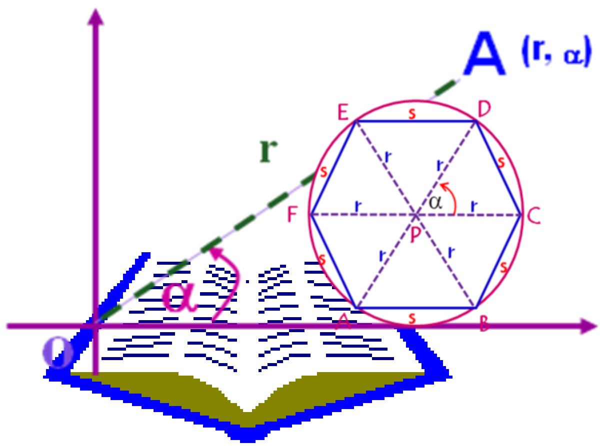
TRIGONOMETRI

Matematika

Kelas X



Disusun oleh :

Markus Yuniarto, S.Si

Tahun Pelajaran 2014 – 2015

SMA Santa Angela

Jl. Merdeka No. 24 Bandung

PENGANTAR :

Modul ini kami susun sebagai salah satu sumber belajar untuk siswa agar dapat dipelajari dengan lebih mudah. Kami menyajikan materi dalam modul ini berusaha mengacu pada pendekatan kontekstual dengan diharapkan matematika akan makin terasa kegunaannya dalam kehidupan sehari-hari.

STANDAR KOMPETENSI :

1. Menggunakan perbandingan fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri dalam pemecahan masalah.

KOMPETENSI DASAR :

1. Melakukan manipulasi aljabar dalam perhitungan teknis yang berkaitan dengan perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri.
2. Merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri.
3. Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri, dan penafsirannya.

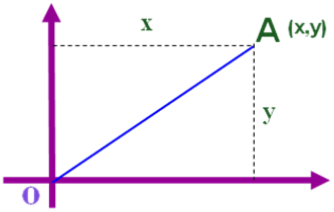
TUJUAN PEMBELAJARAN :

1. Siswa dapat menemukan nilai perbandingan trigonometri untuk suatu sudut,
2. siswa dapat menggunakan perbandingan trigonometri,
3. Menentukan nilai perbandingan trigonometri di berbagai kuadran,
4. Mengkonversikan koordinat cartesius dan kutub,
5. Menggunakan aturan sinus dan aturan cosinus,
6. Menentukan luas segitiga,
7. Menyelesaikan persamaan trigonometri,

TRIGONOMETRI

A. KOORDINAT KARTESIUS & KOORDINAT KUTUB

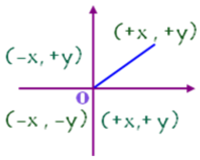
KOORDINAT KARTESIUS



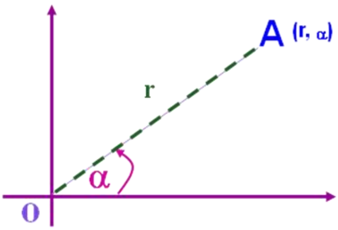
Suatu titik A dapat dinyatakan sebagai pasangan berurut A(x,y)

X : jarak titik A terhadap sumbu Y

y : jarak titik A terhadap sumbu X



KOORDINAT KUTUB



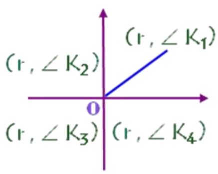
Suatu titik A dapat dinyatakan sebagai pasangan berurut A(r,α)

r : jarak titik A terhadap titik asal O (0,0)

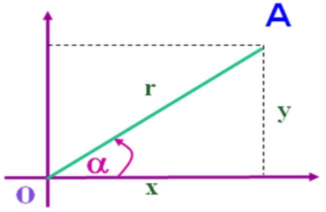
α : besar sudut antara sb-X (x positif) terhadap garis OA

Ingat !!

Besar sudut di berbagai kuadran



Hubungan Koordinat Kartesius & Koordinat Kutub :



1. **Jika diketahui Koordinat Kutub (r , α) :**

   Maka : $x = r.\cos\alpha$

   $y = r.\sin\alpha$

$\cos\alpha =$

$\sin\alpha =$

2. **Jika diketahui Koordinat Kartesius (x , y) :**

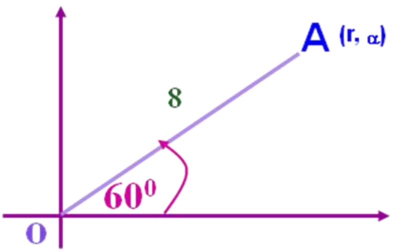
   Maka : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

   $\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$

Ingat Letak kuadran..

Contoh Soal :

Diketahui Koordinat Kutub :



Ubahlah ke Koordinat Kartesius :

Titik A (8,60⁰)

Maka : $x = r.\cos\alpha$

$y = r.\sin\alpha$

Jawab :

Titik A (8,60⁰) $\Rightarrow$

$$x = r.\cos\alpha \qquad y = r.\sin\alpha$$

$$= 8 . \cos 60^0 \qquad = 8. \sin 60^0$$

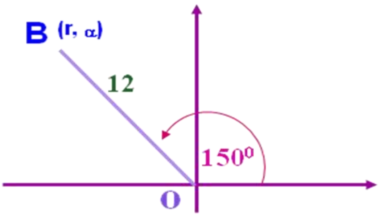
$$= 8 . \tfrac{1}{2} \qquad = 8. \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$x = 4 \qquad y = 4\sqrt{3}$$

Jadi A (8,60⁰) $\Leftrightarrow$ A (4, $4\sqrt{3}$)

Contoh Soal:

Diketahui Koordinat Kutub :



Titik A (12 , 150⁰)

Maka :	$x = r.\cos\alpha$
	$y = r.\sin\alpha$

Jawab :

