_n = z$ ini menjadi

$$z^n = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad (5)$$

Yang sering disebut Teorema De Moivre

7.7 Akar Bilangan Komplek

Suatu bilangan w disebut akar ke-n dari bilangan kompleks z jika dan hanya jika $w^n = z$ atau dapat ditulis dalam bentuk $w = z^{\frac{1}{n}}$. Berdasarkan teorema De Moivre kita dapat menunjukkan bahwa jika n adalah bilangan bulat positif,

$$z^{1/n} = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{1/n}$$

$$= r^{1/n}\left\{\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right\} \quad k = 0,1,2, \ldots\ldots.., n-1 \qquad (6)$$

Berdasarkan hal tersebut harus dipenuhi syarat bahwa n adalah nilai yang berbeda untuk $z^{1/n}$, yaitu n akar yang berbeda dari z asalkan $z \neq 0$.

7.8 Rumus Euler

Menurut asumsi perluasan deret berhingga $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$ yang telah dibahasa dalam dari kalkulus elementer, jika $x = i\theta$, tmaka kita peroleh hasil

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad e = 2{,}71828 \qquad (7)$$

Bentuk di atas dinamakan rumus Euler yang sesuai ,bagaimanapun secara sederhana kita mendefinisikan $e^{i\theta}$. umumnya kita definisikan

$$e^x = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right) \qquad (8)$$

Misalnya untuk contoh dimana y = 0 turunan dari e^x

Dengan catatan bahwa bentuk dari (7) pada dasarnya turunan dari teorema De Moivre's untuk $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

7.9 Persamaan Pangkat Banyak

Sering dalam hal-hal praktis kita menemukan solusi persamaan pangkat banyak dengan bentuk umum :

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + ... + a_{n-1} z + a_n = 0 \qquad (9)$$

Dimana $a_0 \neq 0, a_1 ...., a_n$ adalah bilangan kompleks dan n pangkat positif di sebut persamaan berpangkat. Sebagaimana solusi juga disebut $z = 0$ dari pangkat banyak dar sebelah kiri (9) atau persamaan akar-akar.

Teorema ini sangat penting sehingga disebut teorema mendasar dari aljabar (dapat dibuktikan dalam bab 5) bahwa setiap persamaan polynomial dari bentuk (9) mempunyai satu akar kompleks. Dari ini kita menunjukkan bahwa mempunyai factor n dari akar-akar kompleks, beberapa atau semuanya yang mungkin sama.

Jika $z_1, z_2, z_3, ..., z_n$ dengan n akar-akar, dapat di tulis

$$a_0(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \ldots (z - z_n) = 0 \ldots\ldots \quad (10)$$

dan di sebut bentuk pemfaktoran dari persamaan pangkat banyak (*polynomial*), sebaliknya jika kita dapat menulis (9) pada bentuk (10) kita dapat menentukan determinan dan akar-akarnya dengan mudah.

7.10 Akar-akar dari n Unsur Satuan

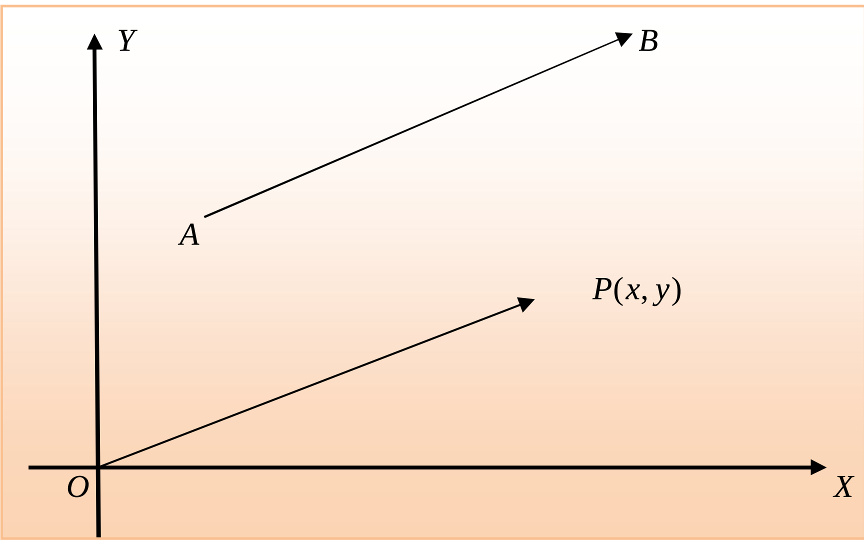
Selesaian dari persamaan $z^n = 1$ dimana n adalah bilangan bulat positif di sebut unit akar-akar ke-n dan di berikan oleh :

$$z = \frac{\cos 2k\pi}{n} + \frac{i \sin 2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi}{n}} \qquad k = 0,1,2,3,.....,n-1 \tag{11}$$

Misal jika $\omega = \frac{\cos\ 2k\pi}{n} + \frac{i\sin\ 2\pi}{n} = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, dimana n akar-akar dari 1, $\omega, \omega^2, ..., \omega^{n-1}$. secara geometri menunjukkan bahwa n vertical dari sbuah polygon teratur dimana di samping n di tuliskan pada sebuah lingkaran dari jarak satudengan pusat yang sebenarnya. Lingkaran ini mempunyai persamaan $|z| = 1$ dan sering di sebut lingkaran satuan.