Titik A (12, 150⁰) $\Rightarrow$

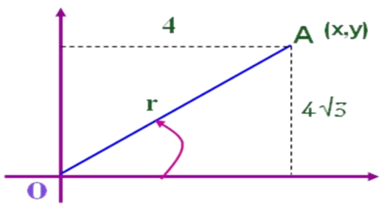
$$x = r.\cos\alpha = 12\,.\cos 150^0 = 12\,.-\cos 30^0 = 12\,.-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$x = -6\sqrt{3}$$

$$y = r.\sin\alpha = 12.\sin 150^0 = 12.\sin 30^0 = 12.\tfrac{1}{2}$$
$$y = 6$$

Jadi B (12,150⁰) $\Leftrightarrow$ B ($-6\sqrt{3}$, 6)

Contoh Soal:

Diketahui Koordinat Kartesius :



Ubahlah ke Koordinat Kutub :

Titik A (4, $4\sqrt{3}$)

Maka :	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
	$\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$

Jawab :

Titik A (4, $4\sqrt{3}$) $\Rightarrow$

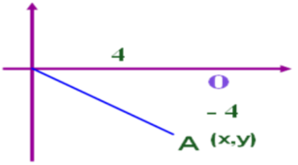
$$r = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2}$$
$$r = \sqrt{16 + 48}$$
$$r = \sqrt{64}$$
$$r = 8$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$
$$\tan\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{4}$$
$$\tan\alpha = \sqrt{3}$$
$$\alpha = 60^0$$

Jadi A(4, $4\sqrt{3}$) $\Leftrightarrow$ A (8,60⁰)

Contoh Soal:

Diketahui Koordinat Kartesius :



Titik A (4, – 4)

Maka : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\tan \alpha = \dfrac{y}{x}$

Jawab :

Titik A (4, – 4) $\Rightarrow$ $r = \sqrt{4^2 + 4^2}$

$r = \sqrt{32}$

$r = 4\sqrt{2}$

$\tan \alpha = \dfrac{y}{x}$

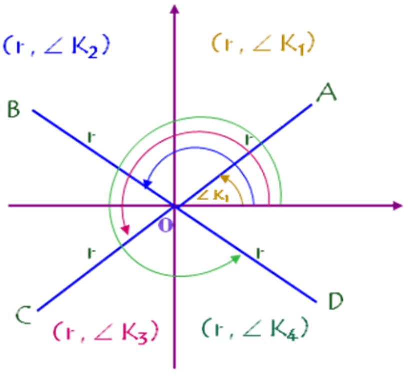
$\tan \alpha = \dfrac{-4}{4}$

$\tan \alpha = -1$

$\alpha = 315^\circ$

Jadi A(4, – 4) $\Leftrightarrow$ A ($4\sqrt{2}$, 315°)

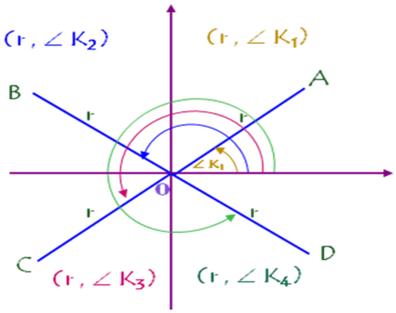
※ Yang Perlu diingat :



Koordinat Kartesius		Koordinat Kutub
I. A (X_+, y_+)	$\Rightarrow$	(r, $\angle K_1$)
II. B (X_-, y_+)	$\Rightarrow$	(r, $\angle K_2$)
III. C (X_-, y_-)	$\Rightarrow$	(r, $\angle K_3$)
IV. D (X_+, y_-)	$\Rightarrow$	(r, $\angle K_4$)

Ingat [2x] Lho...

※ Perhatikan contoh berikut :



Koordinat Kartesius		Koordinat Kutub
I. A(4 , 4)	$\Rightarrow$	$(4\sqrt{2}, 45^0)$
II. B(–4 , 4)	$\Rightarrow$	$(4\sqrt{2}, 135^0)$
III. C(–4 , –4)	$\Rightarrow$	$(4\sqrt{2}, 225^0)$
IV. D(4 , –4)	$\Rightarrow$	$(4\sqrt{2}, 315^0)$

Coba, Amati perbedaan sudutnya......

※ *Soal Latihan* :

1. Nyatakan koordinat kartesius dalam koordinat kutub:
   a. $(3\sqrt{3}, 3)$ b. $(-5, -5)$
   c. $(-2, 2\sqrt{3})$ d. $(1, -\sqrt{3})$
2. Nyatakan koordinat kutub dalam koordinat kartesius:
   a. $(8, 30^0)$ b. $(2, 120^0)$
   c. $(4, 240^0)$ d. $(20, 330^0)$

Kerjakan secara Teliti ....

B. PENGUKURAN SUDUT DENGAN UKURAN DERAJAT DAN RADIAN

1. Ukuran derajat

1 putaran = 360° ↔ 1° = $\frac{1}{360}$ putaran

$\frac{1}{2}$ putaran = 180° ↔ 1° = $\frac{1}{180}$ putaran

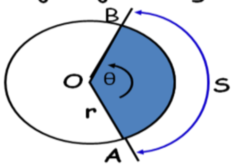
$\frac{1}{4}$ putaran = 90° ↔ 1° = $\frac{1}{90}$ putaran

1 derajat 60 menit, ditulis 1° =60′

1 menit = 60 detik, ditulis 1′ =60″

2. Ukuran radian

Lingkaran dengan pusat o diputar berlawanan arah jarum jam dari A ke B, diperoleh sudut θ. Besar sudut AOB dalam radian didefinisikan sebagai perbandingan antara pa jang busur AB dan jari-jari lingkaran :



$$\angle AOB = \left(\frac{panjang\ busur\ AB}{jari - jari\ r} \right) radian$$

atau

$$\theta = \left(\frac{S}{r} \right) radian$$

Dimana :

$$1\ rad = 1^c = \frac{180^o}{\pi} \approx 57{,}3^o \approx 57^o 18'$$

Luas juring :

$$\frac{Luas\ juring\ AOB}{Luas\ lingkaran} = \frac{Panjang\ busur\ AB}{Keliling\ lingkaran}$$

$$\frac{Luas\ juring\ AOB}{\pi r^2} = \frac{S}{2\pi r}$$

$$Luas\ juring\ AOB = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

Ingat:

π *radian sering ditulis* π^c

dan bedakan $\pi = 3{,}14$ *atau* $\pi = \frac{22}{7}$

Ingat[2x] Lho...