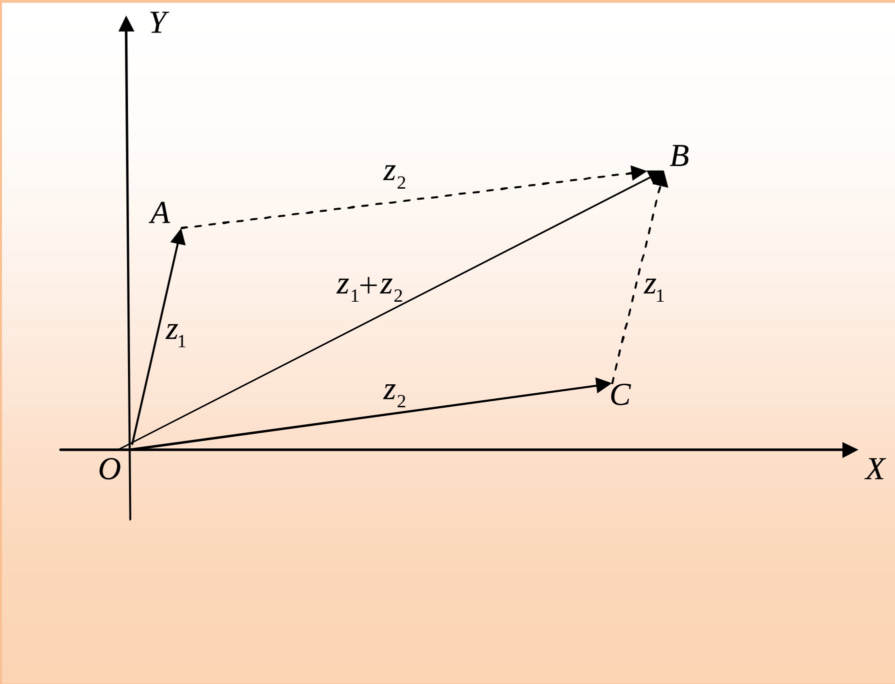
7.11 Interpretasi Vektor dari Bilangan Komplek

Suatu bilangan komplek $z = x + yi$ dapat dipandang sebagai vektor OP yang mempunyai titik asal di $O(0,0)$ dan titik terminalnya di titik $P(x, y)$ sebagaimana pada gambar 7.5. Kadang-kadang kita menyebut $OP = x + yi$ sebagi vektor posisi dari P. Dua vektor ini mempunyai panjang (*magnitude*) dan arah tetapi titik asalnya sedemikian sehingga OP dan AB dipandang sama. Dalam hal ini kita menuliskannya dalam bentuk $OA = AB = x + yi$.



Gambar 7.5

Jumlah dari bilangan komplek berkorespondensi dengan hokum jajarangenjang untuk penjumlahan verktor sebagaimana pada gambar berikut.



Gambar 7.6

Berdasarkan gambar 7.6 di atas jumlah dari dua bilangan komplek z_1 dan z_2 adalah jajarangenjang $OABC$ yang sisi-sisinya OA dan OC berkorepondensi dengan z_1 dan z_2. Diagonal parallelogram $OABC$ berkorespondensi dengan $z_1 + z_2$.

DAFTAR PUSTAKA

Martthen Kanginan dan Kustendi, T. 2001. *Matematika untuk SMU Kelas 3 Jilid 2A.* Bandung: Grafindo Media Pratama.

Marvin Marcus and Henryk Minc. 1971. *College Trigonometry*. Boston, USA: Houghton Miflin Company.

C.H Edwards, Jr and David Penney. 1982. Calculus and Analytic Geometry. New Jersey, USA: Prentice-Hall Inc Englewood.

Purcel, E.J. dan D. Verberg. 1986. *Kalkulus dan Geonetri Analitik I*. terjemahan I Nyoman Susila, Bana Kartasasmita dan Rawuh. Jakarta: Erlangga.

Mega Teguh W. 2004. *Trigonometri*. Jakarta: Bagian Proyek Pengembangan Kurikulum Direktorat Pendidikan Menengah Kejuruan, Direktorat Jendral Pendidikan Dasar dan Menengah. Departemen Pendidikan Nasional.

Murray R. Spiegel. 1981. *Theory and Problems of Complex Variabels with an Introduction to Comformal Mapping*. Singapore: Mcgraw-Hill International Company.

Erman Suherman dkk. 2003. *Strategi Pembelajaran Kontemporer*. Bandung: JICA-IMSTEP.

S. Sembiring. 1996. *Kumpulan Soal dan Pembahasan UMPTN 1992-1996 Rayon A, B, C.* Bandung: Ganesha Operation.

Sartono Wirodikromo. 2000. *Matematika 2000 untuk SMU Jilid 7 Kelas 3*. Jakarta: PT Erlangga.

Mustofa Usman, 1988. *Kumpulan Kuliah Trigonometri* untuk Program Sarjana dan Diploma Jurusan MIPA. Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Lampung.