Ex. 1. Nyatakanlah :

a. 1,76 radian dalam ukuran derajat.

$$1^c = \frac{180^o}{\pi}, maka:$$

$$1{,}76^c = 1{,}76 \times \frac{180^o}{\pi}$$

$$= 100{,}8^o$$

b. 30^0 dalam ukuran radian.

$$1^c = \frac{180^o}{\pi}, \text{ maka :}$$

$$30^o = \left(30 \times \frac{\pi}{180}\right)^c$$

$$= \frac{1}{6}\pi^c$$

$$= 0{,}523$$

Ex.2. Jika panjang suatu busur 12 cm dan bersudut 20^0.Tentukan panjang jari-jarinya.

Berdasarkan rumus $\theta = \frac{S}{r}$ *radian*, maka $r = \frac{S}{\theta^c}$

Diketahui S = 12 cm dan Θ = 20^0. maka harus diubah dulu Θ dalam radian,sehingga :

$$\theta = 20^o \Rightarrow \theta^c = \frac{\pi}{180^o} \times 20^o$$

$$\theta^c = \frac{\pi}{9}$$

Sehingga :

$$r = \frac{S}{\theta}$$

$$r = \frac{12(9)}{\pi} = \frac{108}{3{,}14} = 34{,}4 \text{ cm}$$

Ex.3. Diberikan jari-jari juring 10 cm dan Panjang busur 14 cm, hitunglah :

a. Sudut juring (dalam radian)

b. Luas jurung

Jawab :

a. $$\text{sudut juring} = \frac{\text{panjang busur}}{\text{jari} - \text{jari juring}} \text{radian}$$

$$= \frac{14}{10} \text{radian}$$

$$= 1{,}4 \text{ radian}$$

b. $$\text{Luas juring} = \frac{1}{2} r.S$$

$$= \frac{1}{2}.10.14$$

$$= 70 \text{ cm}^2$$

Ex.4.

a. Diketahui diameter sebuah lingkaran adalah 20 cm dan sudut juring 30^0. Carilah luas juring!

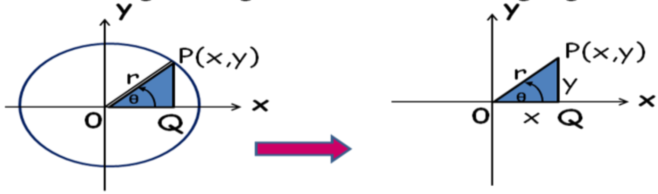
b. Hitunglah luas juring jika :

i. Sudut juring 2/3 π dan jari-jari 12 cm.

ii. Panjang busRsr 30 cm dan jari-jari 16 cm.

C. PERBANDINGAN TRIGONOMETRI

1. Perbandingan Trigonometri dalam Segitiga siku-siku



Dari gambar diatas dapat dirumuskan ;

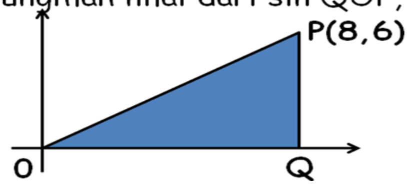
$OP^2 = OQ^2 + PQ^2$		$r^2 = x^2 + y^2$
$OQ^2 = OP^2 - PQ^2$	ATAU	$x^2 = r^2 - y^2$
$PQ^2 = OP^2 - OQ^2$		$y^2 = r^2 - x^2$

Sehingga formula dasar :

$\sin\theta = \frac{De}{Mi} = \frac{y}{x}$	$\mathrm{cosec}\ \theta = \frac{Mi}{De} = \frac{r}{y}$	$\mathrm{cosec}\ \theta = \frac{1}{\sin\theta}$
$\cos\theta = \frac{Sa}{Mi} = \frac{x}{r}$	$\sec\theta = \frac{Mi}{Sa} = \frac{r}{x}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$
$\tan\theta = \frac{De}{Sa} = \frac{y}{x}$	$\cot\theta = \frac{Sa}{De} = \frac{x}{y}$	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

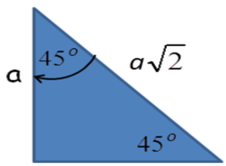
Ex. 5. Diberikan $\sin\theta = \frac{5}{13}$ hitunglah : cos θ, tan θ, sec θ, dan cot θ

Ex. 6. Pada gambar di bawah ini, diketahui titik P(8,6). Hitunghlah nilai dari sin QOP, cos QOP dan tan QOP.



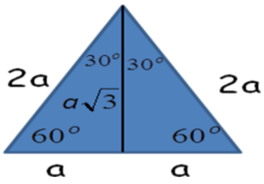
2. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut Istimewa

a. Untuk sudut 45^0



Perbandingan sisi :
De : Sa : Mi = 1 : 1 : $\sqrt{2}$

b. Untuk sudut 30° dan 60°



Perbandingan sisi : 30°
De : Sa : Mi = 1 : $\sqrt{3}$: 2

Perbandingan sisi : 60°
De : Sa : Mi = $\sqrt{3}$: 1: 2

c. Untuk sudut 0° dan 90°

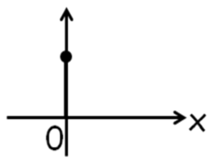
x = 1
y = 0
r = 1

Perbandingan trigonometri :

$$\sin 0^o = \frac{y}{r} = 0$$

$$\cos 0^o = \frac{x}{r} = 1$$

$$\tan 0^o = \frac{y}{x} = 0$$



x = 0
y = 1
r = 1

Perbandingan trigonometri :

$$\sin 90^o = \frac{y}{r} = 1$$

$$\cos 90^o = \frac{x}{r} = 0$$

$$\tan 90^o = \frac{y}{x} = \infty$$

Sehingga dapat disimpulkan :

θ	sin θ	cos θ	tan θ	cosec θ	sec θ	cot θ
0°	0	1	0	∞	1	∞
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
90°	1	0	∞	1	∞	0

Harus diingaaaatt.......tttt

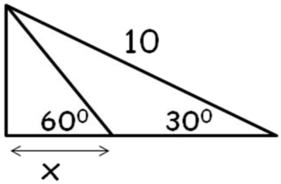
Ex. 7. Hitunglah :

a. $\dfrac{\sin^2 45^o}{\cos 0^o} - \dfrac{\sin 90^o}{\cos^2 30^o} + \tan^2 60^o$

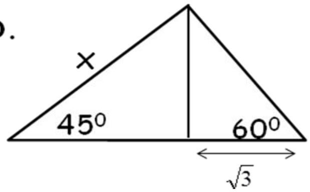
b. $\dfrac{\sin 60^o \times \cos 60^o \times \tan 60^o}{\sin 45^o \times \cos 45^o \times \tan 45^o}$

Ex. 8. Hitunglah nilai x :

a.



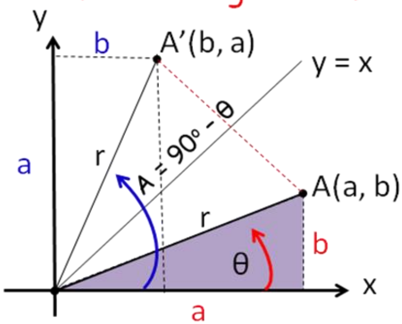
b.



D. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut Berelasi

1. Kuadran I

a. Relasi θ dengan A = 90° - θ



Sehingga :

Untuk A(a, b) dan θ

1. $\sin\ \theta = \dfrac{b}{r}$
2. $\cos\ \theta = \dfrac{a}{r}$
3. $\tan\ \theta = \dfrac{b}{a}$
4. $\text{cosec}\ \theta = \dfrac{r}{b}$
5. $\sec\ \theta = \dfrac{r}{a}$
6. $\cot\ \theta = \dfrac{b}{r}$

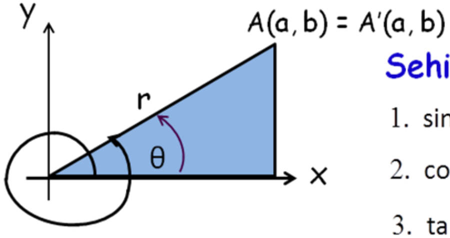
Untuk A'(a, b) dan A = 90° - θ

1. $\sin\ (90^o - \theta) = \dfrac{a}{r}$
2. $\cos\ (90^o - \theta) = \dfrac{b}{r}$
3. $\tan\ (90^o - \theta) = \dfrac{a}{b}$
4. $\text{cosec}\ (90^o - \theta) = \dfrac{r}{a}$
5. $\sec\ (90^o - \theta) = \dfrac{r}{b}$
6. $\cot\ (90^o - \theta) = \dfrac{b}{a}$

Kesimpulan :

1. $\sin\left(90^\circ - \theta\right) = \cos\theta$
2. $\cos\left(90^\circ - \theta\right) = \sin\theta$
3. $\tan\left(90^\circ - \theta\right) = \cot\theta$
4. $\operatorname{cosec}\left(90^o - \theta\right) = \sec\theta$
5. $\sec\left(90^\circ - \theta\right) = \operatorname{cosec}\theta$
6. $\cot\left(90^\circ - \theta\right) = \tan\theta$

b. Relasi θ dengan A = 90° - θ



Sehingga dapat diperoleh :

1. $\sin\left(360^o + \theta\right) = \sin\theta$
2. $\cos\left(360^o + \theta\right) = \cos\theta$
3. $\tan\left(360^o + \theta\right) = \tan\theta$
4. $\operatorname{cosec}\left(360^o + \theta\right) = \operatorname{cosec}\theta$
5. $\sec\left(360^o + \theta\right) = \sec\theta$
6. $\cot\left(360^o + \theta\right) = \cot\theta$

Aah.... Masih gampang diapalin..

2. Kuadran II

a. Relasi θ dengan A = 90° + θ

1. $\sin\left(90^\circ + \theta\right) = \cos\theta$
2. $\cos\left(90^\circ + \theta\right) = -\sin\theta$
3. $\tan\left(90^\circ + \theta\right) = -\cot\theta$
4. $\operatorname{cosec}\left(90^o + \theta\right) = \sec\theta$
5. $\sec\left(90^\circ + \theta\right) = -\operatorname{cosec}\theta$
6. $\cot\left(90^\circ + \theta\right) = -\tan\theta$

b. Relasi θ dengan A = 180° - θ

1. $\sin\left(180^\circ - \theta\right) = \sin\theta$
2. $\cos\left(180^\circ - \theta\right) = -\cos\theta$
3. $\tan\left(180^\circ - \theta\right) = -\tan\theta$
4. $\operatorname{cosec}\left(180^o - \theta\right) = \operatorname{cosec}\theta$
5. $\sec\left(180^\circ - \theta\right) =$ -$\sec\theta$
6. $\cot\left(180^\circ - \theta\right) = -\cot\theta$

Ex. 9. Tentukan nilai yang setara dengan :

a. cos 150° = cos (90° + 60°) = - sin 60° = $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

b. sin 150° = sin (180° - 30°) = sin 30° = $\frac{1}{2}$

c. sec 120° = sec (180° - 60°) = sec 60° = 2

d. cos 390° = cos (360° +30°) = cos 30° = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

e. sec 420° = sec (360° +60°) = sec 60° = 2

f. tan 405° = tan (360° + 45°) = tan 60° = 1

3. Kuadran III

a. Relasi θ dengan A = 180° + θ

1. $\sin\left(180^\circ + \theta\right) = -\sin\theta$
2. $\cos\left(180^\circ + \theta\right) = -\cos\theta$
3. $\tan\left(180^\circ + \theta\right) = \tan\theta$
4. $\operatorname{cosec}\left(180^o + \theta\right) = -\operatorname{cosec}\theta$
5. $\sec\left(180^\circ + \theta\right) = -\sec\theta$
6. $\cot\left(180^\circ + \theta\right) = \cot\theta$

b. Relasi θ dengan A = 270° - θ

1. $\sin\left(270^\circ - \theta\right) = -\cos\theta$
2. $\cos\left(270^\circ - \theta\right) = -\sin\theta$
3. $\tan\left(270^\circ - \theta\right) = \cot\theta$
4. $\operatorname{cosec}\left(270^o - \theta\right) = -\sec\theta$
5. $\sec\left(270^\circ - \theta\right) = -\operatorname{cosec}\theta$
6. $\cot\left(270^\circ - \theta\right) = \tan\theta$

4. Kuadran IV

a. Relasi θ dengan A = 270° + θ

1. $\sin\left(270^\circ + \theta\right) = -\cos\theta$
2. $\cos\left(270^\circ + \theta\right) = \sin\theta$
3. $\tan\left(270^\circ + \theta\right) = -\cot\theta$
4. $\operatorname{cosec}\left(270^o + \theta\right) = -\sec\theta$
5. $\sec\left(270^\circ + \theta\right) = \operatorname{cosec}\theta$
6. $\cot\left(270^\circ + \theta\right) = -\tan\theta$

b. Relasi θ dengan A = 360° - θ

1. $\sin\left(360^\circ - \theta\right) = -\sin\theta$
2. $\cos\left(360^\circ - \theta\right) = \cos\theta$
3. $\tan\left(360^\circ - \theta\right) = -\tan\theta$
4. $\operatorname{cosec}\left(360^o - \theta\right) = -\operatorname{cosec}\theta$
5. $\sec\left(360^\circ - \theta\right) = \sec\theta$
6. $\cot\left(360^\circ - \theta\right) = -\cot\theta$

Ex. 10. Tentukan nilai yang setara dengan :

a. sin 210° = sin (180° + 30°) = - sin 30° = $-\frac{1}{2}$

b. tan 225° = tan (270° - 45°) = cot 45° = 1

c. sin 300° = sin (360° - 60°) = - sin 60° = $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Ex. 11. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan :

Sin (10° – 3x) = cos (2x + 60°)

Cara 1. mengubah ruas kanan :

Sin (10° – 3x) = cos (90° – (2x + 60°))

Sin (10° – 3x) = sin (90° – 2x - 60°)

Sin (10° – 3x) = sin (30° – 2x)

10° – 3x = 30° – 2x

-3x + 2x = 30° – 10°

x = -20°

Cara 2. mengubah ruas kiri :

$$\sin(90^\circ - (80^\circ + 3x)) = \cos(2x + 60^\circ)$$
$$\sin(80^\circ + 3x) = \cos(2x + 60^\circ)$$
$$80^\circ + 3x = 2x + 60^\circ$$
$$x = -20^\circ$$

Ex. 12. Tentukan nilai dari :

a. $\dfrac{\sin 135^\circ . \cos 210^\circ . \tan 45^\circ}{\cos 135^\circ . \sin 120^\circ . \cot 315^\circ}$

c. $\cos 780^o + \sin 480^o$

b. $\dfrac{\tan 57^\circ}{\cot 33^\circ}$

d. $\dfrac{\sin 75^\circ . \cos 280^\circ . \tan 135^\circ}{\cos 345^\circ . \sin 190^\circ . \cot 225^\circ}$

Ex. 13. Jika $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ dan $\dfrac{3}{2}\pi < x < 2\pi$, maka nilai cosec x :

E. Identitas Trigoometri

1. $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$
2. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$
3. $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$
4. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
5. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
6. $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$
7. $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
8. $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

Ex. 13. Buktikan bahwa :

a. $\dfrac{\sec A \,.\, \cos A}{\tan A} = \cot A$

Bukti :

$$\frac{\sec A \,.\, \cos A}{\tan A} = \frac{\frac{1}{\cos A}.\cos A}{\tan A} = \frac{1}{\tan A} = \cot A$$

b. $\tan A = \tan A.\operatorname{cosec}^2 A - \cot A$

Bukti :

$$\begin{aligned}
\tan A.\operatorname{cosec}^2 A - \cot A &= \tan A(1+\cot^2 A) - \cot A \\
&= \tan A + \tan A.\cot^2 A - \cot A \\
&= \tan A + \tan A.\frac{1}{\tan^2 A} - \cot A \\
&= \tan A + \cot A - \cot A \\
&= \tan A
\end{aligned}$$

c. $\sec^4 p - \tan^4 p = \sec^2 p + \tan^2 p$

Bukti :

$$\begin{aligned}
\sec^4 p - \tan^4 p &= (\sec^2 p + \tan^2 p)(\sec^2 p - \tan^2 p) \\
&= (\sec^2 p + \tan^2 p)(\tan^2 p + 1 - \tan^2 p) \\
&= \sec^2 p + \tan^2 p
\end{aligned}$$

Ex. 14. Diketahui $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$ **hitunglah :**

a. $\sin\alpha.\cos\alpha$

$\sin\alpha + \cos\alpha = 1 \Rightarrow (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1^2$

Maka :

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha.\cos\alpha &= 1^2 \\
1 + 2\sin\alpha.\cos\alpha &= 1 \\
2\sin\alpha.\cos\alpha &= 0 \\
\sin\alpha.\cos\alpha &= 0
\end{aligned}$$

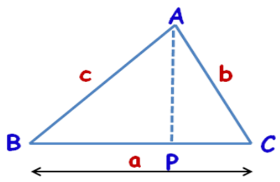
b. $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$

$\boxed{NB : x^3 + y^3 = (x+y)(x^2+y^2-xy)}$

$$\begin{aligned}
&= (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin\alpha.\cos\alpha) \\
&= (\sin\alpha + \cos\alpha)(1 - \sin\alpha.\cos\alpha) \\
&= 1(1-1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

F. Rumus Segitiga

1. Aturan Sinus



Perhatikan gambar tsb, Sudut lancip C,

Pada △ ACP; AP = AC sin C = b sin C

Pada △ ABP; AP = AB sin B = c sin B

Sehingga : $b \sin C = c \sin B$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Maka : $$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$

Ex. 15. Diketahui ΔABC dengan panjang sisi b = 6 cm, sudut B = 70° dan sudut C = 80° .
Tentukan panjang sisi a dan c.

Aturan sinus : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ $\quad \angle A = 180^o - (70^o + 80^o) = 30^o$

Cari panjang a :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{a}{\sin 30^o} = \frac{6}{\sin 70^o}$$

$$a = \frac{6}{\sin 70^o}.\sin 30^o$$

$$a = \frac{6}{0{,}94}.(0{,}5)$$

$$a = 3{,}19 \text{ cm}$$

Cari panjang c :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{6}{\sin 70^o} = \frac{c}{\sin 80^o}$$

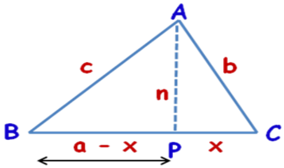
$$c = \frac{6}{\sin 70^o}.\sin 80^o$$

$$c = \frac{6}{0{,}94}.(0{,}95)$$

$$c = 6{,}07 \text{ cm}$$

Ex. 16. Diketahui ΔABC dengan panjang sisi b = 15 cm, a = 10 cm dan sudut B = 100° .
Tentukan besar susut A dan sudut C.

2. Aturan Kosinus



(i)

AP tegak lurus BC

Misal AP = n dan PC = x

Pada Δ ACP maka :

$AC^2 = AP^2 + PC^2$

$b^2 = n^2 + x^2$ ....(1)

Pada Δ ABP maka :

$AB^2 = AP^2 + BP^2$

$c^2 = n^2 + (a - x)^2$

$c^2 = n^2 + a^2 - 2ax + x^2$

$c^2 = a^2 + (n^2 + x^2) - 2ax$ ....(1)

Pers (1) dan (2) diperoleh :

$c^2 = a^2 + (n^2 + x^2) - 2ax$

$= a^2 + b^2 - 2ax$

$= a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Dengan x = PC = AC cos C

= b cos C

Dengan cara yang sama diperoleh :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

Ex. 17. Diketahui ΔABC dengan panjang 7 cm, 8 cm, dan 9 cm. Tentukan besar sudut di hadapan sisi 7 cm dan 9 cm.

Misal a = 7 cm, b = 8 cm dan c = 9 cm

Maka :

Cari sudut A :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$7^2 = 8^2 + 9^2 - 2(8)(9) \cos A$

$49 = 64 + 81 - 144 \cos A$

$144 \cos A = 96$

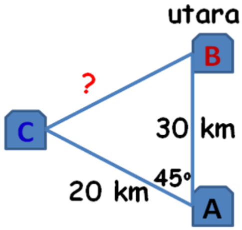
$\cos A = 0,667$

$A = 48,1^\circ$

Cari sudut C :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$
$$9^2 = 7^2 + 8^2 - 2(7)(8) \cos C$$
$$81 = 49 + 64 - 112 \cos A$$
$$112 \cos A = 32$$
$$\cos A = 0{,}286$$
$$A = 73{,}4^{\circ}$$

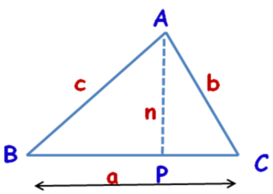
Ex. 18. Pulau B terletak 30 km di sebelah utara pulau A dan pulau C letaknya 20 km di sebelah barat laut dari pulau A. Tentukan jarak antara pulau B dan C.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$a^2 = 20^2 + 30^2 - 2(20)(30) \cos 45$$
$$a^2 = 400 + 900 - 1200(0{,}707)$$
$$a^2 = 400 + 900 - 848{,}4$$
$$a^2 = 451{,}6$$
$$a = 21{,}25 \text{ km}$$

3. Luas Segitiga

a. Jika diketahui dua sisi dan satu sudut



Perhatikan gambar disamping :

AP = AC sin C = b sin C

Maka :

$$\text{Luas } \Delta \text{ ABC} = \frac{1}{2}.alas.tinggi$$
$$= \frac{1}{2} BC.AP$$
$$= \frac{1}{2} ab.\sin C$$

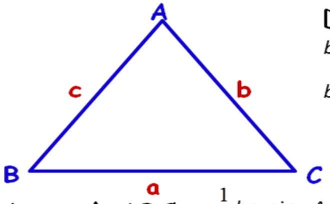
Dengan cara yang sama diperoleh :

$$\text{Luas } \Delta\, ABC = \frac{1}{2} ab.\sin C$$
$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} ac.\sin B$$
$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} bc.\sin A$$

Ex. 19. Tentukan luas Δ ABC jika sudut A = 30°, Panjang b = 4 cm dan panjang c = 15 cm.

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}4(15).\sin 30^o = \frac{1}{2}.4(15)\left(\frac{1}{2}\right) = 15 \text{ cm}^2$$

b. Jika diketahui dua sudut dan satu sisi



Dengan aturan sinus :

$$b \sin A = a \sin B$$

$$b = \frac{a.\sin B}{\sin A} \quad \text{dan} \quad c = \frac{a.\sin C}{\sin A}$$

Maka :

$$\text{Luas } \Delta \text{ ABC} = \frac{1}{2}bc.\sin A$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a.\sin B}{\sin A}\right)\left(\frac{a.\sin C}{\sin A}\right).\sin A$$

$$= \frac{1}{2}\frac{a^2 \sin B.\sin C}{\sin A}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{a^2 \sin B.\sin C}{\sin[180^o - (B+C)]}$$

$$= \frac{a^2.\sin B.\sin C}{2.\sin(B+C)}$$

Dengan cara yang sama diperoleh :

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{a^2.\sin B.\sin C}{2.\sin(B+C)}$$

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{b^2.\sin A.\sin C}{2.\sin(A+C)}$$

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{c^2.\sin A.\sin B}{2.\sin(A+B)}$$

Ex. 20. Tentukan luas Δ ABC jika panjang a = 16, $\angle B = 30^o$ *dan* $\angle C = 60^o$

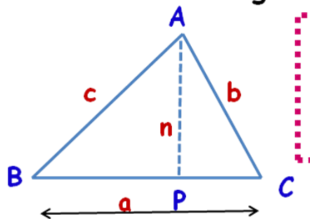
$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{a^2.\sin B.\sin C}{2.\sin(B+C)}$$

$$= \frac{16^2.\sin 30^o.\sin 60^o}{2.\sin(30^o + 60^o)}$$

$$= \frac{256\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}{2(1)}$$

$$= 32\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

c. Jika diketahui ketiga sisi



$$\text{Luas } \Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$dengan \ s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

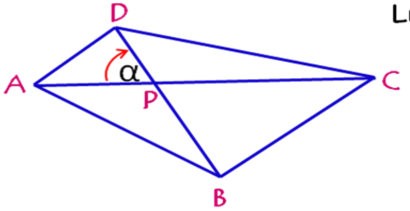
Ex. 21. Tentukan luas Δ ABC jika panjang a = 3 cm, b = 4 cm,dan c = 5 cm.

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$$
$$s=\frac{1}{2}(3+4+5)$$
$$s=6$$

Maka :
$$\text{Luas } \Delta ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$=\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}$$
$$=\sqrt{6(3)(2)(1)}$$
$$=\sqrt{36}$$
$$=6\ \text{cm}^2$$

G. Luas Segi Empat dan Segi Banyak

1. Segi Empat



Dari gambar tersebut kita dapat mencari :

Luas Δ ACD=luas ΔAPD + luas ΔDPC

$$=\frac{1}{2}.DP.AP.\sin\alpha+\frac{1}{2}.DP.CP.\sin(180^\circ-\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}.DP.AP.\sin\alpha+\frac{1}{2}.DP.CP.\sin\alpha$$
$$=\frac{1}{2}.DP.(AP+CP).\sin\alpha$$
$$=\frac{1}{2}.DP.AC.\sin\alpha$$

Dengan cara yang sama diperoleh :

Luas ΔABC = $\frac{1}{2}.BP.AC.\sin\alpha$

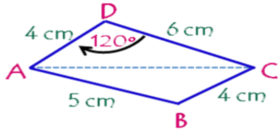
Sehingga : **Luas ABCD = Luas Δ ACD + Luas Δ ACB**

$$=\frac{1}{2}.DP.AC.\sin\alpha+\frac{1}{2}.BP.AC.\sin\alpha$$
$$=\frac{1}{2}.AC(DP+BP).\sin\alpha$$
$$\boxed{=\frac{1}{2}.AC.BD.\sin\alpha}$$

Ex. 22. Tentukan luas segi empat ABCD jika panjang diagonal AC = 10 cm, BD = 8 cm, dan sudut yang dibentuk oleh AC dan BD adalah 60°

Luas ABCD $=\frac{1}{2}.AC.BD.\sin\alpha$
$$=\frac{1}{2}.10.8.\sin 60^o$$
$$=\frac{1}{2}.10.8.\frac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$=20\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Ex. 23. Tentukan luas ABCD jika panjang AB = 5 cm, BC = 4 cm, CD = 6 cm, dan DA = 4 cm dan sudut A = 120°.



Cari $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2.AD.CD.\cos D$

$= 4^2 + 6^2 - 2(4).(6).\cos 120°$

$= 16 + 36 - 48(-0,5)$

$= 52 + 24$

$= 76$

Cari sudut B :

$\cos B = \dfrac{5^2 + 4^2 - 76}{2(5)(4)}$

$\cos B = \dfrac{25 + 16 - 76}{40}$

$\cos B = -\dfrac{35}{40}$

$\cos B = -0,875$

$B = 29°$

$B = 151°$

Maka :

Luas Δ ACD $= \frac{1}{2}.6.4.\sin 120°$

$= \frac{1}{2}.6.4.\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$= 6\sqrt{3} = 10,39 \text{ cm}^2$

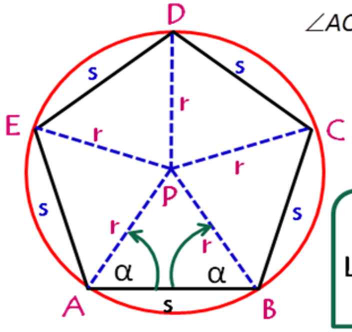
Luas Δ ABC $= \frac{1}{2}.5.4.\sin 151°$

$= \frac{1}{2}.5.4.(0,48)$

$= 4,8 \text{ cm}^2$

Jadi Luas ABCD
= 10,39 + 4,8
=15,19 cm²

2. Segi Lima Beraturan



$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOA = \dfrac{360°}{5} = 72°$

Luas $\Delta AOB = \dfrac{1}{2}.r.r.\sin 72°$

$= \dfrac{1}{2}.r^2.\sin 72°$

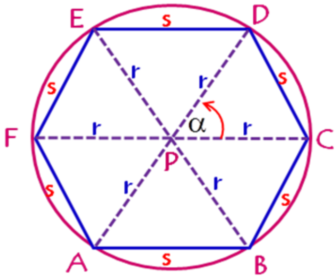
Maka :

Luas segi lima beraturan BCDE = $\dfrac{5}{2}.r^2.\sin 72°$

Atau jika diketahui panjang s = sisi segitiga

Luas segi lima beraturan BCDE = $\dfrac{5.s^2.\sin 54°}{2.\sin 108°}$

3. Segi Enam Beraturan



$$\alpha = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$$\text{Luas } \Delta ABP = \frac{1}{2}.r^2.\sin 60^2$$

Maka :

$$\text{Luas segi enam beraturan} = \frac{6}{2}.r^2.\sin 60^\circ$$
$$= 3.r^2.\sin 60^\circ$$

Atau jika diketahui s = panjang sisi:

$$\text{Luas segi enam beraturan BCDE} = \frac{6.s^2.\sin 60^\circ}{2.\sin 120^\circ}. = \frac{3.s^2 \sin^2 60^\circ}{\sin 120^\circ}$$

4. Segi n beraturan

Dari kedua rumus segi lima dan segi enam beraturan,

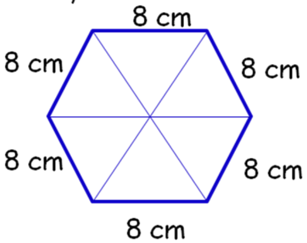
$$\text{Luas segi lima beraturan} = \frac{5}{2}.r^2.\sin 72^o$$

$$\text{Luas segi enam beraturan} = \frac{6}{2}.r^2.\sin 60^\circ$$

Maka untuk segi n :

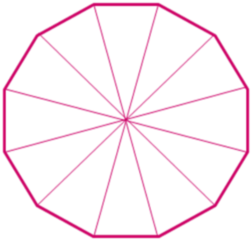
$$\boxed{\text{Luas segi n} = \frac{n}{2}.r^2.\sin \frac{360^\circ}{n}}$$

Ex. 24. Tentukan luas segi enam dengan panjang sisi luarnya 8 cm.



$$\text{Luas segi enam} = \frac{3.s^2 \sin^2 60^\circ}{\sin 120^\circ}$$
$$= \frac{3.8^2.\sin^2 60^\circ}{\sin 120^\circ}$$
$$= \frac{3.(64).\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$
$$= 96\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Ex. 25. Tentukan luas segi 12 dengan panjang jari-jari lingkaran luarnya 8 cm.



$$\text{Luas segi n} = \frac{n}{2}.r^2.\sin\ \frac{360°}{n}$$

$$\text{Luas segi } 12 = \frac{12}{2}.8^2.\sin\ \frac{360°}{12}$$

$$= 6.(64).\sin\ 30°$$

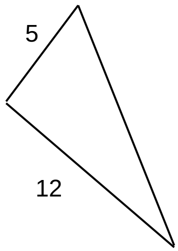
$$= 6(64).\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 192\ \text{cm}^2$$

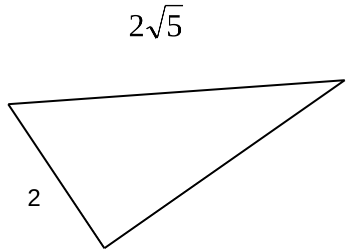
LATIHAN

1. Tentukan nilai-nilai perbandingan trigonometri sudut α pada tiap gambar berikut :

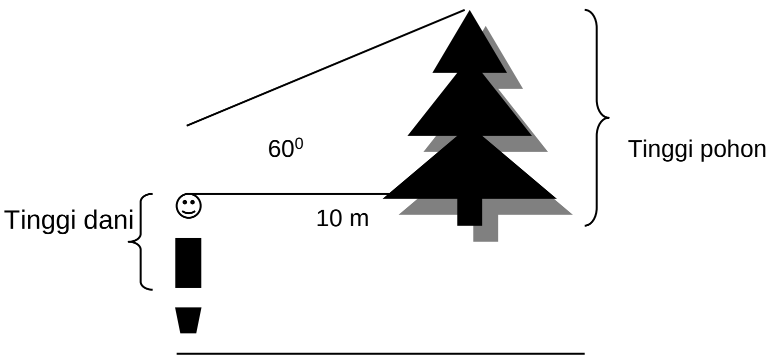
   a.



   b.



2. Jika p sudut lancip, tentukan nilai perbandingan trigonometri sudut p yang lain, jika salah satu nilai perbandingan trigonometri sudut diketahui.
   a. Cos p = 0,8
   b. Cotg p = 2
3. Tentukan nilai dari :
   a. Sin 60^0 cotg 60^0 + sec 45^0 cos 45^0
   b. Tan 30^0 + cos 30^0
   c. 2 sin 60^0 cos 45^0
4. Dani ingin menentukan tinggi pohon, pada jarak 10 m dari pohondengan sudut pandang 60^0, seperti gambar berikut. Tentukan tinggi pohon tersebut. (tinggi dani 155 cm)



5. Ubahlah ke sudut lancip, kemudian tentukan nilainya :
   a. Cos 330^0
   b. Tan (-120^0)
   c. Sin 450^0
6. Tentukan nilai dari :
   a. Sin 300^0 + Cos 545^0
   b. Cos 390^0 + Sec 570^0
   c. Cotg 750^0 + Tan (-60^0)
7. Sederhanakan
   a. $\dfrac{\cos(270-p)}{Sin(360-p)}$

   b. $\dfrac{\cos(90+p)}{Sin(180-p)}$

   c. $\dfrac{\cos 120^0 . Tan 225^0 . Co\sec 240^0}{Cos 210^0 . Sec 300^0}$

8. Tentukan nilaidari :

   a. $\dfrac{Sin(270+p).Sin(180-p)}{Cos(90-p).Cos(180-p)} = 1$

   b. $\dfrac{Cos(180+p).Sec(360-p)}{Cotg(180-p).Cotg(90-p)} = -1$

9. Hitunglah luas segitiga PQR, Jika diketahui p = 9 cm, r = 6 cm, $\angle P = 46^0$
10. ABCD merupakan jajaran genjang dengan AB = 10 cm, AD = 6 cm, dan AC = 14 cm. Hitung besar sudut B
11. Dua buah kapal meninggalkan pelabuhan dalam waktu yang bersamaan. Kapal petama berlayar dengan arah 040^0 dan kecepatan 80 km/jam, sedangkan kapal kedua berlayar dengan arah 100^0 dengan kecepatan 90 km/jam. Berapa jarak kedua kapal tersebut setelah berlayar selama 5 jam.

12. Hitunglah luas segienam beraturan yang dilukiskan pada sebuah lingkaran yang jari-jarinya 10 cm dan berpusat di O.
13. Dalam jajaran genjang ABCD diketahui AB = 10 cm, AD = 8 cm, BD = 12 cm. Hitunglah luas jajaran genjang tersebut.

Daftar Pustaka

Suwah,Sembiring.2012.Matematika X.Penerbit Yrama Widya,Erlangga.

Djumanta,Wahyudin.2008.Matematika X.Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional

Sukino.Matematika X. Jakarta : Penerbit erlangga

"Semoga sukses.......

Tuhan memberkati"